DAI01 GUNČAGA, J: Limitné procesy v školskej matematike. Dizertačná práca, FPV UKF Nitra, 2004

Obhájená na FPV UKF Nitra 11. 11. 2004

Obsah

Kapitola 1

Súčasný stav problematiky v školskej matematike

1.1 Pedagogické východiská

Limitné procesy patria k pomerne náročným častiam školskej, najmä gymnaziálnej matematiky. V súčasnosti sa obvykle vyučujú podľa učebníc [36], [37], [76].

P. Bero a M. Hejný v [9] upozorňujú na častú konfrontáciu medzi kalkulatívnym a teoretickým prístupom, ktorá je prítomná v súčasnom vyučovaní matematickej analýzy. Učiteľ s teoretickým prístupom vidí ťažisko v presnej výstavbe teórie limitných procesov. Usiluje sa o to, aby študenti ovládali definície, vety a ich dôkazy. Učiteľ s kalkulatívnym prístupom sa snaží, aby študenti zvládli, čo najnáročnejší matematický aparát a vedeli ho aj používať. Z hľadiska súčasných trendov vo vyučovaní matematiky sú obidva považované za nesprávne. W. Blum v [13] upozorňuje na určité stereotypy vo vyučovaní matematickej analýzy:

1. Prevláda veľmi direktívna orientácia. Študenti sa učia jednotlivé typy úloh a algoritmov, ktoré sa vyskytujú v písomných prácach, na maturitnej a prijímacej skúške.

2. Vyučovanie je menej orientované na to, aby si študenti vytvorili o jednotlivých pojmoch určitú predstavu. Formálne postupy sú uprednostňované pred obsahovými úvahami.

3. Jednotlivé časti učiva sú málo prepojené, chýba dostatok priestoru pre opakovanie a nadviazanie na predchádzajúce časti učiva. Chýba náväznosť na reálne príklady zo života, medzipredmetové vzťahy.

4. Vyučovanie je metodicky chudobné, čo spôsobuje, že študenti sú počas vyučovania väčšinou pasívni.

P. Eisenmann v [23] sa domnieva, že študentom chýba dostatok vhodných modelov limitných procesov a propedeutika limitných procesov je nedostatočná. Pritom by stačilo pre zlepšenie tohto stavu, keby učitelia matematiky využili príklady a modely, ktoré sú preberané pred 4. ročníkom gymnázia, na ukázanie prítomnosti limitného procesu. Takýmito príkladmi môžu byť desatinné čísla s periodickým rozvojom, funkcie, ktorých grafy majú asymptoty, obsah kruhu aproximovaný obsahom vpísaného alebo opísaného n-uholníka, iracionálna mocnina kladného reálneho čísla a podobne. Eisenmann v [23] uvádza aj ďalšie vhodné motivačné príklady a v [24] uvádza aj ich klasifikáciu, ako aj klasifikáciu rôznych druhov limitných procesov.

Ďalším dôsledkom náročnosti limitných procesov, na ktoré upozorňujú D. Tall, S. Winner v [91] je to, že žiaci nemajú vždy správnu predstavu o pojmoch a ich vlastná definícia pojmov je často odlišná od formálnej definície, ktorá je súčasťou matematickej teórie. Tieto problémy by nemali odradiť učiteľa matematiky od toho, aby pomocou vhodnej propedeutiky vybudoval u svojich žiakov správnu predstavu pojmov limitných procesov. Aj keby žiaci zo začiatku formulovali nesprávne svoje vlastné definície, pri vhodnej precizácii, použití vhodných modelov, príkladov a protipríkladov, je možné priviesť žiakov k správnej formálnej definícii.

Učebné osnovy matematiky pre osemročné gymnáziá (pozri [68]) majú pojmy, ktoré súvisia s limitnými procesmi, zaradené do posledného ročníka gymnázia v rámci tematických celkov *Postupnosti* a *Úvod do infinitezimálneho počtu*. Tematický celok *Diferenciálny a integrálny počet* je zaradený do rozširujúceho učiva.

Podľa [68] prvoradým úsilím pri vyučovaní matematiky v osemročnom gymnáziu by malo byť, aby žiaci nedostávali hotové poznatky, ale aby sa pod vedením učiteľa sami dopracovali k žiadaným matematickým poznatkom. Túto predstavu podporuje aj špirálovitosť osnovania obsahu. Výsledkom majú byť trvalejšie matematické poznatky, ale aj vytvorenie návykov u žiakov pre zámerné pozorovanie spoločenských a prírodných javov a na formuláciu zistených súvislostí. Oproti doterajšej praxi sa v osnovách nevymedzuje hodinová dotácia na jednotlivé tematické celky. Počet hodín určuje učiteľ podľa kvality triedy.

Pre pojmy súvisiace s limitnými procesmi sú uvedené nasledovné ciele a obsahy:

Ciele

- určiť limitu (intuitívne),
- určiť postupnosť čiastočných súčtov,
- určiť súčet radu,
- hľadať rovnice dotyčnice polynomickej funkcie,
- určovať okamžitú rýchlosť a extrémne hodnoty v konkrétnych fyzikálnych úlohách,
- chápať zmysel derivácie ako pojem, ktorý opisuje zmenu,
- určenie priebehu polynomickej funkcie,
- spoznať myšlienku dolných a horných súčtov pri výpočte obsahov a objemov.

Obsah

Nekonečný rad, súčet radu, nekonečný geometrický rad a jeho súčet. Smernica dotyčnice, okamžitá rýchlosť, extrémy (konkrétne úlohy), limita, spojitosť a derivácia (intuitívne). Obsahy útvarov ohraničených krivkou a objemy rotačných telies (intuitívne).

Učebné osnovy matematiky pre štvorročné gymnáziá sú podobné osnovám pre osemročné gymnáziá. Ich ciele sú takmer totožné s týmito osnovami, preto uvedieme len obsah učiva. Pojmy súvisiace s limitnými procesmi sú zaradené v poslednom ročníku. Obsahuje ich tematický celok *Funkcie, rovnice a nerovnice III* (pozri [100], v hranatých zátvorkách je rozširujúce učivo).

Obsah
Limita postupnosti (intuitívne), konvergencia, divergencia postupnosti. Nekonečný rad, čiastočný súčet (najmä aritmetického a geometrického radu), súčet geometrického radu(intuitívne), [konvergencia/divergencia radu].

Smernica dotyčnice, okamžitá rýchlosť, hľadanie extrémov (všetko prostredníctvom riešenia konkrétnych úloh), [limita a spojitosť funkcie], derivácia (intuitívne), derivácia polynomických funkcií, súvis monotónnosti funkcie a jej derivácie, [okamžitá rýchlosť, druhá derivácia], približné výpočty obsahov a objemov, [primitívna funkcia, určitý integrál].

Vyučovanie matematickej analýzy v triedach gymnázií s rozšíreným vyučovaním matematiky je odlišné od vyučovania v bežných triedach. Ako príklad uvedieme tematický plán pre takéto triedy pre školský rok 2003/2004 na Gymnáziu v Košiciach, Poštová 9 (viď [92]). V 2. ročníku sú v rámci tematického celku *Funkcie* preberané pojmy: dotyčnica ku grafu polynomickej funkcie (PF), derivácia PF, Lagrangeova veta a jej dôsledky, monotónnosť PF, lokálne extrémy PF, konvexnosť a konkávnosť PF, priebeh PF. V rámci tematického celku 3. ročníka *Postupnosti a reálne čísla* sú preberané pojmy: limita postupnosti, vety o limitách, nekonečný rad. Ďalším tematickým celkom v 3. ročníku je *Diferenciálny počet*, ktorý prehlbuje vedomosti žiakov v oblasti diferenciálneho počtu získané v 2. ročníku a viac sa venuje aj pojmu limity funkcie. V 4. ročníku je zaradený tematický celok *Integrálny počet*, ktorý svojím rozsahom je porovnateľný s integrálnym počtom funkcie jednej premennej, ktorý sa vyučuje v rámci vysokoškolského štúdia matematiky budúcich učiteľov matematiky.

Podľa učebných osnov matematiky pre stredné odborné školy (pozri [63]) cieľom vyučovania matematiky na stredných odborných školách je poskytnúť žiakom matematické vedomosti a zručnosti všeobecnovzdelávacieho charakteru, ktoré im budú potrebné pri štúdiu ostatných - najmä odborných predmetov. Podľa týchto osnov je v kompetencii školy zaradenie tematických celkov do ročníkov.

Pojmy súvisiace s limitnými procesmi sú zaradené v tematických celkoch *Postupnosti*, *Úvod do diferenciálneho počtu* a *Úvod do integrálneho počtu*. Ciele a obsahy sú formulované nasledovne:

Ciele
- poznať nekonečný geometrický rad, podmienky jeho konvergencie a jeho súčet,
- vedieť aplikovať poznatky o nekonečnom geometrickom rade,
- vedieť aplikovať poznatky o postupnostiach, hlavne vo finačnej matematike.
- pochopiť pojmy limita, spojitosť, derivácia,
- vedieť derivovať jednoduché a zložené funkcie,
- osvojiť si postup vyšetrovania priebehu funkcie,
- vedieť aplikovať získané poznatky a zručnosti v študovanom odbore,
- pochopiť pojmy neurčitý a určitý integrál,
- vedieť vypočítať a aplikovať témy integrálov, ktoré sú potrebné v odbore štúdia.

Obsah
Použitie postupnosti vo finančnej matematike. Úrokovanie a umorovanie. Nekonečný geometrický rad. Limita funkcie a jej vlastnosti. Výpočet limity funkcie. Spojitosť funkcie. Výpočet derivácie funkcie. Význam derivácie. Priebeh funkcie. Použitie diferenciálneho počtu v odbore. primitívna funkcia, neurčitý integrál, určitý integrál.

Výpočty integrálov. Použitie integrálneho počtu v odbore.

České učebné osnovy pre gymnáziá (pozri [99]) zaraďujú pojmy súvisiace s limitnými procesmi do rozširujúceho učiva. Je ním časť tematického celku *Postupnosti*(limita postupnosti, vety o limitách, využitie limít postupností, nevlastná limita, konvergentná a divergentná postupnosť, nekonečný geometrický rad) a tematický celok *Základy diferenciálneho a integrálneho počtu.* Posledný tematický celok má nasledovný obsah:

Elementárne funkcie, vlastnosti, grafy. Okolie bodu. Spojitosť funkcie v bode a na intervale. Limita funkcie v bode. Limita funkcie v nevlastnom bode. Vety o limitách. Derivácia funkcie, geometrický a fyzikálny význam. derivácie elementárnych funkcií. Derivácia súčtu, súčinu a podielu funkcií. Derivácia zloženej funkcie. Druhá derivácia. Priebeh funkcie. Využitie diferenciálneho počtu.

Primitívna funkcia. Primitívna funkcia k základným funkciám. Určitý integrál. Výpočet obsahu obrazca. Objem rotačného telesa. Fyzikálne aplikácie určitého integrálu.

Osnovy osobitne doporučujú, aby toto rozširujúce učivo bolo zaradené do obsahu učiva pre prípravu žiakov na vysokoškolské štúdium matematicko-prírodovedných, technických, ekonomických a ďalších smerov, v ktorých sa dobrá pripravenosť žiakov z matematiky vyžaduje. Tak ako slovenské učebné osnovy matematiky pre stredné odborné školy ponechávajú tieto české osnovy zaradenie tematických celkov do ročníkov na školu a vyučujúceho.

Podobne ako české učebné osnovy aj poľské učebné osnovy pre gymnáziá a stredné odborné školy (pozri Babianski [3]) zaraďujú pojmy súvisiace s limitnými procesmi do rozširujúceho učiva. Z obsahovej stránky sú podobné českým osnovám. V rámci tematického celku *Spojitosť a derivácia funkcie* uvádzajú aj pojem jednostrannej limity funkcie. Na rozdiel od slovenských učebných osnov tieto tematické celky sú zaradené do predposledného ročníka.

Z cieľov a obsahov uvedených učebných osnov je vidieť, že ťažisko vyučovania limitných procesov už nie je výlučne na ich kalkulatívnom zvládnutí, ale je dôležité dosiahnuť, aby počas vyučovacieho procesu žiaci dospeli k správnemu porozumeniu týchto pojmov a vedeli ich aplikovať v praxi. Na to upozorňuje A. Sierpinska v [83]. V nasledujúcich kapitolách rozoberieme problémy jednotlivých pojmov limitných procesov z hľadiska teórie vyučovania matematiky podrobnejšie. Budeme si všímať, ako sú tieto pojmy zavedené v rôznych učebniciach matematiky, pretože pri experimentálnom vyučovaní vystupuje experimentátor v pozícii noosférického učiteľa (pozri Trenčanský a kol. [94]).

1.2 Limita postupnosti a súčet nekonečného radu

G. Herden, N. Knoche, V. Pickartz v [41] uvádzajú 3 definície limity postupnosti:

1. Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N; \quad n > m \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

2. Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď $\forall \varepsilon \in R^+$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$ pre takmer všetky prirodzené čísla n.

3. Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď v každom okolí čísla a ležia takmer všetky členy postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Výraz „takmer všetky" znamená, že danú podmienku nespĺňa len konečná množina prvkov. 2. a 3. definícia je považovaná za jednoduchší prístup k abstraktnému pojmu limity, lebo obsahuje menej kvantifikátorov v explicitnom tvare.

Vo viacerých publikáciách sa za príčinu ťažkostí v chápaní limitných procesov považuje veľký počet kvantifikátorov v definíciách ich pojmov. V klasickej „$\varepsilon - \delta$" koncepcii sa v definíciách vyskytujú obvykle tri kvantifikátory. Okrem hore spomenutých 3 definícií uvádzajú G. Herden, N. Knoche, V. Pickartz ešte ďalšie štyri definície.

1. Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď
$$\forall U(a) \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N; \quad n \geq m \Rightarrow a_n \in U(a).$$

2. Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď v každom okolí čísla a leží nekonečne veľa členov postupnosti a mimo neho leží najviac konečný počet členov.

3. Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď postupnosť $(a_n - a)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, ktorej limita je číslo nula.

4. Funkcia f so sprava neohraničeným definičným oborom $D(f)$ má pre $x \to \infty$ limitu reálne číslo a, ak pre $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists r \in R^+$, že pre všetky $x \in D(f)$ s vlastnosťou $x > r$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(a)$ (postupnosť je chápaná ako funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel).

V nemeckých učebniciach sa veľmi často najprv zavádza pojem *Nullfolge*, čo je postupnosť, ktorej limita je rovná nule. Potom pomocou nej sa definujú limity aj ostatných konvergentných postupností pomocou naposledy spomenutej definície 3.

Zaujímavá je aj učebnica Rosenblooma, Schustera [80], ktorá motivuje klasickú definíciu limity postupnosti pomocou rekurentne definovaných iteračných postupností. Vezmime si napríklad postupnosť
$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right).$$

Táto postupnosť sa používa na aproximáciu čísla $\sqrt{3}$. Najprv si ukážeme, že
$$|x_n - \sqrt{3}| < \frac{1}{2^n}.$$

Využijeme pritom dôkaz matematickou indukciou.

Nech $n = 1$. Potom $|x_1 - \sqrt{3}| = |2 - \sqrt{3}| < \frac{1}{2}$, čo platí. Nech $|x_k - \sqrt{3}| < \frac{1}{2^k}$ je indukčný predpoklad. Vyjadrime $|x_{k+1}-\sqrt{3}| = \left|\frac{1}{2}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right) - \sqrt{3}\right| =$

$$= \left|\frac{x_k^2 + 3 - 2\sqrt{3}x_k}{2x_k}\right| = \frac{|(x_k - \sqrt{3})^2|}{2x_k} = \frac{|(x_k - \sqrt{3})|^2}{2x_k} < \frac{\left(\frac{1}{2^k}\right)^2}{2|x_k|}.$$

Keďže podľa indukčného predpokladu platí

$$x_k - \sqrt{3} > -\frac{1}{2^k}, \text{ tak zrejme } x_k > \sqrt{3} - \frac{1}{2^k} > \sqrt{3} - \frac{1}{2} > 1 > 0.$$

$$\text{Odtiaľ máme } \frac{1}{x_k} = \frac{1}{|x_k|} < 1. \text{ Preto } \frac{\left(\frac{1}{2^k}\right)^2}{2|x_k|} < \frac{1}{2^{2k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Takto sme dostali odhad, že ak chceme vypočítať hodnotu čísla $\sqrt{3}$ s presnosťou na jednu tisícinu, potrebujeme na to 10. člen postupnosti. Ak chceme vypočítať hodnotu čísla $\sqrt{3}$ s presnosťou $\varepsilon(\varepsilon \in R^+)$, nájdeme prirodzené číslo $m \in N$ také, že pre všetky prirodzené čísla n väčšie ako m platí $|x_n - \sqrt{3}| < \varepsilon$. Stačí vybrať číslo m také, že $2^m \geq \varepsilon^{-1}$. Teraz môžeme zaviesť klasickú definíciu limity postupnosti. Okrem tejto definície sa spomína v učebnici [80] aj nasledovná:

Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď pre každé okolie U čísla a existuje prirodzené číslo m také, že pre všetky prirodzené čísla $n > m$ platí $a_n \in U$.

Ruská autorka L. T. Žukova v [109] sa zamýšľa nad pojmom spojitosť funkcie, pričom ju definuje klasickým „$\varepsilon - \delta$" spôsobom, že funkcia je spojitá v bode a, ak pre $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f); \quad |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. V cvičeniach, k tejto definícii vymieňa poradie kvantifikátorov a poradie výrokov v implikácii a úlohou žiaka je zodpovedať otázku, či takto zmenené definície môžu byť ešte korektné pre pojem spojitosti funkcie. Podobne možno postupovať aj pri definícii limity postupnosti:

Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď
$\forall\varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N; \quad n > m \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$
Ak by sme vymenili napríklad prvé dva kvantifikátory, dostali by sme: Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď
$\exists\varepsilon \in R^+ \quad \forall m \in N \quad \forall n \in N; \quad n \geq m \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$
Vezmime si teraz postupnosť $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ a zvoľme $a = 0, \varepsilon = 2$. Potom
$\forall m \in N \quad \forall n \in N; \quad n \geq m \Rightarrow |(-1)^n| < 2.$
Túto definíciu uvedená postupnosť spĺňa, ale vieme, že je to oscilujúca postupnosť, ktorá nemá limitu. Táto zmenená definícia je nesprávna. Skúsme teraz vymeniť poradie v implikácii: Reálne číslo a je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď
$\forall\varepsilon \in R^+ \; \exists m \in N \; \forall n \in N; \; |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow n \geq m.$
Znova si vezmime postupnosť $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ a zvoľme $a = 0$. Potom
$\forall\varepsilon \in R^+ \; \exists m \in N \; \forall n \in N; \; |(-1)^n| < \varepsilon \Rightarrow n \geq m.$
Ak $0 < \varepsilon < 1$, tak predpoklad implikácie je vždy nepravdivý a celá implikácia je pravdivá pre každé prirodzené číslo m. Ak $\varepsilon \geq 1$ predpoklad aj záver je vždy

pravdivý. To by mohlo znamenať, že limitou tejto postupnosti je číslo 0, čo však tiež nie je pravda.

Autorka v cvičeniach svojej učebnice kladie akcent aj na to, aby žiaci zvládli negáciu kvantifikovaných výrokov. Napríklad $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$, lebo ak vezmeme

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \text{ tak } \forall m \in N \quad \exists n \in N; \quad n \geq m \wedge |(-1)^n| = 1 \geq \frac{1}{2}.$$

Žiaci často nerozumejú, prečo definície pojmov limitných procesov majú taký tvar, aký majú, a preto potrebujú poznať kontrapríklady v prípade zmien v takýchto definíciách, aby mohlo u nich dôjsť k hlbšiemu poznaniu daných pojmov. Logická komplikovanosť „$\varepsilon - \delta$" definícií poukazuje na to, že je dôležité, aby žiaci zvládli matematickú logiku.

Fréderique Papy v [69] predstavuje veľmi abstraktnú koncepciu vyučovania matematickej analýzy pomocou topologických pojmov a teórie metrických priestorov. Podľa tejto koncepcie definuje limitu postupnosti bodov metrického priestoru M s metrikou d takto:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N; \quad n \geq m \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Igor Kluvánek v [55] tvrdí, že úsilie vynaložené na limity pri vyučovaní matematickej analýzy nemusí mať vždy zmysel. Problémom je to, že je ťažké presvedčiť žiakov, že limity môžu mať iný zmysel ako ich formálnu definíciu. Pritom je možné vyučovať tento pojem zaujímavým spôsobom, ktorý ukazuje nasledujúci príklad:

Nech a, b sú prirodzené čísla. Dokážme, že medzi číslami $c_n = \sqrt{a^2n^2 + b}$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$, je len konečne veľa celých čísel(alebo žiadne).

$$c_n = \sqrt{a^2n^2+b} = \sqrt{a^2n^2+b}.\frac{b}{b} = \frac{b\sqrt{a^2n^2+b} - ban + ban}{b} = an+$$

$$+\frac{b\left(\sqrt{a^2n^2+b} - an\right)\left(\sqrt{a^2n^2+b} + an\right)}{\sqrt{a^2n^2+b} + an} = an + \frac{b}{\sqrt{a^2n^2+b} + an}.$$

Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{b}{\sqrt{a^2n^2+b} + an} = 0$. Pre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existuje prirodzené číslo m,

že pre všetky prirodzené čísla n platí $n \geq m \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2n^2+b}} < \frac{1}{2}$.

To znamená, že pre každé prirodzené číslo n, $n \geq m$ platí $an < c_n < an + \frac{1}{2}$.

Ak označíme $an = k$, kde k je nezáporné celé číslo, potom $k < c_n < k + \frac{1}{2}$. Pre všetky prirodzené čísla väčšie ako číslo m platí $c_n \notin N$ a ak existujú prirodzené čísla c_i, tak to môžu byť len pre niektoré prirodzené číslo i menšie ako m.

Pri preberaní pojmu limity postupnosti (napríklad pri práci s nadanými žiakmi v matematickom krúžku) je cenné venovať pozornosť limite monotónnej postupnosti a limite postupnosti pomocou pojmov *limes superior* a *limes inferior*. To sa neskôr využíva pri budovaní konvergencie v usporiadaných štruktúrach (pole javov v pravdepodobnosti, spojitosť integrálu - Lebesgueova veta) a všeobecne integrovania na usporiadaných štruktúrach.

Hayen v [35] zavádza nasledovné stupne porozumenia pojmu limity postupnosti:

1. Intuitívny poznatok

Tento poznatok je u žiakov prezentovaný na báze intuitívnych predstáv. Ako príklady možno uviesť obsah kruhu ako limita obsahov vpísaných alebo opísaných mnohouholníkov. Hayen doporučuje limitu postupnosti ukázať najprv na príklade „nulových postupností", t.j. postupností, ktorých limita je rovná nule. Aj naposledy spomenutý príklad je možné takto použiť, pretože rozdiel obsahu kruhu a obsahov vpísaných mnohouholníkov je postupnosť, ktorej limita je rovná nule.

2. Obsahový poznatok

Pri tomto stupni sa pracuje s názornými definíciami ako „V každom okolí limity leží nekonečne veľa členov a mimo okolia konečne veľa". Na tomto stupni žiaci spoznávajú aritmetické a geometrické postupnosti, postupnosti čiastočných súčtov. Pomocou grafických predstáv alebo kalkulačky vedia na jednoduchých príkladoch rozlíšiť konvergentnú a divergentnú postupnosť.

3. Formálny poznatok

Na tomto stupni sa žiaci oboznamujú s formálnou definíciou limity postupnosti. Používa sa na vyšetrovanie konvergentnosti postupností. Vlastnosti konvergentných postupností ako monotónnosť a ohraničenosť je vhodné zaviesť v tejto etape.

4. Integrovaný poznatok

Pri tomto stupni upevňujeme u žiakov pochopenie vlastností konvergentných radov ako Cauchy - Bolzanovo kritérium konvergencie, poznatky o konvergentných postupnostiach, pomocou ktorých boli v minulosti aproximované hodnoty iracionálnych čísel (napríklad reťazcové zlomky).

5. Kritický poznatok

Na tomto poslednom stupni sa limita postupnosti používa pri definíciách centrálnych pojmov matematickej analýzy (derivácia funkcie, spojitosť funkcie, určitý integrál). V tejto etape je možné kriticky rozobrať aj niektoré paradoxy z histórie matematiky(napríklad Achilles a korytnačka).

Tieto etapy možno porovnať so stupňami poznávacieho procesu u Milana Hejného v [40], [39].

1. Motivácia je veľmi dôležitá etapa, lebo je „motorom" poznávacieho procesu. V psychike žiaka je rozpor medzi „neviem" a „chcel by som vedieť". Žiak chce vyriešiť nejaký problém a jeho súčasné vedomosti mu na to nestačia, preto je v ňom túžba po získaní nových poznatkov a skúseností, ktoré mu umožnia riešiť problém.

2. Etapa separovaných modelov je etapa, v ktorej žiak rieši problém pomocou rozličných separovaných modelov, vďaka ktorým získava nové skúsenosti. Zo začiatku nevidí vzájomné súvislosti medzi týmito skúsenosťami. Konkrétnou činnosťou s modelmi vďaka štrukturalizácii a klasifikácii dosahuje univerzálny model, ktorý predtým používané modely zatupuje alebo nahrádza. S čím viac rôznorodými modelmi aj z mimomatematických oblastí sa žiak stretne, tým je jeho neskoršie poznanie pevnejšie.

3. Etapa univerzálnych modelov je dôležitá v tom, že univerzálny model ukazuje najdôležitejšie vlastnosti separovaných modelov a zhŕňa ich v sebe. K tomuto modelu žiak môže dospieť tým, že najprv zistí, že určité separované modely sú rovnaké. Po-

kračuje poznaním, že tieto modely sa môžu navzájom zastupovať a nakoniec si zvolí jeden abo viac univerzálnych modelov, vhodných na zastupovanie iných modelov. Pri práci s týmito modelmi alebo už pri ich objavení môže žiak objaviť poznatok a dospieť k abstraktnému poznaniu. Tento moment je nasledovná etapa.
4. Abstrakčný zdvih dáva zrod abstraktnému poznaniu. Je to hlbší vhľad do daného poznania. Nové poznatky, vzťahy, pojmy a závislosti medzi fenoménmi sa vymedzujú a osamostatňujú. Žiak v tejto etape tieto nové poznatky overuje na použitých modeloch.
5. Etapa kryštalizácie má za cieľ udomácniť nové poznanie v existujúcej kognitívnej štruktúre. Viaže sa na existujúce vedomosti. Najprv na úrovni modelov, potom na úrovni abstraktného poznania. Obvykle je to dlhodobý proces, ktorý u každého žiaka prebieha individuálne. Tomu napomáhajú rozličné úlohy, ktoré žiak rieši zamerané na aplikácie nových poznatkov.
Etapa automatizácie podľa Hejného už nepatrí do poznávacieho procesu, preto už nie je očíslovaná. Je to nácvik už poznaného, získanie určitej rutiny pri používaní nových poznatkov. Žiak automaticky rieši problémové úlohy a nepotrebuje pri ich riešení modely používané v predchádzajúcich etapách.

V konkrétnom poznávacom procese sa môžu tieto etapy aj prekrývať. Žiak v 3. etape sa môže vrátiť do 2. etapy, aby ju obohatil o ďalší model, prípadne použil niektorý už použitý separovaný model pri získavaní nového poznatku.

Prvé dve etapy, ktoré uvádza Hayen v [35], zodpovedajú etapám separovaných a univerzálnych modelov. Chýba však etapa motivácie, prečo sa vôbec pojmom limita postupnosti zaoberáme. Na tomto mieste by bolo vhodné motivovať žiakov pomocou príkladov a paradoxov z histórie matematiky a z praxe. Tretia etapa formálneho poznatku zodpovedá objavu poznatku a abstrakčnému zdvihu. Integrovaný a kritický poznatok zodpovedajú etape kryštalizácie.

Etapa automatizácie je pri pojme limita postupnosti pomerne náročná, pretože pri niektorých úlohách je potrebné najprv zistiť, či je daná postupnosť vôbec konvergentná a až potom má zmysel vypočítať jej limitu. Weigand v [103] uvádza, že intuitívne porozumenie pojmu limity postupnosti súvisí s pojmami hromadný bod, okolie čísla. Tieto pojmy sa u nás preberajú na vysokej škole, prípadne na gymnáziách s rozšíreným vyučovaním matematiky.

Tall a Viner v [91] pojem limity postupnosti zavádzajú pomocou postupnosti $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Ak máme číslo $p \in R^+$, tak existuje $m \in N$, že pre všetky prirodzené čísla $i \geq m$ platí $\left|\frac{1}{2^i}\right| < 10^{-p}$. Na základe toho konštatujú, že limita postupnosti je nula. Z presného matematického hľadiska by bolo presnejšie, ak by číslo 10^{-p} bolo nahradené kladným reálnym číslom. Nakoniec aj oni definujú klasickú Cauchyho definíciu.

Davis a Vinner v [19] popisujú tri formy zavedenia definície limity postupnosti:

I. Informačná (Intuitívna) forma

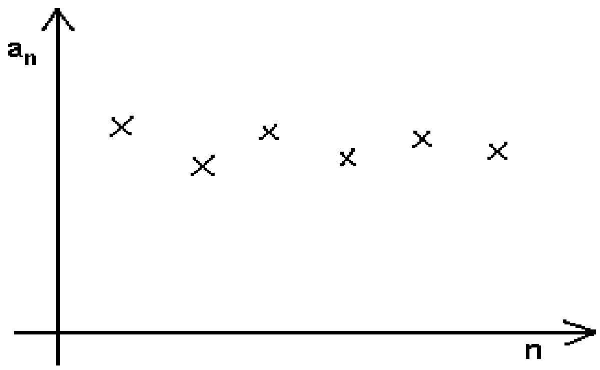
Hovoríme, že postupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ má limitu L, ak „takmer všetky" členy postupnosti „sú približne rovné" L, kde

1. „približne rovné" znamená, že keď si vezmeme ľubovoľnú pozitívnu toleranciu ε t.j. kladné reálne číslo, tak a_n sa líši od L menej ako o ε.

2. „takmer všetky" znamená, že vlastnosť 1 nie je splnená iba pre konečný počet členov postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

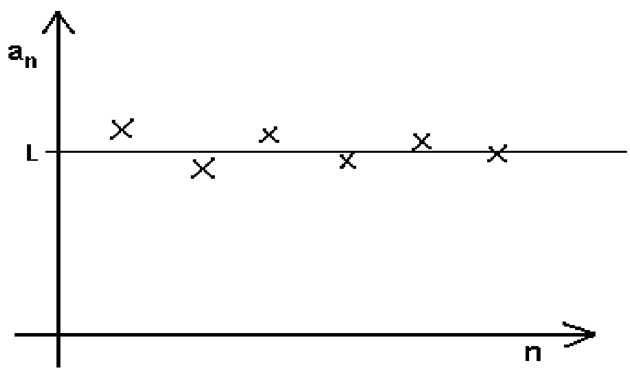
II. Geometrická forma
Znázorníme graf postupnosti:

Obr. 1



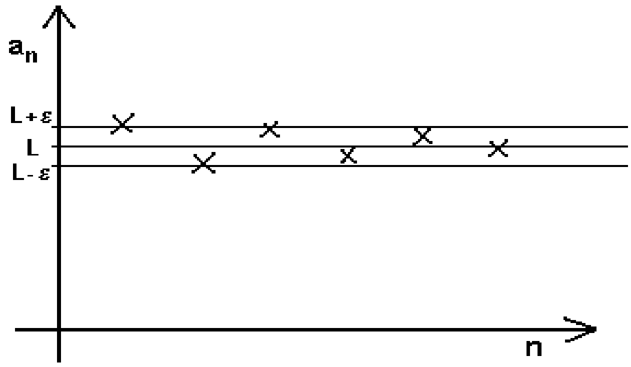
Ak budeme hľadať kandidáta na limitu, označme ho L, tak graf vyzerá podobne ako v nasledovnom obrázku:

Obr. 2



Ak si zvolíme kladné reálne číslo ε, tak dostaneme:

Obr. 3



Ak L je skutočne limitou postupnosti, tak musí existovať iba konečný počet členov, ktoré neležia v páse. Preto existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že pre všetky prirodzené čísla n, $n \geq m$ všetky členy a_n ležia v páse.

III. Obvyklá formálna definícia

Číslo L je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ak

$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N; \quad n \geq m \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$

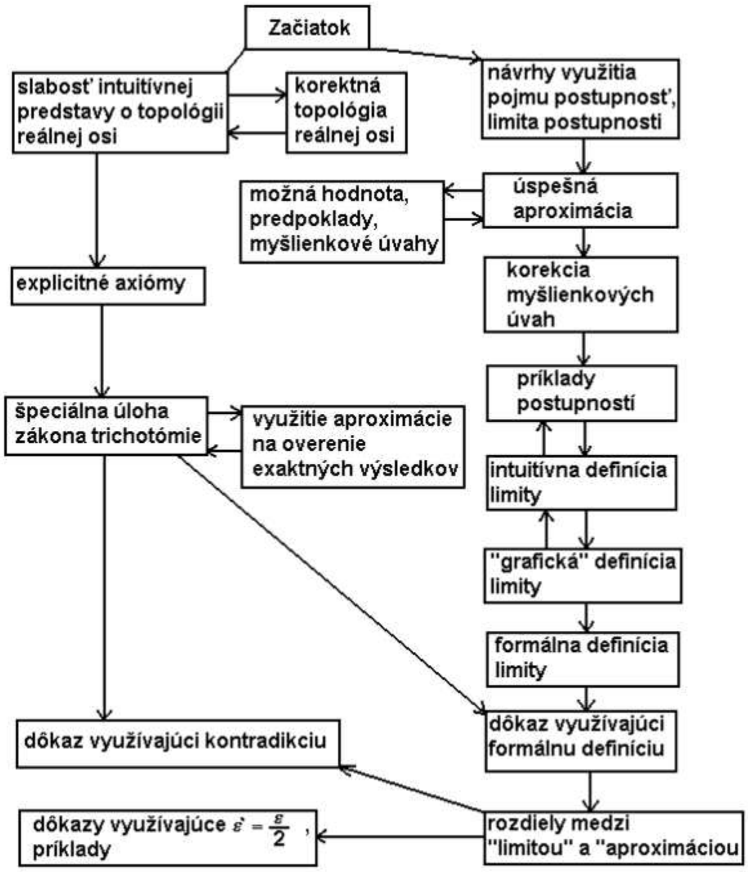
Podľa Davisa a Vinera [19], Bendera [7], Sierpinskej [83], Mundy/Graham [65] je vážnym problémom, ktorý sa dotýka aj limitných procesov, vzájomný vzťah racionálnych čísel, zlomkov a desatinných čísel s periodickým desatinným rozvojom.

Žiaci vedia pochopiť, že $\frac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,\overline{3}$. Najčastejšie chápu túto rovnosť ako výsledok delenia, čiže $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333\ldots$. Zápis $0,\overline{3}$ je vtedy chápaný ako zápis nekonečného množstva trojok za desatinnou čiarkou. Rovnosť $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ môžeme chápať ako postupnosť $0,3; 0,33; 0,333; \ldots$ alebo ako číselný rad $0,3 + 0,03 + \ldots$ Bender tvrdí, že žiaci nevedia pochopiť, že tento limitný proces vedie k limite, ktorou je číslo $\frac{1}{3}$. Preto pochopia hlbšie rovnosť $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ len vtedy, ak sú ich poznatky na primeranej úrovni. Podobne Mundy/Graham v [65] spomínajú častú argumentáciu žiakov, že číslo $0,\overline{9}$ je iba približne 1, ale nie je to presne 1. To zodpovedá aj výsledkom experimentu uvedenom v [33].

Davis a Vinner aplikujú v [19] definíciu limity na príkladoch postupností desatinných čísel. Postupnosť 0,9; 0,99; 0,999;... je rastúca postupnosť. V tomto príklade podobne ako I. Kluvánek v [54] pri pojme sumovateľnej postupnosti, definujú limitu L postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ako najmenšie reálne číslo, pre ktoré $a_n \leq L$ pre všetky hodnoty prirodzených čísel n. Analogicky je definovaná limita klesajúcej postupnosti. Na príkladoch postupností typu 1,1; 0,9; 1,01; 0,99; 1,001; 0,999;... je ukázaná potreba presnej Cauchyho definície limity postupnosti.

Tento metodický postup zdôvodňujú schémou poznávacieho procesu pojmu limity postupnosti (pozri obr. 4). Schéma predstavuje paralelnú štruktúru, ktorej ľavá strana je viac abstraktná, pravá viac konkrétna pre žiaka a vhodná je preto aj pre gymnaziálny stupeň. Abstraktnejšia línia je vhodnejšia len pre vysokoškolský kurz matematickej analýzy, prípadne pre gymnáziá s rozšíreným vyučovaním matematiky.

Obr. 4



Isté prvky spomínanej konkrétnej línie je možné pozorovať aj v učebniciach Hechta v [36], [37]. V [36] je pojem limity postupnosti uvádzaný príkladmi postupností, ktoré aproximujú hodnoty niektorých reálnych čísel. Potom uvádza trojicu príkladov, na ktorých chce priblížiť pojem konvergencie, ktorá je zatiaľ chápaná len intuitívne. Potom formuluje formálnu definíciu limity postupnosti. Následne ju vysvetľuje na príklade a aj graficky interpretuje.

V učebnici Odvárko a kol. [66] je limita postupnosti zavádzaná s využitím grafickej interpretácie konvergentných postupností. Potom je limita postupnosti definovaná nasledovne: Reálne číslo L sa nazýva limita postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ak pre

$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N$, že všetky členy danej postupnosti počnúc členom a_{m+1} sú z intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Autor postupoval podobne aj v učebnici [67] a použil definíciu: Číslo a sa nazýva limita postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď ku každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in N$ tak, že pre všetky prirodzené čísla n, $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Túto definíciu používa aj učebnica Babianski W. a kol. [2].

Kraemer a kol. v učebnici [60] zavádzajú pojem limity postupnosti pomocou pojmu nulovej postupnosti. Snažia sa riešiť aj problém s veľkým počtom kvantifikátorov v definíciách, na ktorý upozorňuje aj G. Herden, N. Knoche, V. Pickartz v [41]. Pojem limity postupnosti je definovaný nasledovne:

Definícia 1. *Hovoríme, že skoro všetky členy postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ majú nejakú vlastnosť, ak majú túto vlastnosť všetky také členy a_n, ktorých index je väčší než určité vhodne zvolené číslo r.*

Definícia 2. *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nulová práve vtedy, keď pri ľubovoľnej voľbe kladného čísla k nerovnosť $|a_n| < k$ platí pre skoro všetky indexy n.*

Definícia 3. *O čísle a hovoríme, že je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ak je postupnosť $(a_n - a)_{n=1}^{\infty}$nulová.*

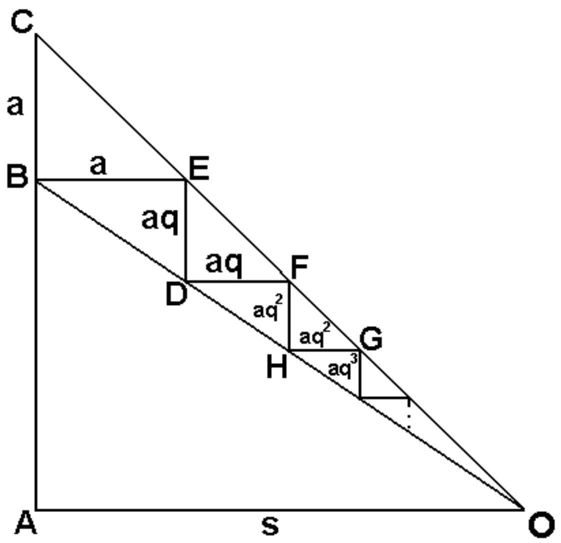
Vhodné je poznamenať, že v definícii 2 mohli autori lepšie využiť definíciu 1, ak by nahradili tvrdenie „platí pre skoro všetky indexy n" tvrdením „platí pre skoro všetky členy postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$". Podobná definícia sa nachádza aj v učebnici Klaczkow K. a kol. [52]:

Definícia 4. *Číslo g je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď pre každé kladné reálne číslo ε takmer všetky členy postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nachádzajú vo vzdialenosti menšej ako ε od čísla g.*

Tieto definície sú potom precvičované na konkrétnych príkladoch konvergentných a divergentných postupností. Tento spôsob definovania je dosť rozšírený v nemeckých učebniciach (napríklad v [15], [42]), kým na Slovensku je v súčasnosti pomerne zriedkavý. Ďalší zaujímavý prístup k zavedeniu limity postupnosti možno nájsť v [59].

Vďaka náročnosti pojmu limity postupnosti existujú snahy zaviesť niektoré pojmy využívajúce limitu bez nej. Bindl v [12] zavádza pojem súčtu nekonečného geometrického radu nasledovne:

Obr. 5



$\triangle DEB \sim \triangle BAO$ podľa vety (uu). Preto platí $\dfrac{|BA|}{|AO|} = \dfrac{|DE|}{|EB|}$. Členy geometrickej postupnosti sú reprezentované dĺžkami úsečiek, ktoré sú rovnobežné so stranami AC alebo AO. Ak označíme súčet nekonečného geometrického radu ako s, potom $|AO| = |AC| = s$. Ďalej $|EB| = a, |DE| = aq$. Takto dostaneme

$\dfrac{|BA|}{s} = \dfrac{aq}{a}$, a teda $|BA| = sq$. Ďalej $|AC| = |BA| + |BC|$. Po dosadení $s = sq + a$.

Odtiaľ $s = \dfrac{a}{1-q}$. Tento dôkaz je však použiteľný len pre $0 < q < 1$.

I. Kluvánek v [54], [55] sa zaoberá najprv súčtom nekonečného radu s nezápornými členmi, pričom súčet s tohto radu definuje ako najmenšie číslo, ktoré je väčšie alebo rovné každému čiastočnému súčtu radu. Nerovnosť $\sum_{i=1}^{n} a_i \le s$ platí pre každé $n \in N$.

Zároveň ak t je také číslo, že $\sum_{i=1}^{n} a_i \le t$, tak $s \le t$. Tieto dve podmienky, ktoré stačia na definíciu pojmu súčet nekonečného radu, veľmi pripomínajú definíciu suprema $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n; n \in N\}$, kde a_n je monotónna rastúca postupnosť. Okrem tohto spôsobu sa I. Kluvánek snažil použiť aj spôsob, ktorý pripomína klasickú definíciu limity postupnosti. Poslednú podmienku preformuloval:

Ku každému reálnemu číslu $\sigma < s \quad \exists n \in N$ také, že $\sigma < \sum_{i=1}^{n} a_i$. Teraz keď označíme $\varepsilon = s - \sigma$, tak dostaneme $s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} a_i$. Ak vieme, že $\sum_{i=1}^{n} a_i \le s$, dostaneme výslednú podmienku $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists n \in N$, pre ktoré platí $s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} a_i \le s$.

To znamená, že súčet nekonečného radu aproximujú jeho čiastočné súčty s ľubovoľnou presnosťou. Od tejto podmienky je už len „krôčik" k podmienke

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N \text{ platí } n \ge m \Rightarrow s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} a_i < s + \varepsilon.$$

Táto podmienka je už vhodná pre definovanie súčtu každého nekonečného radu. V učebnom texte, ktorý je dodatkom B tejto práce je preto vypracovaný práve tento postup odvodenia definície súčtu radu. I. Kluvánek v [55] ďalej tvrdí, že „úsilie vynaložené na limity sa nevypláca, lebo nemusí presvedčiť žiakov, že limity môžu mať iný zmysel ako svoju formálnu definíciu". Z tohto dôvodu je v učebnom texte navrhnutý postup, rešpektujúci historický vývoj.

Najprv je v ňom zavedený súčet nekonečného radu a následne je zavedený pojem limity postupnosti. Nekonečný rad má súčet s práve vtedy, keď

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N \text{ platí } n \ge m \Rightarrow s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} a_i < s + \varepsilon.$$

Teraz stačí vziať postupnosť čiastočných súčtov s_n a dostaneme definíciu

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N \text{ platí } n \geq m \Rightarrow s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon.$$

Táto definícia je vhodná pre akúkoľvek postupnosť bez ohľadu na to, či je alebo nie je postupnosťou čiastočných súčtov radu.

Hecht v [36] a Odvárko v [67] definujú súčet nekonečného radu ako limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov. Klaczkow v [52] a Babianski v [2] síce definujú súčet radu analogicky, ale definujú ho výlučne pre nekonečný geometrický rad. Tento pojem spomína medzi cieľmi vyučovania matematiky na gymnáziu (lýceu) aj Domoradzki v [21].

1.3 Limita funkcie

Limita funkcie je dosť odlišný pojem od limity postupnosti nielen z historického, ale aj z metodologického hľadiska, aj keď je možné chápať limitu postupnosti ako špeciálny prípad limity funkcie v nevlastnom bode. Tietze, Klika, Wolpers uvádzajú v [93] štyri definície limity funkcie v bode: Reálne číslo L sa nazýva limitou funkcie f v hromadnom bode a jej definičného oboru D, ak

1. $\forall\varepsilon \in R^+\ \exists\delta \in R^+\ \forall x \in D$ platí $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (Cauchyho definícia).

2. $\forall\varepsilon \in R^+\ \exists\delta \in R^+\ \forall x \in (D/\{a\}) \cap U_\delta(a)$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(L)$ $\quad$ ($U_\delta(a)$ je δ - okolie bodu $a, U_\varepsilon(L)$ je ε - okolie bodu L).

3. pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \neq a$, ktorá konverguje k číslu a platí, že postupnosť $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$konverguje k číslu L (Heineho definícia).

4. funkcia f má v bode a spojité pokračovanie(predĺženie) s funkčnou hodnotou L.

Podobne formuluje tieto štyri definície aj Hischer/Scheid v [43]. Poslednú z týchto definícií využíva vo svojej koncepcii vyučovania matematickej analýzy aj Kluvánek v [54], [55]. Argumentuje tým, že „nie je výhodné najprv zaviesť pojem limity funkcie a pomocou nej definovať spojitosť. Z pedagogického hľadiska je veľký rozdiel v tom, ktorý pojem zavedieme ako prvý. Každý skúsený učiteľ zdôrazňuje, že limita funkcie v bode nie je jej funkčná hodnota v tomto bode. Pre žiaka je veľmi ťažké konceptuálne rozlíšiť dva pojmy, ktoré sú podľa jeho skúsenosti identické."

Ďalším problémom je, že pri zavádzaní pojmu limity funkcie v bode vystupuje otázka jej existencie. Kým definícia spojitosti obsahuje tri, tak definícia limity funkcie v bode obsahuje až štyri kvantifikátory.

Z tohto dôvodu Kluvánek definuje najprv spojitosť funkcie v bode: Funkcia f je spojitá v bode a, ak ku každému okoliu V hodnoty $f(a)$ existuje okolie U bodu a také, že pre každé $x \in U$ platí $f(x) \in V$. Jeden kvantifikátor by sa dal aj odstrániť, ak by sme zápis „pre každé $x \in U$ platí $f(x) \in V$" nahradili zápisom
„$f(U) = \{f(x); x \in U\} \subset V$".

Potom je definovaná limita funkcie: Nech f je funkcia a nech a je hromadným bodom jej definičného oboru D. Nech $L \in R$ a F je funkcia definovaná nasledovne:

1. $F(x) = f(x)$, pre každé $x \neq a \wedge x \in D$
2. $F(a) = L$

Potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow F(x)$ je spojitá v bode a.

Okrem Kluvánka týmto spôsobom je definovaná aj v iných učebných textoch (pozri napríklad [58]).

Hecht v učebnici [37] zaviedol pojem limity funkcie f v bode a pre prípad, že funkcia f sa málo líši od nejakej spojitej funkcie, ktorá je v bode a definovaná: „Nech pre funkciu f a otvorený interval M obsahujúci bod a je g taká spojitá funkcia na množine M, že $g(x) = f(x)$ pre všetky $x \in M - \{a\}$. Potom limitou funkcie f v bode a nazývame číslo $b = g(a)$".

V poznámke 2 síce vysvetľuje, že v tejto definícii pojem spojitej funkcie nebol ešte zavedený, ale ho následne zavádza intuitívnym spôsobom: „Funkcia je spojitá na intervale I, ak jej graf na I možno nakresliť jedným ťahom, teda bez toho, aby sme zdvihli pri kreslení tužku." Nakoniec uvádza bez dôkazu limitu súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií. Za presnú definíciu limity funkcie považuje klasickú Cauchyho definíciu. Pre zaujímavosť možno spomenúť, že túto definíciu limity používa už aj Hronec v [46]: „Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode $x = a$ limitu b, ak ku každému číslu η existuje také číslo ε, že pre všetky x, vyhovujúce nerovnosti $|x - a| < \varepsilon$ je $|f(x) - a| < \eta$."

Riečan a kol. v učebnici [76] definuje pojem limity pomocou pojmu okolia bodu. Tieto pojmy definuje nasledovne:

Definícia 5. *Okolím $O(a)$ bodu a rozumieme ľubovoľný interval $O(a) = (a-r, a+r)$, kde r je kladné číslo (polomer okolia $O(a)$).*

Definícia 6. *Nech f je funkcia, ktorá je definovaná v okolí bodu a, prípadne okrem bodu a. Funkcia f má v bode a za limitu číslo L, ak k ľubovoľnému okoliu $U(L)$ bodu L existuje také okolie $V(a)$ bodu a, že pre všetky $x \in V(a), x \neq a$ platí $f(x) \in U(L)$.*

Potom sú v učebnici uvedené vety o tom, že

1. Funkcia f má v danom bode najviac jednu limitu.
2. Limita súčtu funkcií v danom bode je rovná súčtu limít jednotlivých funkcií v danom bode.
3. Limita násobku funkcie v danom bode je rovná násobku limity funkcie v danom bode.
4. Ak $n \in N_0$, potom $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

Prvé dve vety majú v učebnici uvedené dôkazy, dôkazy ďalších dvoch viet sú uvedené ako úlohy. Limitou súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcií sa Riečan hlbšie zaoberá v [77]. Využíva vo svojich úvahách vlastnosti okolí reálnych čísel.

Hrubý/Kubát v učebnici [47] sa najskôr venujú pojmu spojitosť funkcie, a potom definujú limitu funkcie v bode nasledovne:

Definícia 7. *Funkcia f má v bode a limitu L, ak ku ľubovoľne zvolenému okoliu bodu L, existuje okolie bodu a tak, že pre všetky reálne $x \neq a$ z tohto okolia patria hodnoty $f(x)$ zvolenému okoliu bodu L.*

V učebnici [2] Babianski a kol. je pojem limity funkcie preberaný najprv intuitívne: Tvrdenie „číslo g je limitou funkcie f pre x idúce k x_0" rozumieme tak, že $f(x)$ „sa blíži" k číslu g, ak x „sa blíži" k x_0. Na grafoch funkcií sú ukázané príklady funkcií, ktoré majú a nemajú limitu funkcie v bode. Je ukázané, že aj funkcia $y = sin\frac{1}{x}$ nemá limitu v bode 0 pomocou jej grafu na intervale $\langle 0,00015; 0,0006\rangle$. Potom sú uvedené Cauchyho aj Heineho definícia limity funkcie. Obe definície uvádza aj učebnica Klaczkow a kol. [53] a učebnica Kakol a kol. [50]. Učebnica [53] uprednostňuje Heineho definíciu, čo je vidno na rozsiahlom dôkaze, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Fischer/Malle/Bürger v [27] uprednostňujú na začiatku intuitívnu predstavu limity, ktorá sa buduje pomocou výpočtov derivácie polynomických funkcií. Následne sa určuje priebeh funkcie, vyšetrovanie tvaru grafov funkcií a nakoniec uvádza definíciu limity funkcie, ktorá je podobná Riečanovej v [76], lebo tiež využíva pojem okolia bodu.

Hischer/Scheid v [43] tvrdia, že je vhodné preberať súčasne pojmy limita a spojitosť funkcie. Dokumentujú to nasledovným príkladom: Nech f, g, h sú nasledovné funkcie definované na R.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Z, \\ 1 + x & \text{pre } x \in R \setminus Z, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 1 + x & \text{pre } x \in R \setminus Q, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{pre } x \in Q, \\ -(x-1)^2 & \text{pre } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

Skúmajme teraz existenciu limity týchto funkcií v bode 1. Použime Heineho definíciu limity. Definujme postupnosti

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad b_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{n+1}, \qquad c_n = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Potom z týchto postupností môžeme dostať pomocou daných funkcií deväť postupností funkčných hodnôt $f(a_n), f(b_n), f(c_n), \ldots, h(c_n)$. Z nich šesť postupností je konvergentných, pričom $f(a_n), f(b_n), f(c_n)$ konvergujú k číslu 2 a $h(a_n), h(b_n), h(c_n)$ konvergujú k číslu 0. Postupnosť $g(a_n)$ konverguje k číslu 1, $g(b_n)$ k číslu 2 a $g(c_n)$ je divergentná. Preto limita funkcie $g(x)$ v bode 1 neexistuje. Ako je to s limitami funkcií $f(x), h(x)$ v bode 1? Zvoľme postupnosť

$$d_n = 1 + \frac{1}{n+1}\left(1 + (-1)^n\right).$$

Postupnosť $f(d_n)$ je divergentná, ale postupnosť $h(d_n)$ konverguje k 0. Pre každú postupnosť x_n, ktorá konverguje k číslu 1, postupnosť $h(x_n)$ konverguje k číslu 0. Ak by sme v postupnosti d_n vylúčili členy rovnajúce sa číslu 1, tak by $f(d_n)$ konvergovala k číslu 2. Limity oboch funkcií v bode 1 existujú, rozdiel je však v tom, že kým funkcia f nie je spojitá v bode 1, tak funkcia h je spojitá v bode 1.

Pri tejto úlohe je však určité riziko, že môže dôjsť u žiakov k interferencii medzi pojmami spojitosť a limita funkcie v bode. Ak však učiteľ viac zdôrazní rozdiel medzi týmito pojmami, môže použiť tento príklad ako ukážku

1. spojitej funkcie v bode,
2. nespojitej funkcie v bode, ktorej limita v tomto bode existuje,
3. nespojitej funkcie v bode, ktorej limita v tomto bode neexistuje.

Na tomto mieste je vhodné študentom pripomenúť, že ak je funkcia v hromadnom bode spojitá, potom existuje aj limita funkcie v tomto bode.

Vystupuje tu v súvislosti s pojmom spojitosť funkcie otázka, či je vhodný obvyklý spôsob vyučovania limity funkcie a spojitosti v bode, keď je najprv preberaný pojem limity funkcie a následne pojem spojitosti. Nielen Kluvánek v [54], [55], ale aj Žukova v [109] preberá najprv pojem spojitosti funkcie, a potom limity, aj keď na rozdiel od Kluvánka používa klasické Cauchyho definície.

Freudenthal v [29] doporučuje pred preberaním pojmov limita a spojitosť funkcie, precvičiť u žiakov schopnosť narábať so všeobecným a existenčným kvantifikátorom. napríklad „Vždy tu niekto bol", „Niekto tu vždy bol". Prvá veta by sa dala preložiť: „Pre každý čas t existuje x, že osoba x v čase t tu bola" a druhá veta: „Existuje také x, že pre všetky časy t, osoba x tu bola."

Potom možno pokračovať aj jednoduchšími výrokmi z matematiky ako „$\sqrt{2}$ nie je iracionálne číslo". Toto tvrdenie možno preformulovať aj tak, že $p^2 = 2q^2, (p, q \in N)$ alebo $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ a zároveň sú p, q nesúdeliteľné čísla.

Freudenthal motivuje pojem spojitosti funkcie, z ktorého odvodzuje aj limitu funkcie, pomocou slovného spojenia „malé príčiny $\rightarrow$ veľké dôsledky". Pomocou kvantifikátorov by sa toto príslovie dalo preformulovať aj takto: „Ľubovoľne veľké následky pochádzajú z ľubovoľne malých príčin." Nech teraz príčiny sú interpretované veľkosťou x a nech prostredníctvom funkcie f sú prenesené na následky interpretované veľkosťou y. Výraz „ľubovoľne malá príčina" by sa dal matematizovať ako: $\forall \delta \in R^+$ existuje zmena od x_0 t.j. $|x - x_0|$ menšia ako δ. „Ľubovoľne veľký následok" by znamenal, že pre $\forall \varepsilon \in R^+$ existuje zmena od y väčšia alebo rovná ε. Celé príslovie by sme tak mohli zapísať ako: $\forall \varepsilon \in R^+\ \exists \delta \in R^+\ \forall x \in D(f); |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| \geq \varepsilon$.

Zmenami v tejto definícii možno potom dostať definície spojitosti a limity funkcie. Pomerne veľkú pozornosť venuje Freudenthal aj definícii rovnomernej spojitosti funkcie $\forall \varepsilon \in R^+\ \exists \delta \in R^+\ \forall x_1, x_2 \in D(f); |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ a negácii tejto definície.

Tall/Vinner v [91] zdôrazňujú, že v anglických školách je pojem limity funkcie spájaný v súvislosti s pojmom derivácie funkcie ako

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Najprv je predkladaná v dynamickej forme „$f(x)$ sa blíži k číslu (limite) L, ak x sa blíži k číslu a." Neskôr sa zavedie a ukáže Cauchyho definícia, ktorá využíva kvantifikátory. Tento postup zdôvodňujú tým, že dynamická predstava pojmu limity funkcie je pre žiakov zrozumiteľnejšia, a preto predchádza Cauchyho definíciu.

Ďalej je potrebné, aby žiaci získali skúsenosť s tým, že nemusí vždy platiť $f(a) = L$. Je vhodné uviesť na tomto mieste príklady ako $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)$ a nakoniec $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, pričom $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pre } x = 1, \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{pre } x \neq 1. \end{cases}$

Tieto príklady poukazujú na limity troch rôznych funkcií, ktoré síce existujú, ale pre $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L$ nastávajú nasledovné prípady:

1. $f(a) \neq L$, lebo $f(a)$ nie je v bode a definovaná.
2. $f(a) = L$, pričom rovnosť je chápaná „silne", takže obe strany rovnosti sú definované a existujú.
3. $f(a) \neq L$, lebo $f(a)$ je hodnota odlišná od L, ale $f(a)$, L sú definované a existujú.

Tall/Vinner v [91] upozorňujú na zaujímavý príklad limity zloženej funkcie, ktorá u žiakov vyvoláva častú nesprávnu predstavu, že ak

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ a zároveň } \lim_{y\to b} g(y) = c, \text{ tak potom } \lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Ako kontrapríklad možno uviesť konštantnú funkciu typu $f(x) = b$ a $g(y)$ takú, že $g(b) \neq c$. Celkom konkrétne, nech $f(x) = 3$ a

$$g(x) = \begin{cases} 4 & \text{pre } y \neq 3, \\ 5 & \text{pre } y = 3. \end{cases}$$

Teraz platí, že ak $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 3} g(y) = 4$, potom $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x)) = g(3) = 5$.

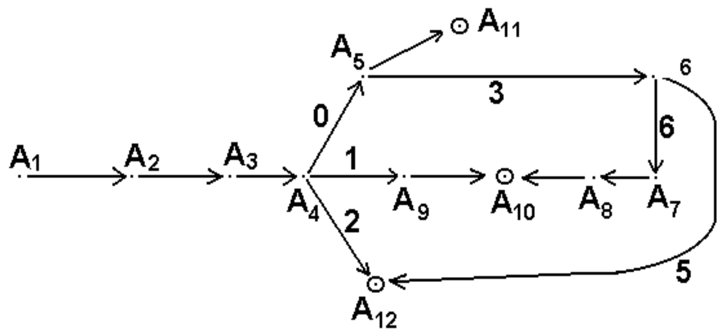
Ervynck v [26] upozorňuje v súvislosti s formálnou definíciou limity funkcie na možné riziká jej pochopenia žiakmi v nasledovných aspektoch:

- predstava o tom, že „x sa blíži k a",
- vzájomná súvislosť medzi úlohami čísel ε a δ,
- úloha a poradie kvantifikátorov $\forall$ a $\exists$,
- bezvýznamnosť prípadu $x = a$ a hodnoty $f(a)$,
- fakt, že bod a je hromadným bodom definičného oboru funkcie.

Tieto problémy súvisia s tým, že pojem funkcie je u žiakov často veľmi zjednodušený a zviazaný často len s jej grafom alebo funkčným predpisom.

Stolar v [88] formuluje slovne aj pomocou matematickej symboliky Cauchyho definíciu limity funkcie v bode. Kladie si pritom otázku: Je $\lim_{x\to a} f(x) = b$? Pri riešení tejto otázky využíva nasledovný orientovaný graf:

Obr. 6



Jeho vrcholy znamenajú:

A_1 — Vziať ľubovoľné kladné reálne číslo ε, prejsť k A_2.

A_2 — Zostaviť výraz $|f(x) - b|$, prejsť k A_3.

A_3 — Vysloviť podmienku $|f(x) - b| < \varepsilon$, prejsť k A_4.

A_4 — Pokúsiť sa vyjadriť z podmienky nerovnosť obsahujúcu výraz $|x-a|$. Ak sa to nepodarí, prejsť k A_5(cesta 0). Ak sa to podarí a riešenie má tvar $|x-a| < F(\varepsilon)$ a zároveň $F(\varepsilon) > 0$, prejsť k A_9(cesta 1). Ak však $|x - a| < F(\varepsilon)$ a zároveň $F(\varepsilon) \leq 0$, prejsť k A_{12}(cesta 2).

A_5 — Riešiť nerovnosť vyjadrením $x(\varphi(\varepsilon) < x < \psi(\varepsilon))$. Ak sa to podarí, tak prejsť k A_6 (cesta 3). Ak sa to nepodarí, prejsť k A_{11} (cesta 4).

A_6 — Zo získanej nerovnosti vyjadriť výraz $x - a(\varphi(\varepsilon) - a < x - a < \psi(\varepsilon) - a)$. Ak platí podmienka $\varphi(\varepsilon) - a > 0$ a zároveň $\psi(\varepsilon) - a < 0$, tak prejsť k A_7 (cesta 5). Ak táto podmienka neplatí, tak prejsť k A_{12} (cesta 6).

A_7 — Vziať $\delta = \min(\varphi(\varepsilon) - a, a - \psi(\varepsilon))$, prejsť k A_8.

A_8 — Zapísať nerovnosť $-\delta < x - a < \delta$, následne $|x - a| < \delta$ a prejsť k A_{10}.

A_9 — Vziať $\delta \leq F(\varepsilon)$, prejsť k A_{10}.

A_{10} — Odpoveď je pozitívna „áno", t.j.$\lim_{x\to a} f(x) = b$ (koniec).

A_{11} — Nepodarilo sa získať odpoveď, úloha zostáva nevyriešená (koniec).

A_{12} — Odpoveď je negatívna „nie", t.j. $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$ (koniec).

Tento graf má tri koncové vrcholy A_{10}, A_{11}, A_{12}. Tie označujú tri možné výstupy riešenia úlohy. Pri jednom z nich sa táto metóda riešenia ukázala ako neúspešná. K takémuto záveru by sme dospeli, ak by sme napríklad chceli získať odpoveď na otázku, či $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

Pri riešení tejto úlohy využívame známu vlastnosť limít funkcií, že ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ a zároveň pre každé prstencové okolie bodu a platí, že $f(x) \le g(x) \le h(x)$, tak potom aj $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Tieto úlohy sa vyskytujú väčšinou až na vysokej škole, lebo svojou náročnosťou prekračujú rámec stredoškolskej matematiky.

Przenioslo v [73] porovnáva pojmy limita funkcie a limita postupnosti, pričom limitu postupnosti chápe ako špeciálny prípad limity funkcie. Stretáva sa s problémom, že v oblasti intuitívnych predstáv pojmu limity funkcie, žiaci majú prvé skúsenosti pri nespojitých funkciách typu nepriama úmernosť, lineárna lomená funkcia, mocninová funkcia. Tu je vhodné pripomenúť, že pri lineárnej lomenej funkcii a nepriamej úmernosti v bodoch nespojitosti limita neexistuje (existuje len nevlastná jednostranná limita). Ďalej pri mocninovej funkcii so záporným párnym exponentom existuje v bode nula len nevlastná limita $+\infty$. Toto je určitý problém, ak chceme od žiaka, aby pochopil hlbšie význam konečnej limity funkcie v bode. Ďalším zdrojom chybných predstáv je nedostatok skúseností žiakov s funkciami, ktoré nie sú monotónne alebo sú nespojité a nepatria do horeuvedených typov funkcií. Tieto problémy doporučuje Przenioslo v [74] riešiť takou formou vyučovania, aby žiaci sami objavovali a formulovali svoje predstavy o limitných procesoch. To je možné v rámci problémového, činnostného alebo konštruktivistického vyučovania. Toto vyučovanie sme sa pokúsili prezentovať v kapitole 3.

Záverom možno z hľadiska stredoškolskej matematiky konštatovať, že v oboch v súčasnosti najčastejšie používaných učebniciach Hecht [37], Riečan [76] má pojem limity funkcie iba funkciu pomocného pojmu pri zavedení a definovaní derivácie funkcie v bode. Je otázka, či je to dostatočné. Odpoveď na túto otázku súvisí s tým, že aká časť z pojmov a problematiky limitných procesov má byť prebraná na strednej a aká časť už má byť prenechaná na vysokú školu. Túto situáciu komplikujú ešte dve skutočnosti. Po prvé, je všeobecne známe, že na úrovni stredných škôl je predpísané veľké množstvo učebnej látky v rámci učebných osnov, ktorej prebratie je pre mnohých učiteľov problémom. Po druhé, takmer všetci žiaci posledného ročníka stredných škôl majú predstavu o svojom štúdiu po skončení strednej školy, a preto tí, ktorí sa už s matematikou nestretnú, nemajú záujem o vyučovanie matematiky. Týchto žiakov je podstatne náročnejšie motivovať. Kým pojmy limita postupnosti a súčet nekonečného radu je možné motivovať zaujímavými úlohami najmä z histórie matematiky, tak pojmy limita funkcie a spojitosť funkcie sú oveľa abstraktnejšie.

Domnievame sa, že v 4. ročníku gymnázia je koncepcia učebnice Hecht [37] vhodná pre základnú informáciu všetkých žiakov posledného ročníka stredných škôl. Koncepcia učebnice Riečan [76] rozšírená o hlbší pohľad na limitu a spojitosť funkcie by bola vhodnejšia pre tých žiakov, ktorí budú študovať matematiku na vysokej škole.

1.4 Derivácia funkcie v súvislosti s limitným procesom

V súčasnosti najčastejšie používanej učebnici Hecht [37] je pojem derivácie funkcie zavádzaný pararelne viacerými spôsobmi. Jeden z nich je v súvislosti s pojmom dotyčnice funkcie v bode, pričom tento prístup nazýva Hecht statickým. Jeho podstatou je hľadanie dotyčnice pomocou sečnice, ktorá pretína graf funkcie v dotykovom bode hľadanej dotyčnice a v inom bode, ktorý sa potom k nemu limitne „približuje". Tento limitný proces súvisí s pojmom limity funkcie, preto ju aj na tomto mieste zavádza. Pomocu nej definuje deriváciu funkcie f v bode x nasledovne.

Definícia 8. *Deriváciou funkcie $f(x)$ v bode a nazývame vlastnú limitu*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

ak táto limita existuje. Deriváciou funkcie $f(x)$ v bode a označujeme $f'(a)$.

Analogickú definíciu používa Riečan v [76], [78]

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Obe definície pužívajú aj učebnice Hrubý/Kubát v [47], Babianski v [2], Klaczkow v [53].

Riečan v [78] podrobne rozoberá pojem dotyčnice k parabole, pomocou ktorej zavádza deriváciu. Potom sa venuje derivácii polynomických funkcií, zamýšľa sa nad vzťahom derivácie a monotónnosti a nakoniec ukazuje praktické použitie derivácie na približné riešenie rovníc.

Hrubý/Kubát v [47] kladie dôraz na pochopenie derivácie ako okamžitej rýchlosti pri závislosti dráhy hmotného bodu od času. Aj Babianski v [2] využíva fyzikálnu aplikáciu - závislosť dráhy hmotného bodu od času a vysvetľuje zmysel výrazu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ako priemernej rýchlosti. Po zavedení derivácie je venovaná osobitná pozornosť rovnici dotyčnice funkcie f v bode x_0, ktorá je daná vzťahom $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Knoche v [56], [57] upozorňuje na to, že žiaci sú príliš zvyknutí na to, že dotyčnica ku krivke má s ňou spoločný práve jeden bod, čo súvisí s tým, že sa prvý raz s pojmom dotyčnice stretli pri kružnici.

Ako definovať dotyčnicu ku krivke, ktorá má s ňou viac spoločných bodov? Skúsme si predstaviť nasledovnú situáciu: Nech krivka (graf funkcie f) je trajektóriou bicyklistu, ktorý vo večerných hodinách jazdí s rozsvieteným predným svetlom. Ak by sme svetelný kužeľ znázornili v rovine, dostali by sme uhol, ktorého os by určovala okamžitá rýchlosť. Táto rýchlosť má zároveň smer dotyčnice v danom bode. Táto úvaha vedie k nasledovnej definícii.

Definícia 9. *Funkcia g je dotyčnicou funkcie f v bode x_0, ak pre každé kladné reálne číslo ε existuje okolie bodu x_0, v ktorom platí, že graf funkcie f leží v sektore ohraničenom priamkami $g(\varepsilon, x) = f(x_0) + (m + \varepsilon)(x - x_0)$ a $g(-\varepsilon, x) = f(x_0) + (m - \varepsilon)(x - x_0)$.*

Teda v okolí bodu x_0 platí podmienka $f(x_0) + (m - \varepsilon)(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + (m + \varepsilon)(x - x_0)$. Odtiaľ dostaneme, že

$$m - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq m + \varepsilon.$$

Takto sme dostali, že musí existovať limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ alebo } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Hecht v [37] už na začiatku spomína význam dotyčnice ako lineárnej funkcie, ktorá „čo najlepšie aproximuje funkciu f v bezprostrednom okolí bodu x, ktorej graf čo najlepšie priľne ku grafu funkcie f." Tento prístup k diferenciálnemu počtu opisuje Knoche v [56], [57]. Nazýva ho *rozvíjanie pojmu diferencovateľnosti so zreteľom na lineárnu aproximáciu.* Pri tomto prístupe je základným pojmom podľa neho pojem diferencovateľnosti funkcie.

Definícia 10. *Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí U bodu x. Funkcia f je diferencovateľná v bode x, ak existuje číslo m a funkcia r, definovaná na U, že platí $f(x + h) = f(x) + mh + hr(h)$ pre všetky $x + h \in U$ a zároveň $\lim_{h \to 0} r(h) = 0$.*

Funkcia $f(x + h) = f(x) + mh$ lineárne aproximuje funkciu f v okolí U bodu x. Číslo m je deriváciou funkcie f v bode x.

Knoche pripomína, že spôsob aproximácie poskytuje nasledovné výhody:

1. možnosť jednotného vybudovania pojmov matematickej analýzy u žiakov,
2. schopnosť zovšeobecnenia konceptu,
3. zjednodušenie dôkazov.

Z hľadiska limitných procesov je významná prvá výhoda, pretože aj známa definícia „Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a práve vtedy, keď $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n \in N; \quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$" sa dá interpretovať tak, že „Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a práve vtedy, keď je aproximovateľná číslom a". To znamená, že pre každú kladnú reálnu „toleranciu" ε existuje prirodzené číslo n_0, také, že pre každé prirodzené číslo $n \in N$, $n \geq n_0$ možno v rámci tolerancie ε člen postupnosti a_n „nahradiť" číslom a.

Na prvý pohľad môže byť táto interpretácia cudzia, avšak hneď je zrejmejšia, ak si uvedomíme, že pri bežných výpočtoch tiež nahrádzame čísla s nekonečným desatinným rozvojom číslami s konečným desatinným rozvojom.

Definíciu spojitosti „Funkcia $f : D \to R$ je spojitá v bode $a \in D$ práve vtedy, keď $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists \delta \in R^+ \quad \forall x \in D; \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$" v zmysle aproximácie možno inerpretovať tak, že funkciu $y = f(x)$ možno aproximovať v každom okolí bodu a konštantnou funkciou $y = f(a)$.

Pojem derivácie v histórii inicializovala fyzika, preto Knoche v [56] a Tietze v [93] hovoria o zavedení pojmu derivácie aj so zreteľom na „priemernú zmenu funkčnej hodnoty", ktorú možno dať do súvislosti s pojmom priemerná rýchlosť známom z fyziky. Ak totiž počítame priemernú rýchlosť v istom časovom intervale, ktorý postupne skracujeme, tak v prípade, že sa limitne blíži k nule dostávame okamžitú rýchlosť, ktorá je deriváciou dráhy podľa času. pojmy priemerná rýchlosť a okamžitá rýchlosť využíva Bero v [10] ako nosné pri zavedení pojmu derivácie. Od nich sa odvíja pojem „rýchlosť rastu funkcie", ktorý je prirodzenou predstavou žiakov gymnázia o derivácii. Rovnako postupuje Hauke v [34], ktorý uvádza viaceré príklady, najmä zo športu, na priemernú a okamžitú rýchlosť, s ktorými sa môžu žiaci stretnúť v bežnom živote. Uveďme si aspoň niektoré.

1. Skok na lyžiach: Pri televíznych prenosoch je uvedená často nejaká rýchlosť (napríklad $90km.h^{-1}$). Zrejme sa jedná o okamžitú rýchlosť v okamihu skoku.

2. Tenis: Pri športových prenosoch býva uvedená rýchlosť lopty pri údere. Aj tu sa jedná o okamžitú rýchlosť.

3. Zjazd na lyžiach: Pri športových výsledkoch zvykne byť uvedený nielen čas, ale aj rýchlosť. V tomto prípade sa jedná o priemernú rýchlosť.

Popp v [72] poukazuje na možnosť používať pri propedeutike pojmu derivácia Fermatovu metódu hľadania extrémov. Jej podstata spočíva v tom, že ak má funkcia f v bode x extrém, tak v bode $x + h$ (h je číslo „blízke" nule) má približne rovnakú funkčnú hodnotu $f(x) \approx f(x + h)$. Môžeme nájsť týmto spôsobom maximum pre kvadratickú funkciu $ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x+h) \\
ax^2 + bx + c &\approx a(x+h)^2 + b(x+h) + c \\
ax^2 + bx &\approx ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh \\
0 &\approx 2ahx + ah^2 + bh \\
0 &\approx 2ax + ah + b
\end{aligned}$$

Teraz, ak by sa $h = 0$, potom $0 = 2ax + b$, teda $x = -\frac{b}{2a}$.

Ak by sme chceli nájsť bod x, v ktorom má funkcia f „rast" s (smernica jej dotyčnice v bode x je s), tak to možno pomocou Fermatovej metódy urobiť pomocou funkcie $g(x) = f(x) - sx$. Ukážeme si to na príklade funkcie $y = x^2$.

Pre túto funkciu je $g(x) = x^2 - sx$. Bod x je následne určený hodnotou čísla s.

$$\begin{aligned}
g(x+h) &\approx g(x) \\
(x+h)^2 - s(x+h) &\approx x^2 - sx \\
x^2 + 2hx + h^2 - sx - sh &\approx x^2 - sx \\
2hx + h^2 - sh &\approx 0 \\
2x + h - s &\approx 0
\end{aligned}$$

Ak by sa $h = 0$, potom $0 = 2x - s$, teda $2x = s$ alebo $x = \frac{s}{2}$. Vidíme, že $s = 2x$ nápadne pripomína vzťah $y' = 2x$.

Problém Fermatovej metódy je však v tom, že nie je celkom korektná. Číslo h má rozličné významy. Najprv je to konečné číslo, ktorým je možné deliť, a potom ho kladieme rovné nule. Popp ďalej poznamenáva, že v tomto smere je korektnejšie využitie Leibnizovho charakteristického trojuholníka a úplné riešenie tohto problému prináša neštandardná analýza.

Fischer, Malle v [27] sa zamýšľajú nad zmyslom pojmu derivácie vo vyučovaní matematiky. Jednou z možností je vyšetrovať priebeh funkcie, ktorý je pomocou nej ľahší z dôvodu redukcie počtu premenných. Ďalší zmysel je v zavedení nových aj mimomatematických pojmov. Okrem už spomínanej okamžitej rýchlosti to môže byť zrýchlenie, intenzita elektrického prúdu, pokles tlaku, hraničné výdavky, elasticita dopytovej funkcie, veta o maximálnom zdanení atď. Limitný prechod pri derivácii má zmysel najmä v oblasti modelovania reálnych situácií, pretože zjednodušuje a sprehľadňuje ich popis.

Podobne ako Hecht v [37] aj Blum v [14] používa numerické vyjadrenie limitného procesu pomeru zmien na zistenie smernice dotyčnice funkcie v bode. Hecht to ukazuje na príklade funkcie $y = x^3$ pre bod $x = 1$:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(1+\triangle x)^3 - 1}{\triangle x} = \frac{3\triangle x + 3\,(\triangle x)^2 + (\triangle x)^3}{\triangle x} = 3 + 3\triangle x + (\triangle x)^2$$

$\triangle x$	0,1	0,01	0,001
$\frac{\triangle y}{\triangle x}$	3,31	3,0301	3,003001

Blum používa funkciu $y = \dfrac{2}{3}x^2$ pre $x = 1$.

x	1,5	0,5	1,1	...	1,001	...
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	$1,\overline{6}$	1	1,4	...	1,3334	...

Zdôvodňuje, že hľadaná hodnota je $1,\overline{3} = \dfrac{4}{3}$.

Algebricky je to možné vypočítať pre $x \neq 1$.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}}{x-1} = \frac{\frac{2}{3}(x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Výsledok $1,\overline{3} = \frac{4}{3}$ dostaneme, ak sa x „blíži" k číslu 1. Na upevnenie pochopenia pojmu dotyčnice ako výsledku limitného procesu sečníc navrhuje Blum nasledovnú úlohu:

Nech je daná funkcia $y = \frac{2}{3}x^2$ a bod $a = 1$. Pre aké hodnoty x sa smernica sečnice prechádzajucej bodmi $[1, f(1)]$ a $[x, f(x)]$ a dotyčnice v bode $[1, f(1)]$ líši menej ako 0,01?

Riešenie: Smernica sečnice pre $x \neq 1$ je $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$. Smernica dotyčnice je $\frac{4}{3}$. Hľadaná podmienka má teda tvar

$$\begin{aligned} -0{,}01 &< \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3} < 0{,}01 \\ -0{,}03 &< 2x - 2 < 0{,}03 \\ 1{,}97 &< 2x < 2{,}03 \\ 0{,}085 &< x < 1{,}015 \end{aligned}$$

Vidíme, že podmienke úlohy vyhovujú všetky reálne čísla z intervalu (0,085; 1,015). Nasledovný krok môže byť ten, že číslo 0,01 nahradíme kladným reálnym číslom ε a vyriešime túto úlohu všeobecne. Týmto postupom chcel Blum vyjadriť presvedčenie, že je proti

1. formalizácii pojmu limity funkcie pred alebo na začiatku preberania pojmu derivácie,
2. čisto intuitívnej práci s limitami,
3. zrieknutiu sa pojmu limity s ohľadom na didaktické ťažkosti, ktoré sprevádzajú formálne matematické narábanie s týmto pojmom počas vyučovania.

Freudenthal v [29] pripomína viaceré druhy praktických prístupov k propedeutike pojmu derivácie. Podstatou numerického prístupu je využitie tabuliek hodnôt funkcií na výpočet numerických hodnôt podielu diferencií

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Freudenthal v geometrickom prístupe spája pojmy derivácia a integrál. Pomocou grafu spojitej funkcie f a obsahu rovinného útvaru „pod grafom" chce znázorniť a ukázať, že

$$f(x) \approx \frac{\int\limits_{x}^{x+\triangle x} f(\xi)\, d\xi}{\triangle x}.$$

Ak sa $\triangle x$ „limitne blíži" k nule, tak sa uvedený zlomok „blíži" k $f(x)$. Naopak pre deriváciu funkcie f' v bode x platí

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}, \text{ odtiaľ } f'(x)\triangle x \approx f(x + \triangle x) - f(x).$$

Preto platí pri integrovaní

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Ďalej Freudenthal spomína fyzikálne veličiny rýchlosť, hustota telesa, kapacita vodiča, ktoré využívajú deriváciu aj určitý integrál.

Hischer/Scheid v [43] zavádza pre funkciu f funkciu smernice sečnice, ktorá je totožná s podielom diferencií:

Definícia 11. *Nech funkcia f je definovaná v bode a a aspoň v jednom bode okrem a. Označme definičný obor funkcie f ako D_f. Funkciu*

$$s_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

definovanú na množine $D_f - \{a\}$ nazývame funkcia smernice sečnice funkcie f v bode a.

Ukazuje túto funkciu na viacerých príkladoch. Pre funkciu $f = x^2$ je $s_{f,a}(x) = x + a$. Potom definuje pojem diferencovateľnosti funkcie nasledovne.

Definícia 12. *Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí bodu a a nech T je podmnožinou jej definičného oboru D_f. Potom funkcia f je diferencovateľná v bode a práve vtedy, keď existuje limita $\lim\limits_{x\to a} s_{f,a}(x)$. Funkcia f je diferencovateľná na množine T práve vtedy, keď je diferencovateľná v každom bode množiny T.*

Označme teraz ako A_f množinu všetkých bodov $a \in D_f$, v ktorých je f diferencovateľná. Potom funkciu $f'(x) = \lim\limits_{x\to a} s_{f,a}(x)$ s definičným oborom A_f nazývame funkciou derivácie funkcie f. Jej hodnota $f'(a)$ sa nazýva derivácie funkcie f v bode a.

Knoche v [56] tiež používa pojem funkcie smernice sečnice funkcie f v bode a v rámci koncepcie pojmu derivácie ako lokálneho pomeru zmien, ale on uvádza definíciu diferencovateľnosti funkcie ako možnosti spojitého predĺženia funkcie smernice sečnice v bode. Tento prístup je pomerne abstraktný, a preto je vhodný skôr pre vysokoškolských študentov.

Riede v [79] sa zamýšľa nad deriváciou ako smernicou dotyčnice funkcie a uvažuje nad tým, prečo by mal limitný proces vyzerať tak, že dotykový bod dotyčnice je jeden pevný bod sečnice a druhý bod sečnice sa „limitne približuje" k prvému. Ako alternatívu uvádza definíciu *Schwarzovej derivácie.*

Definícia 13. *Nech funkcia f je spojitá a definovaná v nejakom okolí bodu a. Funkcia f je Schwarz-diferencovateľná v bode a práve vtedy, keď existuje limita*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Číslo $f'(a)$ sa nazýva Schwarzova derivácia funkcie f v bode a.

Uvádza na tento pojem aj zaujímavý geometrický príklad.

Povrch rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elipsy okolo jej vedľajšej poloosi b (nazýva sa sféroid) sa vypočíta podľa vzťahu

$S = 2\pi \left(a^2 + b^2 \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1-h)}{2h} \right)$, kde $h = \dfrac{e}{a}$ (a je hlavná poloos, e je lineárna excentricita). Ak sa teraz elipsa „blíži" ku kružnici, tak sféroid sa „blíži" ku guli:

$$a \to b, e \to 0, h \to 0. \text{ Potom } S = 2\pi a^2 \left(1 + \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1-h)}{2h} \right) = 4\pi a^2.$$

Meschkowski v [64] zavádza pojem derivácie tiež pomocou pojmu okamžitá rýchlosť, avšak on ho skúma ako limitu postupnosti priemerných rýchlostí v_n za časové intervaly t_n, pričom postupnosť časových intervalov konverguje k nule.Ak by sme chceli určiť okamžitú rýchlosť padajúceho kameňa po 1 sekunde jeho voľného pádu, môžeme ju vypočítať ako limitu priemerných rýchlostí za časový interval $\frac{1}{n}$, t.j od $t_1 = 1s$ po $t_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) s$. Pre veľkosť $n-$tej priemernej rýchlosti platí

$$v_n = \frac{5\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 5.1^2}{\frac{1}{n}} = 10 + \frac{5}{n}.$$

Potom pre veľkosť okamžitej rýchlosti v čase $t = 1s$ platí

$$v = \lim_{n\to\infty} \left(10 + \frac{5}{n}\right) = 10.$$

Ak by sme túto úvahu zovšeobecnili pre každú závislosť dráhy od času, dospejeme k definícii derivácie, ktorá spája definíciu

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ a Heineho definíciu limity funkcie.}$$

Definícia 14. *Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b). Funkcia je v bode $x \in (a, b)$ diferencovateľná, ak pre každú nulovú postupnosť $(\triangle x_n)_{n=1}^{\infty}$, t.j $\lim_{n\to\infty} \triangle x_n = 0$ s vlastnosťami $\forall n \in N;\quad \triangle x_n \neq 0 \wedge x + \triangle x_n \in (a, b)$ existuje tá istá limita postupnosti pomeru diferencií*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \triangle x_n) - f(x)}{\triangle x_n} = f'(x).$$

$f'(x)$ sa nazýva derivácia funkcie f v bode x.

Hofe v [44] upozorňuje na to, že žiaci pri pochopení derivácie podľa definície 8 môžu mať problém pri rozlíšení pomeru diferencií (výraz za znakom limity v definícii) a samotnou deriváciou. Domnievame sa, že tento problém môže mať dve závažné príčiny.

Prvou z nich je tá, že pri výpočte limít funkcií alebo postupností sa žiaci tak zamerajú na úpravu algebrických výrazov, že vo výpočtoch zabudnú písať znak limity. To má za následok, že unikne ich pozornosti, že ich úlohou je výpočet limity.

Druhou môže byť nepochopenie limitného procesu „prechodu" dotyčnice na sečnicu, čo sa stane, keď v definícii 8 číslo h „blíži" k nule. Na to upozorňuje aj Mundy/Graham v [65], kde argumentujú, že žiakom často chýba grafická predstava o derivácii ako o smernici dotyčnice, ale naopak môžu dosahovať dobré výsledky pri výpočte derivácii jednotlivých funkcií. Toto prebieha najmä vtedy, ak je vyučovanie príliš zamerané na kalkulus.

Tall v [90] si zamýšľa nad problémami, ktoré môžu vzniknúť pri označení derivácie ako $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ vo vyučovaní matematiky.

Upozorňuje na to, že u niektorých žiakov vzniká nesprávna predstava, že „dy je limita, keď sa δy blíži k nule" alebo „ $dx = \lim\limits_{\delta x \to 0} \delta x = 0$". Tieto nesprávne predstavy môžu vychádzať z povrchných vedomostí žiakov o zmysle uvedenej symboliky, preto musí byť učiteľ matematiky pri jej používaní opatrný a radšej ju nepoužívať, pokiaľ ju žiakom podrobnejšie nevysvetlí.

Kluvánek v [55] a Königsberger v [58] uvádzajú nasledovnú definíciu derivácie funkcie v bode.

Definícia 15. *Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x a nech k je reálne číslo. Nech φ je taká funkcia, že $\varphi(0) = k$ a zároveň $f(x+u) - f(x) = \varphi(u)u$ pre každé u z niektorého okolia bodu 0. Ak možno číslo k zvoliť tak, že funkcia φ je spojitá v bode 0, tak hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode x a číslo k sa nazýva derivácia funkcie f v bode x.*

V tejto definícii je aplikovaná definícia limity funkcie, ktorú uvádza Kluvánek predtým v [55]. Zo vzťahu $f(x+u) - f(x) = \varphi(u)u$ totiž vyplýva, že

$$\frac{f(x+u) - f(x)}{u} = \varphi(u).$$

Takže v definícii 15 sa prakticky jedná o

$$\lim_{u \to 0} \varphi(u) = \lim_{u \to 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u}.$$

Hauke v [34] spomína spôsob definovania derivácie funkcie v bode ako „hodnoty diery" alebo „spojitého predĺženia" funkcie smernice sečnice definovanej v definícii 11. Táto myšlienka podľa neho nie je nová a mohla by ju vyjadriť aj nasledovná definícia, ktorá je vyjadrením definície limity $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ v zmysle definície limity funkcie, ktorú uvádza Kluvánek v [55].

Definícia 16. *Nech funkcia f je definovaná na intervale I, nech a je bod z intervalu I a nech k je reálne číslo. Ak funkcia smernice sečnice definovaná na I*

$$s_{f,a}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pre } x \neq a, \\ k & \text{pre } x = a \end{cases}$$

je spojitá v bode a, tak funkcia f je diferencovateľná v bode a. Číslo k sa nazýva derivácia funkcie f v bode x.

Nech funkcia f je $y = x^2$ a zistime, či je diferencovateľná v bode 2 podľa definície 16. Funkcia smernice sečnice je

$$s_{f,2}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & pre\ x \neq 2, \\ k & pre\ x = 2. \end{cases}$$

Zároveň pre $x \neq 2$ platí $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$. Funkcia $s_{f,2}(x)$ je mimo bodu 2 lineárnou funkciou $x + 2$. Aby bola v bode 2 spojitá, je potrebné, aby v tomto bode mala hodnotu 4. Preto derivácia funkcie f v bode 2 je 4.

1.5 Určitý integrál v súvislosti s limitným procesom

Ako je uvedené v kapitole A.3 už John Wallis využíval pri výpočte určitého integrálu súčet nekonečného radu. Tietze v [93] považuje pojem určitého integrálu za zložitejší ako pojem derivácie. To je dôvod, prečo sa vo vyučovaní matematiky preberá tento pojem až po derivácii.

Pojem určitého integrálu úzko súvisí s pojmom obsahu rovinného útvaru ohraničeného rovinnou krivkou. Knoche v [56] sa zameral na určitý integrál spojitých funkcií z hľadiska vlastností obsahu rovinných útvarov, čo je postačujúce z hľadiska gymnaziálnej matematiky. S určitými integrálmi nespojitých funkcií sa môžu študenti stretnúť až na vysokej škole.

V súvislosti s pojmom obsahu rovinného útvaru možno podľa Knocheho pripomenúť žiakom nasledovné vlastnosti tohto pojmu, ktoré už poznajú.

1. Obsah $S(U)$ útvaru U je nezáporné reálne číslo.

2. Zhodné útvary majú rovnaké obsahy.

3. Ak pre dva útvary U_1, U_2 platí $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tak potom $S(U_1 \cup U_2) = S(U_1) + S(U_2)$.

4. Obsah obdĺžnika s dĺžkami strán a, b je súčin ab.
   Z vlastností 1, 3 vyplýva, že

5. Ak pre dva útvary U_1, U_2 platí $U_1 \subseteq U_2$, tak potom $S(U_1) \leq S(U_2)$.

Tieto základné vlastnosti, ktoré predpokladajú existenciu obsahu rovinného útvaru možno použiť aj pri výpočte obsahu rovinného útvaru v súradnicovej sústave ohraničeného osou x a krivkami $x = a, x = b, y = f(x)$, pričom f je spomínaná spojitá funkcia a a, b sú reálne čísla, kde $a \leq b$.

Predpokladajme teraz, že číslo a je stála konštanta a nech b je premenná z intervalu $\langle a, \infty)$. Obsah tohto útvaru charakterizujme pomocou funkcie premennej b a označme ju $F_a(b)$. Aby sme určili funkčnú hodnotu tejto funkcie, doporučuje Knoche v [56] aproximovať funkciu f pomocou schodovitých funkcií.

Ukážme si to na príklade funkcie $f(x) = x^2$ a zvoľme $a = 0, b = 1$. Rozdeľme interval $\langle 0, 1\rangle$ na n rovnakých intervalov. Pomocou nich definujme dve schodovité funkcie. Prvá z nich bude na každom intervale nadobúdať najmenšiu, druhá najväčšiu funkčnú hodnotu funkcie f na príslušnom intervale. Kedže v našom prípade f je rastúca funkcia, je to funkčná hodnota funkcie f v pravom resp. ľavom koncovom bode príslušného intervalu.

Podľa 4. vlastnosti obsahu, obsah rovinného útvaru na jednotlivých intervaloch „pod" schodovitou funkciou sa bude rovnať súčinu šírky intervalu a funkčnej hodnoty. Podľa 3. vlastnosti obsahu, obsah rovinného útvaru „pod" schodovitou funkciou na intervale $\langle 0,1\rangle$ sa bude rovnať súčtu obsahov na jednotlivých intervalov delenia $\langle 0,1\rangle$. Ak navyše použijeme 5. vlastnosť obsahu, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \le F_0(1) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 .$$

V prípade limitného prechodu $n\to\infty$ dostaneme, že $F_0(1)=\frac{1}{3}$. Tento spôsob zavedenia obsahu rovinného útvaru „pod grafom" spojitej funkcie je dôležitý aj z toho hľadiska, že umožňuje radiálnu štruktúru vyučovania matematiky, pretože prepája viaceré časti matematiky. Učiteľ matematiky môže pripomenúť význam rovinných útvarov v rámci geometrie. Spomínané súčty obsahov vedú k horným a dolným integrálnym súčtom Riemannovho integrálu. Nakoniec, ak by sme výpočet zovšeobecnili pre každé b z intervalu $\langle 0,\infty)$, tak $F_0(b)=\frac{b^2}{3}$. To je použiteľné ako propedeutika pri zavedení pojmu primitívna funkcia.

Tietze v [93] uvádza aj nasledovnú definíciu riemannovskej integrovateľnosti.

Definícia 17. *Nech funkcia f je ohraničená funkcia, definovaná na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$. Ďalej nech $T=\{x_i; a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$ je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. $\underline{f_i}=\inf\{f(x); x_{i-1}\le x\le x_i\}$ je infimum a $\overline{f_i}=\sup\{f(x); x_{i-1}\le x\le x_i\}$je supremum funkcie f na i-tom intervale $\langle x_{i-1},x_i\rangle$. Čísla*

$$\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}\underline{f_i}(x_i-x_{i-1}), \overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}\overline{f_i}(x_i-x_{i-1})$$

sa nazývajú dolný, resp. horný integrálny súčet funkcie f vzhľadom na delenie T.

Číslo $S(T)=\sum_{i=1}^{n} f_x(x_i-x_{i-1}), x_{i-1}\le x\le x_i$ sa nazýva Riemannov (medzi)súčet.

Funkcia f je riemannovsky integrovateľná, ak je splnená jedna z nasledujúcich navzájom ekvivalentných podmienok.

1. *Darbouxov dolný integrál sa rovná Darbouxovmu hornému integrálu.*

$$\sup_T \underline{S}(T)=\inf_T \overline{S}(T),$$

2. *Existuje postupnosť delení intervalu $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú platí*

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(T_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(T_n),$$

3. Existuje postupnosť delení intervalu (T_n) a také reálne číslo s,

že pre každú postupnosť $(S(T_n))_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} S(T_n) = s$.

V každom prípade sa navzájom rovnajúci horný a dolný integrál, resp. existujúca limita nazýva Riemannov integrál funkcie f v hraniciach od a po b a označujeme ho ako $\int_a^b f$ alebo $\int_a^b f(x)\,dx$.

Výpočet určitého integrálu mocninovej funkcie od Johna Wallisa známy z histórie matematiky, smeruje viac k 3. podmienke definície 17. Predchádzajúci výpočet pre obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie $y = x^2$, priamkami $x = 0$ a $x = 1$ smeruje k 2. podmienke definície 17.

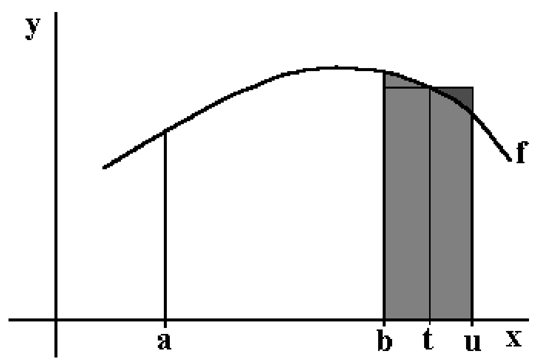
V súvislosti s týmto výpočtom môže vzniknúť problém, či v prípade, že postupnosť geometrických útvarov konverguje k nejakému výslednému útvaru, aj postupnosť obsahov týchto útvarov konverguje vždy k obsahu výsledného útvaru.

Talentovaným žiakom je možné zadať nasledovný problém, ktorý je možné znázorniť manuálne už na základnej škole: Vystrihnime z papiera štvorec 4×4. Rozstrihnime ho pozdĺžne na polovice, priložme ich k sebe kratšími stranami a zlepme. Dostaneme obdĺžnik 2×8. Rozstrihnime ho znova pozdĺžne a zopakujme predchádzajúci postup. Dostaneme obdĺžnik 1×16. Ak by sme to „robili donekonečna" dostaneme postupnosť obdĺžnikov $4n \times \frac{4}{n}$. Každý z nich má obsah 16. Čo je výsledný geometrický útvar? Je jeho obsah 16?

Hecht v učebnici [37] rozvíja propedeutiku určitého integrálu pomocou dynamického pohľadu na obsah rovinného útvaru „pod krivkou" (grafom spojitej funkcie), ktorý využíva na to, aby u žiakov vznikla intuitívna predstava, že funkčná hodnota je úmerná „rýchlosti pritekania obsahu", t.j. prírastku obsahu $\triangle S$ prepočítanému na jednotku dĺžky h. Tento výsledok využíva pri odvodení Newtonov-Leibnizovho vzorca. Limitný proces používa len nepriamo, pretože úvaha o „rýchlosti pritekania obsahu", t.j. prírastku obsahu prepočítanému na jednotku dĺžky, by sa dala použijúc symboliku v učebnici presnejšie formulovať aj tak, že $y_0 = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\triangle S}{h}$.

Podobný spôsob používa aj Hrubý/Kubát v [47] komplikovanejším spôsobom, ktorý využíva jednostranné limity zľava a sprava.

Obr. 7



Kahl v [49] využíva pri zavedení určitého integrálu spojitej funkcie znalosť primitívnej funkcie a platnosť vety o strednej hodnote spojitej funkcie na uzavretom intervale. Označme podľa obr. 7 obsah rovinného útvaru ohraničeného priamkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f ako $g(b)$. Na gymnaziálnom stupni sa tu „mlčky" predpokladá, že spojité funkcie sú integrovateľné, a teda taká funkcia $g(b)$ existuje. Keďže funkcia závisí od b, bod a zostáva pevný. Teraz nás zaujíma, ako „rýchlo rastie" alebo sa „mení" funkcia g.

Z diferenciálneho počtu už žiaci vedia, že „rýchlosť zmeny" vyjadruje derivácia, preto je prirodzené nájsť hodnotu $g'(b)$. Ak sa vrátime k definícii 16 z predchádzajúcej kapitoly, tak pre funkciu smernice sečnice $s_{g,b}(u)$ platí

$$s_{g,b}(u) = \frac{g(u) - g(b)}{u - b} = \frac{\text{obsah „sivého útvaru"}}{u - b} \qquad \text{pre } u \neq b.$$

„Obsah sivého útvaru" $S = g(u) - g(b)$ možno vyjadriť v tvare $(u-b)f(t)$, pre vhodné t z intervalu $\langle b, u\rangle$. Vtedy obsah tohto obdĺžnika $(u - b)f(t)$ je zhodný s obsahom S. To sa dá znázorniť tak, že obsah časti útvaru S „nad" priamkou $y = f(t)$ je zhodná s obsahom časti obdĺžnika „nad" grafom funkcie $y = f(x)$. Tak dostaneme pre $x \neq u$

$$s_{g,b}(u) = \frac{(u - b)f(t)}{u - b} = f(t).$$

Keďže funkcia f je spojitá aj v bode b, tak môžeme funkciu $s_{g,b}(u)$ „dodefinovať", aby sa stala spojitou. Ak vezmeme do úvahy, že $t \in \langle b, u\rangle$, tak $s_{g,b}(b) = f(b)$. To podľa definície 16 znamená, že $g'(b) = f(b)$.Tak sme dostali, že funkcia g je primitívnou funkciou funkcie f.

Ak primitívnu funkciu funkcie f môžeme zapísať v tvare $F(x) + c$, tak v našom prípade, v zmysle významu funkcie g platí, že $g(a) = 0$. Ak $0 = g(a) = F(a) + c$, potom $c = -F(a)$ a $g(b) = F(b) - F(a)$. Tým sme dokázali *Newton - Leibnizovu formulu* a týmto spôsobom môžeme zaviesť *Newtonov integrál* vo vyučovaní matematiky.

Podobný spôsob ako Kahl použil aj Klaczkow v [53], pričom najprv využíva Weierstrassovu vetu, že každá spojitá funkcia nadobúda na uzavretom intervale maximum a minimum. Následne je využitá veta o strednej hodnote funkcie. Aj keď táto učebnica uvádza pri preberaní limity funkcie v bode Cauchyho aj Heineho definíciu limity funkcie v bode, pri určitom integrále uvádza Newtonov a neuvádza Riemannov integrál.

V doterajších úvahách sme si mohli všimnúť ako sa pri zavádzaní určitého integrálu prelínajú dva prístupy. Jeden z hľadiska pojmu primitívna funkcia a druhý z hľadiska pojmu obsah rovinného útvaru. Ako sa tieto prístupy majú uplatniť vo vyučovaní matematiky?

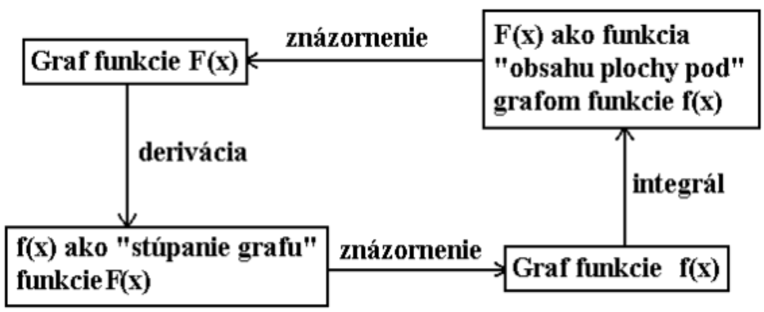
Bender v [8] tvrdí, že vo vyučovaní matematiky sa oba tieto prístupy navzájom prelínajú a navzájom ovplyvňujú. Rozdiel medzi nimi sa podľa neho často redukuje na novú konštrukciu alebo rekonštrukciu primitívnej funkcie. To znamená, že k funkcii f hľadáme funkciu F, ktorá je funkciou obsahu rovinného útvaru „pod krivkou" f alebo k funkcii f hľadáme funkciu F, pre ktorú je funkcia f rýchlosťou „jej rastu" alebo deriváciou. Tento rozdiel nie je výrazný z matematického hľadiska, ale z hľadiska pojmotvorného procesu. Okrem toho veľa odborníkov v oblati teórie vyučovania matematiky, učiteľov matematiky a žiakov považuje prvý prístup za názornejší.

Z hľadiska využitia limitných procesov je dôležitejší prvý prístup, pretože integrál ako obsah rovinného útvaru môže vzniknúť aj ako výsledok limitného procesu. Na to poukazuje aj história matematiky, stačí spomenúť kvadratúry rôznych geometrických útvarov napríklad Archimedovu kvadratúru paraboly (pozri kapitolu A.1). Okrem toho aj definícia 17 riemannovskej integrovateľnosti smeruje k tomuto prístupu.

Ďalej Bender v [8] nadväzuje na myšlienku Kahla v [49] formulovaním tvrdenia, že hodnoty spojitej funkcie f sú priemerné hodnoty pomeru zmien nejakých funkcií veľkosti „obsahu pod krivkou" f, pričom nezáleží na počiatočnom, resp. pevnom bode, ktorý zvolíme. Ak tieto zmeny limitne „blížia" k nule, tak dostávame známy fakt, že derivácia funkcie veľkosti „obsahu pod krivkou" f v určitom bode sa rovná veľkosti funkčnej hodnoty funkcie f v tom istom bode. To využíva pri budovaní určitého integrálu aj Hecht vo svojej učebnici [37].

Tu vidieť, že limitný proces môže zohrať dôležitú úlohu pri hľadaní vzájomných súvislostí medzi integrálnym a diferenciálnym počtom. Z hľadiska princípu názornosti vo vyučovaní matematiky zohráva v tomto prepojení diferenciálneho a integrálneho počtu znázornenie grafu funkcie. Bender to v [8] vyjadril nasledovnou schémou.

Obr. 8



Fischer v [28] sa zamýšľa nad pojmom určitého integrálu zo širšieho uhla pohľadu a rozlišuje jeho tri aspekty.

1. Integrál ako limita určitých súčtov súčinov (vnútromatematická definícia),
2. Integrál ako obsah rovinného alebo objem priestorového útvaru (vnútromatematický význam),
3. Integrál ako (mechanická) práca, dráha telesa, teplo, funkcia výrobných nákladov získaná z funkcie marginálnych nákladov, atď. (mimomatematický, najmä fyzikálny význam).

Pri pohľade na vyučovanie gymnaziálnej matematiky u nás možno povedať, že z týchto troch aspektov, dominuje vo vyučovaní druhý aspekt. Prvý a tretí je pomerne zriedkavý. Domnievame sa, že to môže mať dve podstatné príčiny. Prvou z nich je, že v učebniciach sa prvý a tretí aspekt takmer nevyskutyje a ak áno, tak len okrajovo. Druhou je známy kritizovaný problém predimenzovanosti učiva, takže učitelia matematiky nemajú dostatok času. Pre nich je výhodnejšie v rýchlosti prebrať problematiku z hľadiska len jedného aspektu. Keďže z hľadiska názornosti a kalkulatívnej náročnosti je druhý aspekt najľahšie zvládnuteľný, je aj najčastejšie učiteľmi používaný.

V poslednom ročníku gymnázia, v ktorom je aj táto problematika preberaná, sú žiaci obvykle diferencovaní podľa toho, či idú alebo nejdú maturovať z matematiky, resp. či sa stretnú alebo nestretnú s matematikou vo vysokoškolskom štúdiu. Domnievame sa, že pre tých, ktorí sa s danou problematikou ďalej nestretnú, stačí poznanie určitého integrálu z hľadiska druhého aspektu aj na intuitívnej úrovni. Pre tých, ktorí sa s danou problematikou stretnú aj na vysokej škole a budú využívať určitý integrál na riešenie rôznych praktických problémov, je výhodné poznať aj jeho tretí aspekt. Najľahšie ho môže učiteľ matematiky prezentovať jednoduchými aplikáciami určitého integrálu v rôznych oblastiach (fyzika, ekonómia, atď).

Ako príklad si môžeme uviesť nasledovnú fyzikálnu aplikáciu, ktorú uvádza Jost v [48]. Našou úlohou je určiť, s akou rýchlosťou musí vyštarovať raketa, aby sa mohla dostať mimo vplyv gravitácie Zeme (výsledok je vhodný napríklad pre let na Mesiac). Najprv určíme veľkosť práce, ktorú treba vynaložiť na prenesenie telesa z povrchu Zeme do výšky h. Ak sa jedná o výšku v tisícoch kilometrov, nemožno považovať gravitačné zrýchlenie za konštantné. Je potrebné uvažovať tak, že prenášame teleso zo vzdialenosti R (polomer Zeme) do vzdialenosti $R+h$ od stredu Zeme. Gravitačná sila, ktorú musíme prekonať, nie je konštantná, ale sa mení v závislosti od vzdialenosti x od stredu Zeme podľa vzťahu $F(x) = kmM\frac{1}{x^2}$, pričom k je gravitačná konštanta, m je hmotnosť telesa a M je hmotnosť Zeme. Preto uvedenú prácu je potrebné vypočítať podľa vzťahu $W = \int\limits_R^{R+h} kmM\frac{1}{x^2}\,dx = kmM\int\limits_R^{R+h}\frac{1}{x^2}\,dx.$

Tento výpočet môžeme pomocou druhého aspektu určitého integrálu interpretovať tak, že potrebujeme vypočítať obsah rovinného útvaru ohraničeného priamkami $x = R, x = R+h, y = 0$ a krivkou $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Teraz pre zmenu použijeme prvý aspekt určitého integrálu. Zvoľme v zmysle definície 17 pre každé prirodzené číslo n delenie T_n intervalu $R = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = R+h$. Funkcia f je na tomto intervale klesajúca, preto

$$\underline{f_i} = \frac{1}{x_i^2}, \overline{f_i} = \frac{1}{x_{i-1}^2}.$$

Príslušné dolné a horné integrálne súčty sú nasledovné.

$$\underline{S}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \underline{f_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i^2}, \overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i}(x_i - x_{i-1} = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}^2}.$$

Pomocou nich by sme ťažko vypočítali spomínaný integrál. Výhodnejšie je použiť Riemannov (medzi)súčet

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f_x(x_i - x_{i-1}), x_{i-1} \le x \le x_i.$$

Platí, že ak $0 \leq x_{i-1} \leq x_i$, tak $x_{i-1}^2 \leq x_{i-1}x_i \leq x_i^2$.Odtiaľ $x_{i-1} \leq \sqrt{x_{i-1}x_i} \leq x_i$. V každom intervale môžeme vybrať geometrický priemer jeho koncových bodov. Vtedy Riemannov (medzi)súčet bude

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{R} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \ldots - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}.$$

Na tomto súčte je výhodné to, že je to teleskopická suma, takže jeho hodnota nezávisí od delenia intervalu. Preto je táto hodnota aj limitou týchto súčtov a hodnotou integrálu. Preto pre hľadanú prácu platí $W = kmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$.

Ak by sme teleso preniesli mimo pôsobenie gravitačného poľa, t.j. teoreticky do nekonečna, tak by $W = \lim\limits_{h \to \infty} kmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = kmM \frac{1}{R}$.

Mohli by sme vystreliť raketu s takou rýchlosťou v, aby sa jej kinetická energia spotrebovala práve na túto prácu. Vtedy $\frac{1}{2}mv^2 = kmM\frac{1}{R}$, odtiaľ $v = \sqrt{\frac{2kM}{R}}$.

Po dosadení za konštanty by sme dostali známu hodnotu druhej kozmickej rýchlosti, čo je približne 11,2 $km.s^{-1}$. Na tomto príklade je cenné to, že umožňuje určitým spôsobom skĺbiť všetky tri prístupy pri pohľade na určitý integrál.

Kirsch v [51] neodporúča začať pri preberaní určitého integrálu s Riemannovým integrálom a to z tých dôvodov, že je pomerne náročný. U žiakov nemusí pretrvať precízna predstava o ňom, nebýva potrebne zdôvodnený, dlho trvá kým sa žiaci stretnú s názornými príkladmi a mlčky sa predpokladá existencia predstavy o obsahu rovinného útvaru u žiakov. Je potrebné rozlišovať problém definície určitého integrálu a problém výpočtu konkrétneho určitého integrálu v určitom príklade. Často zvyknú byť tieto dva problémy medzi sebou pomiešané a vzniká potom zmätok v predstavách žiakov natoľko, že nie sú schopní definovať, čo je určitý integrál. Kirsch nakoniec úplne vynecháva Riemannov integrál v [51].

Fischer v [28] sa nedomnieva, že by bolo nezmyselné vyučovanie Riemannovho integrálu, skôr sa domnieva, že je potrebné upriamiť pozornosť na jeho dva aspekty.

1. *Definitoricko-teoretický:* Integrál ako limita určitých súčtov môže byť zavedený nezávisle od pojmu obsah rovinného útvaru ako teoretická veľkosť s rozličným významom. Túto predstavu možno prezentovať až vtedy, keď mali žiaci možnosť stretnúť sa už s inými predstavami o určitom integrále.

2. *Algoritmicko-konštruktívny:* Aspekt „limity určitých súčtov” umožňuje približný numerický výpočet určitých integrálov. To je dôležité pri funkciách, ktoré nemajú primitívnu funkciu v analytickom tvare. Tieto funkcie je nutné potom numericky integrovať približnými metódami.

Fischer zdôrazňuje, že je potrebné, aby sa žiaci stretli s rozličnými prístupmi k určitému integrálu. Pokiaľ sa učiteľ matematiky zameria výlučne na obsah rovinného útvaru, tak je potom také vyučovanie z obsahovej stránky veľmi chudobné.

Doteraz sme spomínali vzájomné súvislosti medzi integrálnym a diferenciálnym počtom. Z hľadiska limitných procesov pripomína Strick v [89], že je možné hľadať vzájomnú súvislosť medzi určitým integrálom a súčtom nekonečného radu reálnych čísel. Uvádza niektoré príklady nevlastných integrálov niektorých mocninových funkcií, ktoré chápe ako obsahy útvarov „pod grafmi" týchto funkcií. Napriek tomu, že sa snaží o maximálnu názornosť využívajúc grafy a tabuľky, domnievame sa, že je vhodné tieto úlohy preberať s talentovanými žiakmi gymnázia alebo až v prvom ročníku vysokoškolského štúdia.

Pomocu grafickej interpretácie určitého integrálu a pojmu dolného súčtu (známeho z teórie Riemannovho integrálu) možno pre funkciu $f(x) = \frac{1}{x}$ vysloviť tvrdenie, že

$$\int_1^{1024} \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1024} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$= + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{513} + \ldots + \frac{1}{1024}\right) > \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \ldots + 512.\frac{1}{1024} =$$

$= 10.\dfrac{1}{2} = 5$. To sa dá zovšeobecniť tak, že $\displaystyle\int_1^{2^n} \frac{1}{x}\,dx > n.\frac{1}{2}$.

To znamená, že ak sa prirodzené číslo n zväčšuje, tak veľkosť tohto integrálu rastie „nad všetky medze"(diverguje), resp. obsah rovinného útvaru „pod grafom" funkcie v hraniciach od 1 po ∞ nie je konečný. Ďalej Strick argumentuje, že ak

$\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{100} = -\frac{1}{100}+1$, $\displaystyle\int_1^{1000} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{1000}+1$, potom

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Ďalej zovšeobecňuje tento vzťah a dostáva $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx = \frac{1}{n}$. Teraz sa znova vracia k integrálu $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ úlohou, že pre aké exponenty mocninových funkcií vyjdú v poslednom vzťahu prirodzené čísla. Jedna z možností je pomôcť si substitúciou $\dfrac{1}{n} = a$.

Vtedy $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{1}{a}}}\,dx = a$. To znamená, že ak sa prirodzené číslo a zväčšuje, tak veľkosť tohto integrálu rastie „nad všetky medze".

Ale vtedy sa číslo $1 + \dfrac{1}{a}$ „približuje" k číslu 1 a „sme znova" pri integrále $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.

Určitý integrál je často spájaný s pojmom obsahu rovinného útvaru. Püschel v [75] pripomína možnú priestorovú interpretáciu určitého integrálu. Skúmajme integrál

$$\int_0^b x^2\,dx$$

a objem ihlana so štvorcovou podstavou. Strana štvorca a výška ihlana nech majú dĺžku b.

Ak rozrežeme ihlan $n-1$ rovinami kolmými na výšku na „rovnako hrubé" časti, môžeme každej i-tej časti (ak ich počítame od vrcholu ihlana) vpísať kváder so stranou podstavy $\frac{i-1}{n}b$ a opísať kváder so stranou podstavy $\frac{i}{n}b$. Oba spomenuté kvádre by mali výšku $\frac{b}{n}$. „Vnútorná" a „vonkajšia" stupňovitá pyramída, ktoré by vznikli zložením vpísaných, resp. opísaných kvádrov by mali objemy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}b\right)^2\frac{b}{n}, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}b\right)^2\frac{b}{n}.$$

Ak sa na tieto posledné vzťahy bližšie pozrieme, tak zistíme, že predstavujú dolný a horný integrálny súčet v zmysle definície 17 funkcie $y = x^2$ vzhľadom na delenie intervalu $\langle 0, b\rangle$ na n rovnako dlhých intervalov.

Ak by sa prirodzené číslo n zväčšovalo „nad všetky medze", tak by „vnútorná" a „vonkajšia" stupňovitá pyramída konvergovali k ihlanu a ich objemy k jeho objemu.

Zároveň dolný a horný integrálny súčet by konvergovali k $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx$. Keďže objem ihlana je $\dfrac{b^3}{3}$, tak musí platiť $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$.

Na viaceré pojmy matematickej analýzy súvisiace s limitnými procesmi sme sa doteraz pozerali z rôznych hľadísk. Domnievame sa, že pri súčasnom intenzívnom rozvoji informačných technológii sa znižuje význam výuky kalkulatívnych postupov a zvyšuje význam výuky zmyslu a hĺbky pochopenia pojmov. Obrazne povedané, dnes je dôležitejšie vo vyučovaní matematiky, aby žiaci pochopili, čo je derivácia, limita a integrál ako to ako sa derivácia, limita a integrál vypočítajú.

Kapitola 2

Metodologické východiská

2.1 Cieľ dizertačnej práce

Cieľom práce je preskúmať doterajšie poznatky teórie vyučovania matematiky v oblasti limitných procesov a ich aplikácie v školskej praxi, a to najmä v tematických celkoch gymnaziálneho učiva matematiky ako postupnosti a rady, limita postupnosti, súčet nekonečného radu, limita funkcie, súvislosť limitných procesov s deriváciou a určitým integrálom. Limitné procesy majú rôzne možnosti využitia v rôznych oblastiach matematiky, na čo poukazuje hlavne história matematiky. Žiaľ, v školskej praxi sa chápanie týchto procesov redukuje často iba na zvládnutie základných pojmov, najmä definícií a viet, pričom sa zanedbáva propedeutika tejto problematiky v nižších ročníkoch. Nie je docenená ani úloha medzipredmetových vzťahov, ktoré sú dôležité na to, aby žiaci získali pohľad z viacerých strán na rôzne matematické pojmy a vnímali ich vo svetle rôznych praktických aplikácií.

Cieľom dizertačnej práce je navrhnúť a experimentálne *overiť nový spôsob vyučovania limitných procesov na gymnáziu,* ktorý by v sebe zahŕňal propedeutiku týchto procesov. Na to sme použili práce domácich a zahraničných autorov z oblasti teórie vyučovania matematiky (O. Šedivý [31], J. Fulier [30], M. Hejný [40], U. P. Tietze [93], L. Bauer [4], L. Kvasz [61], N. Knoche [56]), práce venované histórii matematickej analýzy (napríklad Edwards [22]). Táto koncepcia vyučovania limitných procesov by mala rešpektovať paralelu fylogenézy a ontogenézy matematického myslenia.

Z hľadiska postupnosti krokov pri preberení tematického celku je potrebné vychádzať z etáp poznávacieho procesu (pozri [40]). Výsledkom prípravných prác je *experimentálny učebný text* (pozri dodatok B), ktorý pomocou experimentálnych metód kvalitatívneho výskumu ako sú konštantná komparácia, terénne zápisy vyučovacích hodín, analýza písomných prác žiakov a študentov je prakticky verifikovaný v školskej praxi. Jedným zo zdrojov inšpirácie k metodike sporacovania sú nepublikované alebo málo publikované, a preto málo známe práce zosnulého profesora Igora Kluvánka, v ktorých je množstvo zaujímavých didaktických postupov, problémových úloh. Ich overenie v školskej praxi sa doteraz nerealizovalo.

Filozofická a metodologická koncepcia práce sa opiera o práce viacerých významných didaktikov matematiky ako H. Freudenthal, A. Sierpinska, D. Tall, S. Vinner. V súvislosti s rozvojom informačných a komunikačných technológií, ktoré umožňujú lepšiu vizualizáciu a individualizáciu vyučovacieho procesu je časť výskumu venovaná aj využitiu programu *Mathematica* pri propedeutike pojmov súvisiacich s limitnými procesmi (konkrétne v práci pojmy derivácia a dotyčnica funkcie v bode).

Keďže šírka spracovanej problematiky je pomerne rozsiahla, experimentálny výskum pozostáva z 12 experimentálnych vyučovacích celkov, ktoré zachytia základné témy spracovanej problematiky. Skladba týchto celkov je nasledovná:

1. Propedeutika zavedenia pojmu súčet nekonečného radu.
2. Definícia a výpočet súčtu nekonečného geometrického radu.
3. Zavedenie pojmu limity postupnosti.
4. Výpočty jednoduchších limít niektorých postupností.
5. Výpočty náročnejších limít niektorých postupností - typu

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } n < 1000, \\ \frac{1}{n} & \text{pre } n \geq 1000. \end{cases}$$

6. Problémové úlohy súvisiace s limitnými procesmi.
7. Zavedenie pojmu limity funkcie.
8. Výpočty limít funkcie.
9. Zavedenie pojmu derivácie (v súvislosti s limitným procesom).
10. Výpočet derivácie niektorých funkcií.
11. Zavedenie určitého integrálu pomocou limitného procesu.
12. Riemannov a Newtonov integrál.

Experimentálne vyučovanie sa realizovalo v rámci vyučovacích hodín na cvičnej škole Katolíckej Univerzity, na Gymnáziu Sv. Andreja v Ružomberku (v práci označení ako skupina G). Aby vzorka skúmaných žiakov bola väčšia, tak vyučovanie sa uskutočnilo aj v rámci úvodných seminárov z matematiky resp. cvičení z matematickej analýzy pre študentov 1. ročníka Pedagogickej fakulty Katolíckej Univerzity-učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov kombinácií s matematikou (v práci označení ako skupina U). Cieľom kvalitatívneho výskumu je aj hľadať a klasifikovať najčastejšie žiacke chyby súvisiace s porozumením pojmov preberaných v rámci horeuvedených vyučovacích celkov.

Cieľom kvantitatívneho výskumu je zistiť vplyv a previazanosť niektorých tematických celkov, s ktorými sa žiaci stretli v prvých troch ročníkoch gymnázia (vstupné faktory) s pojmami limitných procesov(výstupné faktory). Vzhľadom na šírku problematiky práce je vplyv výstupných faktorov skúmaný pri pojmoch *limita postupnosti a súčet nekonečného radu, limita a derivácia funkcie.* Vzájomný vzťah vstupných a výstupných faktorov je podrobnejšie rozpracovaný pri pojmoch *limita a derivácia funkcie.* Cieľom výskumu je ukázať, že experimentálne vyučovanie zamerané viac na porozumenie pojmov a s ním súvisiace úlohy zlepší výkon žiakov pri riešení tohto typu úloh. Pritom nedôjde k zhoršeniu výkonov žiakov pri riešení kalkulatívnych úloh. Z tohto dôvodu boli žiaci a študenti rozdelení na experimentálnu a kontrolnú vzorku. V kontrolnej vzorke sa vyučovalo klasickým spôsobom. Na rozšírenie kontrolnej vzorky pre potreby kvantitatívneho výskumu boli použité aj práce študentov 1. ročníka Pedagogickej fakulty Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem-učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov kombinácií s matematikou.

Ďalším cieľom kvantitatívneho výskumu je zistiť, či pohlavie žiakov vplýva na ich výkony, vstupné a výstupné faktory pri experimentálnom vyučovaní.

2.2 Metódy experimentálnej práce

2.2.1 Ciele, formy, prostriedky a hypotézy kvalitatívneho výskumu

Počas experimentálnych vyučovacích hodín sa uskutočnil kvalitatívne orientovaný výskum. Pre tento druh výskumu sme sa rozhodli jednak z praktických dôvodov, jednak preto, že chceme zachytiť ústne a písomné výpovede žiakov a študentov. Z nich je možné vybrať a triediť dôležité fenomény, ktoré do určitej miery charakterizujú poznávací proces pri preberaní limitných procesov.

Podľa Gavoru v [32] je cieľom kvalitatívne orientovaného výskumu porozumieť zmyslu javov, prípadne odhaľovať nové skutočnosti, ktoré môžu prispieť pri budovaní novej teórie. V tejto práci má tento typ výskumu úlohu popísať priebeh experimentálnych vyučovacích hodín, ktoré sú spomínané v kapitole 2.1. Tie môžu odhaliť pozitívne i negatívne stránky koncepcie vyučovania limitných procesov, vypracovanej v experimentálnom učebnom texte. Navyše kvalitatívny výskum je *konštrukčný* a kvantitatívny je *verifikačný*, preto experimentálne vyučovacie hodiny zohrali dôležitú úlohu pri hľadaní vstupných faktorov kvantitatívneho výskumu, ako aj pri formulovaní jeho pracovných hypotéz.

Protokoly z týchto vyučovacích hodín sú spracované vo forme *terénnych zápisov (field notes)*, ktoré podľa Gavoru v [32], neobsahujú úplný zoznam vecí a nie sú úplne podrobné. Experimentátor má možnosť si vybrať, ktorým veciam počas vyučovania venuje pozornosť, prípadne ich ďalej podrobnejšie spracuje. Tento spôsob využil vo svojej práci aj Bero v [10] vo forme komentovaných protokolov vyučovacích hodín. V nich sa nachádzajú aj časti rozhovorov experimentátora(učiteľa) so žiakmi a študentmi, ktoré dokumentujú jav, ktorý chce experimentátor popísať. Aj v tejto práci sa nachádzajú tieto časti. Ústne výpovede žiakov a študentov umožňujú charakterizovať spôsob a stupeň porozumenia matematického pojmu preberaného počas vyučovacej hodiny. Rovnako je možné pomocou nich určiť, v ktorej fáze poznávacieho procesu daného matematického pojmu sa vyučovanie matematiky v danom okamihu nachádzalo.

Dizertačné práce Hauke [34] a Przenioslo (časti v [73], [74]) sú na rozdiel od práce Bero [10] viac experimentálne zamerané a zaoberajú sa užšou problematikou, preto obsahujú aj transkripty-prepisy magnetofónových nahrávok alebo videonahrávok vyučovacích hodín.

Vzhľadom na šírku problematiky, ktorou sa zaoberáme v tejto práci, sme sa rozhodli kombinovať časti rozhovorov experimentátora so žiakmi a študentmi s analýzami ich písomných prác. Má to výhodu najmä úspory času a možnosť získať experimentálne údaje od celej skupiny žiakov alebo študentov súčasne. Počas vyučovacích hodín boli pre žiakov a študentov pripravené experimentálne úlohy, ktoré žiaci a študenti vypracovávali za účelom experimentálneho spracovania.

Cieľom experimentálnych úloh bolo najmä motivovať žiakov a študentov, poskytnúť im viacero separovaných a univerzálnych modelov pri poznávacom procese pojmov súvisiacich s limitnými procesmi. Tie v bežnom vyučovaní často chýbajú, na čo upozorňuje aj Eisenmann v [25]. Okrem toho poskytovali možnosť experimentátorovi diagnostikovať možné problémy, najčastejšie chyby alebo objaviť netradičné žiacke a študentské riešenia úloh.

Okrem experimentálnych úloh sú kvalitatívne spracované aj tematické previerky, ktoré svojou problematikou pokrývajú časti kapitol experimentálneho učebného textu, ktoré boli preberané počas experimentálnych vyučovacích hodín.

Mundy/Graham v [65] považujú vo svojej štúdii za dôležitý piagetovský konštruktivistický pohľad, že „vyučovanie matematiky je proces, v ktorom žiak reorganizuje svoje aktivity za účelom objasnenia situácii, ktoré považuje za problematické."

Bikner/Herget v [11] venujú zvláštnu pozornosť chybám študentov vo vyučovaní matematickej analýzy. Svoju pozornosť sústredili na pojmy neurčitý integrál, limita postupnosti a derivácia. Domnievame sa, že chybovej analýze žiackych a študentských prác počas vyučovaní matematickej analýzy nie je u nás venovaná dostatočná pozornosť. Hlavne pri príprave budúcich učiteľov matematiky môžu zohrávať poznatky získané v tejto oblasti dôležitú úlohu.

Nad významom experimentov vo vyčovaní matematiky sa zamýšľa aj Steinberg v [87]. Ciele, ktoré sú využité aj v tejto práci možno formulovať nasledovne:

1. vstup do tematického okruhu: objavenie problému pri riešení konkrétnej úlohy,
2. názorné zavádzanie nových pojmov,
3. prepájať teóriu s praktickým životom,
4. odpovedať na otázky žiakov a študentov pri riešení problémových úloh.

Počas experimentálnych vyučovacích hodín zohrával dôležitú úlohu vzťah medzi názornosťou a abstrakciou. Tietze v [93] upozorňuje, že žiakom často chýba názorná predstava o niektorých pojmoch matematickej analýzy. Ukazuje to na príklade vzťahu funkcie a jej derivácie, keď tvrdí, že mnohí žiaci nevedia objasniť geometrickú súvislosť medzi týmito funkciami. Ďalej venuje veľkú pozornosť problémom žiakov a študentov, ktoré súvisia s úpravami algebraických výrazov, korektnosti matematických zápisov a podobne ako Bikner/Herget v [11] uvádza aj niektoré typické chyby študentov. Ako ukážku si môžeme uviesť nasledovné.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\sin=\sin ?? \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 1}{1}=\sin 1$$

Domnievame sa, že jedným z prameňov týchto chýb môže byť to, že v zmysle toho, čo tvrdí Knoche v [57], sa žiak učí matematiku „viackrát". Raz na prvom, potom na druhom stupni, nakoniec na gymnáziu, prípadne aj na vysokej škole. Ak vyučovanie matematiky nie je nové učenie, ale len preúčanie, rozšírenie alebo zúženie pojmov, ktoré sú k dispozícii, tak z psychologického hľadiska môže dôjsť k interferencii a k narušeniu ich poznatkovej štruktúry. Ako príklad môžeme uviesť svoju vlastnú skúsenosť so študentmi-budúcimi učiteľmi matematiky z kurzu algebry. Ak sa stretnú v rámci teoretickej aritmetiky najprv s euklidovskými okruhmi, tak často zabudnú aj na základy teoretickej aritmetiky získané ešte na základnej škole. Viacerí z nich potom nevedia určiť ani najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok napríklad čísel 24, 36. Na to treba dávať pozor aj pri vyučovaní matematickej analýzy, pretože tu dochádza aj k nerešpektovaniu etáp poznávacieho procesu v zmysle teórie Hejného v [40].

Tietze v [93], Herden/Knoche v [41] sa domnievajú, že mnohé problémy pri riešení kalkulatívnych úloh súvisia s neschopnosťou žiakov upravovať algebrické výrazy a nie s tým, žeby nerozumeli pojmom ako limita postupnosti, limita funkcie atď. Tento problém súvisí aj s tým, že viacerým žiakom sa javí vyučovanie matematickej analýzy ako „aplikovaná algebra”. Z hľadiska koncepcie vyučovania limitných procesov prakticky vyjadrenej v experimentálnom učebnom texte sa domnievame, že tieto problémy učiteľ alebo experimentátor ťažko môže ovplyvniť a eliminovať. Algebra vo vyučovaní gymnaziálnej matematiky dominuje v nižších ročníkoch, teda v „staršom učive” matematiky, ktoré by žiaci už mali ovládať.

Bauer v [4] kladie dôraz na to, že vyučovanie matematiky musí byť pre žiakov zaujímavé a pomenúva určité indikátory správania sa žiakov, ktoré tento záujem môžu signalizovať. Spomeňme aspoň niektoré.

1. pozornosť, koncentrácia, obľúbenosť matematiky,
2. prekonávanie ťažkostí, ochota vynaložiť námahu pri získavaní nových vedomostí,
3. spontánne aktivity hľadania, objavovania, skúmania.

Tieto aspekty môže lepšie vystihnúť kvalitatívny výskum vo vyučovaní matematickej analýzy. Jeho zmyslom sa zaoberá aj Hofe v [44]. Výhodou tohto druhu výskumu je, že na rozdiel od kvantitatívneho výskumu umožňuje lepšie zachytiť a rekonštruovať individuálne stratégie a predstavy, respektíve subjektívne skutočnosti žiakov. Hofe si v súvislosti s vyučovaním matematickej analýzy kladie nasledovné otázky.

1. Koľko času venuje učiteľ matematiky dôkladnému, uvedomelému budovaniu pojmov ako limita, derivácia a pod?
2. Zostáva čas na aktívne objavné vyučovanie a s ním spojené nachádzanie a prekonávanie pojmových problémov?
3. Je azda pre krátkosť času lepšie hneď prezentovať hotové pojmy a skoncentrovať sa na ich použitie v štandardných úlohách?

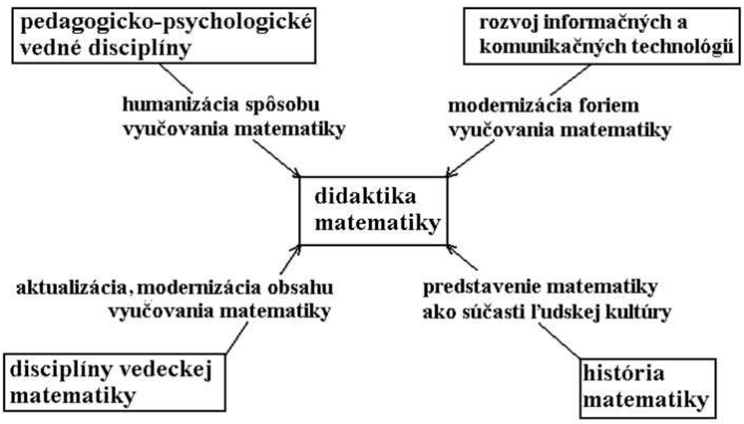
Okrem toho je potrebné vybudovať dve dôležité dimenzie didaktiky matematickej analýzy, ktoré Hofe formuluje nasledovne.

Preskriptívna dimenzia, ktorej cieľom je spracovať schopnosti a zručnosti žiakov, ktoré majú nadobudnúť vo vyučovaní matematickej analýzy. Opísať adekvátne porozumenie pojmov, formuluje základné predstavy, ktoré si má žiak vypestovať. Ďalej poukazuje na vecné ťažkosti, s ktorými sa môže učiteľ a žiak stretnúť na ceste osvojovania významu pojmov.
Konštruktívna dimenzia využíva základ, ktorý jej poskytuje preskriptívna dimenzia. Rozvíja konštruktívne návrhy so zreteľom na pedagogické a psychologické aspekty, ktoré siahajú od možností štrukturovania a stupňovania jednotlivých tém až po rozpracovanie vyučovacích metód.

Aj experimentálny učebný text spracovaný v tejto práci má za cieľ prispieť k rozvoju konštruktívnej dimenzie didaktiky matematickej analýzy a experimentálne vyučovacie hodiny majú zmysel nielen preverenia tohto textu. V zmysle preskriptívnej dimenzie majú za cieľ popísať, ako by mohol tento text prispieť k lepšiemu porozumeniu pojmov súvisiacich s limitnými procesmi ako aj poukázať na vecné ťažkosti, s ktorými sa môže učiteľ a žiak stretnúť na ceste osvojovania významu týchto pojmov pri použití tohto textu.

Domnievame sa, že v didaktike matematiky existuje tvorivé napätie medzi poznatkami prichádzajúcimi z oblasti vedeckej matematiky a z oblasti pedagogiky, psychológie a všeobecnej didaktiky. Je potrebné docieliť určitú rovnováhu medzi týmito dvoma pólmi. K tomu môžu prispieť poznatky prichádzajúce z histórie matematiky, ktoré umožňujú predstaviť matematiku ako súčasť ľudskej kultúry. V súčasnosti nie je možné zanedbať ani rozvoj informačných a komunikačných technológií. Aspekty vnútorných vzťahov, ktoré považujeme za dôležité, sme znázornili nasledovnou schémou.

Obr. 9



I. Kluvánek v [55] tvrdí, že „úsilie vynaložené na limity sa nevypláca, lebo nemusí presvedčiť žiakov, že limity môžu mať iný zmysel ako svoju formálnu definíciu.” Z tohto dôvodu je v učebnom texte navrhnutý postup, rešpektujúci historický vývoj, a preto je v ňom zavedený najprv súčet nekonečného radu a následne je zavedený pojem limity postupnosti. Pritom sú využité viaceré konkrétne príklady z histórie matematiky, ktoré sú zdrojom viacerých separovaných modelov súčtu nekonečného radu. V zmysle doteraz uvedených úvah je výskum terénnych zapisov experimentálnych vyučovacích hodín zameraných na túto problematiku orientovaný na to, akým spôsobom tieto modely napomáhajú k pochopeniu pojmu súčet nekonečného radu.

Každý matematický pojem by mal žiak zvládnuť na intuitívnej úrovni a až potom na formálnej. V praxi to často vyzerá tak, že pre krátkosť času sa učiteľom javí lepšie hneď prezentovať hotové pojmy a skoncentrovať sa na ich použitie v štandardných úlohách. Jednou z príčin je predimenzovanosť učiva predpísaného v učebných osnovách pre daný počet vyučovacích hodín, ktoré má učiteľ matematiky k dispozícii, ktorú oprávnene kritizuje Turek v [97], [98].

Bero v [10] tvrdí, že žiaci principiálne odmietajú sčítať nekonečný rad až do okamihu, keď sa o tom dozvedia v škole alebo iným spôsobom. Z fylogenetického hľadiska je to pochopiteľné, čoho dôkazom sú Zenónove apórie. V experimentálnom učebnom texte sme sa tento problém rozhodli riešiť tak, že sme spojili problematiku čísel s periodickým desatinným rozvojom so Zenónovou apóriou Achilla a korytnačky. Domnievame sa, že pri takomto prezentovaní pojmu súčet nekonečného radu nedôjde k odmietaniu sčítať nekonečný rad, pretože sa žiaci s číslami s periodickým desatinným rozvojom stretli už na základnej škole. Túto hypotézu podporuje aj Wigand v [105], ktorý sa domnieva, že je potrebné zaoberať sa limitnými procesmi už na základnej škole, pričom čísla s periodickým desatinným rozvojom považuje za jeden z dôležitých modelov na tomto stupni. Domnievame sa, že o to viac by mali byť vhodné pre žiakov gymnázia a mali by byť zaradené medzi prvé modely, s ktorými sa žiaci stretnú. Všetky limitné procesy sú podľa Wiganda v [105] výsledkom určitého matematického myslenia a ich myšlienka musí na úvod zaznieť v nejakej jednoduchej forme a potom ju treba pomocou ďalších modelov robiť stále známejšou a jasnejšou. To popisujeme v kapitole 2.2.3.

Pri spracovaní pojmu limity funkcie sme sa nechali inšpirovať rukopismi profesora Igora Kluvánka a koncepciou Pickerta v [70], ktorí navrhovali vybudovať tento pojem pomocou pojmu spojitosti. Kluvánek v [54], [55] tvrdí, že „nie je výhodné najprv zaviesť pojem limity funkcie a pomocou nej definovať spojitosť. Z pedagogického hľadiska je veľký rozdiel v tom, ktorý pojem zavedieme ako prvý. Každý skúsený učiteľ zdôrazňuje, že limita funkcie v bode nie je jej hodnota. Pre žiaka je veľmi ťažké konceptuálne rozlíšiť dva pojmy, ktoré sú podľa jeho skúsenosti identické."

Ďalším problémom je, že pri zavádzaní pojmu limity funkcie v bode vystupuje otázka jej existencie. Faktom ďalej zostáva, že kým definícia spojitosti obsahuje tri, tak definícia limity funkcie v bode obsahuje až štyri kvantifikátory.

Z tohto dôvodu Kluvánek navrhuje definovať najprv spojitosť funkcie v bode. Cieľom výskumu v tejto oblasti bude overiť, či žiaci vedia lepšie rozlíšiť pojmy limita funkcie v bode a hodnota funkcie v bode pri vyučovaní pomocou experimentálneho učebného textu. Okrem toho je cieľom zistiť, či si zamieňajú v tomto prípade pojmy limita funkcie v bode a spojitosť funkcie v bode. Ďalším cieľom je dokumentovať, akým spôsobom žiaci využívajú graf funkcie pri pochopení pojmu limity funkcie v bode a v problémových úlohách súvisiacich s týmto pojmom.

Aj pri pojme derivácia navrhuje Kluvánek vo svojich rukopisoch rovnako ako Kahl v [49] využiť pojem spojitosti funkcie. Spomína ju aj Hauke v [34] pod názvom metóda „hodnoty v medzere". Keďže aj tu bude kladený dôraz na grafickú interpretáciu bude cieľom výskumu sledovanie tohto aspektu v poznávacom procese. Ďalej vo výskume sme sledovali schopnosť žiakov a študentov numericky určiť približnú hodnotu derivácie funkcie v bode.

Pojem určitý integrál je zavádzaný nielen pomocou Newtonovho integrálu, ale žiaci sú oboznámení aj s pojmami integrálnych súčtov, ktoré sú visia s Riemannovým integrálom.

Počas experimentu žiaci a študenti písali tematickú previerku zameranú na limitu postupnosti a súčet nekonečného radu. Ďalšia previerka bola venovaná pojmom limita funkcie a derivácia. Výsledkom ich spracovania je chybová analýza prác žiakov a študentov (pozri kapitolu 4). Popis experimentálnych vyučovacích hodín sa nachádza v kapitole 3.

2.2.2 Metódy a hypotézy kvantitatívneho výskumu

Pri spracovaní tematických previerok sú použité viaceré štatistické metódy vyhodnotenia neštandardizovaných didaktických testov.

Obtiažnosť úlohy možno podľa Tureka v [97] a Soltysa v [86] definovať ako pomer súčtu bodov získaných za danú úlohu skupinou študentov a maximálnemu súčtu bodov, ktoré za danú úlohu skupina študentov mohla dosiahnuť. To môžme zapísať a upraviť nasledovne

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}}{n.B_i} = \frac{1}{B_i}\frac{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}}{n} = \frac{\overline{u_i}}{B_i}.$$

u_{ij} je počet bodov, ktoré získal j-tý študent za i-tu úlohu. p_i je obtiažnosť i- tej úlohy a n je celkový počet študentov, ktorí písali previerku. B_i je maximálny počet bodov za i-tu úlohu a $\overline{u_i}$ je aritmetický priemer bodov, ktoré získali študenti za i-tu úlohu.

Soltys v [86] priraďuje hodnotám p_i nasledovnú obtiažnosť:

p_i	0,0 - 0,20	0,21 - 0,40	0,41 - 0,60	0,61 - 0,80	0,81 - 1,0
úlohy	veľmi ťažké	ťažké	strednej obtiažnosti	ľahké	veľmi ľahké

Disperziu i-tej úlohy vypočítame pomocou známeho vzťahu $D_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(u_{ij} - \overline{u_i})^2$.

Ak j-tý študent získa v previerke s k úlohami absolútne skóre $x_j = \sum_{i=1}^{k} u_{ij}$, tak aj *disperziu skóre* vypočítame analogicky $D = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$, kde $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$.

Smerodajnú odchýlku skóre určíme podľa vzťahu $s = \sqrt{D}$. Keďže tematické previerky nebudú skórované binárne, ich *reliabilitu* r vypočítame podľa Tureka v [97] pomocou *Cronbachovho vzťahu* $r = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{k} D_i\right)$.

Podľa Soltysa v [86] pomocou reliability r určíme aj *štandardnú chybu* s_t podľa vzťahu $s_t = s\sqrt{1-r}$.

Úlohy v záverečných previerkach sú rozdelené na dve skupiny. Na skupinu čisto kalkulatívnych úloh a na skupinu úloh na porozumenie a pochopenie pojmov. Za obe skupiny úloh je zistený súčet bodov každého študenta. Nech i-ty študent dosiahne za prvú skupinu úloh x_i bodov a za druhú skupinu úloh y_i bodov. Pearsonov koesficient korelácie r_p vypočítame podľa vzťahu

$$r_p = \frac{n\sum_{i=i}^{n} x_i y_i - \sum_{i=i}^{n} x_i \sum_{i=i}^{n} y_i}{\sqrt{\left\{n\sum_{i=i}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=i}^{n} x_i\right)^2\right\}\left\{n\sum_{i=i}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=i}^{n} y_i\right)^2\right\}}}.$$

Ak *Pearsonov koeficient korelácie* medzi týmito hodnotami nedosiahne kritickú hodnotu $r_n(0,05)$ (testujeme na hladine významnosti 0,05), tak možno konštatovať, že úspešnosť študentov (v danej študijnej skupine alebo triede) v riešení týchto dvoch skupín úloh nemá vzájomnú súvislosť. Ak by koeficient korelácie prekročil kritickú hodnotu, hypotézu zamietneme. Kvôli väčšej prehľadnosti je súčet bodov za kalkulatívne úlohy v práci označovaný ako faktor SKal. Súčet bodov za úlohy na porozumenie a pochopenie pojmov je označený ako faktor SPr.

Pearsonov koeficient korelácie je podľa Tureka v [97] výhodné použiť aj na určenie *validity* ako koeficientom korelácie medzi výsledkami previerky a iným akceptovateľným meradlom. Všetky doteraz uvedené štatistické charakteristiky možno získať využitím programu *Excel* (pozri [20]). Výsledky tohto spracovania sú uvedené v kapitole 4.

V tejto práci sú prezentované výsledky dvoch tematických previerok zameraných na tieto témy :

1. limita postupnosti a súčet nekonečného radu
2. limita a derivácia funkcie v bode

Na záver preberania prvej témy skupina G písala nasledovnú prácu:

A skupina

1. Nech $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ práve vtedy, keď

A) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
B) $\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
C) $\forall\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
D) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$.
2. Preveďte do tvaru zlomku číslo $0,\overline{27}$.
3. Zistite, či je daný rad konvergentný, ak áno, nájdite jeho súčet.

$$\text{(a)} \left(-\frac{10}{7}\right) + \left(-\frac{10}{7}\right)^2 + \left(-\frac{10}{7}\right)^3 + \dots, \qquad \text{(b)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3^j + 5^j}{7^j}.$$

4. Vypočítajte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n+1).(n^2+1)},$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \begin{cases} 10 & \text{pre } n \le 10, \\ \dfrac{1}{n} & \text{pre } n > 10. \end{cases}$$

5. Prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienku $1 - \varepsilon < \dfrac{n+1}{n} < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

A)je nekonečne veľa, B)je konečne veľa.

6. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \ge m$

spĺňa nerovnosť $\dfrac{n+1}{n} < 1{,}001$

A) áno, B) nie.

7. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \ge m$

spĺňa nerovnosť $\dfrac{n+1}{n} < 0{,}999$

A) áno, B) nie.

B skupina

1. Preveďte do tvaru zlomku číslo $0,\overline{32}$.
2. Zistite, či je daný rad konvergentný, ak áno, nájdite jeho súčet.

$$\text{(a)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{5^{j-2}}{7^{j+2}}, \qquad \text{(b)} \left(-\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right)^2 + \left(-\frac{7}{10}\right)^3 + \dots$$

3. Vypočítajte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{(n-1).(n^2+1)}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1},$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} & \text{pre } n \le 10, \\ \dfrac{1}{n} & \text{pre } n > 10. \end{cases}$$

4. Nech $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ práve vtedy, keď

A) $\exists \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \ge m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
B) $\forall \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \ge m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
C) $\exists \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \ge m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
D) $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \ge m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$.

5. Prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienku $\dfrac{n+1}{n} > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

A)je nekonečne veľa, B)je konečne veľa alebo žiadne.

6. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \geq m$

spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 0,99999$

A) áno, B) nie.

7. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \geq m$

spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 1,0001$

A) áno, B) nie.

Skórovanie (bodovanie) úloh v skupinách A a B bolo analogické. Uvedieme preto len skupinu A:

Úloha *1* správna odpoveď 1 bod

2 maximálne 3 body, ktoré boli rozdelené nasledovne: Predpokladáme, že žiaci budú riešiť úlohu pomocou prevodu zlomku s desatinným rozvojom na geometrický rad.

- za správny prevod zlomku na geometrický rad alebo správne určenie prvého člena a kvocientu geometrického radu - 1 bod,
- za správne dosadenie do vzťahu pre súčet nekonečného geometrického radu - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

3a maximálne 2 body:

- správne určenie prvého člena a kvocientu geometrického radu - 1 bod,
- za určenie, že rad je divergentný - 1 bod.

3b maximálne 4 body:

- zápis radu ako súčet dvoch geometrických radov - 1 bod,
- za správne určenie súčtu aspoň jedného z radov - 1 bod,
- za správne dosadenie do vzťahu pre súčet nekonečného geometrického radu pri oboch radoch - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

4a maximálne 2 body:

- správne predelenie čitateľa a menovateľa zlomku výrazom n^2 - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

4b maximálne 3 body:

- za správne roznásobenie menovateľa - 1 bod,

- správne predelenie čitateľa a menovateľa zlomku výrazom n^3 - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

4c, 5, 6, 7 každá maximálne 2 body:

- za zdôvodnenie alebo správnu úpravu nerovnice - 1 bod,
- za správnu odpoveď - 1 bod.

Klasifikačná stupnica bola nasledovná:

1 ... 23 - 21 bodov

2 ... 20 - 17 bodov

3 ... 16 - 12 bodov

4 ... 11 - 6 bodov

5 ... 5 - 0 bodov

Úlohy tematickej previerky 2, 3a, 3b, 4a, 4b v A skupine, úlohy 1, 2a, 2b, 3a, 3b v skupine B sú kalkulatívne (faktor SKal). Úlohy 1, 4c, 5, 6, 7 v A skupine, úlohy 4, 5, 6, 7 v B skupine sú problémové úlohy zamerané na pochopenie pojmov (faktor SPr). Skupina U píslala nasledovnú tematickú previerku, ktorej bodovanie bolo podobné ako v skupine G. Preto ho uvádzame v zadaní úloh:

A skupina

1. Nech $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ práve vtedy, keď

A) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
B) $\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
C) $\forall\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
D) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$ (1 bod).
2. Preveďte do tvaru zlomku číslo $0,\overline{27}$ (3 body).
3. Zistite, či je daný rad konvergentný, ak áno, nájdite jeho súčet.

(a) $\left(-\frac{10}{7}\right) + \left(-\frac{10}{7}\right)^2 + \left(-\frac{10}{7}\right)^3 + \dots$ (2 body), (b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{3^j + 5^j}{7^j}$ (4 body).

4. Vypočítajte: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+2}$ (2 body),

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n+1).(n^2+1)}$ (3 body),

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} 10 & \text{pre } n \leq 10 \\ \frac{1}{n} & \text{pre } n > 10 \end{cases}$ (2 body),

(d) $\lim_{n\to\infty}(-2)^n$ (2 body),

(e) $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pre } n \le 10 \\ 10 & \text{pre } n > 10 \end{cases}$ (2 body),

(f) $\lim_{n\to\infty} b_n$, kde $b_n = \begin{cases} 2n & \text{pre čísla } n \text{ párne} \\ \frac{2}{n} & \text{pre čísla } n \text{ nepárne} \end{cases}$ (2 body).

5. Prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienku $1-\varepsilon < \frac{n+1}{n} < 1+\varepsilon$ pre $\varepsilon = 0,1$

A)je nekonečne veľa, B)je konečne veľa. Prečo? Odpoveď zdôvodnite (2 body).

6. Prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienku $1-\varepsilon < \frac{n+1}{n} < 1+\varepsilon$ pre $\varepsilon \in R^+$

A)je nekonečne veľa, B)je konečne veľa. Prečo? Odpoveď zdôvodnite (2 body).

7. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \ge m$

spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 1,01$.

A) Áno. Ktoré? B) Nie. Prečo? (2 body)

8. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \ge m$

spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 0,99$.

A) Áno. Ktoré? B) Nie. Prečo? (2 body)

9. Určte, či sú tieto rady konvergentné. Ak áno, určte ich súčet.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pre } n \le 3 \\ 0 & \text{pre } n > 3 \end{cases}$ (2 body),

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = \begin{cases} n & \text{pre } n \text{ párne} \\ 0 & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases}$ (2 body),

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, kde $c_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{pre } n \le 10 \\ 0 & \text{pre } n > 10 \end{cases}$ (2 body).

10. Koľko členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ musíte sčítať, aby ste dostali :

(a) $0,75$ (1 bod), (b) 0.96875 (1 bod), (c) 1 (2 body).

B skupina

1. Preveďte do tvaru zlomku číslo $0,\overline{32}$ (3 body).
2. Zistite, či je daný rad konvergentný, ak áno, nájdite jeho súčet.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{5^{j-2}}{7^{j+2}}$ (4 body), (b) $\left(-\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right)^2 + \left(-\frac{7}{10}\right)^3 + \ldots$ (2 body).

3. Vypočítajte: (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{(n-1).(n^2+1)}$ (3 body),

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ (2 body),

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & \text{pre } n \leq 10 \\ \frac{1}{n} & \text{pre } n > 10 \end{cases}$ (2 body),

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-3)^n$ (2 body),

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{pre } n \leq 5 \\ 5 & \text{pre } n > 5 \end{cases}$ (2 body),

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$, kde $b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{pre čísla } n \text{ párne} \\ 2n & \text{pre čísla } n \text{ nepárne} \end{cases}$ (2 body).

4. Nech $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ práve vtedy, keď

A) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
B) $\forall\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
C) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,
D) $\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$ (1 bod).

5. Prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienku $\frac{n+1}{n} > 1+\varepsilon$ pre $\varepsilon = 0,1$

A)je nekonečne veľa. B)je konečne veľa. Prečo? Odpoveď zdôvodnite (2 body).

6. Prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienku $\frac{n+1}{n} > 1+\varepsilon$ pre pevne dané $\varepsilon > 0$

A)je nekonečne veľa. B)je konečne veľa. Prečo? Odpoveď zdôvodnite (2 body).

7. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \geq m$

spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 0,99$.

A) Áno. Ktoré? B) Nie. Prečo? (2 body)

8. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \geq m$

spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 1,01$.

A) Áno. Ktoré? B) Nie. Prečo? (2 body)
9. Určte, či sú tieto rady konvergentné. Ak áno, určte ich súčet.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pre } n \leq 5 \\ 0 & \text{pre } n > 5 \end{cases} \quad \text{(2 body)},$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ kde } b_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } n \text{ párne} \\ n & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases} \quad \text{(2 body)},$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ kde } c_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{pre } n \leq 5 \\ 0 & \text{pre } n > 5 \end{cases} \quad \text{(2 body)}.$$

10. Koľko členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ musíte sčítať, aby ste dostali :

(a) $0,5$ (1 bod), (b) $0,984375$ (1 bod), (c) 1 (2 body).

Úlohy tematickej previerky 2, 3a, 3b, 4a, 4b, 10a, 10b v A skupine a úlohy 1, 2a, 2b, 3a, 3b, 10a, 10b v skupine B sú kalkulatívne (súčet bodov za tieto úlohy - faktor SKal). Úlohy 1, 4c, 4d, 4e, 4f, 5, 6, 7, 8, 9a, 9b, 9c, 10c v A skupine a úlohy 3c, 3d, 3e, 3f, 4, 5, 6, 7, 8, 9a, 9b, 9c, 10c v B skupine sú problémové úlohy zamerané na pochopenie pojmov (súčet bodov za tieto úlohy - faktor SPr).

Cieľom kvantitatívneho výskumu, je overiť previazanosť faktorov SKal a SPr a súvislosť pohlavia žiakov s týmito faktormi. Preto sme vytvorili aj faktory Chlapci (1-chlapec, 0-dievča), Dievčatá(0-chlapec, 1-dievča). Pre potreby kvntitatívneho výskumu formulujeme nasledovné pracovné hypotézy:
H1a: Faktory SKal a SPr nekorelujú medzi sebou.
H1b: Faktory SKal a SPr korelujú medzi sebou.
H2a: Faktory Chlapci a Dievčatá nevplývajú na faktory SKal, SPr.
H2b: Faktory Chlapci a Dievčatá vplývajú na faktory SKal, SPr.

Za účelom vyhodnotenia previazanosti poznatkov sa konal kvantitatívny výskum pri preberaní témy limita a derivácia funkcie v bode v 1. polroku školského roka 2003/2004. Na rozdiel od témy *limita postupnosti a súčet nekonečného radu*, pri tejto téme bola porovnávaná experimentálna skupina, v ktorej sa uskutočnilo vyučovanie podľa experimentálneho učebného textu uvedeného v prílohe s kontrolnou skupinou, v ktorej sa vyučovalo klasickým spôsobom.

Na základe skúseností z kvalitatívneho výskumu témy limita postupnosti a súčet nekonečného radu, ktorý sa uskutočnil v predchádzajúcom školskom roku 2002/2003 boli vytypované vstupné faktory, ktoré môžu ovplyvňovať výkon žiakov pri preberaní pojmov limita a derivácia funkcie v bode. Faktory boli nasledovné: L - logický faktor, AV- algebrické výrazy, CV - číselné výrazy, N - nerovnice. Faktory boli odmerané pomocou nasledovnej vstupnej previerky:

A skupina

1. (faktor L) Negujte nasledovné výroky:

   (a) Existuje štát, v ktorom každý zákon je aspoň dvakrát novelizovaný (3 body),

(b) $\forall x \in N \quad \exists y \in N; x + y = 5$ (3 body),
(c) Všetky čísla sú párne (2 body).

2. (faktor AV) Zjednodušte nasledovné výrazy (určte aj podmienky).

(a) $\dfrac{u^2-4}{u+2}$ (3 body), (b) $\dfrac{u^3-8}{u-2}$ (3 body),

(c) $\left(\dfrac{u^2-4}{u+2}+\dfrac{u^3-8}{u-2}\right):(u+1)$ (4 body), (d) $\left(\dfrac{u^2v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{3}{2}}v^3}\right)^{\frac{4}{3}}$ (3 body).

3. (faktor CV) Upravte nasledovné číselné výrazy a odstráňte zlomok, ak to možné.

(a) $\left(\dfrac{4^3+8^3}{4^3}\right)^2$ (2 body), (b) $\left(\dfrac{4^j+8^j}{4^j}\right)^2$ (2 body),

(c) $\left(\dfrac{3^2 9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{3}{2}}9^3}\right)^{\frac{4}{3}}$ (3 body).

4. (faktor N) Riešte v R sústavy nerovníc:
a) $4x + 6 < 2x + 5 < 5x + 8$ (5 bodov),
b) $2x + 7 < 4x - 5 < x + 6$ (5 bodov).

B skupina

1. (faktor L)Negujte nasledovné výroky:

(a) Existuje knižnica, v ktorej každá kniha je aspoň dvakrát preraďovaná (3 body),
(b) $\forall x \in N \quad \exists y \in N; x + y = 14$ (3 body),
(c) Všetky čísla sú nepárne (2 body).

2. (faktor AV) Zjednodušte nasledovné výrazy (určte aj podmienky).

(a) $\dfrac{u^2-25}{u+5}$ (3 body), (b) $\dfrac{u^3-27}{u-3}$ (3 body),

(c) $\left(\dfrac{u^2-25}{u+5}+\dfrac{u^3-27}{u-3}\right):(u{+}2)$ (4 body), (d) $\left(\dfrac{u^3v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{2}{3}}v^3}\right)^{\frac{4}{3}}$ (3 body).

3. (faktor CV)Upravte nasledovné číselné výrazy a odstráňte zlomok, ak to možné.

(a) $\left(\dfrac{3^3+6^3}{3^3}\right)^2$ (2 body), (b) $\left(\dfrac{3^j+6^j}{3^j}\right)^2$ (2 body),

(c) $\left(\dfrac{4^2 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{3}{2}}16^3}\right)^{\frac{4}{3}}$ (3 body).

4. (faktor N) Riešte v R sústavy nerovníc:

   a) $3x + 7 < x - 2 < 4x + 3$ (5 bodov),

   b) $4x + 1 < 2x + 4 < 5x + 9$ (5 bodov).

Hodnoty faktorov určoval počet bodov získaných za jednotlivé úlohy tejto vstupnej previerky, ktorá bola zadaná žiakom na začiatku výskumu. Počas experimentálnych vyučovacích hodín bolo kvalitatívne zistené, že vplyvom riešenia úloh na limitu a deriváciu funkcie sa zlepšili schopnosti žiakov vo faktoroch AV a N. Preto na konci preberania tematického celku boli tieto faktory znova odmerané, a tak boli získané ich aktualizované hodnoty AV1 a N1. Po prebraní tematického celku limita a derivácia funkcie, žiaci a študenti experimentálnej a kontrolnej skupiny písali nasledovnú tematickú previerku:

A skupina

1. Zistite, ktorá z definícií spojitosti funkcie f v bode a je správna.
   A) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$,
   B) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$,
   C) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Rightarrow f(a)-\delta < f(x) < f(a)+\delta$,
   D) $\forall\delta > 0 \quad \exists\varepsilon > 0 \quad \forall x \in D(f);\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$.

2. Doplňte predpis pre funkciu $f(x)$, aby bola v bode 3 spojitá. Zdôvodnite svoju odpoveď.

   (a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{pre } x \neq 3, \\ \dots & \text{pre } x = 3, \end{cases}$$

   (b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{pre } x \neq 3, \\ \dots & \text{pre } x = 3, \end{cases}$$

   (c) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{pre } x \neq 3, \\ \dots & \text{pre } x = 3. \end{cases}$$

3. Existuje vhodné kladné reálne číslo δ, aby platilo tvrdenie:
   $\forall x \in R;\ 1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 3,99 < 2x + 2 < 4,01$?

   A) Áno. Ktoré?

   B) Nie. Prečo?

4. Existuje vhodné kladné reálne číslo δ, aby platilo tvrdenie:
   $\forall x \in R;\ -\delta < x < \delta \Rightarrow -1000 < \frac{1}{x} < 1000$?

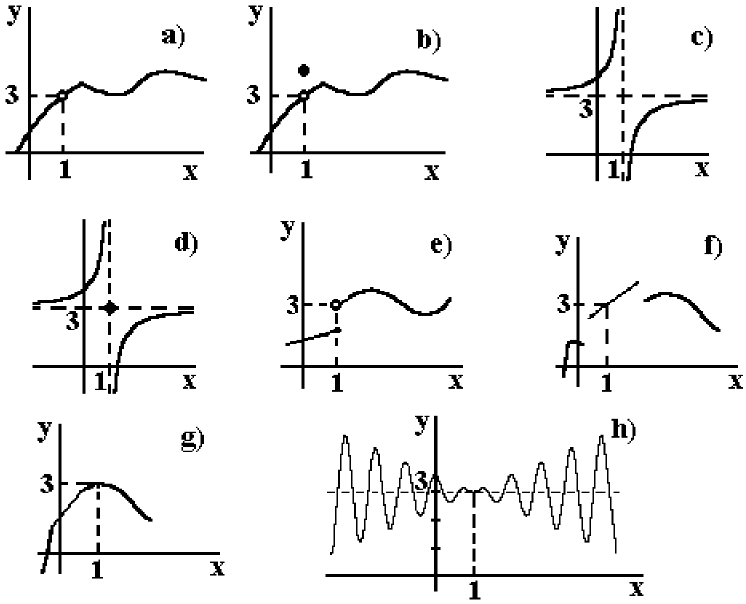
   A) Áno. Ktoré?

   B) Nie. Prečo?

5. Vypočítajte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3x^2 - 12}{x - 2} + \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$, (c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

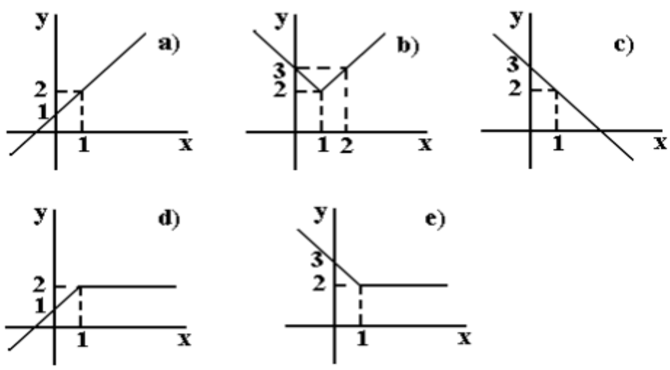
6. Vieme, že $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. Ktorý z grafov tomu zodpovedá?



7. Ktorý z grafov predchádzajúcej úlohy znázorňuje funkciu spojitú v bode 1?

8. Nájdite všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je dotyčnicou ku krivke $y = x^3$ v bode $[-2, -8]$.

9. Vieme, že pre funkciu f platí: $f'(1) = 1$. Ktorý z nasledovných grafov je a ktorý nie je grafom funkcie f?



10. Nový model auta podrobili rýchlostnej skúške. Pri rozbiehaní pre jeho dráhu (v metroch) v závislosti od času (v sekundách) platí: $s(t) = 0,35t^2 + 0,05t^3$. Za aký čas dosiahne rýchlosť 30 metrov za sekundu?

11. Deriváciu funkcie $f'(a)$ pre funkciu f v bode a môžeme definovať v tvare :

$$\text{A)}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)+f(a)}{x+a}, \qquad \text{B)}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)+f(a)}{x-a},$$

$$\text{C)}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad \text{D)}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x+a}.$$

12. Vypočítajte deriváciu funkcie f, ak

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$,

(b) $f(x) = (x+2)^3$,

(c) $f(x) = x(x-3)(x+3)$.

B skupina

1. Zistite, ktorá z definícií spojitosti funkcie f v bode a je správna.
A) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$,
B) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Rightarrow f(a)-\delta < f(x) < f(a)+\delta$,
C) $\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D(f);\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$,
D) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$.

2. Doplňte predpis pre funkciu $f(x)$, aby bola v bode 2 spojitá. Zdôvodnite svoju odpoveď.

$$\text{(a)} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ \dots & \text{pre } x = 2, \end{cases}$$

$$\text{(b)} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ \dots & \text{pre } x = 2, \end{cases}$$

$$\text{(c)} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ \dots & \text{pre } x = 2. \end{cases}$$

3. Existuje vhodné kladné reálne číslo δ, aby platilo tvrdenie:
$\forall x \in R;\ 2-\delta < x < 2+\delta \Rightarrow 7{,}85 < 3x+2 < 8{,}15$?

A) Áno. Ktoré?

B) Nie. Prečo?

4. Existuje vhodné kladné reálne číslo δ, aby platilo tvrdenie:
$\forall x \in R;\ -\delta < x < \delta \Rightarrow -10 < \frac{1}{x} < 10$?

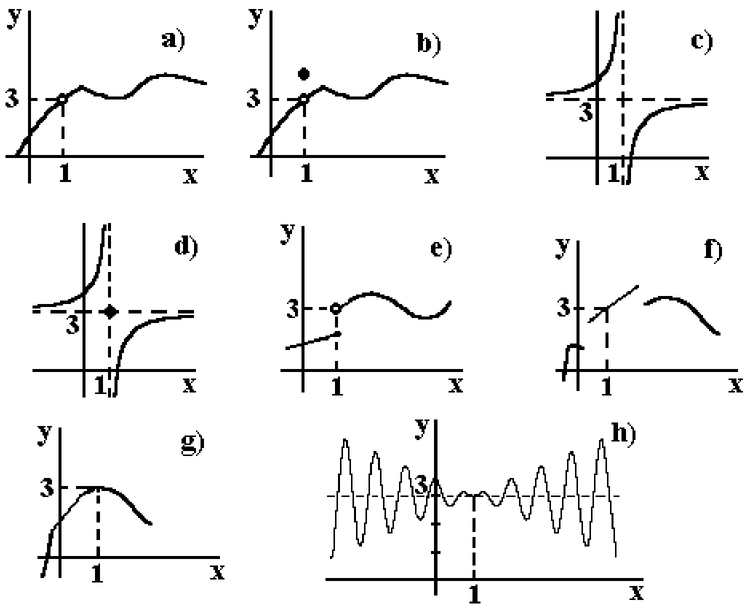
A) Áno. Ktoré?

B) Nie. Prečo?

5. Vypočítajte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{3x^2-27}{x-3}+\frac{x^2-3x}{x^2-9}\right), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}.$$

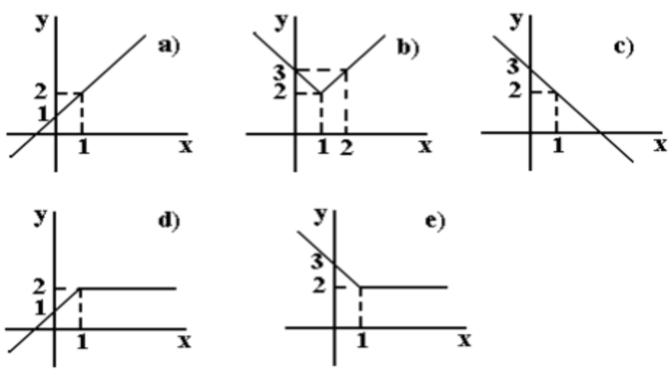
6. Vieme, že funkcia f je spojitá v bode 1. Ktorý z grafov tomu zodpovedá?



7. Ktorý z grafov predchádzajúcej úlohy znázorňuje funkciu f, pre ktorú platí $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$?

8. Nájdite všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je dotyčnicou ku krivke $y = x^3$ v bode $[3, 27]$.

9. Vieme, že pre funkciu f platí: $f'(1) = -1$. Ktorý z nasledovných grafov je a ktorý nie je grafom funkcie f?



10. Starší model auta podrobili rýchlostnej skúške. Pri rozbiehaní pre jeho dráhu (v metroch) v závislosti od času (v sekundách) platí: $s(t) = 0,15t^2 + 0,02t^3$. Za aký čas dosiahne rýchlosť 30 metrov za sekundu?

11. Deriváciu funkcie $f'(a)$ pre funkciu f v bode a môžeme definovať v tvare:

$$\text{A) } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad \text{B) } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x+a},$$

$$\text{C) } \lim_{x\to a} \frac{f(x)+f(a)}{x-a}, \qquad \text{D) } \lim_{x\to a} \frac{f(x)+f(a)}{x+a}.$$

12. Vypočítajte deriváciu funkcie f, ak
    (a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10$,
    (b) $f(x) = (x+3)^3$,
    (c) $f(x) = x(x-2)(x+2)$.

Aby vyhodnotenie previerky bolo jednoduchšie, úlohy sa medzi skupinami líšili len číselnými hodnotami v zadaniach a v poradí úloh. To umožnilo vyhodnotenie previerky ako jednej skupiny. Z tohto dôvodu uvedieme len skórovanie (bodovanie) úloh v skupine A:

Úloha *1* správna odpoveď 1 bod.

2a,b,c každá maximálne 2 body:

- za správne zdôvodnenie alebo výpočet - 1 bod,
- za správnu odpoveď - 1 bod.

3 maximálne 3 body:

- správny výpočet jednej nerovnice - 1 bod,
- správny výpočet druhej nerovnice - 1 bod,
- za správnu odpoveď - 1 bod.

4 maximálne 2 body:

- za správne zdôvodnenie pomocou grafu alebo výpočet - 1 bod,
- za správnu odpoveď - 1 bod.

5 maximálne 3 body:

- správna úprava výrazov v prvom zlomku - 1 bod,
- správna úprava výrazov v druhom zlomku - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

5b,5c každá maximálne 2 body:

- správna úprava výrazov v zlomku - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

6,7 V úlohe 6 maximálne 5 bodov, v úlohe 7 maximálne 3 body:

- za určenie správneho grafu - 1 bod,
- za určenie nesprávneho grafu - odpočítanie 1 bodu tak, aby minimálny počet bodov za úlohu bol 0 bodov.

8 maximálne 4 body:

- za správny výpočet derivácie funkcie - 1 bod,
- za správny výpočet smernice dotyčnice - 1 bod,
- za správny smernicový alebo iný tvar rovnice dotyčnice, ktorý vedie k správnemu výsledku - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

9 maximálne 1 bod:

- za určenie správneho grafu - 1 bod,
- za určenie nesprávneho grafu - odpočítanie 1 bodu tak, aby minimálny počet bodov za úlohu bol 0 bodov.

10 maximálne 4 body:

- za správny výpočet derivácie funkcie - 1 bod,
- za správnu kvadratickú rovnicu - 1 bod,
- za správny výpočet odmocniny z diskriminanta kvadratickej rovnice - 1 bod,
- za správny výsledok - 1 bod.

11,12a správna odpoveď 1 bod.

12b,12c každá maximálne 2 body:

- správna úprava výrazu - 1 bod,
- za správny výpočet derivácie funkcie - 1 bod.

Klasifikačná stupnica pre skupinu G bola nasledovná:

1 ... 42 - 38 bodov

2 ... 37 - 32 bodov

3 ... 31 - 21 bodov

4 ... 20 - 11 bodov

5 ... 10 - 0 bodov

Klasifikačná stupnica pre skupinu U bola nasledovná:

A(1,0) ... 42 - 40 bodov

B(1,5) ... 39 - 37 bodov

C(2,0) ... 36 - 33 bodov

D(2,5) ... 32 - 30 bodov

E(3,0) ... 29 - 21 bodov

F_x(4,0) ... 20 - 11 bodov

F(5,0) ... 10 - 0 bodov

Aj v tejto tematickej previerke sme zavedli faktory SKal, SPr, Chlapci a Dievčatá. Úlohy tematickej previerky 2b, 2c, 5, 8, 12 v A skupine a úlohy 2a, 2b, 5, 8, 12 v skupine B sú kalkulatívne (súčet bodov za tieto úlohy - faktor SKal). Úlohy 1, 2a, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11 v A skupine a úlohy 1, 2c, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11 v B skupine sú problémové úlohy zamerané na porozumenie pojmov (súčet bodov za tieto úlohy - faktor SPr). Vzhľadom na to, že v skupine úloh na porozumenie bola dvojica úloh zameraná viac na využitie riešenia nerovníc, bol faktor SPr rozčlenený aj na faktory SPr1 (súčet bodov za úlohy 1, 2a(c), 6, 7, 9, 10, 11) a SPr2 (súčet bodov za úlohy 3 a 4). V súlade s cieľmi dizertačnej práce boli overované nasledovné hypotézy:

H3a: Stredná hodnota faktora SPr v experimentálnej skupine je väčšia ako stredná hodnota faktora SPr v kontrolnej skupine.

H3b: Stredná hodnota faktora SPr v experimentálnej skupine je rovnaká ako stredná hodnota faktora SPr v kontrolnej skupine.

H4a: Faktor L ovplyvňuje faktor SPr1, faktor N1 ovplyvňuje faktor SPr2.

H4b: Faktor L neovplyvňuje faktor SPr1, faktor N1 neovplyvňuje faktor SPr2.

H5a: Faktory AV1, CV ovplyvňujú faktor SKal.

H5b: Faktory AV1, CV a SKal sú nezávislé.

H6a: Stredná hodnota faktora AV1 je väčšia ako stredná hodnota faktora AV a stredná hodnota faktora N1 je väčšia ako stredná hodnota faktora N.

H6b: Stredné hodnoty dvojíc faktorov AV, AV1 a N, N1 sú rovnaké.

H7a: Faktory Chlapci, Dievčatá nevplývajú na faktory AV1, CV, N1, L, SPr, SKal.

H7b: Faktory Chlapci, Dievčatá vplývajú na faktory AV1, CV, N1, L, SPr, SKal.

Hypotézy *H4* až *H7* boli overované na experimentálnej skupine.

Cieľom kvantitatívneho výskumu bolo dokázať hypotézy označené písmenom *a* pomocou zamietnutia alebo nepotvrdenia hypotéz označených písmenom *b*, ktoré mali funkciu alternatív.

Hypotézy *H2*, *H4*, *H5* a *H7* sme overili aj metódami zhlukovej analýzy. Podľa [62] ich cieľom je klasifikovať skúmané veci a javy (v našom prípade vstupné a výstupné faktory) na základe ich podobnosti a zoskupovať ich do ich „zhlukov." Keďže sme využili program *CHIC*, toto zhlukovanie sme realizovali formou podobnostného stromu, ktorého grafickým reprezentantom je *dendrogram*. Hladinu vetvenia vyjadruje *koeficient podobnosti*, ktorým je reálne číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Čím je toto číslo bližšie k 1, tým je podobnosť medzi vetvami dendrogramu väčšia. Vplyv vstupných na výstupné faktory sme znázornili okrem zhlukového aj pomocou *implikatívneho dendrogramu*, ktorého hladinu vetvenia vyjadruje *koeficient kohezivity*, ktorý má podobnú funkciu ako koeficient podobnosti a tiež nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Čím je toto číslo bližšie k 1, tým je implikatívny vzťah medzi vetvami v smere orientácie dendrogramu silnejší. Pri použití metód zhlukovej analýzy je potrebne získať namerané hodnoty zo vzorky aspoň 50 žiakov, preto v prípade hypotézy *H2* sú uvedené štatistické údaje zo spojenej vzorky oboch skupín G aj U (57 žiakov a študentov). Keďže všetky faktory považujeme za rovnocenné, namerané hodnoty všetkých vstupných aj výstupných faktorov sme predelili ich maximálnou možnou hodnotou, čím sme ich hodnoty previedli na interval $\langle 0, 1\rangle$. V práci sú koeficienty podobnosti resp. kohezivity uvedené priamo v dendrogramoch.

Ostatné štatistické testy sme realizovali pomocou programu *Excel*. Štatistické overenie hypotéz je uvedené v kapitole 5.

2.2.3 Metodika spracovania experimentálneho učebného textu

Cieľom experimentálneho učebného textu uvedeného v prílohe je pokúsiť sa zosúladiť etapy poznávacieho procesu uvedené v kapitole 1.2 s vyučovaním pojmov súvisiacich s limitnými procesmi. V kapitole B.1.1 majú úlohu motivácie problémové úlohy zadané príkladmi 1 a 2. Spájajú problematiku desatinných čísel s periodickým destinným rozvojom a Zenónov paradox Achilla a korytnačky. Ukazuje sa tu možnosť využiť históriu matematiky a v praxi uplatniť paralelu fylogenézy a ontogenézy matematického myslenia. Zároveň ich cieľom je vytvoriť u žiakov určitú intuitívnu predstavu o limitných procesoch.

Učebný text pokračuje geometrickými modelmi („tortové modely") nekonečných geometrických radov s určitými kvocientami, ktoré slúžia ako separované modely. Ďalší geometrický model využívajúci podobnosť trojuholníkov už zovšeobecňuje poznatky získané pri „tortových" modeloch, preto ho možno považovať za univerzálny model.

Využitím tohto modelu je odvodený vzťah pre súčet nekonečného geometrického radu s kladným kvocientom menším ako číslo 1 (abstrakčný zdvih).

Potom môžu žiaci analyzovať pre aké ďalšie geometrické rady tento vzťah platí a prísť k záveru, že kvocient musí byť z intervalu (-1, 1) (kryštalizácia).

Nakoniec si získané poznatky môžu uplatniť pri riešení konkrétnych úloh na súčet nekonečného geometrického radu (automatizácia).

Pri formálnej definícii súčtu nekonečného radu vystupuje ako didaktický problém množstvo a poradie kvantifikátorov. Žiaci často nechápu, prečo ich je toľko a prečo sú v takom poradí. Preto bola formulovaná táto definícia postupne s využitím kontrapríkladu.

Obvykle sa pojem limity postupnosti preberá skôr ako pojem súčtu nekonečného radu. Domnievame sa, že v histórii matematiky to bolo naopak, preto sme sa rozhodli uplatniť fylogenetické hľadisko. Ďalej nás inšpirovali rukopisy zosnulého profesora Igora Kluvánka, v ktorých nie je zavedený pojem súčtu nekonečného radu, ale pojem sumovateľnej postupnosti, t. j. postupnosti, korej súčet členov je konečný.

Kluvánek v [55] zdôvodňuje svoj postup využitím analógie s pojmom integrovateľnosti funkcie. Tak ako existujú funkcie, ktoré sú alebo nie sú integrovateľné, podobne existujú aj postupnosti, ktoré sú alebo nie sú sumovateľné. Pojem limity postupnosti definuje dokonca ako špeciálny prípad limity funkcie v nevlastnom bode. Za funkciu v tomto prípade berie funkciu definovanú na množine prirodzených čísel, čo je prakticky postupnosť.

Spomínané rukopisy a názor Pickerta v [70] nás inšpirovali aj pri zavedení pojmu limity funkcie. Rozhodli sme sa ju zaviesť pomocou pojmu spojitosti funkcie. Przenioslo v [73], [74] a aj Hecht v [37] využívajú na vybudovanie intuitívnych a vizuálnych predstáv grafy rozličných funkcií. Domnievame sa, že uvedený spôsob v experimentálnom učebnom texte umožňnuje klásť pri praktickom využití väčší dôraz na grafy funkcií, pretože sú dôležitými separovanými modelmi poznávacieho procesu.

Učebné osnovy pre posledný ročník osemročných gymnázií v [68], Hecht v [37] kladú pri zavádzaní pojmu derivácie dôraz na fyzikálnu aplikáciu derivácie ako okamžitej rýchlosti (separovaný model). Z fylogentického hľadiska je to správne, pretože je známe z histórie matematiky, že pri objavení diferenciálneho počtu zohrali podnety z fyziky rozhodujúcu úlohu.

V experimentálnom učebnom texte je tiež uplatnený tento model a v jeho rámci limitný proces pri hľadaní okamžitej rýchlosti. Z hľadiska Freudenthalových predstáv formulovaných v [29] je dôležité, aby sa žiaci oboznámili aj s aplikáciami derivácie z ďalších oblastí. To sa premietlo aj v texte (aplikácie v ekonómii).

Spôsob definovania pojmov derivácia a určitý integrál bol zvolený tak, aby bol istým pokračovaním koncepcie budovania matematických pojmov z predchádzajúcich kapitol experimentálneho učebného textu. Aj pri určitom integrále zohráva podobne ako pri derivácii graf funkcie a obsah rovinného útvaru „pod grafom” funkciu dominantného separovaného modelu. Hecht v [37] sa rozhodol uplatniť dva pohľady na určitý integrál (Newtonov a Riemannov integrál). V texte sú spomenuté oba prístupy obohatené niektorými geometrickými modelmi a modelmi z histórie matematiky.

Kapitola 3

Dokumentácia experimentov

V nasledujúcich kapitolách bude popísaný priebeh experimentálnych vyučovacích hodín. Prvých šesť tém (pozri kapitolu 2.1) bolo realizovaných v mesiacoch október a november 2002 v štvrtom ročníku Gymnázia Andreja Hlinku v Ružomberku v rámci vyučovacích hodín matematiky. Ďalej sme ich realizovali aj v mesiacoch marec a apríl 2003 so študentmi prvého ročníka učiteľstva matematiky Pedagogickej fakulty Katolíckej Univerzity v Ružomberku v rámci proseminára z matematickej analýzy. Použijeme pre tieto dve skupiny žiakov a študentov nasledovné označenie: G - trieda žiakov štvrtého ročníka Gymnázia Andreja Hlinku, U - skupina študentov prvého ročníka učiteľstva matematiky. Pri rozhovoroch učiteľov so žiakmi alebo študentmi budú uvedené písmená v zátvorke, aby bolo jasné, do ktorej skupiny žiak alebo študent patrí.

3.1 Propedeutika zavedenia pojmu súčet nekonečného radu

Téma tejto kapitoly bola rozpracovaná aj v rámci experimentálnych vyučovacích hodín so študentmi učiteľstva pre 1. stupeň ZŠ. Podrobnejší opis týchto vyučovacích hodín možno nájsť v [33].

Vyučovaciu hodinu venovanej tejto téme v skupine G sme začali riešením nasledovnej problémovej úlohy:

Príklad 1. Vydelil som 1 : 3 = 0,3333333 na kalkulačke. Potom som vynásobil a dostal som 0,3333333x3=0,9999999 Je 0,9999999=1? Keď x=1:3, je potom 3x=1? Čo vieme povedať o čísle x? Je 0,99999.....=1? Prečo? Existujú aj kalkulačky ktoré vypočítajú 0,3333333 x 3 = 1. Sú tieto kalkulačky lepšie?

Učiteľ: Vypočítajte pomocou kalkulačky 1:3 a výsledok vynásobte číslom 3. Aký výsledok dostanete?

Veronika, Blažej(G): 1

Ján, Jana(G): 0,99999...

Žiaci bez problémov chápali, že celočíselným násobkom čísla s periodickým desatinným rozvojom je znova číslo s periodickým desatinným rozvojom.

Učiteľ: Ktorá kalkulačka je lepšia? S výsledkom 1 alebo 0,9999999?

Všetci žiaci (G) si mysleli, že kalkulačka s výsledkom 1.

Učiteľ: Prečo práve táto?
Juraj(G): Lebo je presnejšia.
Učiteľ: A čo myslíte, ktoré číslo je väčšie 1 alebo $0{,}\overline{9}$?
Všetci žiaci(G) sa domnievali, že číslo 1 je väčšie.
Učiteľ: 5342=5.1000+3.100+4.10+2. A ako môžem číslo $0{,}\overline{9}$ zapísať?
Juraj(G) píše na tabuľu: 9.0,1+9.0,01+9.0,001+....=9.(0,1+0,01+0,001+...)
Učiteľ: Na to, aby sa nám s posledným výrazom ľahšie počítalo, použijeme sumačné znamienko. Napríklad $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}$.

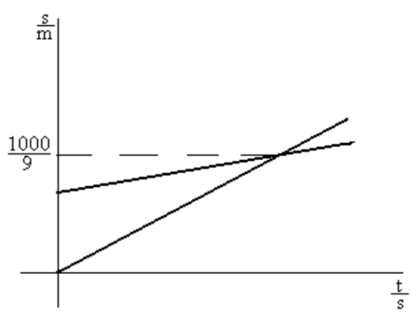
A keď napíšem $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots$, tak namiesto čísla 3 hore napíšem...
Blažej: Nekonečno.
Učiteľ: Teraz to dosaďme do vzťahu pre...

Blažej(G): $0,\overline{9} = 9\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i$.

Tento prvý problém mal motivačnú funkciu a v ňom sme narazili na problém súčtu nekonečného radu. Rozhodli sme sa ho riešiť pomocou mierne modifikovaného známeho Zenónovho paradoxu Achilla a korytnačky.
Príklad 2. Achilles, hrdina trójskej vojny, ktorý mal povesť rýchleho bežca a korytnačka bežali spolu preteky. Achilles dal korytnačke veľkodušne náskok jedného kola. Achilles bežal 10 krát väčšou rýchlosťou. Zenón uvažoval ďalej takto: Keď Achilles prebehol jedno kolo, korytnačka prešla desatinu kola, keď Achilles prebehol tú desatinu, korytnačka sa posunula o stotinu kola ďalej atď. Na základe toho Zenón usúdil, že Achilles korytnačku nikdy nedobehne. Mal pravdu?
Učiteľ: Môžeme si tento problém rozobrať na konkrétnych číslach. Aký náskok môže dať bežne bežec?
Jana(G): 100 metrov.
Učiteľ: Vedel by niekto zapísať dráhu, akú prejde Achilles?

Blažej (G) píše na tabuľu: $100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots = 111+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i$.

Obr. 10



Učiteľ: Výborne. A teraz tento problém budeme riešiť ako klasickú pohybovú úlohu, ktorú iste poznáte už zo základnej školy. Ak má Achilles rýchlosť v, tak má korytnačka rýchlosť $0,1v$. Ak si všimneme graf závislosti dráhy od času a spomenieme si na to, že dráha je rýchlosť krát čas, tak vidíme, že platí...
Veronika(G): $vt = 100 + 0,1vt$
Učiteľ: Správne. Mohli by ste to prísť dopočítať?
Veronika(G) píše na tabuľu:

$$\begin{aligned} vt &= 100 + 0,1vt \\ 0,9vt &= 100 \text{ (tu sa zastavila a nevedela pokračovať, pravdepodobne bol problém} \end{aligned}$$

dve premenné v rovnici).
Učiteľ: Ak si lepšie všimneme graf, tak vidíme, že v vt je dráha, ktorú prejde Achilles, kým dobehne korytnačku. Označme si ju napríklad s.
Veronika(G) pokračuje: $0,9s = 100$

$$s = \frac{100}{0,9} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9}.$$

Učiteľ: Výborne. Teraz sa vráťme k našej otázke, či $0,\overline{9} = 1$. Ak dáme do rovnosti to, čo určil Blažej s tým, čo vypočítala Veronika, tak dostaneme...Poďte Jana to napísať na tabuľu.
Jana(G):

$$111 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1000}{9} \text{(zastaví sa vo výpočte).}$$

Učiteľ: No tak vyjadrime tú sumu.

Jana pokračuje: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1000}{9} - 111 = \frac{1000-999}{9} = \frac{1}{9}.$

Učiteľ: A teraz dosaďme vzťah do vzťahu pre $0,\overline{9}$.
Juraj(G):

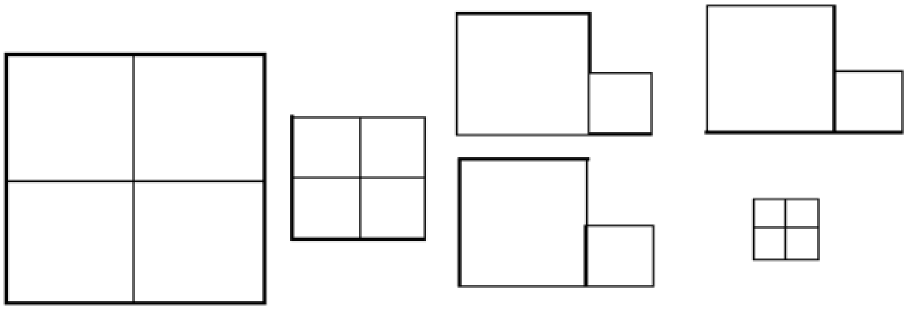
$$0,\overline{9} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = 9\frac{1}{9} = 1.$$

Učiteľ: Prečo nám vyšiel výsledok, že $0,\overline{9} = 1$?
Jana(G): Lebo Achilles dobehne korytnačku.

Na tejto žiackej odpovedi je vidieť, že Zenónov paradox Achilla a korytnačky je vhodným modelom na vysvetlenie problému rovnosti $0,\overline{9} = 1$. Žiaci pochopili, že tak, ako sa postupne skracuje vzdialenosť medzi Achillom a korytnačkou, až ju nakoniec dobehne, tak aj číslo 0,999... sa „približuje" k číslu 1, ak v ňom „pripisujeme ďalšie deviatky". Problém pochopenia tejto rovnosti súvisí aj s pochopením pojmu nekonečno, o ktorom píše aj Bero v [10] a Eisenmann v [25].

Ďalej sme pracovali s geometrickými separovanými modelmi, na ktorých sme si ukázali pojem súčtu nekonečného geometrického radu. Žiaci mohli používať aj „tortový" aj „štvorcový" model (pozri aj obrázky 55 a 56 v kapitole B.1.1).

Obr. 11



Žiaci dostali za úlohu využiť tieto modely na odvodenie vzťahu pre súčet nekonečného geometrického radu s kvocientom $\frac{1}{q}$, kde q je prirodzené číslo väčšie ako číslo 2. Jedna žiačka prezentovala nasledovné riešenie:

Jana(G): $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i=\frac{1}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i=\frac{1}{3}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^i=\frac{1}{4}.$

Keď sa človek na to pozrie, tak nám vždy vznikne v menovateli číslo o 1 menšie, preto

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^i=\frac{1}{q-1}.$$

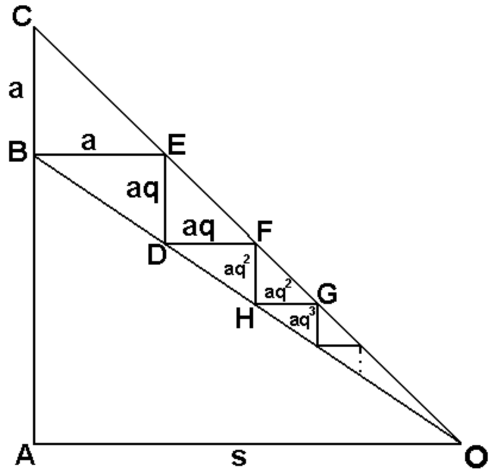
Len niekoľkým žiakom v triede sa podarilo nájsť všeobecné riešenie, väčšina žiakov získala len prvé dva výsledky.
Učiteľ: Aký kvocient má posledný geometrický rad? A čo je to vlastne kvocient geometrického radu?
Veronika(G): Je to číslo q, pre ktoré platí $a_2=a_1+q$ alebo $a_2=a_1q$.
Učiteľ: Jeden z tých dvoch vzťahov nie je správny. Ako vyjadríme 2. člen geometrickej postupnosti?
Mária(G): $a_2=a_1q$.
Tu bolo potrebné žiakom zopakovať vzťahy medzi členmi geometrickej postupnosti (radu). Keďže kvocient naposledy uvedeného geometrického radu je $k=\frac{1}{q}$,

tak možno vzťah $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^i=\frac{1}{q-1}$ napísať v tvare $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{k}}\right)^i=\frac{1}{\frac{1}{k}-1}$. Takto

dostaneme $\sum_{i=1}^{\infty}k^i=\frac{k}{1-k}$.

Nasledovný geometrický model bol použitý ako univerzálny model pre súčet geometrického radu s kvocientom $0<q<1$ (pozri obr. 12).
Učiteľ: Aké budú tie trojuholníky $CBE, EDF, FHG, \ldots$?
Blažej(G): Budú podobné.
Juraj(G): To mám vlastne znázornenú tú postupnosť.

Obr. 12



Učiteľ(G): Dobrý postreh. Čo vieme teda povedať o dĺžke úsečky AC ?
Veronika(G) : a_1^n?
Jana(G): $a_1 + a_1q + \dots$

Následne bol odvodený vzťah pre súčet radu a v rámci kryštalizácie poznatku bol tento vzťah odvodený aj pre kvocient geometrického radu $-1 < q < 0$ (pozri kapitolu B.1.1). Zo vzťahu je zrejmé, že pre nulový kvocient vzťah platí.

Podobne prebiehal vyučovací proces aj na seminári so skupinou U, ale prejavili sa vňom isté odlišnosti. V príklade 1 na rozdiel od gymnaziálnych žiakov sa len 12 študenti (46,2 %) domnievali, že kalulačka, ktorá dáva výsledok 1 je lepšia. Ostatní (53,8 %) sa domnievali, že je lepšia kalkulačka, ktorá dáva výsledok 0,9999999. Táto istá skupina študentov sa domnievala, že číslo $0,\overline{9} < 1$. 11 študenti (42,3 %) sa domnievali, že $0,\overline{9} = 1$. 1 študent (3,9 %) mal názor, že $0,\overline{9} > 1$.

Pohybovú úlohu pri paradoxe Achilla a korytnačky riešil študent pri tabuli použitím priamej úmernosti. Označme rýchlosť a dráhu Achilla ako v_a, s_a a korytnačky v_k, s_k.

Ľubo(U): $\dfrac{s_k}{v_k} = \dfrac{s_a}{v_a}$. Odtiaľ $\dfrac{s_k}{v_k} = \dfrac{100 + s_k}{10v_k}$. Potom $10s_k = 100 + s_k$ a $s_k = \dfrac{100}{9}$.

Pre dráhu, ktorú prejde korytnačka platí $\frac{100}{9} = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots$ Potom sa postupovalo podobne ako v gymnaziálnej triede.

Dvaja študenti poznali algebraický dôkaz rovnosti $0,\overline{9} = 1$. Uvedieme riešenie Roba(U):

$$\begin{aligned}
0,\overline{9}.10 &= 9,9\overline{9} / -0,\overline{9} \\
-0,\overline{9} + 0,\overline{9}.10 &= 9,9\overline{9} - 0,\overline{9} \\
0,\overline{9}(-1+10) &= 9 \\
0,\overline{9}.9 &= 9 \\
0,\overline{9} &= \frac{9}{9} \\
0,\overline{9} &= 1
\end{aligned}$$

Nakoniec boli v skupinách G a U precvičované prevody desatinných čísel s periodickým desatinným rozvojom na zlomky. Za domácu úlohu dostali žiaci a študenti previesť čísla $0,\overline{5}$ a $4,\overline{32}$. Ďalšou úlohou bolo vymyslieť geometrický rad, ktorého súčet by bol 5 alebo -1.

3.2 Definícia pojmu súčet nekonečného radu

Do tejto problematiky žiaci a študenti vstupovali s poznatkom o súčte nekonečného geometrického radu. Tento poznatok mal poslúžiť ako „odrazový mostík" pri precizovaní defínície súčet nekonečného radu.

Žiaci skupiny G na rozdiel od skupiny U nepoznali algebraický spôsob prevodu čísla s periodickým desatinným rozvojom na zlomok. Z toho dôvodu všetci používali geometrický rad v prvej úlohe domácej úlohy. Kým však číslo $0,\overline{5}$ dokázali previesť na zlomok takmer všetci, tak číslo $4,\overline{32}$ už len polovica triedy. Niektorých pomýlilo to, že ak sa napíše desatinný rozvoj tohto čísla, geometrický rad začne až druhým členom vzniknutého radu. Pre iných bolo problémom to, že perióda čísla bola dvojciferná.

Nasledujúcu úlohu dokázalo aspoň sčasti vyriešiť len málo žiakov. Ján(G) vo svojom riešení zaujímavo využil poznatok, že
$1 = 0,\overline{9} = 0,9.1 + 0,9.0,1 + 0,9.0,01 + \dots$
Rovnosť vynásobil piatimi a zapísal: $5 = 4,5.1 + 4,5.0,1 + 4,5.0,01 + \dots$
Analogicky dostal aj výsledok $-1 = -0,9 - 0,09 - 0,009 - 0,0009 - \dots$
Toto riešenie bolo motiváciou pre formuláciu tvrdenia

$$\sum_{j=1}^{\infty}(ca_j) = c\sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Tieto úlohy riešili aj študenti skupiny U, u ktorých bola úspešnosť riešenia oboch úloh oveľa vyššia. V druhej úlohe pri hľadaní radov, ktorých súčet by bol 5 alebo -1, použili rad $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$, ktorý prenásobili číslami 5 alebo -1. Iné riešenie bolo:

$$\text{Bea(U): nek. rad: } 1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{64}{125} + \dots$$

$$q = \frac{4}{5} < 1 \qquad s = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{5-4}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

Toto je veľmi podnetné riešenie, lebo navodzuje problémovú úlohu, nájsť geometrický rad s prvým členom 1, ktorého súčet je prirodzené číslo n. Stačí zvoliť kvocient $q = \frac{n-1}{n}$.
Učiteľ: Kvôli jednoduchosti skúsme skúmať čiastočné súčty geometrických radov. Ako príklady zvoľme

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} 1.$$

Označme ich n-té čiastočné súčty ako $a_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j$, $b_n = \sum_{j=1}^{n} 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^j$, $c_n = \sum_{j=1}^{n} 1$.

Zoraďme prvých sedem čiastočných súčtov týchto radov do tabuľky:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0,5	0,75	0,875	0,9375	0,96875	0,984375	0,9921875
b_n	-1,5	-0,75	-1,125	-0,9375	-1,03125	-0,984375	-1,0078125
c_n	1	2	3	4	5	6	7

(Teraz je zakreslený graf postupnosti čiastočných súčtov.)
Učiteľ: Ako rozlíšime tieto rady? Ktoré budú mať konečný súčet a ktoré nebudú?
Juraj(G): Tie, ktorých čiastočné súčty nevojdú do pása, nemajú konečný súčet.

Učiteľ: Najprv môžeme ten pás ohraničiť ľubovoľne a vysloviť tvrdenie: Rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

má súčet s práve vtedy, keď pre reálne čísla $u < s < v$ existuje také prirodzené číslo

m, že $u < \sum_{i=1}^{m} a_i < v$.

Ak by sme chceli meniť „šírku pása” museli by sme meniť dve čísla u, v. Jednoduchšie by bolo „zostredniť pás”, a preto nech $u = s - \varepsilon$, $v = s + \varepsilon$.

S použitím kvantifikátorov by sme mohli tvrdiť, že rad má konečný súčet práve vtedy, keď

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N; \quad s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{m} a_i < s + \varepsilon.$$

Číslo ε môžme vziať ľubovoľne malé, lebo čiastočné súčty radu sa musia vedieť ľubovoľne „blízko priblížiť” k súčtu radu.

Je táto definícia správna? Väčšina žiakov skupiny G si myslela, že áno a ostatní nevedeli zaujať stanovisko. Preto na spresnenie definície bolo potrebné použiť príklad

radu $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i$ a pomocou tabuľky a grafu postupnosti jeho čiastočných súčtov zaviesť presnú definíciu (pozri kapitolu B.1.2). Aj pri preberaní spomenutého radu sa vyskytol problém, že niektorí žiaci sa domnievali, že jeho súčet je nula.

3.3 Zavedenie pojmu limity postupnosti

Pojem limity postupnosti bol zavedený pomocou vzťahu medzi súčtom radu a jeho čiastočnými súčtami. Nech rad má postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Ak je splnená podmienka pre existenciu súčtu radu: $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N$ také, že pre každé prirodzené číslo $n \geq m$ platí $s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$, potom hovoríme, že číslo s je limitou postupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Potom bola táto definícia zovšeobecnená pre akúkoľvek postupnosť (aj tú, ktorá nie je postupnosťou čiastočných súčtov nejakého radu).

Skupiny G a U dostali za domácu úlohu :

1. Zistite, či je konvergentný rad

   (a) $0,6 + 0,006 + 0,0006 + \ldots,$

   (b) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, kde $a_i = \begin{cases} (-1)^n & \text{pre } n \leq 5, \\ 0 & \text{pre } n > 5. \end{cases}$

2. Nájdite limitu postupnosti (ak existuje) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ak

   $a_1 = 0,3;\ a_2 = 0,33;\ a_3 = 0,333; \ldots$

Väčšina žiakov skupiny G riešila úlohu 1a prepisom na desatinné čísla ako nasledovní žiaci:

Veronika, Dávid(G): $0,6 + 0,06 + 0,006 + \ldots = \frac{6}{10^{-1}} + \frac{6}{10^{-2}} + \frac{6}{10^{-3}} + \frac{6}{10^{-4}} + \ldots =$

$$q = \frac{1}{10} \qquad s = \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10^{-1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{10^{-1}} \frac{10}{9} = \frac{2}{3} \qquad \text{rad je konvegentný}$$

Z výpočtu vidieť, že žiaci majú vedomostné nedostatky o mocninách so záporným exponentom, ktoré narušili ich staršie poznatky o prevode desatinného čísla na zlomok (učivo 5. ročníka ZŠ). Väčšina študentov skupiny U použila nekonečný rad a správne určila, že tento rad je konvergentný. Viac ako jedna tretina týchto študentov správne vypočítala aj súčet radu. Jeden študent napísal, že rad je divergentný (bez zdôvodnenia) a iní dvaja študenti nesprávne určili súčet radu (súčty 6 a 0,7), Nesprávny súčet 6 bol získaný ako súčet geometrického radu s prvým členom 0,6 a kvocientom 0,6. Následne sa študent dopustil nasledovnej chyby:

Cecília(U): $\frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\frac{5}{2} = 6.$

Táto skupina študentov sa nedopustila sa chýb pri mocninách so záporným exponentom. Jedna skupina žiakov skupiny G sa dopustila nasledovnej chyby:

Stanislava, Barbora, Peter(G): $6 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 6 \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,6}{\frac{10-1}{10}} = \frac{0,6}{\frac{9}{10}} = 6\frac{6}{9} = 4.$

Toto riešnie poukazuje na to, že zavedenie sumačného znamienka ako zjednodušenia zápisov nekonečných radov, môže byť pre určitú skupinu žiakov kontraproduktívne. Je pre nich vhodnejšie toto znamienko nepoužívať, pretože pri jeho použití v geometrických radoch nie je hneď viditeľný prvý člen a kvocient radu.

Zaujímavé riešenie tejto úlohy mal tento žiak:

$$\text{Blažej(G): } q = \frac{1}{10} \quad a_1 = 0,6 \quad s_1 = \frac{0,6}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0,6}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{10}\frac{10}{9} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = 0,06 \quad s_2 = \frac{6}{100}\frac{10}{9} = \frac{2}{30}, \quad s_3 = \frac{0,006}{1-\frac{1}{10}} = \frac{6}{1000}\frac{10}{9} = \frac{2}{300}$$

Rad je konvergentný, lebo $0 < s \leq \frac{2}{3}$.

Označenia s_1, s_2, s_3 nemajú v jeho riešení zmysel prvého druhého alebo tretieho čiatočného súčtu radu, ale súčet radu počnúc prvým, druhým, tretím členom atď. Učiteľ môže tento spôsob riešenia využiť neskôr napríklad pri zavedení pojmu majorantného radu, pretože v hore spomínanej dvojici po sebe idúcich radov je ten prvý majorantným radom tomu nasledujúcemu.

Úlohu 1b v tejto fáze nezvládli obe skupiny G a U, pretože pri odvodení správnej definície limity postupnosti bola použitá oscilujúca postupnosť, ktorá nekonverguje. Dve tretiny gymnaziálnych žiakov nevzali do úvahy, že členy radu od určitého člena počnúc sú rovné nule a napísali, že rad diverguje. Zvyšná tretina síce konštatovala, že členy radu ako postupnosť konvegujú k nule, ale nevedeli určiť správne jeho súčet, najčastejšie uvádzali, že jeho súčet je nula. Pri tomto type úloh je potrebné so žiakmi používať viacero návodných úloh. U študentov skupiny U podobne väčšina študentov napísala, že diverguje, viac ako tretina študentov neodpovedala a niektorí uviedli odpoveď „konverguje" bez zdôvodnenia.

Druhú úlohu vyriešili len niekoľkí žiaci skupiny G. Členy postupnosti znázornili graficky a vyjadrili ich ako čiastočné súčty geometrického radu s prvým členom $a_1 = 0,3$ a kvocientom $q = \frac{1}{10}$. Potom hľadaná limita je súčet tohto radu $\frac{1}{3}$.

Zo študentov skupiny U nevyriešil správne úlohu nikto. Väčšina študentov neuviedla žiadnu odpoveď. Niekoľkí uviedli nesprávnu odpoveď 0,4.

Na začiatku nasledujúcej vyučovacej hodiny bola u oboch skupín G a U zadaná nasledovná otázka:

Nech $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ práve vtedy, keď

A) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,

B) $\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,

C) $\forall\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$,

D) $\exists\varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$.

V skupine G správnu odpoveď B uviedlo 12 žiakov (60 %), nesprávnu odpoveď A 4 žiaci (20 %), C 3 žiaci (15%) a D 1 žiak (5 %).

V skupine U boli výsledky podobné: správnu odpoveď B uviedlo 12 študentov (63,2 %), nesprávnu odpoveď A 3 študenti (15,8 %), C 4 študenti (21%).

Nesprávna odpoveď D mohla byť preto taká zriedkavá, lebo pri definovaní pojmu limity postupnosti bola využitá postupnosť $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ a jej graf. Všetky členy tejto postupnosti ležia v páse so šírkou 2, preto ak vezmeme každé reálne číslo $\varepsilon > 2$, je definícia D pre túto postupnosť splnená. To, že táto postupnosť spĺňa aj definície A a C, nie je na prvý pohľad až také zrejmé.

3.4 Výpočty jednoduchších limít niektorých postupností

Na úvod bol obom skupinám ukázaný dôkaz (aj pomocou grafu postupnosti) podľa definície, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Učiteľ: Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+3}=0$. Nájdite vhodné m podľa definície pre $\varepsilon=0,2$.

Sláva(G): $u_n=\dfrac{1}{n+3}$ $\qquad L=0 \qquad |u_n-L|<\varepsilon.$

Po dosadení $\left|\dfrac{1}{n+3}-0\right|<\varepsilon \qquad \dfrac{1}{n+3}<\varepsilon \qquad \dfrac{1}{n+3}<0,2$

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & 0,2n+0,6 \\ -0,2n & < & -1+0,6 \\ -0,2n & < & -0,4 \end{array}$$

$\underline{n>2}$ napríklad $m=10$

$$\frac{1}{10+3}=\frac{1}{13}<\frac{2}{10}, \text{ lebo } 10<26.$$

Na záver boli obom skupinám zadané nasledovné úlohy:

1. Existuje prirodzené číslo m také, že pre všetky prirodzené čísla $n\geq m$ platí, že
   (a) $-\frac{1}{8}<\frac{n-1}{n}-1<\frac{1}{8}$ (áno, nie),
   (b) $-\frac{1}{1000}<\frac{n-1}{n}-1<\frac{1}{1000}$ (áno, nie).
2. Pre každé reálne číslo $\varepsilon>0$ viem nájsť prirodzené číslo m také, že pre všetky prirodzené čísla $n\geq m$ platí $-\varepsilon<\frac{n-1}{n}-1<\varepsilon$ (áno, nie).
3. Pre všetky členy postupnosti $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ platí
   (a) $-\frac{1}{8}<\frac{n-1}{n}-1<\frac{1}{8}$ (áno, nie),
   (b) $-\frac{1}{1000}<\frac{n-1}{n}-1<\frac{1}{1000}$ (áno, nie).
4. Pre každé reálne číslo $\varepsilon>0$ platí, že pre všetky prirodzené čísla n platí nerovnosť $-\varepsilon<\frac{n-1}{n}-1<\varepsilon$ (áno, nie).
5. Nájdite postupnosť, ktorej limita je rovná číslu 1.

Počty odpovedí áno, nie v prvých štyroch otázkach gymnaziálnych žiakov ukazuje nasledovná tabuľka:

úloha	áno	nie	bez odpovede
1a	8 (42,2 %)	11 (57,8%)	0(0 %)
1b	13 (68,4 %)	6 (31,6%)	0(0 %)
2	14 (73,7 %)	3 (15,7%)	2(11,6 %)
3a	7 (36,8 %)	10 (52,6%)	2 (10,6 %)
3b	11 (57,8 %)	6 (31,6%)	2 (10,6 %)
4	4 (21,1 %)	11 (57,8%)	4 (21,1 %)

V úlohách 1a, 1b, 2 bola správnou odpoveďou áno a v úlohách 3a, 3b, 4 nie. Nesprávne odpovede u žiakov súviseli s neznalosťou používania kvantifikátorov v logike, s nedostatkami vo vedomostiach o nerovniciach, ale aj z nesprávneho porovnávania racionálnych čísel. Napríklad v úlohe 1a bola častou chyba $-\frac{1}{8} < -1$. Divergentnú úlohu 5 neriešilo 13 žiakov (68,4 %). Jana(G) uviedla konštantnú postupnosť $(1)_{n=1}^{\infty}$, Dalibor(G) a Blažej(G) uviedli tú istú postupnosť v tvare $\left(\frac{n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Veronika(G) využila úlohu 1a, uviedla postupnosť $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Barbora(G) našla postupnosť $\left(\frac{n-2}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a Peter(G) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Cenné sú tieto posledné dve riešenia najmä preto, lebo sú to nekonštantné postupnosti.

V skupine U boli výsledky prvých štyroch úloh nasledovné:

úloha	áno	nie	bez odpovede
1a	18 (69,2 %)	8 (30,8%)	0(0 %)
1b	19 (73,1 %)	9 (26,9%)	0(0 %)
2	23 (88,5 %)	3 (21,5%)	0(0 %)
3a	11 (42,3 %)	15 (57,7%)	0(0 %)
3b	10 (38,5 %)	16 (61,5%)	0(0 %)
4	10 (38,5 %)	15 (57,7%)	1 (3,8 %)

V porovnaní so skupinou G študenti skupiny U dosiahli lepšie výsledky, lebo niektorí sa s uvedenou problematikou stretli už na strednej škole. Chybné odpovede v úlohách 1a, 1b boli spojené s tým, že niektorí študenti (Zuzana, Juliana(U)) dosadili za n prirodzené čísla 2 a 3 a pre ne nebola nerovnica splnená. Ďalší študenti(Miroslava(U)) omylom dosadzovali namiesto prirodzených čísel kladné zlomky menšie ako 1, ktoré samozrejme tiež nesplňali nerovnicu. V úlohe 2 niektorí urobili chyby pri interpretácii výsledkov nerovníc, ako napríklad Miroslav(U), ktorý si zvolil $\varepsilon = 1$ a zo sústavy nerovníc $-1 < \frac{n-1}{n} - 1 < 1$ dostal, že $n > 1$ a súčasne $n > -1$. To interpretoval ako nejednoznačnosť pre hľadané číslo m a priklonil sa k nesprávnej odpovedi „nie".

V úlohách 3 a 4 viacerí študenti nesprávne prenášali výsledky úloh 1, 2 na tieto úlohy. Niektorí študenti(Marián(U)) presne zapísali, že nerovníce neplatia pre všetky prirodzené čísla, ale od určitého prirodzeného čísla n (člena postupnosti a_n) počnúc.

Úlohu 5 neriešila takmer polovica študentov. Správne ju vyriešila polovica študentov. Najčastejšie uvádzané riešenia boli podiely dvoch polynómov prvého alebo druhého stupňa s koeficientami 1 pri najvyššej mocnine. Druhým najčastejším riešením bola podobne ako pri gymnaziálnych žiakoch konštantná postupnosť, ktorej všetky členy sú rovné 1.

3.5 Výpočty náročnejších limít niektorých postupností

Najprv bolo v oboch skupinách dokázané tvrdenie, že $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ak $-1 < q < 1$.

Tu sme ukázali žiakom a študentom súvis tohto poznatku s poznatkom o súčte nekonečného geometrického radu. Následne bola vysvetlená a dokázaná veta o limite súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch postupností.

Tieto poznatky boli precvičené na úlohách ako napríklad $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$. Následne riešili samostatne nasledovné úlohy:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{7^n+6^n}{7^n-6^n}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{n+3}.$$

V skupine gymnaziálnych žiakov úlohu správne vyriešili 4 žiaci (22,2 %), nesprávne 7 žiaci (38,9 %) a odpoveď neuviedli 7 žiaci (38,9 %). Lucia(G) sa dopustila nasledovných chýb:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7^n+6^n}{7^n-6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^n}{6^n}+\frac{6^n}{6^n}}{\frac{7^n}{6^n}-\frac{6^n}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^n}{6^n}+1}{\frac{7^n}{6^n}-1} = \frac{\frac{7}{6}+1}{\frac{7}{6}-1}$$

Vydelením číslom 6^n sa riešenie úlohy neposúva dopredu, lebo vedie k postupnosti $\left(\dfrac{7^n}{6^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, ktorá nekonverguje. Následne žiačka tvrdí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{6^n} = \dfrac{7}{6}$.

Podobne aj Ján a Peter(G) urobili chybu v tom, že čitateľa a menovateľa vydelili číslom 7, čo vedie k divergentným postupnostiam. Peter a Mária(G) mali problémy aj s mocninami:

$$\text{Peter(G):} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^n}{7}+\frac{6^n}{7}}{\frac{7^n}{7}-\frac{6^n}{7}} = \frac{\frac{7^n+6^n}{7}}{\frac{7^n-6^n}{7}} = \frac{\frac{13^n}{7}}{\frac{1^n}{7}} = \frac{13^n.7}{1^n.7} = 13^n$$

$$\text{Mária(G):} \lim_{n\to\infty} \frac{7^n+6^n}{7^n-6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7+6)^n}{(7-6)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{7}{n}+\frac{6}{n}\right)^2}{\left(\frac{7}{n}-\frac{6}{n}\right)^2} = \frac{(0+0)^2}{(0-0)^2} = 0$$

Marián a Juraj(G) vydelili čitateľa a menovateľa číslom n, čo tiež vedie k divergentným postupnostiam. Zdena(G) previedla zlomok na podiel dvoch výrazov, ale ďalej nevedela pokračovať.

V skupine U štvrtina študentov úlohu vyriešila správne. Na rozdiel od gymnaziálnych žiakov úlohu sa pokúsili riešiť všetci študenti. Tretina študentov uviedla riešenie ∞ ako Michal(U):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+6^n}{7^n-6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{7^n-6^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{7^n-6^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{7-6}\right)^n+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{7-6}\right)^n=\lim_{n\to\infty}7^n+\lim_{n\to\infty}6^n=\infty$$

U ďalšej tretiny sa vyskytla nasledovná chyba (vydelenie čitateľa aj menovateľa číslom 6^n namiesto čísla 7^n):

Beáta(U): $$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+6^n}{7^n-6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^n+1}{\left(\frac{7}{6}\right)^n-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Ostatní študenti sa dopustili podobnej chyby, ale dostali nesprávny výsledok 0.

Martina(U): $$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+6^n}{7^n-6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{7^n-6^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{7^n-6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^n}{7^n}}{\frac{7^n}{7^n}-\frac{6^n}{7^n}}+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^n}{6^n}}{\frac{7^n}{6^n}-\frac{6^n}{6^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{6}{7}\right)^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{7}{6}\right)^n-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{-1}=0$$

Úlohu b vyriešilo v gymnaziálnej skupine správne 16 žiakov (88,8 %). 1 žiak (5,6%) úlohu neriešil. Juraj(G) v úlohe nesprávne predelil menovateľa číslom n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-5}{n+3}=\frac{\frac{n}{n}-\frac{5}{n}}{\frac{n}{3}+\frac{3}{n}}=\frac{\lim 1-\lim\frac{5}{n}}{\lim\frac{n}{3}+\lim 0}=\frac{1-0}{\lim\frac{n}{3}+0}=\lim\frac{1}{\frac{n}{3}}$$

Túto úlohu v skupine U správne vyriešili všetci študenti okrem jedného, ktorý bez zdôvodnenia napísal, že výsledkom je ∞.

Následne boli so žiakmi a študentmi precvičené ďalšie úlohy (podobné úlohy ako v cvičení 3 v kapitole B.1.4).

V oboch skupinách boli riešené samostatne nasledovné úlohy:

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n-1)!}{(n+1)!+(n-1)!},\qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$$

Úlohu a v gymnaziálnej skupine správne vyriešila štvrtina žiakov. Aj keď správny výsledok 1 dostali takmer všetci, dve tretiny žiakov sa dopustila chyby, keď namiesto vzťahu $(n+1)!=(n+1)n(n-1)!$ použili nesprávny vzťah $(n+1)!=(n+1)(n-1)!$. Blažej(G) chcel vydeliť čitateľa aj menovateľa výrazom $(n+1)!$

Úlohu b správne vyriešila osmina žiakov. Takmer polovica úlohu neriešila. Štvrtina vedela, že súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Nevedeli ďalej pokračovať. Osmina žiakov aj získala výsledok $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$. Nevedeli ho už využiť pri riešení úlohy.

V skupine U úlohu a) správne vyriešila takmer polovica študentov. Štvrtina študentov úlohu neriešila a ostatní síce dostali správny výsledok 1, ale nesprávnym postupom.

Anna H.(U): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)n! - (n-1)!}{(n+1)n! + (n-1)!} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)! - (n-1)!}{(n+1)(n-1)! + (n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,(n(n+1)-1)}{(n-1)!\,(n(n+1)+1)}$$

Anna K.(U): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-(n-1)!\,(n(n+1))}{-(n-1)!\,(n(n+1))}$

Vladimír(U): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,((n+1)-(n-1))}{n!\,((n+1)+(n-1))}$

Katarína, Zuzana(U): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)n! - n}{(n+1)n! + 1}$

Beáta(U) a Ľubica(U) urobili podobnú chybu ako žiaci gymnaziálnej skupiny, keď použili nesprávny vzťah $(n+1)! = (n+1)(n-1)!$ Z týchto prác vidíme, že študenti tejto skupiny sa dopustili viacerých druhov chýb. Mohlo to byť spôsobené aj tým, že sú absolventami rôznych stredných škôl z rôznych regiónov. V každom prípade uvedené chyby podobne ako pri gymnaziálnej skupine poukazujú na problémy pri úprave výrazov s faktoriálmi.

Úlohu b v tejto skupine správne vyriešila viac ako jedna tretina študentov. Jedna tretina študentov úlohu vôbec neriešila a ostatní ju vyriešili nesprávne. Najčastejšou chybou bola nasledovná úvaha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \ldots = 0+0+0+\ldots = 0$$

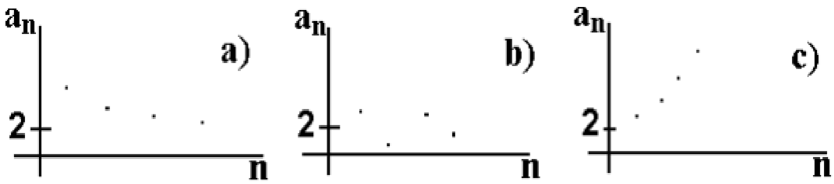
Táto úloha môže „zvádzať" niektorých študentov na použitie vety o limite súčtu, čo v tomto prípade nie je správne, pretože daná veta je o konečnom súčte.

3.6 Problémové úlohy súvisiace s limitnými procesmi

Na úvod tejto témy bol v oboch skupinách kladený dôraz na súvis konvergencie postupnosti s tvarom jej grafu. Následne žiaci a študenti riešili samostatne nasledovnú problémovú úlohu:

Dokresli do grafov aspoň štyri členy postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby platilo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Obr. 13



Úlohy a), b) vyriešila správne viac ako polovica gymnaziálnych žiakov. V úlohe a) nakreslili graf klesajúcej postupnosti, ktorá sa „približuje” k číslu 2. V úlohe b) nakreslili postupnosť, ktorej nepárne členy tvorili klesajúcu a párne členy rastúcu postupnosť, pričom obe sa „približujú” k číslu 2. Úlohu c) správne nevyriešil nikto. Väčšina žiakov nakreslila rastúcu divergentnú postupnosť, ostatní úlohu vôbec neriešili. Riešenia týchto úloh ukázali, že u týchto žiakov bola mylná predstava, že tak ako sa „správa” prvých niekoľko členov postupnosti, tak sa „musí správať” celá postupnosť.

V skupine U vyriešili úlohy a), b) správne viac ako tri štvrtiny študentov. Kým v úlohe a) uvádzali klesajúcu postupnosť podobne ako gymnaziálni žiaci, tak v úlohe b) boli dve študentské riešenia odlišné ako u ostatných(to isté riešenie ako u gymnaziálnych študentov). Jedna študentka(Mária) nakreslila graf postupnosti, ktorá bola počnúc piatym členom rasúca a druhá študentka (Katarína(U)) postupnosť, ktorá bola piatym členom počnúc klesajúca. Len jedna šestina študentov správne vyriešila úlohu c) tým, že nakreslila postupnosť, ktorá bola klesajúca počnúc piatym členom a „približovala” sa k číslu 2. Jedna šestina úlohu vôbec neriešila a ostatní urobili tú istú chybu ako gymnaziálni žiaci (rastúca divergentná postupnosť).

Problémy s predchádzajúcimi úlohami boli motívom pre zopakovanie súvisu limity postupnosti s tvarom grafu postupnosti.

Juraj(G) pri tabuli: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+6}{2n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6}{n}}{\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n}} = \dfrac{1}{2}$

Učiteľ: Koľko prirodzených čísel spĺňa nerovnosť $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1000} < \dfrac{n+6}{2n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1000}$? Konečne alebo nekonečne veľa?

Juraj(G): Konečne veľa. Veronika(G): Nekonečne veľa.

Názory žiakov sa rozchádzali, preto bolo potrebné pomocou grafu vyriešiť túto otázku. Potom už vedeli, že je konečne veľa prirodzených čísel, ktoré spĺňajú nerovnosť $\frac{n+6}{2n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{1000}$.

Potom boli riešené úlohy, ktoré poukazovali na to, že o limite a konvergencii postupnosti nerozhoduje jej prvých n členov (n je prirodzené číslo).

Učiteľ: Akú limitu má nasledovná postupnosť? Nech $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pre } n < 100, \\ 1 & \text{pre } n \geq 100. \end{cases}$

Jana(U): Táto postupnosť nemá limitu.
Dušan(U): Jej limia je 0.
Lýdia(U): Nie, jej limita je 1.
Názory v oboch skupinách sa rôznili aj pri postupnosti

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pre } n \text{ párne,} \\ 1 & \text{pre } n \text{ nepárne.} \end{cases}$$

Preto bolo potrebné aj za pomoci grafu tieto úlohy v oboch skupinách rozobrať.
V rámci záverečného opakovania v skupine U riešili študenti aj nasledovnú úlohu:
Učiteľ: Vieme, že harmonický rad nemá súčet. Aký súčet má rad

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \text{ ak } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pre } n \leq 3, \\ 0 & \text{pre } n > 3. \end{cases}$$

Ivana(U): Má súčet.
Učiteľ: Prečo?
Ivana(U): Lebo od štvrtého člena...(zamyslí sa)
Učiteľ: Čo je od štvrtého člena?
Ivana(U): Má nuly.

V oboch skupinách sa potom konalo záverečné opakovanie prebraných šiestich tém a potom žiaci a študenti oboch skupín písali tematické previerky. Zadania úloh sa sčasti v oboch skupinách odlišovali, pretože v skupine U sa vyučovalo v rámci dvojhodinových cvičení. Previerku skupiny U písali aj študenti 1. ročníka učiteľstva matematiky Pedagogickej fakulty UJEP v Ústí nad Labem.

Zadania tematických previerok pre obe skupiny sú uvedené v kapitole 2.2.2. Ich výsledky a vyhodnotenie je v kapitole 4.

3.7 Zavedenie pojmu limity funkcie

Experimentálne vyučovacie hodiny so zameraním na limitu funkcie a deriváciu sa uskutočnili v jednej triede 4. ročníka Gymnázia sv. Andreja (skupina G) a v dvoch študijných skupinách 1. ročníka učiteľstva všeobecnovzdelávacích predmetov kombinácií s matematikou (skupina U). Experimentálne vyučovanie sa konalo v novembri a decembri 2003.

Na úvod žiaci a študenti skupín G a U písali vstupnú previerku, ktorej zadanie je uvedené v kapitole 2.2.2. Okrem experimentálnych skupín uvedenú vstupnú previerku písali aj študenti kontrolných skupín - ďalšej triedy 4. ročníka Gymnázia sv. Andreja a študenti 1. ročníka učiteľstva matematiky Pedagogickej fakulty UJEP v Ústí nad Labem.

Úvodným pojmom k pojmu limity funkcie bola spojitosť funkcie. K jej zavedeniu potrebovali žiaci a študenti poznať *okolie bodu*.
Učiteľ: Ako by sme definovali okolie stromu?
Anna J.(G): Je to oblasť, kde padajú listy.
Učiteľ: Zaujímavá definícia. A ako by vyzeralo štvormetrové okolie stromu?

Anna J.(G): Kruh s polomerom 4.
Učiteľ: A čo by sa stalo, keby sme mali jednorozmerný prípad - nájsť okolie čísla 5? Môžeme si ho nakresliť na číselnej osi.
Michal G.(U): Bol by to interval.
Učiteľ: Ako by potom vyzeralo 0,5 okolie bodu 5?
Ján K.(U): Interval od 4,5 po 5,5.
Učiteľ: Správne. Presnejšie by sa jednalo o otvorený interval. A ako by vyzeralo ε - okolie bodu 5?
Ľubomír D.(U): Otvorený interval (4,5; 5,5).
Príklad 3. Načrtnite graf funkcie y = 2x + 5.
Anna D.(G) správne zakreslí graf na tabuľu.
Učiteľ: Akú funkčnú hodnotu má funkcia v bode 3?
Klaudia K.(U): 11.
Učiteľ: Ak sa lepšie pozrieme na graf tejto funkcie, vidíme, že v okolí bodu 3 sa funkčné hodnoty nachádzajú v nejakom okolí bodu 11. Preto bude riešiteľná aj nerovnica $10,5 < 2x + 5 < 11,5$.
Michal Š.(G):

$$\begin{array}{rcl} 10,5 & < & 2x+5 \\ 5,5 & < & 2x \\ 2,75 & < & x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+5 < 11,5 \\ 2x < 6,5 \\ x < 3,25 \end{array}$$

Učiteľ: Aké okolie mi vyčleňujú tieto nerovnice?
Lucia Š.: Okolie čísla 3.
Potom študenti zovšeobecnili tento výsledok aj pre každé okolie čísla 11.
Mária K.(G):

$$\begin{array}{rcl} 11-\varepsilon & < & 2x+5 \\ 6-\varepsilon & < & 2x \\ 3+\dfrac{\varepsilon}{2} & < & x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+5 < 11+\varepsilon \\ 2x < 6+\varepsilon \\ x < 3+\dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

Učiteľ: Vidíme, že sme dostali $\frac{\varepsilon}{2}$ - okolie bodu 3. Ak by sme označili $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, môžeme pre akékoľvek epsilonové okolie bodu 11 nájsť vhodné delta okolie bodu 3, pre ktoré platí, že v každom čísle x z tohto okolia funkčná hodnota je z epsilonového okolia bodu 11. Postup, ktorý sme robili doteraz je v hľadaní vhodného δ pre každé číslo ε. Ak by sme postup obrátili, dokázali by sme, že pre akékoľvek číslo ε, také vhodné δ existuje.

Potom bola zavedená definícia spojitosti funkcie v bode a neskôr na množine. Tento pojem bol precvičovaný na grafoch funkcií. Na príklade funkcie $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ bol vysvetlený rozdiel medzi grafom tejto funkcie a grafom funkcie $x+1$. Žiaci pochopili, že funkciu $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ je možné „dodefinovať" tak, aby sa stala spojitou.

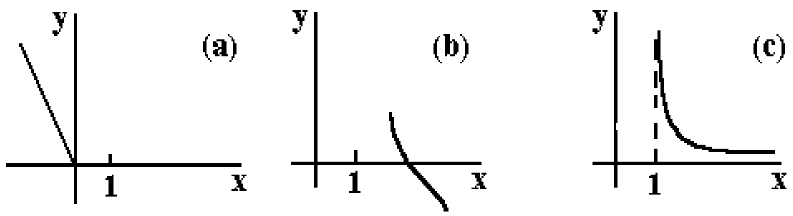
Nasledovali príklady lineárnych lomených funkcií, ktoré nie sú spojité na množine všetkých reálnych čísel a nie je možné ich „dodefinovať" tak, aby sa stali spojitými.

Získané poznatky boli precvičené na nasledovných úlohách pri samostatnej práci v oboch skupinách G a U:

1. Zistite, ktorá z definícií spojitosti funkcie f v bode a je správna.
   A) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$,
   B) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$,
   C) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D(f);\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Rightarrow f(a)-\delta < f(x) < f(a)+\delta$,
   D) $\forall\delta > 0 \quad \exists\varepsilon > 0 \quad \forall x \in D(f);\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$.

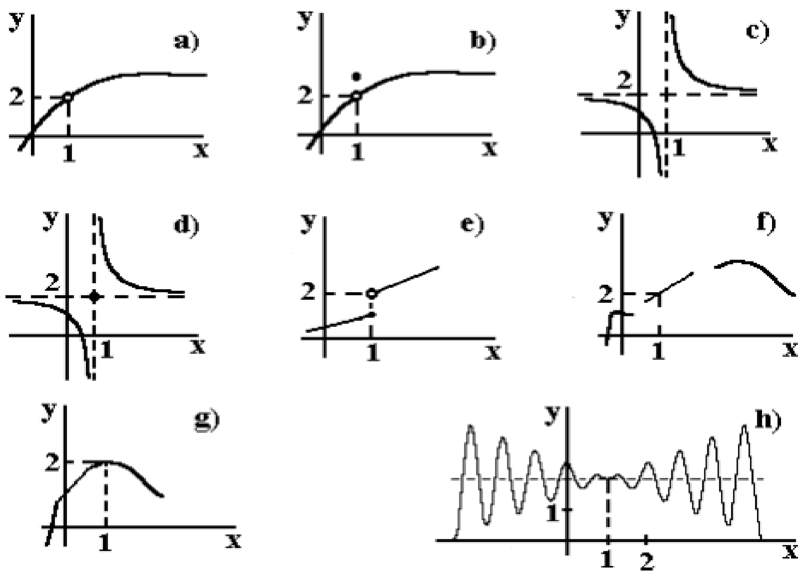
2. Dokreslite graf, ak je to možné, aby funkcia daná grafom bola spojitá v bode 1.

Obr. 14



3. Ktorá z uvedených funkcií daných grafom je spojitá v bode 1?

Obr. 15



V skupine G dve tretiny žiakov vyriešili úlohu 1 správne. Dvaja žiaci uviedli nesprávnu odpoveď B a dvaja D. Ostatní žiaci úlohu neriešili. Nesprávna odpoveď B sa líšila od A poradím v implikácii. Odpoveď D sa podobá na B. V odpovedi D tým, že sú na začiatku vymenené písmená ε a δ, tak sú vymenené kvantifikátory. Žiakom a študetom nemusí robiť problém len poradie kvantifikátorov, ale aj poradie výrokov v implikácii.

V úlohe 2 nikto zo skupiny G nemal všetky grafy správne. Najčastejšie sa vyskytli chyby v grafoch b, d, e. Pri grafoch d, e žiaci uviedli, že sa nedajú dokresliť tak, aby funkcia bola spojitá v bode 1. Pri grafe d uviedli, že graf sa nedá dokresliť alebo ho dokreslili nesprávne nakreslením jedného ramena hyperboly.

Úlohu 3 vyriešila zo skupiny G správne takmer polovica žiakov. Najčastejšie chyby žiakov boli, že pokladali funkcie b, d, e za spojité a funkciu f za nespojitú v bode 1. Žiaci sa mylne domnievali, že ak je funkcia definovaná v nejakom bode, už je v ňom spojitá. Funkcia f je definovaná len v okolí bodu 1, nie je definovaná na množine všetkých reálnych čísel, čo bolo problémom pre žiakov.

V skupine U úlohu 1 vyriešilo správne polovica študentov, dve pätiny študentov uviedlo nesprávnu odpoveď B a ostatní uviedli nesprávnu odpoveď C.

Úlohu 2 vyriešili správne 3 študenti. Najviac chýb urobili študenti v grafe d). Túto časť úlohy správne vyriešila pätina študentov. Tretina uviedla, že graf sa nedá dodefinovať a ostatní doplnili graf nespojitou funkciou. Ďaslším problematickým grafom bol graf f). Najčastejšou chybou bolo vyplnenie jedného alebo oboch krúžkov. Uvedenú chybu urobila tretina študentov.

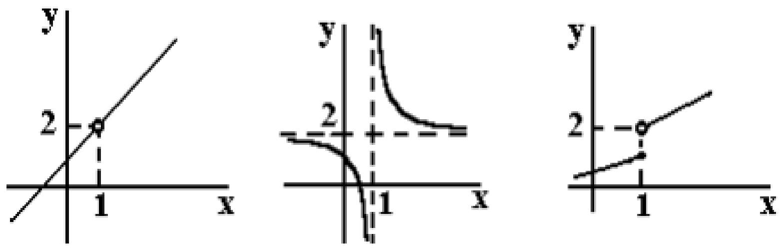
Úlohu 3 vyriešila správne tretina študentov. Vyskytli sa podobné chyby ako v skupine G, len boli viac rozšírené. Funkciu d) pokladala tretina študentov za spojitú.

Žiakom a študentom boli potom vysvetlené podrobne všetky tri úlohy. Na príklade nespojitej funkcie bola dokázaná nesprávnosť definícii B, C, D z prvej úlohy. Pri ostatných úlohách boli vysvetlené všetky grafy.

Na nasledujúcej vyučovacej hodine bola vysvetlená veta o spojitosti súču, rozdielu, podielu spojitých funkcií a spojitosti konštantného násobku spojitej funkcie.

Učiteľ: Je funkcia $y = \frac{x^2+3x+2}{x^2+1}$ spojitá v bode 1? Čo je grafom funkcie v čitateli?
Peter H.(U): Parabola.
Učiteľ: Je to spojitá funkcia?
Peter H.(U): Áno, je.
Učiteľ: A v menovateli je spojitá funkcia?
Anna J.(G): Je.
Učiteľ: Bude podiel spojitý?
Klaudia K.(G): Áno.
Učiteľ: Prečo?
Klaudia K.(G): Lebo $x^2 + 1 \neq 0$.
Učiteľ: Ktorú z nasledujúcich funkcií je možné dodefinovať tak, aby sa stala spojitou?

Obr. 16



Anna J.(G): Tú prvú.
Učiteľ: Správne. O takýchto funkciách budeme hovoriť, že majú limitu v bode.

Definícia 18. *Nech M je otvorený interval obsahujúci bod a a funkcia f je definovaná na množine $M-\{a\}$. Nech k je reálne číslo. Označme F ako funkciu, pre ktorú platí:*

1. *$F(x)=f(x)$ pre každé $x \neq a$ v definičnom obore funkcie f,*
2. *$F(a)=k$.*

Limitou funkcie f v bode a je číslo k práve vtedy, keď funkcia F je spojitá v bode a. To označíme nasledovne $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$.

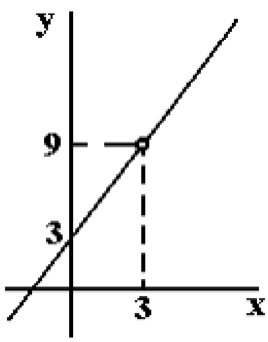
3.8 Výpočty limít funkcie

Na začiatku žiaci riešili úlohy pomocou grafu.
Dominik(G): $\lim\limits_{x\to 3}(2x+3)=$ $\qquad D(f)=R$

$$F(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{pre } x\neq 3,\\ L & \text{pre } x=3\end{cases}$$

Učiteľ: Nakreslite graf funkcie $F(x)$ pre $x\neq 3$.
Dominik:

Obr. 17



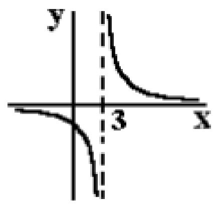
Učiteľ: Čo urobíme, aby sa funkcia stala spojitou?
Miroslava(G): Vyplníme krúžok.
Učiteľ: Akou funkčnou hodnotou? Čo to znamená pre limitu funkcie v bode 3?

Dominik(G): 9, preto $\lim\limits_{x\to 3}(2x+3)=9$.

Erika J.(G) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{pre } x\neq 3,\\ L & \text{pre } x=3.\end{cases}$$

Obr. 18



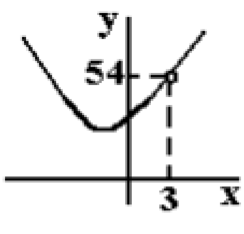
Učiteľ: Je možné túto funkciu v bode 3 dodefinovať tak, aby sa stala spojitou?
Viacerí z triedy: Nie.
Učiteľ: Čo to znamená pre limitu funkcie v bode 3?
Erika J.(G): Limita neexistuje.
Učiteľ: V prvom príklade sme viacmenej iba dosadili funkčnú hodnotu a dostali sme limitu. Čo myslíte, čomu sa rovná $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-54}{x-3}$?

Michal J.(G): 0.
Učiteľ: Poďte nás o tom presvedčiť.

Michal počíta na tabuli: $F(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-54}{x-3} & \text{pre } x \neq 3, \\ L & \text{pre } x = 3 \end{cases}$

$$\frac{2x^3-54}{x-3} = \frac{2(x^3-27)}{x-3} = \frac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} =$$
$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 9\right] = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 18 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}$$

Obr. 19



Učiteľ: Ako urobíme túto kvadratickú funkciu spojitou? Čo to znamená pre limitu funkcie v bode 3?

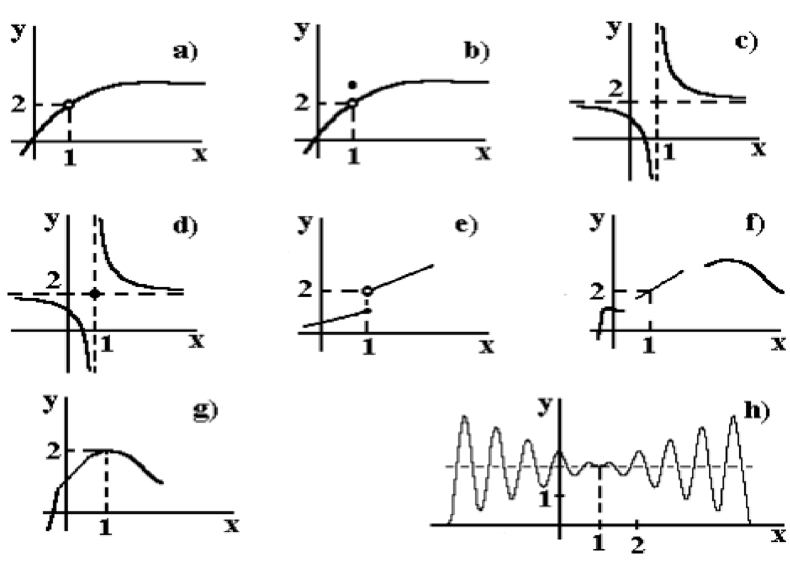
Michal: Doplníme bod $[3, 54]$. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-54}{x-3} = 54$.

Učiteľ: Vidíme, že nám limita nevyšla nula. Tento príklad ukazuje, že nemôžeme bezducho dosadzovať do funkčných predpisov pri výpočte limít.

Potom žiaci počítali výpočtové príklady aj bez kreslenia grafov a bola im zadaná nasledovná samostatná práca:

1. Vieme, že pre funkciu f platí $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. Ktorá z uvedených funkcií daných grafom spĺňa túto podmienku? Odpoveď zdôvodnite pre každý graf.

Obr. 20



2. Existuje vhodné kladné reálne číslo δ, aby platilo tvrdenie

   (a) $3-\delta < x < 3+\delta \Rightarrow 0,9 < \frac{1}{x-2} < 1,1$;

   (b) $2-\delta < x < 2+\delta \Rightarrow -10 < \frac{1}{x-2} < 10$?

V skupine G úlohu 1 celkom správne nevyriešil nikto. Necelá polovica žiakov uviedla, že funkcia uvedená v a) spĺňa podmienku. V prípade funkcie b) to boli iba traja žiaci. Počas vyučovania bolo pre žiakov problematické pochopiť, že ak je funkcia nespojitá v jedinom bode a má v ňom definovanú funkčnú hodnotu, môže mať limitu v tomto bode. Tri štvrtiny žiakov správne uviedlo, že funkcia c) nemá v bode 1 limitu. Štvrtina žiakov uviedla nesprávnu odpoveď, u niektorých z nich vznikla nesprávna predstava, že funkcia má limitu v bodoch nespojitosti. 1 žiak uviedol, že funcia d) spĺňa podmienku, pomýlilo ho, že funkcia mala definovanú funkčnú hodnotu. Podobnej chyby v e) sa dopustila pätina žiakov. Štvrtina žiakov uviedla odpoveď f), g), h) a zamenila medzi sebou pojmy limita a pojitosť funkcie v bode. Funkcia h) svojim priebehom robila problémy až trom štvrtinám žiakov. Podľa nich funkcia nemá limitu v bode 1, niektorí uviedli dokonca, že nie je ani v bode 1 spojitá.

V úlohe 2a správne odpovedali tri pätiny žiakov, 2 žiaci uviedli nesprávnu odpoveď, ostatní odpoveď neuviedli. Chybné odpovede boli zapríčinené numerickými chybami pri úprave nerovnice.

Na úlohu 2b odpovedala správne polovica žiakov, 3 žiaci uviedli nesprávnu odpoveď a ostatní odpoveď neuviedli. V chybných odpovediach sa žiaci dopustili okrem numerických chýb aj chýb pri prenásobení nerovnice premennou x.

Následne bol žiakom na grafe viacerých funkcií poukázaný vzťah medzi pojmami limita a spojitosť funkcie, vety o výpočte limity súčtu, rozdielu, súčinu, podielu dvoch funkcií. Preto bola pozornosť zameraná na kalkulatívne úlohy.

Júlia(G): $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0+\frac{1}{2}$$

V skupine U sa u niektorých študentov prejavila zámena postupov medzi výpočtom limity funkcie a limity postupnosti, prípadne problémy s číselnými výrazmi:

Juliana (U): $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\infty$

Mária Š. (U): $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{2-2}=\dfrac{1}{0}=0$

Tieto chyby sa vyskytovali najčastejšie u študentov, ktorí neabsolvovali gymnázium.

3.9 Zavedenie pojmu derivácia (v súvislosti s limitným procesom)

Propedeutika pojmu derivácia pomocou programu Mathematica

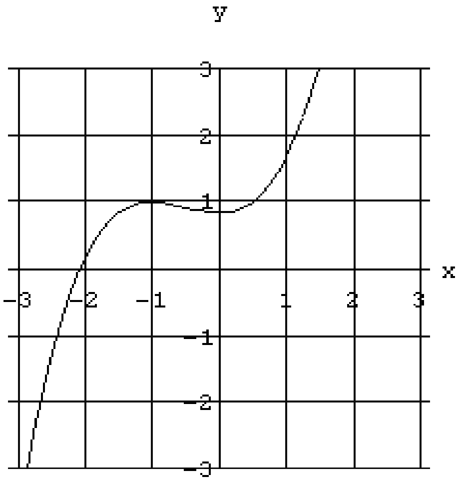
Tento spôsob propedeutiky pojmu derivácia bol realizovaný so žiakmi 3. ročníka Gymnázia sv. Andreja v Ružomberku (v rámci matematiky, skupina G) a aj so študentmi 2. ročníka učiteľstva matematiky na Pedagogickej fakulte Katolíckej Univerzity v Ružomberku (v rámci predmetu Výučbový softvér z matematiky, skupina U). Vyučovanie sa uskutočnilo v počítačovej učebni pre 10 študentov. Najprv boli vysvetlené základné príkazy programu *Mathematica*, nevyhnutné ku kresleniu grafov funkcií. Následne sme v tomto programe riešili úlohu, ktorú uvádza aj Kirsch v [51]

Príklad 4. Určte smernicu dotyčnice funkcie $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{53}{64}$ v bode $[0,75;1,25]$.

Prvý zo série grafov funkcie po jej definovaní v programe Mathematica sme vykreslili použitím príkazu

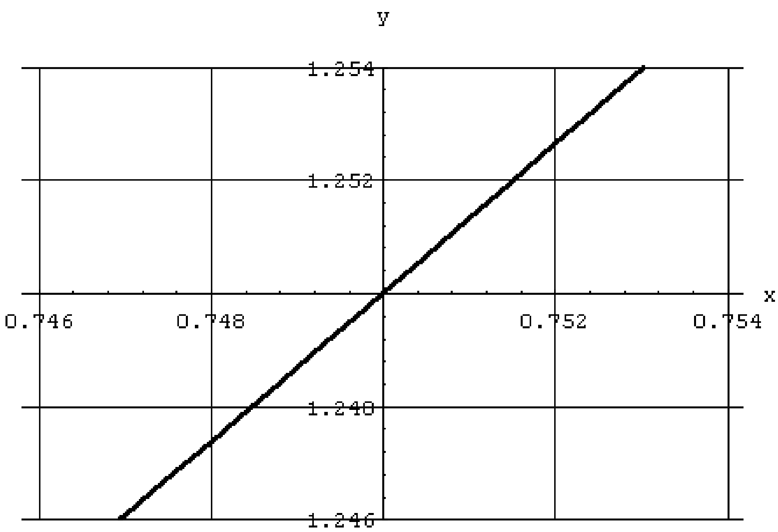
Plot[*f*[*x*],{*x*,-3,3},*PlotRange*→{-3,3},*GridLines*→ *Automatic*, *AxesLabel*→{"*x*","*y*"}] a dostali sme graf funkcie.

Obr. 21



Potom sme zobrazovali graf funkcie v stále „užšom" okolí bodu 0,75 až sa nám krivka zmenila na priamku. Použili sme príkaz *Plot*[*f*[*x*],{*x*,0.746,0.754},*PlotRange*→ {1.246, 1.254},*GridLines*→ *Automatic*,*AxesLabel*→{"*x*","*y*"}].

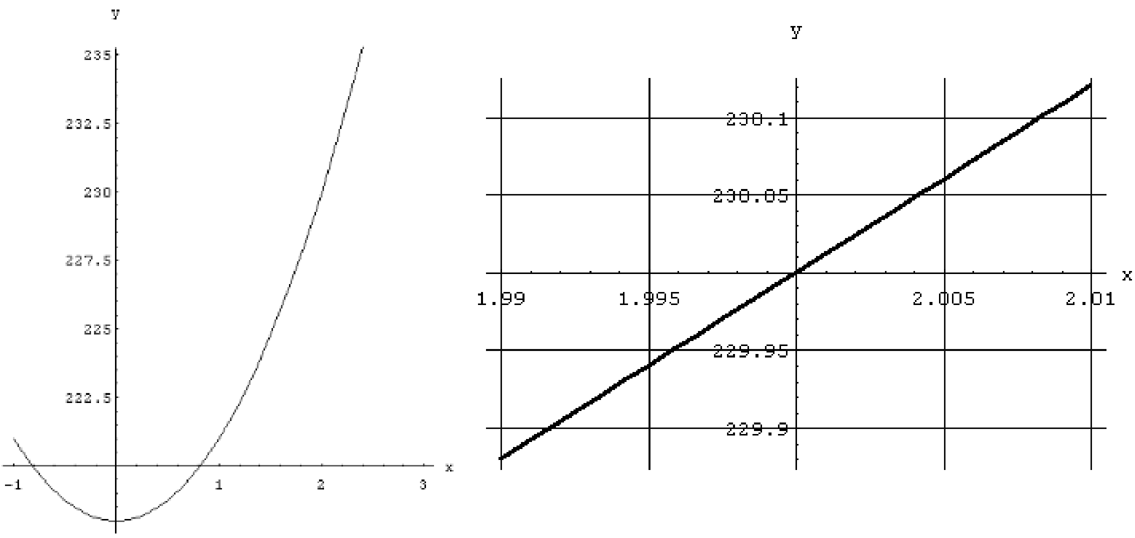
Obr. 22



Z grafu vidíme, že smernicu k dotyčnice môžeme určiť ako smernicu priamky. Vypočítame $k \doteq \frac{1{,}254-1{,}246}{0{,}753-0{,}747} = 1{,}\overline{3}$. Študentom skupiny U bol ukázaný aj výpočet pomocou derivácie, ktorý dával výsledok 1,3125. Uvedená metóda pomocou grafu dávala v tejto úlohe presnosť výsledku na jedno desatinné miesto. Vyššia presnosť sa darila dosiahnuť pri dotyčniciach grafov kvadratických funkcií, čo bolo vidieť v samostatnej práci žiakov. Mali možnosť si zvoliť jednoduchú spojitú funkciu a bod na jej grafe. Potom ich úlohou bolo určiť smernicu dotyčnice funkcie v tomto bode.

Barbora(G) si zvolila funkciu $y = 6^3 + 3x^2 + 2$. Určovala smernicu dotyčnice v bode [2, 230]. Najprv nakreslila graf funkcie a potom nakreslila graf funkcie v okolí tohto bodu.

Obr. 23

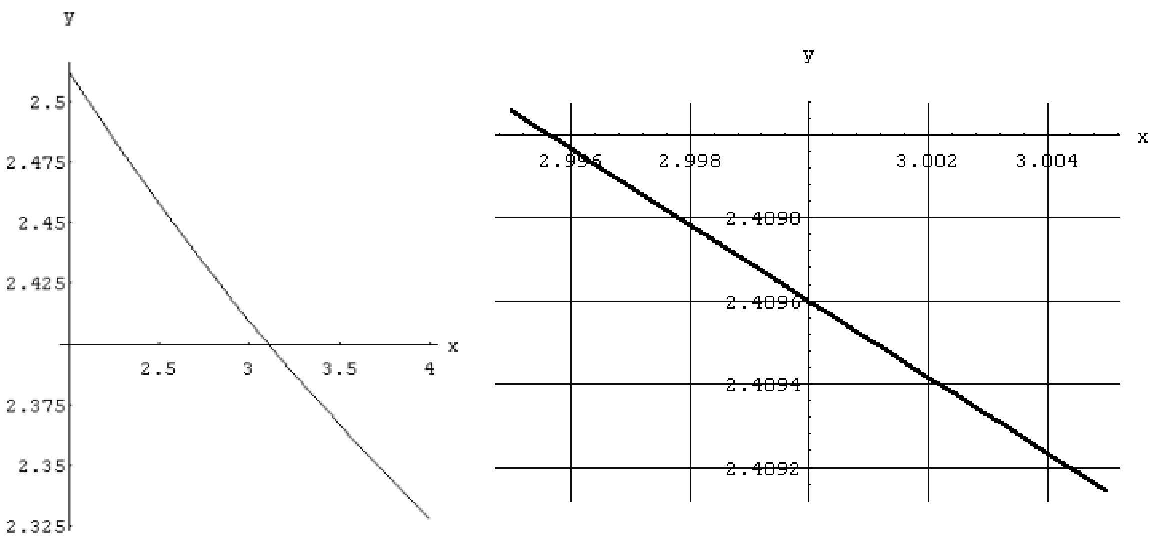


Vypočítala hodnotu smernice dotyčnice $k = \frac{230{,}06-229{,}94}{2{,}005-1{,}995} = 12$. Táto hodnota je totožná s vypočítanou hodnotou pomocou derivácie.

Kvadratické funkcie boli vhodné pre skupinu G, lebo žiaci sa v tom čase učili pojem dotyčnice kužeľosečky v analytickej geometrii. Žiaci využili prácu s kreslením grafov pomocou počítača aj na zopakovanie elementárnych funkcií, ktoré sa učili v 2. ročníku.

Martin si zvolil exponenciálnu funkciu $y = 2 + 0,8^{x+1}$ a hľadal jej smernicu dotyčnice v bode [3;2,4096]. Postupoval podobne ako Barbora a dostal nasledovné grafy.

Obr. 24

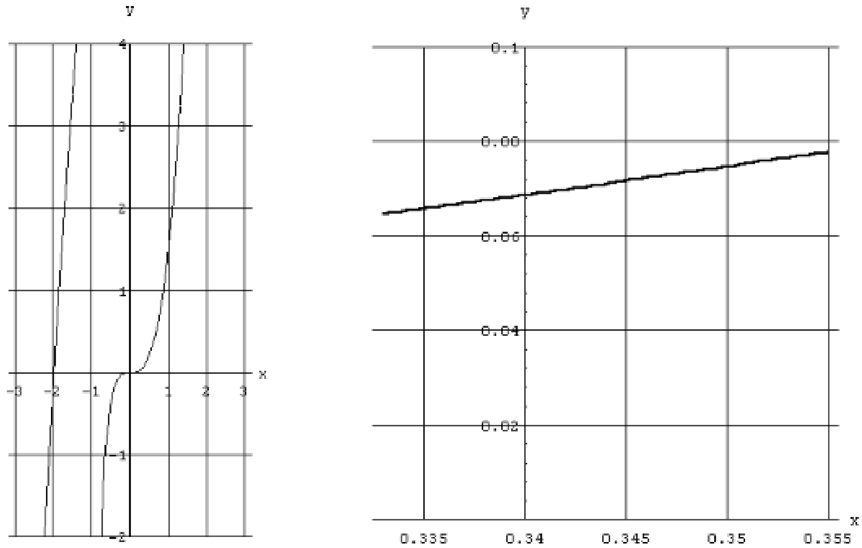


Jeho vypočítaná hodnota smernice dotyčnice $k = \frac{2.40942-2.40978}{3.002-2.998} = -0,09$ sa veľmi nelíši od presnej hodnoty, ktorá je približne -0,0913996. Martin počítal s presnosťou na dve desatinné miesta. Žiaci si tak mohli zopakovať, že exponenciálna funkcia so základom menším ako 1 a väčším ako 0, je klesajúca.

Podobne úlohu riešili aj v skupine U, niektorí študenti mali problém s odčítaním hodnôt grafu, pretože si nevhodne zvolili parametre jeho zakresľovania.

Mária(U) si zvolila funkciu $y = x^3 + \frac{x^3}{x+1}$ a hľadala smernicu dotyčnice v bode [0,35;0,0746343]. Použila nasledovné grafy.

Obr. 25



Z grafu nevedela určiť smernicu a dokončiť úlohu. Z praktického hľadiska je potrebné, tak nastaviť parametre zobrazovania, aby graf funkcie (priamka) zvierala s x-ovou osou uhol približne 45 stupňov.

U oboch skupín bolo pozorovateľné, že tento spôsob vyučovania viac zaujal chlapcov a boli aj úspešnejší v hľadaní smernice dotyčnice. V skupine G žiaci využili kreslenie grafov na pochopenie pojmu dotyčnica ku grafu funkcie (súvis s pojmom dotyčnice v analytickej geometrii) a k zopakovaniu priebehov elementárnych funkcií (exponenciálne, logaritmické, goniometrické, kvadratické).

Zavedenie pojmu derivácia pomocou experimentálneho učebného textu

Na úvod tejto témy žiaci riešili formou samostatnej práce v dvojiciach nasledovnú úlohu: Peter sa vybral na cyklotúru. Vyštartoval popoludní o 13.00 hodine a do cieľa dorazil večer o 18:00 hodine. Dráhu v kilometroch, ktorú prešiel na bicykli počas doby t v hodinách od okamihu štartu vyjadruje funkcia $s(t) = \frac{23t(10-t)}{5}$.

1. Po troch hodinách jazdy stretol na ceste Juraja. Akú vzdialenosť vtedy prešiel od okamihu štartu?

2. Na druhý deň bol Juraj zvedavý na to, akú priemernú rýchlosť mal Peter počas tých troch hodín.

3. Akú priemernú rýchlosť mal Peter za posledné dve hodiny, hodinu, polhodinu kým stretol Juraja?

4. Peter mal na bicykli aj tachometer. Čo mohol ukazovať o 16:00 hodine, keď stretol Juraja?

Prvú a druhú úlohu vyriešili takmer všetci žiaci v oboch skupinách G a U správne. Anna(G) s Vierou(G) urobili v prvej úlohe chybu, že sa snažili určiť dráhu mezi prvou a štvrtou hodinou. Potom sa dopustili aj numerickej chyby:

$$s(1) = \frac{23(10-1)}{5} = \frac{207}{5} = 4,1$$

$$s(4) = \frac{23(10-4)}{5} = \frac{552}{5} = 11,4$$

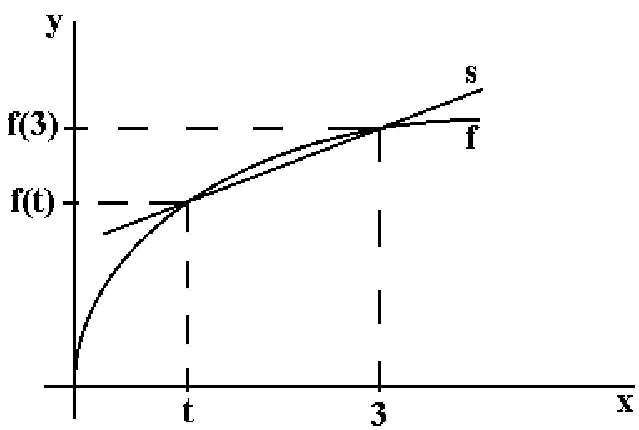
$$s(4) - s(1) = 11,4 - 4,1 = 7,3$$

V tretej úlohe tretina žiakov skupiny G a pätina študentov skupiny U vypočítala omylom rýchlosť cyklistu za prvú polhodinu, hodinu a dve hodiny. Ostatní vyriešili úlohu správne.

Štvrtú úlohu v skupinách G a U neriešila tretina žiakov a študentov, tretina úlohu vyriešila nesprávne a tretina správnym spôsobom odhadla okamžitú rýchlosť. Najčastejšou chybou bola zámena okamžitej rýchlosti v tretej hodine pohybu cyklistu a priemernej rýchlosti za čas 3 hodiny. Matúš a Peter v skupine U namiesto okamžitej rýchlosti v tretej hodine počítali priemernú rýchlosť medzi treťou a piatou hodinou. Odhady priemernej rýchlosti v správnych riešeniach urobili pomocou výpočtu priemernej rýchlosti za poslednú desatinu, stotinu a tisícinu hodiny pred stretnutím Petra s Jurajom.

Učiteľ: Aký geometrický význam má funkcia $v_p(t) = \frac{s(3)-s(t)}{3-t}$? Ak by sme si nakreslili graf ľubovoľnej funkcie $f(t)$, tak vidíme, že rozdiel $f(t) - f(3)$ je zmena funkčnej hodnoty funkcie $f(t)$ medzi bodmi t a 3.

Obr. 26



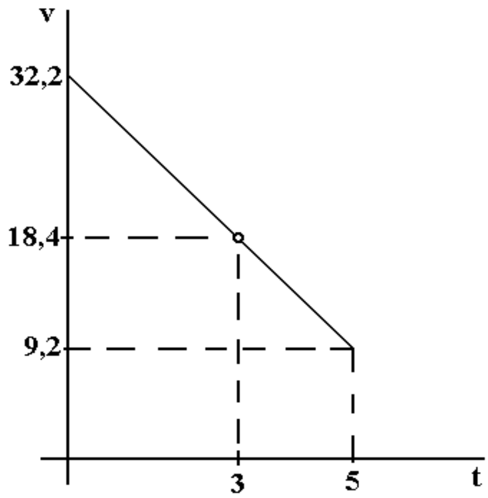
Lukáš(G): Je to smernica sečnice.
Učiteľ: Správne, hodnota $v_p(t)$ je smernicou sečnice grafu funkcie $s(t)$, ktorá prechádza bodmi $[t, s(t)]$ a $[3, s(3)]$.

Všimnime si teraz funkčný predpis funkcie $v_p(t)$. V predchádzajucom príklade sme ju potrebovali mať definovanú pre $t \in \langle 0,5\rangle$. Ona však nie je definovaná ani v bode 3. V ostatných bodoch jej predpis získame tak, že dosadíme za $s(t)$.

$$
\begin{aligned}
v_p(t) &= \frac{\frac{23t(10-t)}{5} - 96,6}{t-3} = \frac{\frac{23t(10-t)}{5} - \frac{23.3.7}{5}}{t-3} = \frac{\frac{23}{5}\left(t(10-t)-21\right)}{t-3} = \\
&= \frac{23}{5}\frac{-t^2+10t-21)}{(t-3)} = \frac{23}{5}\frac{(t-3)(7-t)}{t-3} = \frac{23}{5}(7-t)
\end{aligned}
$$

Keby sme nakreslili graf tejto funkcie na intervale $\langle 0,5\rangle$, dostali by sme graf:

Obr. 27



Učiteľ: Aká je to funkcia?
Lucia(U): Je to lineárna funkcia
Učiteľ: Je to lineárna funkcia, ktorá nie je v bode 3 definovaná. Ako „doplníme" alebo „dodefinujeme" túto funkciu tak, aby sa stala spojitou?
Klaudia(G): Vyplníme prázdny krúžok.
Učiteľ: Správne, ak $v(3) = \frac{23}{5}(7-3) = 18,4$, tak by sa funkcia stala spojitou. A hodnota 18,4 je v zmysle predchádzajúceho príkladu hodnota *okamžitej rýchlosti*, pretože k tejto hodnote sa „blížia" hodnoty priemernej rýchlosti Petra medzi okamihmi t a $t_0 = 3h$, ak sa t „blíži" k t_0. Na tomto príklade vidíme, že každej funkcii f definovanej v okolí bodu a môžeme priradiť funkciu smernice sečnice

$$
s_{f,a}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pre } x \neq a, \\ k & \text{pre } x = a. \end{cases}
$$

Na tomto mieste bola zavedená definícia 30 derivácie funkcie v bode.

3.10 Výpočet derivácie niektorých funkcií

Pomocou grafov boli so žiakmi riešené úvodné kalkulatívne úlohy.
Učiteľ: Určte pomocou definície deriváciu funkcie $y = x^2$ v bode 1.
Robo(G): $f(x) = x^2$ $a = 1$

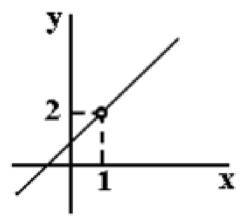
$$s_{f,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{pre } x \neq 1, \\ k & \text{pre } x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$s_{f,1}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pre } x \neq 1, \\ k & \text{pre } x = 1 \end{cases}$$

Učiteľ: Čo je grafom funkcie $y = x + 1$?
Robo(G): Čiara
Učiteľ: Presnejšie?
Robo(G): Priamka.

Obr. 28



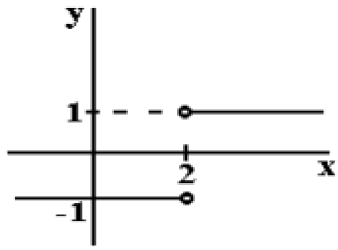
Učiteľ: Ako dodefinujeme túto funkciu. aby sa stala spojitou?
Miroslava(G): Vyplníme krúžok.
Učiteľ: Akou funkčnou hodnotou?
Ivan(G): 2.
Učiteľ: Čo to bude znamenať pre hodnotu derivácie funkcie x^2 v bode 1?
Robo(G): Bude 2.
Následne žiačka pri tabuli odvodila podobným spôsobom deriváciu funkcie x^2 pre $x = a$.
Učiteľ: Zatiaľ sme hovorili o funkciách, ktoré deriváciu majú, teraz si ukážeme funkciu, ktorá nemá deriváciu aspoň v jednom bode: $f(x) = |x - 2|$ $f'(2) =?$

Pavol(G): $s_{f,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ k & \text{pre } x = 2 \end{cases}$

pre $x \in (2; \infty)$ $\qquad \dfrac{|x-2|}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-2} = 1$

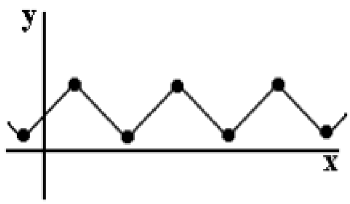
pre $x \in (-\infty; 2)$ $\qquad \dfrac{|x-2|}{x-2} = \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$

Obr. 29



Učiteľ: Môžem túto funkciu „dodefinovať” tak, aby sa stala spojitou?
Lukáš, Lucia (G): Nie, nedá sa.
Učiteľ: Čo to znamená pre deriváciu funkcie v bode 2?
Pavol: Neexistuje.
Učiteľ: Vezmime si graf nasledovnej funkcie.

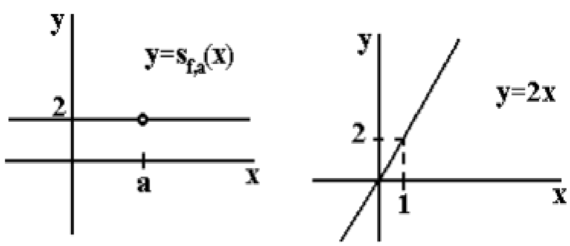
Obr. 30



Vo všetkých vyznačených bodoch táto funkcia nebude mať deriváciu. A v ostatných bodoch?
Gabriela (G): Vo všetkých ostatných bude mať deriváciu.
Učiteľ: Na funkcii $y = x + 1$ si môžeme všimnúť, že jej derivácia v každom bode je 1. Ak sa hodnota x zväčší o 1, hodnota y sa tiež zväčší o 1.
Robert(G): A ak sa x zväčší o 1 a y sa zväčší o 2, aká bude vtedy derivácia?
Učiteľ: Ukážeme si to na lineárnej funkcii $y = 2x$.

$$\text{Gabriela(G): } s_{f,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2a}{x-a} = \dfrac{2(x-a)}{x-a} = 2 & \text{pre } x \neq 2, \\ k = 2 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$$

Obr. 31



$f'(a) = 2$.
Následne sme ukázali ekvivalentnosť zavedenej definície derivácie a definícií

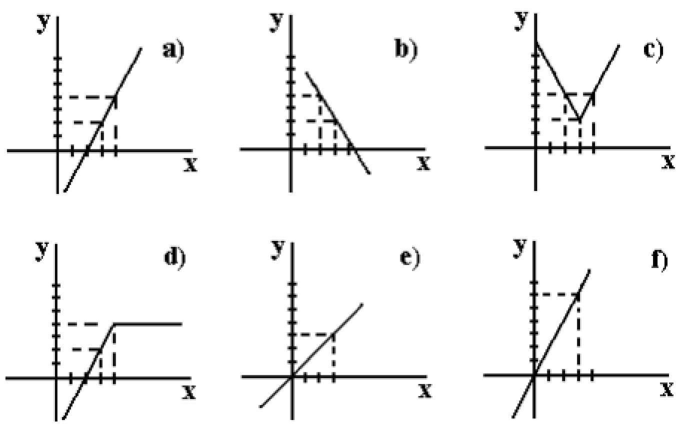
derivácie pomocou limít $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Pomocou limitných definícií sa žiaci naučili počítať derivácie polynomických funkcií a spoznali vety o derivácii súčtu, rozdielu a konštantného násobku funkcie.

V samostatnej práci riešili úlohy:

1. Cyklista sa rozbieha na priamej ceste. Pri rozbiehaní pre jeho dráhu (v metroch) v závislosti od času (v sekundách) platí: $s(t) = 0,005t^3 + 0,1t^2$ Za aký čas dosiahne rýchlosť 10 metrov za sekundu (čo je 36 $km.h^{-1}$) ?

Obr. 32



2. Vieme, že $f'(3) = 2$. Ktorý z grafov tomu zodpovedá (pozri obr. 32)?

Úlohu 1 v skupine G správne vyriešil 1 žiak, dve pätiny žiakov úlohu neriešilo a ostatní vypočítali vzťah pre rýchlosť ako deriváciu dráhy.

V skupine U úlohu 1 správne vyriešila polovica študentov, dvaja študenti úlohu neriešili a ostatní správne zapísali kvadratickú rovnicu, kotrá vedie k riešeniu úlohy.

Úlohu 2 vyriešila v skupine G celkom správne sedmina žiakov. Správnu odpoveď a) uviedli všetci okrem dvoch žiakov. Nesprávnu odpoveď b) uviedli tri pätiny žiakov. Nesprávne odpovede c) a e) neuviedol nikto. Nesprávnu odpoveď d) uviedli dve pätiny žiakov. Správnu odpoveď f) uviedla štvrtina žiakov.

V skupine U úlohu 2 celkom správne vyriešil 1 študent. Okrem jedného všetci uviedli správnu odpoveď a). Nesprávnu odpoveď uviedla šestina študentov. Nesprávnu odpoveď c) neuviedol nikto. Nesprávnu odpoveď d) uviedli tri štvrtiny študentov. Nesprávnu odpoveď e) uviedla štvrtina študentov. Správnu odpoveď f) uviedli dve tretiny študentov.

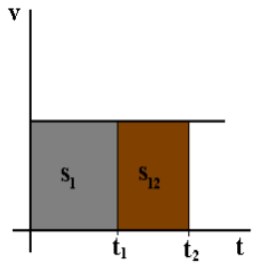
Po ukázaní správnych riešení oboch úloh, pozornosť bola venovaná využitiu derivácie ako smernice dotyčnice ku krivke. Najprv boli zopakované poznatky z analytickej geometrie priamky v rovine. Potom bola zadaná úloha: Určte všeobecnú rovnicu

priamky, ktorá je dotyčnicou grafu funkcie $y = (x-1)^3$ v bode $T[2; ?]$.
Ján K.(G): $x_T = 2$ $y_T = (2-1)^3 = 1$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Učiteľ: Ak máme problém so znamienkami vo vzťahoch, môžeme postupovať aj takto:
$(a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$
Ján K.(G):$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$y = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $f'(2) = 3.2^2 - 6.2 + 3 = 3.4 - 12 + 3 = 3$
$y - 1 = 3(x-2) \qquad 3x - y + 5 = 0$
Učiteľ: Teraz vyriešme náročnejšiu úlohu: V ktorom bode grafu funkcie $y = x^3 + x - 2$ je dotyčnica k tejto funkcii rovnobežná s priamkou $4x - y - 1 = 0$?
Robert(G): Zvolíme si ľubovoľný bod na grafe a vedieme ním priamku so smernicou 4.
Ivan(G): To nie je správne, musíme z rovnice priamky určiť smernicu a na grafe nájsť dotykový bod.
Učiteľ: Poďte nám ukázať, ako to myslíte.
Ivan(G): Ak má byť dotyčnica rovnobežná s priamkou $p: 4x - y - 1 = 0$, jej smernica musí byť 4.
$4 = f'(x)$
$4 = 3x^2 + 1$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$ $T_1[1, y_1], y_1 = 1 + 1 - 2 = 0$ $T_2[-1, y_2], y_2 = (-1)^3 - 1 - 2 = -4$
$t: y - y_0 = k(x - x_0)$
$t_1: y = 4(x-1)$ odtiaľ $4x - y - 4 = 0$
$t_2: y + 4 = 4(x+1)$ odtiaľ $4x - y = 0$
Učiteľ: Čím sa líšia rovnice priamok p, t_1, t_2?
Anna D.(G): Posledným číslom.
Lucia(U): Posunutím priamok, budú rovnobežné.
Po záverečnom opakovaní sa v oboch skupinách U a G písala tematická previerka, ktorej zadanie je uvedené v kapitole 2.2.2. Jej výsledky a vyhodnotenie je v kapitole 4.

3.11 Zavedenie určitého integrálu pomocou limitného procesu

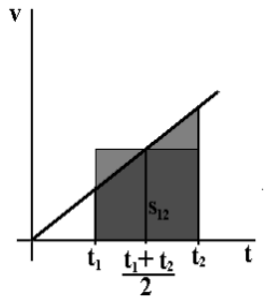
Na úvod sme opakovali poznatky o derivácii funkcie v bode (pozri kapitoly 3.9 a B.3.2).
Učiteľ: Ak sa auto pohybuje po diaľnci konštantnou rýchlosťou, ako bude vyzerať graf závislosti rýchlosti od času?
Miroslava B. (G): Konštantná funkcia.
Učiteľ: Správne, ak by sme ju zakreslili dostaneme nasledovný graf (pozri obr. 33).
Učiteľ: Ak by sme určili dráhu s_1 prejdenú za čas t_1 tak, $s_1 = vt_1$. Aký geometrický význam má súčin vt_1?
Pavol T. (G): Štvoruholník.
Učiteľ: Presnejšie?
Ivan K. (G): Obdĺžnik.

Obr. 33



Učiteľ: Je to obsah obdĺžnika. Dráhu prejdenú za čas t_1 dostaneme ako obsah rovinného útvaru „pod" grafom funkcie rýchlosti od času v hraniciach od $t = 0$ po $t = t_1$. Keby som potreboval dráhu prejdenú medzi časovými okamihmi $t = t_1$ a $t = t_2$ tak ako by som ju dostal?
Klaudia K.(G): Rovinný útvar medzi $t = t_1$, $t = t_2$ a grafom funkcie.

Obr. 34



Potom sme vysvetlili závislosť rýchlosti a dráhy od času na príklade voľného pádu (pozri kapitolu B.4.1). Na tomto príklade bol zavedený aj pojem strednej hodnoty funkcie na intervale.
Učiteľ: Aký je obsah oboch vyšrafovaných trojuholníkov (pozri obr. 34)?
Lucia (G): Je rovnaký.
Učiteľ: Čo to znamená pre obsah obdĺžnika a lichobežníka - rovinného útvaru „pod" grafom rýchlosti od času?
Lukáš (G): Sú rovnaké.
Učiteľ: Správne. Všimnime si, že rovinný útvar „pod" grafom funkcie sa môže nahradiť obdĺžnikom. Čo je jednoduchšie vypočítať obsah obdĺžnika alebo obsah rovinného útvaru „pod" grafom funkcie?
Miroslava(G): Obsah obdĺžnika.
Učiteľ: Samozrejme. Keby sme mali iný tvar závislosti alebo spojitú funkciu, tiež je lepšie nahradiť rovinný útvar „pod" jej grafom obdĺžnikom.

Na tomto mieste bola pomocou grafu zavedená stredná hodnota funkcie na intervale. Potom bola skúmaná funkcia $g(b)$ ako závislosť obsahu rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie f, pevným bodom a a pohyblivým bodom b (pozri kapitolu B.4.1). Pri skúmaní jej funkcie smernice sečnice $s_{g,b}(u)$ bolo náročné nájsť jej

funkčnú hodnotu, ktorou ju treba dodefinovať tak, aby sa stala v bode b spojitou.
Učiteľ: Dostali sme, že funkcia smernice sečnice sa pre $u \neq b$ rovná strednej hodnote funkcie $f(t), t \in \langle b, u \rangle$. Ak sa číslo u „blíži" k číslu b, tak kam sa bude „blížiť" číslo t, ak platí nerovnosť $b \leq t \leq u$?
Klaudia (G): Tiež k číslu b.
Učiteľ: Preto je potrebné funkciu $s_{g,b}(u)$ dodefinovať v bode b hodnotou $f(b)$. Ak si však spomenieme na definíciu derivácie funkcie v bode, tak to znamená, že $g'(b) = f(b)$. Ak sme doteraz hľadali k nejakej funkcii $f(x)$ jej deriváciu, tak teraz musíme postupovať opačne. K funkcii $f(x)$ musíme nájsť takú funkciu, ktorej deriváciou je práve funkcia $f(x)$. Hľadáme jej *primitívnu funkciu.*

Na tomto mieste boli definované pojmy primitívna funkcia a neurčitý integrál, žiakom boli ukázané neurčité integrály polynomických funkcií.

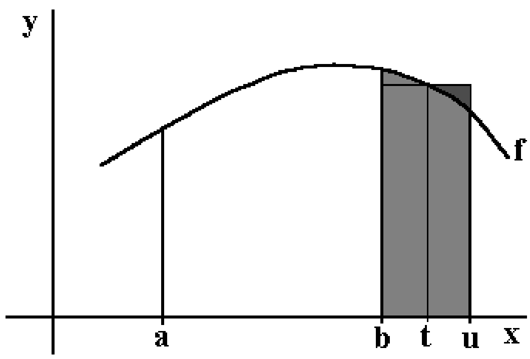
V súvislosti s riešenými úlohami na pohyb bola zadaná nasledovná problémová úloha: Skúste pomocou veľkosti obsahu rovinného útvaru „pod" grafom funkcie určiť závislosť dráhy od času auta pohybujúceho sa rýchlosťou 20 $m.s^{-1}$, ktoré po 10 sekundách začalo spomaľovať so zrýchlením -1 $m.s^{-2}$ (Využite graf závislosti rýchlosti od času). Akú celkovú dráhu prejde auto, kým sa zastaví? Aká je jeho priemerná rýchlosť, kým sa zastaví?

Polovica žiakov a študentov vedela v úlohe vypočítať prejdenú dráhu len po desiatu sekundu a správne určili, že to bolo 200 metrov. Ďalej už nevedeli pokračovať. Ostatní vyriešili úlohu správne, keď určili prejdenú dráhu medzi časovými okamihmi $t = 10$ s a $t = 30$ s. Potom vedeli vyriešiť celú úlohu. Prejavil sa aj prístup preberaný na vyučovacej hodine, keď najčastejšie hľadaný obsah lichobežníka študenti počítali pomocou obsahu obdĺžnika s rovnakým obsahom(použili priemernú rýchlosť auta medzi $t = 10$ s a $t = 30$ s).

3.12 Riemannov a Newtonov integrál

Učiteľ: Teraz sa vrátime k funkcii $g(b)$ (pozri obr. 35). Vieme, že bod a je pevný a bod b je pohyblivý. Čo sa stane, ak pohyblivý bod b „splynie" s bodom a? Aký bude obsah rovinného útvaru „pod" grafom funkcie f?

Obr. 35



Klaudia(G): Bude nulový.
Učiteľ: Aká bude funkčné hodnota funkcie g v bode a?

Miroslava (G): Tiež bude nulová.
Učiteľ: Výborne. Takže $g(a) = 0$. Kedže sme ukázali, že $g'(b) = f(b)$, tak funkcia $g(x)$ je primitívnou k funkcii $f(x)$ a $g(x) = F(x) + c$. Zo vzťahu $g(a) = 0$ dostávame, že $g(a) = F(a) + c$ a $c = -F(a)$.

Teraz bolo možné dokázať a definovať Newtonov určitý integrál. Jeho použitie bolo ukázane na príklade hľadania obsahu rovinného útvaru v prvom kvadrante súradnicového systému ohraničeným funkciami $y = x^2$ a $y = x^3$. Žiaci mali problémy s pochopením nájdenia hraníc integrovania.

Samostatne riešili tieto úlohy:

1. Vypočítajte určité integrály:

   (a) $\displaystyle\int_2^4 (x-1)^3\,dx$, (b) $\displaystyle\int_2^4 (x-1)(x^2+x+1)\,dx$,

   (c) $\displaystyle\int_1^2 x(x-1)(x+1)\,dx$, (d) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x^2+1)(x+1)\,dx$.

2. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného grafom funkcie $y = x^2+x-1$ a priamkou $y = 4x - 3$.

V skupine G úlohu 1a správne vyriešila pätina žiakov. Dvaja (Klaudia K., Veronika K.) z nich úlohu vyriešili dokonca pomocou primitívnej funkcie $\frac{(x-1)^4}{4}$, aj keď substitučná metóda integrovania nebola s nimi preberaná. Ostatní nevedeli správne upraviť výraz $(x-1)^3$ alebo ak sa im to podarilo, nevedeli ďalej pokračovať.

Úlohu 1b správne vyriešila tretina žiakov. Ostatní podobne ako v predchádzajúcej úlohe nesprávne upravili výraz.

Úlohu 1c okrem jedného žiaka mali všetci správne. Ivan nesprávne upravil výraz $x(x-1)(x+1) = x^3 - 1$.

Úlohu 1d okrem dvoch žiakov mali všetci správne. Ivan nesprávne upravil výraz $(x-1)(x^2+1)(x+1) = x^3+x^2-x-1$. Podobnú chybu urobila aj Lucia, keď použila úpravu $(x-1)(x^2+1)(x+1) = x^4+x^3-x^2-1$.

Úlohu 2 správne vyriešila štvrtina žiakov. Štvrtina žiakov urobila chybu v úpravách výrazov pri hľadaní hraníc integrovania. Polovica žiakov úlohu neriešila.

V skupine U úlohu 1a okrem jedného študenta správne vyriešili všetci. Ján nesprávne určil funkciu $\frac{(x-1)^3}{x}$ ako primitívnu funkciu k funkcii $(x-1)^3$.

Úlohu 1b správne vyriešila polovica študentov. Jana Š. a Miroslav A. úlohu neriešili. Katarína K. určila funkciu $y = \frac{(x^3-1)^2}{2}$ ako primitívnu k funkcii $y = x^3 - 1$. Tomáš Š. a Marek Š. urobili numerickú chybu $16.16 = 253$.

Ostatní nesprávne vypočítali integrál $\displaystyle\int_2^4 1\,dx = 1$.

Úlohu 1c správne vyriešila polovica študentov. Katarína K. určila funkciu $\frac{(x^3-x)^2}{2}$ ako primitívnu k funkcii $y = x^3 - x$. Podobnú chybu urobil aj Lukáš F., keď za primitívnu funkciu považoval tú istú funkciu $y = x^3 - x$. Mária H. sa dopustila numerickej chyby $2^4 = 4$. Podobne aj Ján, Tomáš Š a Martin B., keď určili $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Úlohu 1d dve tretiny študentov vyriešili správne, ostatní úlohu neriešili.

Úlohu 2 správne vyriešila tretina študentov. Marek Š. určil funkciu $\frac{x}{2}$ ako primitívnu k funkcii $y = 1$. Podobne aj Katarína P. určila funkciu $y = 1$ ako primitívnu k funkcii $y = 1$. Lucia Š. uviedla výpočet, v ktorom sú kombinované numerické chyby s chybami pri integrovaní (napríklad zámena primitívnej funkcie deriváciou funkcie).

$$\int_1^2 (x^2 + x - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 1 = \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{16 + 12 - 2 - 3}{6} = \frac{23}{6}$$

Andrej F., Peter H. a Ľubica Š. vypočítali hranice integrovania a ďalej nevedeli pokračovať. Ostatní študenti úlohu neriešili.

Potom bol ukázaný na historíckom príklade výpočtu Johna Walisa (pozri kapitolu B.4.1) prístup k určitému integrálu ako k *Riemannovmu integrálu.* Pre niektorých študentov bolo prekvapením, že hodnoty Riemannovho aj Newtonovho integrálu sú v danom príklade rovnaké. Študenti riešili samostatne problémovú úlohu (pozri cvičenie 3 v kapitole B.4.1).

Pre obe skupiny G a U bola táto úloha príliš náročná a samostatne ju nevedel vyriešiť nikto. Študenti boli schopní pochopiť na základe numerického výpočtu, že príslušné obsahy obdĺžnikov sa rovnajú objemom kvádrov pre konkrétne n=6 a pre i=1, 2, 3, 4, 5, 6. Fázu zovšeobecnenia bola schopná urobiť iba jedna študentka skupiny U (Ivana S.) nasledovným symbolickým spôsobom:

funkčná hodnota = obsah podstavy,

obsah obdĺžnika = objem kvádra,

súčet obsahov obdĺžnikov = objem stupňovitej pyramídy,

limita.... obsah hľadaného rovinného útvaru = objem ihlana = $\frac{1}{3}$.

Kapitola 4

Analýza výsledkov tematických previerok

4.1 Limita postupnosti a súčet nekonečného radu

Skupina G

Tematická previerka so zameraním na pojmy súčet nekonečného radu a limita postupnosti bola písaná s 19 žiakmi 4. ročníka Gymnázia sv. Andreja v Ružomberku dňa 15.2. 2002. Vzhľadom na malý priestor triedy boli žiaci rozdelení na A, B skupiny. Tabuľka s výsledkami žiakov za obe skupiny je v archíve autora práce.

A skupina

Validita r_v=0,760 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie medzi známkou z_p z previerky a známkou z_v na polročnom vysvedčení.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_9(0,05)$=0,6664
Percento úspešnosti: 49,28
Aritmetický priemer známok: $\overline{z_p}$= 3,44 a $\overline{z_v}$= 3,22
Disperzia skóre: D = 27,556
Smerodajná odchýlka: s = 5,249

Disperzie a obtiažnosti úloh

č.úlohy	B_i	$\overline{u_i}$	p_i	obtiažnosť	D_i
1	1	0,67	0,667	ľahká	0,222
2	3	2,22	0,741	ľahká	1,506
3a	2	1,67	0,833	veľmi ľahká	0,222
3b	4	1,11	0,278	ťažká	1,877
4a	2	0,78	0,389	ťažká	0,617
4b	3	1,67	0,556	stredná	1,778
4c	2	0,33	0,167	veľmi ťažká	0,222
5	2	0,89	0,444	stredná	0,988
6	2	0,89	0,444	stredná	0,988
7	2	1,11	0,556	ľahká	0,988
$\sum$	23	11,33	-	-	9,407

Reliabilita: $r = 0{,}732$
Štandardná chyba: $s_p = 2{,}719$

Úloha 1 bola pre žiakov ľahká, k čomu mohla napomôcť hlbšia analýza samotnej definície počas vyučovania (použitie kontrapríkladov pri nesprávnom poradí kvantifikátorov). Chybnú odpoveď A uviedol Juraj, Richard úlohu neriešil a Barbora uviedla nesprávnu odpoveď D. Chybná odpoveď C sa nevyskytla, je pravdepodobné, že žiaci si zapamätali, že prvé dva kvantifikátory sú rôzne, len neboli schopní určiť ich správne poradie. V možnosti C sú prvé dva kvantifikátory rovnaké.

Úloha 2 bola pre žiakov o niečo ľahšia v porovnaní s úlohou 1. Jedným z dôvodov mohol byť jej algoritmický charakter. Vo všetkých správnych riešeniach je využitý prevod zlomku s periodickým destinným rozvojom na geometrický rad, pričom je následne určený jeho súčet. Blažej úlohu riešil len po dosadenie do vzťahu pre súčet radu. Juraj a Mária sa dopustili chyby hneď na začiatku riešenia úlohy:

$$\text{Juraj: } 0,\overline{27} = \frac{1}{4} \qquad \text{Mária: } 0,\overline{27} = 27\sum_{i=i}^{\infty} \frac{1}{10^i}.$$

V prípade Juraja šlo skôr o odhad riešenia ako o samotné riešenie. Mária určila nesprávne kvocient geometrického radu.

Úloha 3a bola pre žiakov veľmi ľahká. Zdenka uviedla, že kvocient radu je nula a aj sa ho pokúšala dosadiť do vzťahu pre súčet radu. Juraj uviedol, že kvocient radu je 1. Obaja žiaci sa domnievali, že takéto rady musia byť divergentné.

Úloha 3b bola veľmi ťažká. Úplne správne ju vyriešila len jedna žiačka (Barbora). Ale aj jej zápis riešenia mal viaceré formálne nedostatky:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3^j + 5^j}{7^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3j}{7} + \frac{5j}{7}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3j}{7} + \left(\frac{3j}{7}\right)^2 + \left(\frac{3j}{7}\right)^3 + \dots\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{5j}{7} + \left(\frac{5j}{7}\right)^2 + \left(\frac{5j}{7}\right)^3 + \dots\right) =$$

$$= \frac{21}{28} + \frac{35}{14} = \frac{21+70}{28} = \frac{91}{28} = \frac{13}{4}$$

Súčty jednotlivých radov vypočítala zvlášť, pričom aj tu súčet nekonečného radu nesprávne označila s_n. Nesprávny zápis môže byť zdrojom viacerých žiackych chýb. Toto riešenie (aj keď viedlo správnym spôsobom k správnemu výsledku) dokazuje, že je potrebné zápisu venovať väčšiu pozornosť. Richard, Mária a Juraj úlohu vôbec neriešili. Dávid, Lucia, Lýdia a Zdenka správne rozdelili rad na súčet dvoch geometrických radov. Lýdia sa pri zápise dopustila podobnej chyby ako Barbora:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3^j + 5^j}{7^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3j}{7j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{5j}{7j}.$$

Blažej uviedol, že rad je divergentný, lebo určil jeho kvocient ako $\frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}$. Úloha 4a bola tiež ťažká pre žiakov, aj keď o niečo ľahšia ako predchádzajúca. Problémom pre mnohých žiakov bola odlišnosť stupňa polynómu čitateľa a menovateľa. Správne vyriešili celú úlohu len dvaja žiaci(Blažej, Barbora). Barbora vydelila čitateľa aj menovateľa výrazu výrazom n^2. Blažej dvakrát po sebe vydelil čitateľa a menovateľa výrazom n. Zdenka úlohu neriešila. Richard a Mária vydelili podobne ako Blažej čitateľa aj menovateľa výrazom n, ale nevedeli ďalej pokračovať. Lucia po predelení výrazom n^2 nevedela pokračovať. Lýdia, Juraj a Dávid sa dopustili chýb najmä pri predelení:

$$\text{Juraj: } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+0}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+0}{2} = \frac{1+0}{0} = 1$$

$$\text{Dávid: } \frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n.n}{n}+\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{n+2n+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{1+2+0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Lýdia: } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{0+2+0} = \frac{1}{2}$$

Tieto riešenia svedčia o nedostatkoch vo vedomostiach žiakov pri úprave algebrických a v prípade Juraja aj číselných výrazov.

Úloha 4b bola stredne ťažká pre žiakov. Bola pre nich jednoduchšia ako predchádzajúca aj vďaka tomu, že stupeň polynómu čitateľa a menovateľa bol rovnaký. 4 žiaci vyriešili úlohu celkom správne. Zdenka a Juraj úlohu neriešili. Lucia síce dostala správny výsledok, ale nesprávne roznásobila mnohočlen $(n+1)(n^2+1) = n^3+2n+1$. Dávid predelil čitateľa správne, ale zabudol predeliť menovateľa. Lýdia predelila čitateľa iným výrazom ako menovateľa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n+1)(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)}{(n+1)}\frac{(n^2+1)}{(n^2+1)}} = n^2$$

Podobne ako v predchádzajúcej úlohe aj tu sa prejavili nedostatky pri úpravách algebraických výrazov.

Úloha 4c bola pre žiakov veľmi ťažká problémová úloha. celkom správne ju nevyriešil nikto. Dve tretiny žiakov úlohu vôbec neriešilo. Ostatní správne

určili limitu konštantnej postupnosti $(10)_{n=1}^{\infty}$ a postupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Ďalej nevedeli pokračovať.

Úlohy 5, 6 a 7 boli pre stredne ťažké. Približne polovica žiakov vyriešila každú z úloh správne. Juraj úlohy neriešil a ostatní uviedli nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia.

B skupina

Validita r_v=0,711 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie medzi známkou z_p z previerky a známkou z_v na polročnom vysvedčení.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{10}(0,05)$=0,6319
Percento úspešnosti: 54,35
Aritmetický priemer známok: $\overline{z_p}$= 3,10 a $\overline{z_v}$= 3,00
Disperzia skóre: D = 25,45
Smerodajná odchýlka: s = 5,04

Disperzie a obtiažnosti úloh

č.úlohy	B_i	$\overline{u_i}$	p_i	obtiažnosť	D_i
1	3	2,00	0,667	ľahká	1,600
2a	4	1,70	0,425	stredná	1,610
2b	2	0,80	0,400	ťažká	0,960
3a	3	1,40	0,467	stredná	1,840
3b	2	1,30	0,650	ľahká	0,610
3c	2	0,50	0,250	ťažká	0,250
4	1	0,80	0,800	ľahká	0,160
5	2	1,50	0,750	ľahká	0,650
6	2	1,40	0,700	ľahká	0,840
7	2	1,10	0,550	stredná	0,890
$\sum$	23	12,50	-	-	9,410

Reliabilita: r = 0,701
Štandardná chyba: s_p = 2,762

Hodnoty reliabilít v oboch skupinách sú väčšie ako 0,6; preto možno akceptovať podľa Tureka v [97] získané výsledky klasifikácie. Z hľadiska validity hodnoty Pearsonovho koeficientu korelácie v oboch skupinách prekročili kritické hodnoty tohto koeficientu(pozri [102], [1]). Preto môžeme zamietnuť na hladine významnosti 0,05 hypotézu o nulovej korelácii známok z tejto tematickej previerky a známok z polročného vysvedčenia. Preto aj hodnota validity je dostatočne veľká.

Úloha 1 bola v skupine B tá istá ako úloha 2 v skupine A a líšila sa od nej iba číselne. Podobne ako úloha 2 v skupine A bola táto úloha pre študentov ľahká. Ján nesprávne určil kvocient $q = 10^{-3}$. Jana síce rad správne rozdelila na dva rady s kvocientom $q = 10^{-2}$(prvý člen prvého radu 0,3 a prvý člen druhého radu 0,02), ale ďalej nepokračovala. Sláva napísala v tvare desatinného zlomku číslo 0,32; čo bol skôr odhad ako výpočet.

Úloha 2a bola pre žiakov stredne ťažká. Dalibor, Stanislava Veronika V. a Jana nevedeli vyňať správny koeficientu pred sumu a dopustili sa numerických chýb. Súčet radu po vynímaní určili správne. Dušana túto matematickú úpravu zvládla, ale nevedela ďalej pokračovať. Ján s Petrom iba správne určili konvergenciu radu pomocou kvocientu. Sláva a Marián nesprávne určili, že rad je divergentný. Veronika L. správne určila prvý člen a kvocient radu a nevedela ďalej pokračovať.

Úloha 2b bola pre žiakov ťažká, ale len o niečo ťažšia ako predchádzajúca. Hlavným problémom bol záporný kvocient. Ján, Stanislava, Veronika V., Dalibor a Peter napísali, že rad je divergentný. Dušana a Marián nesprávne určili kvocient (Dušana $q = 0$, Marián $q = -\frac{1}{20}$).

Úloha 3a bola stredne ťažká. Ján, Veronika V. a Marián úlohu neriešili. Dalibor predelil správne čitateľa, ale nevedel ďalej pokračovať. Dušana určila síce správny výsledok, ale nesprávnym postupom, keď použila vzťah $(n-1)\ (n^2+1) = n^3-1$. Zrejme došlo k interferencii so vzťahom $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$. Sláva vôbec nezvládla predelenie čitateľa a menovateľa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{(n-1)(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3}{n} - \dfrac{1}{n}}{\dfrac{n-1}{n.n} . \dfrac{n^2+1}{n.n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Stanislava, Peter, Veronika L., Jana vypočítali úlohu správne.

Úloha 3b bola ľahká. Väčšina žiakov vyriešila úlohu správne. Z nich Veronika L. úlohu riešila predelením čitateľa a menovateľa výrazom n, potom n^2. Ostatní predelili čitateľa a menovateľa výrazom n^3. Ján a Marián úlohu neriešili. Dušana nesprávne postupovala, keď použila vzťah $n^3+1 = (n+1)(n^2+1)$, aj keď získala správny výsledok. Sláva chcela vydeliť čitateľa a menovateľa výrazom n, ale namiesto

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2}$ dostala $\lim\limits_{n\to\infty} n$.

Úloha 3c bola ťažká. Dalibor, Veronika V., Ján a Sláva úlohu neriešili. Stanislava tvrdila, že postupnosť je divergentná. Ostatní žiaci uviedli dve hodnoty 0 a 1 a nevedeli určiť správny výsledok.

Úloha 4 podobná s úlohou 1 z A skupiny bola pre žiakov ľahká. Stanislava určila nesprávnu odpoveď A, Veronika V. úlohu neriešila. Ostatní úlohu vyriešili správne.

Úloha 5 a 6 bola ľahká, úloha 7 stredne ťažká. Dalibor a Ján úlohy uviedli nesprávne odpovede bez zdôvodnenia. Peter sa pokúšal úlohu 5 riešiť pomocou grafu postupnosti, ale nedospel k správnej odpovedi. Jana sa dopustila v úlohe 7 chyby pri úprave nerovnice, keď uviedla $\frac{1}{n} + 1 < 1,0$. Ostatní žiaci vyriešili úlohy správne.

Skupina U

Tematická previerka so zameraním na pojmy súčet nekonečného radu a limita postupnosti bola písaná s 24 študentmi 1. ročníka Pedagogickej fakulty KU dňa 15.4. 2003. Vzhľadom na malý priestor triedy boli študenti rozdelení na A, B skupiny. Tabuľka s výsledkami študentov za obe skupiny je v archíve autora práce.

A skupina

Validita r_v=0,725 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie skóre previerky x_i - skóre testu P_i z prijímacích pohovorov.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{12}(0,05)$=0,5760
Percento úspešnosti: 60,98
Aritmetický priemer skóre: $\overline{x}$= 25,08
Disperzia skóre: $D = 59,58$
Smerodajná odchýlka: $s = 7,72$

Disperzie a obtiažnosti úloh

č.úlohy	B_i	$\overline{u_i}$	p_i	obtiažnosť	D_i
1	1	0,75	0,750	ľahká	0,188
2	3	2,25	0,750	ľahká	1,688
3a	2	1,25	0,625	ľahká	0,521
3b	4	2,15	0,539	stredná	4,000
4a	2	1,83	0,917	veľmi ľahká	0,306
4b	3	2,33	0,778	ľahká	1,389
4c	2	1,67	0,833	veľmi ľahká	0,389
4d	2	1,00	0,500	stredná	1,000
4e	2	1,42	0,708	ľahká	0,743
4f	2	0,917	0,458	stredná	0,91
5	2	0,75	0,375	ťažká	0,688
6	2	1,083	0,542	stredná	0,576
7	2	1,167	0,583	stredná	0,306
8	2	1,50	0,750	ľahká	0,417
9a	2	1,33	0,667	ľahká	0,889
9b	2	0,58	0,292	ťažká	0,743
9c	2	0,83	0,417	stredná	0,972
10a	1	0,92	0,917	veľmi ľahká	0,076
10b	1	0,75	0,750	ľahká	0,188
10c	2	0,75	0,375	ťažká	0,854
$\sum$	41	25,0	-	-	16,736

Reliabilita: $r = 0{,}755$
Štandardná chyba: $s_p = 3{,}820$

Úloha 1 bola pre študentov v tejto skupine ľahká. Ľubomír a Matúš uviedli nesprávnu odpoveď A, Jana Š. úlohu neriešila a ostatní úlohu vyriešili správne.

Úloha 2 bola rovnako ľahká ako prvá úloha. Väčšina študentov vyriešila úlohu správne. Michal a Marián sa sa dopustili nasledovnej chyby:

$$0,\overline{27} = 27\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right) = 27\frac{1}{9}\frac{1}{9} = \frac{27}{9}\frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Chybne určil kvocient geometrického radu a nesprávne použil aj súčin nekonečných súčtov. Martina nesprávne zapísala $0,\overline{27} = 27.10^{-2} + 27.10^{-3} + \ldots$. Ostatní mali úlohu vyriešenú správne pomocou geometrického radu. Niektorí (Peter, Lucia, Katarína) poznali zo strednej školy aj iný spôsob pomocou úpravy rovnice. Lucia uviedla prevod pomocou geometrického radu a nasledovný spôsob pomocou rovnice:

$$\begin{aligned} 0,\overline{27} &= a \\ 27,\overline{27} &= 100a \\ 27 &= 99a \\ a &= \frac{27}{99} \end{aligned}$$

Úloha 3a bola ľahká, aj keď študentom tejto skupiny U robila väčšie problémy ako žiakom skupiny G. Ľubomír a Michal úlohu neriešili. Monika, Beáta, Marián, Mária Š., Martina síce správne určili, že kvocient geometrického radu je väčší ako 1, ale nesprávne formulovali záver, že rad je konvergentný. Mária Š. dokonca aj určila súčet radu použitím vzťahu pre súčet konvergentného geometrického radu. Táto situácia poukazuje na to, ako je dôležité venovať pozornosť podmienkam platnosti matematických vzťahov.

Úloha 3b bola pre študentov tejto skupiny ľahšia ako pre žiakov skupiny G (stredne ťažká). Jana Š., Ľubomír a Michal úlohu neriešili.Podobne ako Blažej v skupine G aj Mária Š., Beáta a Monika uviedli, že rad je divergentný.

Úloha 4a bola veľmi ľahká, oveľa ľahšia ako pre skupinu G. Chybne úlohu vypočítal iba Peter, ktorý síce dostal rovnaký chybný výsledok 1 ako Juraj v skupine G, ale urobil inú chybu pri predelení čitateľa a menovateľa ako Juraj:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}}=1$$

Úloha 4b bola ľahká, len o niečo ťažšia ako predchádzajúca úloha. Okrem troch študentov všetci ju vyriešili správne. Peter úlohu neriešil, Jana Š. napísala výsledok ∞ a Marián zle roznásobil menovateľa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{(n+1)(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^3+n+n^3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{2n^3+n^2+n}=\frac{1}{2}$$

Úloha 4c bola na rozdiel od skupiny G v skupine U veľmi ľahká. Len Mária Š. urobila tú chybu, ktorá bola častá v skupine G, že uviedla dva výsledky 0 a 10, Ľubomír a Jana Š. uviedli len výsledok 10 a ostatní uviedli správny výsledok 0. Výsledok mohlo pozitívne ovplyvniť aj to, že podobnému typu úloh po problémoch v skupine G, bola v skupine U venovaná väčšia pozornosť.

Úlohy 4d a 4f boli stredne ťažké, úloha 4e bola ľahká. Úlohu 4d správne vyriešila polovica študentov skupiny A. Matúš úlohu neriešil. Michal uviedol dve limity 2 a -2, pričom určoval tieto limity zvlášť pre párne a zvlášť pre nepárne čísla. Ľubomír uviedol limitu $-\infty$ a Mária Š., Monika, Beáta uviedli limitu ∞. U týchto študentov došlo k interferencii s postupnosťami $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ alebo $(-(2^n))_{n=1}^{\infty}$.

Úlohu 4e správne vyriešili dve tretiny študentov. Jana Š. uviedla limitu 0, zrejme zabudla, že len prvých 10 členov zadanej postupnosti má tvar $\frac{1}{n}$. Mária Š. urobila podobnú chybu, keď uviedla limitu $\frac{1}{10}$. Ľubomír a Peter úlohu neriešili.

Úlohu 4f správne vyriešila tretina študentov. Beáta a Monika uviedli limitu 0, Mária Š. uviedla dva výsledky 0 aj ∞. Takmer polovica študentov úlohu neriešila.

Úloha 5 bola pre študentov ťažká, úlohy 6 a 7 stredne ťažké. Len dvaja študenti (Marián, Martina) vyriešili tieto tri úlohy správne. U ostatných študentov boli časté chyby pri úprave nerovnice alebo v interpretácii výsledku. Mária Š. uviedla v úlohe 5 nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia. V úlohe 7 aj keď správne dostala úpravou nerovnice $n > 100$, nevedela určiť správne číslo m. Podobnú chybu v úlohe 7 urobil aj Michal G. Matúš G. a Lucia Š. mali problémy s rozlíšením konečnej a nekonečnej množiny. Uviedli v úlohe 5, že „prirodzených čísel väčších ako 10 je konečne veľa". Preto nesprávne odpovedali aj na otázky v ostatných dvoch úlohách. Podobný problém mala aj Katarína K. Tá tvrdila v úlohe 5, že „prirodzených čísel väčších ako 10 je konečne veľa, lebo čísla 1, 2, 3,..., 10 tu nepatria." Beáta mala problém s upravovaním nerovníc:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &< 1,01 \\ \frac{n-1,01}{0,01} &< 1 \\ n &< \frac{1}{-\frac{1}{100}} \\ n &< \frac{-100}{1} \end{aligned}$$

Podobný problém bol aj u Moniky:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &< 1,01 \\ n-1,01 &< 1 \\ -0,01n &< -1 \\ n &> \frac{1}{100} \\ n &\leq 100 \end{aligned}$$

Jana Š. v úlohách 5 a 7 uviedla nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia, na úlohu 6 odpovedala správne, ale tiež chýbalo zdôvodnenie. Ľubomír a Peter uviedli v úlohách 5 a 6 nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia, v úlohe 7 vedeli iba vyriešiť nerovnicu.

Úloha 8 bola pre študentov ľahká, aj keď jej zadanie bolo podobné zadaniu úlohy 7. Vyše polovica študentov vyriešila úlohu správne. Marián argumentoval tým, že hodnoty postupnosti $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nikdy nebudú menšie ako 1 a že limita postupnosti je 1. Ostatní študenti, ktorí vyriešili úlohu správne, úpravou nerovnice dostali $n < -100$. Keďže žiadne prirodzené číslo nemôže spĺňať túto nerovnicu, tak ani hľadané číslo m nemôže existovať. Mária Š. úlohu neriešila, Martina, Beáta, Monika uviedli správnu odpoveď bez zdôvodnenia. Matúš G. nesprávne upravil nerovnicu: $1 + \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{100} \Rightarrow n < 100$.

Úloha 9a bola ľahká, 9c stredne ťažká a úloha 9b ťažká. Mária Š., Michal, Ľubomír a Jana Š. tieto úlohy neriešili, len Michal G. v úlohe 9b uviedol, že postupnosť členov radu nemá limitu. Ostatní študenti vyriešili úlohu 9a správne. Z tejto skupiny študentov úlohu 9b správne vyriešili Marián, Lucia Š. a Peter. Beáta A. nesprávne uviedla, že rad konverguje a ostatní úlohu neriešili. Úlohu 9c Peter neriešil. Beáta A. a Monika tvrdili, že členy radu v úlohe 9c tvoria divergentnú postupnosť, a preto rad nemá súčet. Zabudli, že iba prvých 10 členov radu má tvar $(-1)^n$. Ostatní študenti z tejto skupiny vyriešili úlohu správne.

Úloha 10a bola veľmi ľahká, 10b ľahká a 10c ťažká úloha. Marián úlohy 10a a 10b neriešil, úlohu 10c chcel riešiť pomocou rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) &= 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2.2^n} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2.2^n} &= \frac{3}{4} \\
4 &= 6.2^n \\
2^n &= \frac{4}{6} \\
2^n &= \frac{2}{3} \\
n \log 2 &= n \log \frac{2}{3} \\
n &= \frac{\log \frac{2}{3}}{\log 2}
\end{aligned}$$

Toto riešenie, ak by sme si odmysleli zadanie úlohy nemá žiadnu formálnu chybu, ale je celé úplne nesprávne vo vzťahu k zadaniu. Rovnica na začiatku je zle postavená. Jej tvar napovedá, že v poznatkovej štruktúre študenta interferujú pojmy nekonečný rad, súčet prvých n členov aritmetickej a geometrickej postupnosti.

Tretina študentov (Lucia Š., Katarína K., Beáta A., Peter) vyriešili všetky tri úlohy správne. Mária Š., Michal G. riešili správne len úlohu 10a, ostatné dve neriešili. Martina a Monika vyriešili správne prvé dve úlohy a poslednú neriešili. Ostatní traja študenti (Matúš G., Jana Š., Ľubomír) uviedli chybnú odpoveď n v úlohe 10c, úlohy 10a a 10b vyriešili správne.

Pre potreby kvantitatívneho výskumu túto skupinu písalo aj 14 študentov 1. ročníka učiteľstva matematiky z Pedagogickej fakulty UJEP z Ústí nad Labem. Boli dosiahnuté nasledovné štatistické ukazovatele:
Validita r_v=0,737 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie skóre previerky x_i - skóre testu P_i z prijímacích pohovorov.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{12}(0,05)$=0,5760
Percento úspešnosti: 55,4
Aritmetický priemer skóre: $\overline{x}$= 22,17
Disperzia skóre: D = 87,91
Smerodajná odchýlka: s = 9,38
Reliabilita: $r = 0,852 > 0,6$
Štandardná chyba: s_p = 3,605

B skupina

Validita r_v=0,730 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie skóreprevierky x_i - skóre testu P_i z prijímacích pohovorov.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{12}(0,05)$=0,5760
Percento úspešnosti: 61,38
Aritmetický priemer skóre: $\overline{x}$= 28,0
Disperzia skóre: D = 87,91
Smerodajná odchýlka: s = 44,31
Reliabilita: r = 0,738
Štandardná chyba: s_p = 3,404

Disperzie a obtiažnosti úloh

č.úlohy	B_i	$\overline{u_i}$	p_i	obtiažnosť	D_i
1	3	2,25	0,750	ľahká	1,354
2a	4	2,00	0,500	stredná	3,167
2b	2	0,75	0,375	veľmi ťažká	0,688
3a	3	2,52	0,839	veľmi ľahká	0,722
3b	2	1,58	0,792	ľahká	0,576
3c	2	1,83	0,917	veľmi ľahká	0,139
3d	2	1,83	0,917	veľmi ľahká	0,139
3e	2	1,83	0,917	veľmi ľahká	0,139
3f	2	0,67	0,333	veľmi ťažká	0,556
4	1	0,333	0,333	veľmi ťažká	0,222
5	2	1,58	0,792	ľahká	0,410
6	2	1,17	0,583	stredná	0,639
7	2	1,17	0,583	stredná	0,639
8	2	0,92	0,458	stredná	0,576
9a	2	0,83	0,417	ľahká	0,806
9b	2	0,75	0,375	ťažká	0,854
9c	2	0,42	0,21	ťažká	0,576
10a	1	0,92	0,917	veľmi ľahká	0,076
10b	1	0,83	0,833	veľmi ľahká	0,139
10c	2	0,83	0,417	stredná	0,806
$\sum$	41	25,17	-	-	13,222

Hodnoty reliabilít vo všetkých častiach skupiny U sú väčšie ako 0,6; preto možno akceptovať podľa Tureka v [97] získané výsledky klasifikácie. Z hľadiska validity hodnoty Pearsonovho koeficientu vo všetkých skupinách prekročili kritické hodnoty tohto koeficientu(pozri [102], [1]). Preto môžeme zamietnuť na hladine významnosti 0,05 hypotézu o nulovej korelácii skóre z tejto tematickej previerky - skóre z prijímacích pohovorov. Hodnota validity je dostatočne veľká.

Úloha 1 v skupine B bola tá istá ako úloha 2 v skupine A, líšila sa od nej len číselne. Podobne ako úloha 2 pre študentov skupiny A, aj pre študentov skupiny B bola ľahká. Juliana úlohu neriešila, Cecília aj keď správne určila prvý člen a kvocient radu, nevedela použiť vzťah pre súčet radu: $0,\overline{32} = 32.10^{-2} + \ldots + 32.10^{-2n} + \ldots$ $0,\overline{32} = 32.\frac{1}{100}$. Ivana urobila chybu ako Michal a Marián z A skupiny v úlohe 1:

$$0,\overline{32} = 32\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^i = 32\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = 32\frac{1}{9}\frac{1}{9} = \frac{32}{81}$$

Jozef napísal iba rozpis čísla v desiatkovej sústave, no aj v ňom urobil chybu: $0,\overline{32} = 0,32 + 0,0032 + 0,00032 + \ldots$ Ostatní študenti vyriešili úlohu správne. S výnimkou Miroslava Ch. použili pri výpočte geometrický rad. Miroslav Ch. riešil úlohu pomocou úpravy rovnice:

$$\begin{aligned}0,\overline{32} &= a\\ 32,\overline{32} &= 100a \quad / - a\\ 32 &= 99a\\ a &= \frac{32}{99}\end{aligned}$$

Úloha 2a bola stredne ťažká podobne ako v skupine G. Jozef porovnal kvocient geometrického radu $\frac{5}{7} < 1$, ale vyvodil hneď na začiatku nesprávny záver, že rad diverguje. Miroslav A., Zuzana, Miroslava, Jana K. úlohu neriešili. Miroslava a Juliana určila iba prvé členy radu.

Viera správne určila vzťah $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{5^j}{7^j.49.25}$, ďalej už nevedela pokračovať. Ostatní študenti úlohu vyriešili správne.

Úloha 2b bola pre študentov veľmi ťažká, lebo viacerí študenti úlohu neriešili(Jozef, Jana K., Zuzana). Ivana S. správne určila, že rad konverguje, ale nevedela ďalej pokračovať. Miroslav A., Cecília, Juliana nesprávne určili, že rad je divergentný. Katarína P., Mária H., Viera pri dosadení do vzťahu pre súčet radu chybne dosadili kvocient (s opačným znamienkom)

$$\frac{-\frac{7}{10}}{1-\frac{7}{10}} = -\frac{7}{3}.$$

Úlohu správne vyriešili len dvaja študenti (Miroslava, Miroslav Ch.).

Úloha 3a bola veľmi ľahká. Miroslav A. urobil tú istú chybu ako žiačka Dušana skupiny G, keď použil vzťah $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+1)$. Väčšina študentov úlohu riešila roznásobením menovateľa a vydelením čitateľa a menovateľa výrazom n^3.

Úloha 3b bola o niečo náročnejšia ako predchádzajúca. Miroslav A. uviedol dva výsledky 0 aj ∞. Cecília a Jozef neriešili úlohu. Ostatní študenti vyriešili úlohu správne.

Úlohy 3c, 3d, 3e boli veľmi ľahké. Zuzana, Jana K. nesprávne uviedla v úlohe 3d, že $\lim_{n\to\infty} (-3)^n = \pm\infty$. Je predpoklad, že študentky uvažovali o párnych a nepárnych členoch postupnosti. Miroslav Ch. a Jozef uviedli v úlohe 3c dva výsledky 0 aj 1. Podobne aj v úlohe 3f Miroslav Ch. uviedol dva výsledky $\frac{1}{5}$ a 5.

Úloha 3f bola veľmi ťažká. Katarína P., Viera, Miroslava, Mária H., Jozef uviedli výsledok ∞. Jana K., Zuzana, Miroslav Ch.,Juliana uviedli dva výsledky 0 aj ∞. Miroslav A. úlohu neriešil. Len dvaja študenti (Ivana a Cecília) vyriešili úlohu správne. Cecília pomocou vypisovania členov postupnosti (sukcesívne riešenie), Ivana nakreslila graf postupnosti (geštaltové riešenie).

Úloha 4 bola pre študentov v skupine U na rozdiel od skupiny G ťažká. Tretina študentov odpovedala správne, 5 študentov uviedlo nesprávnu odpoveď B, jeden uviedol odpoveď C, dvaja úlohu neriešili. V tejto skupine mohol mať na odpovede vplyv fakt, že v skupine A bola odpoveď B správna.

Úloha 5 bola ľahká a úlohy 6, 7 stredne ťažké. Zuzana, Miroslav Ch. a Jana K. v úlohe 7 nesprávne vyriešili nerovnicu, keď dostali:

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{n} &< 1-\frac{1}{100} \\ n &< 100 \end{aligned}$$

Jana K. uviedla v úlohe 5 nesprávnu odpoveď a do nerovnice iba dosadila n=10. Miroslav Ch. uviedol v úlohe 6 nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia. Katarína P., Mária H. v úlohe 6 nesprávne interpretovali výsledok, ktorý dostali po úprave nerovnice. Podobnú chybu urobili aj Miroslava s Vierou v úlohe 5. Viera úlohu 7 vôbec neriešila. Jozef uviedol nesprávne odpovede $n > 1$ v úlohách 6 a 7, pričom neuvádza riešenie nerovnice. Juliana vyriešila úlohy 5 a 6 správne, ale v úlohe 7 urobila chybu pri úprave nerovnice :

$$\begin{aligned} n+1 &< 0,99n \\ 1 &< 0,01n \end{aligned}$$

Preto uviedla nesprávnu odpoveď v tejto úlohe. Cecília v úlohe 5 neuviedla odpoveď aj keď nerovnicu vyriešila správne. Miroslav A. uviedol v úlohe 6 nesprávnu, v úlohe 7 správnu odpoveď bez zdôvodnenia. Iba Ivana vyriešila všetky tri úlohy správne.

Úloha 8 bola stredne ťažká. celkom správne ju vyriešili traja študenti (Mária H., Juliana, Ivana). Katarína P., Cecília uviedli nesprávne číslo m=99, Miroslav Ch., Jana K. a Zuzana neuviedli žiadne číslo m, aj keď nerovnicu vyriešili správne. Miroslava, Miroslav A. a Jozef uviedli nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia. Viera úlohu neriešila.

Úloha 9a bola ľahká, úlohy 9b a 9c boli ťažké. Miroslav A. a Katarína P. uviedli len nasledovné nesprávne odpovede bez zdôvodnenia: 9a diverg., 9b konverg., 9c diverg. Jozef uviedol podobné odpovede, ale paradoxne v úlohách 9a, 9c uviedol správne súčty radov. Miroslava v úlohe 9b uviedol dva výsledky $+\infty$ aj $-\infty$, úlohu 9c neriešila. Viera a Zuzana neriešili žiadnu z úloh a Jana K. úlohy 9b a 9c. Miroslav Ch. uviedol v úlohe 9c, že súčet neeexistuje. Ivana S. zabudla v úlohe 9a sčítať zlomky. Mária H. tvrdila bez zdôvodnenia v úlohách 9a a 9c, že rady divergujú, aj keď uviedla, že ich súčet je nula. Juliana v úlohe 9a uviedla dve odpovede 0,2 aj 0. V úlohe 9b uviedla dve odpovede 0 aj ∞. V úlohe 9c uviedla dve odpovede 0 aj 1. Na základe týchto odpovedí tvrdila, že rady v týchto troch úlohách divergujú. Zrejme uvažovala na základe toho, že tak ako postupnosť nemôže mať dve limity, tak aj rad nemôže mať dva súčty. Iba Cecília vyriešila všetky tri úlohy správne.

Úlohy 10a, 10b boli veľmi ľahké a úloha 10c stredne ťažká. Miroslav A. úlohy neriešil. Katarína P. úlohu 10b neriešila, v úlohe 10c uviedla, že „jednotku nedosiahneme nikdy". Jozef uviedol v 10c „všetky, nedá sa". Viera v úlohe 10b uviedla „veľmi veľa". V úlohe 10c na základe toho, že limita postupnosti členov radu je nula, tak „jednotku nikdy nedostaneme". Podobne uvažovala aj Mária H. Miroslava a Miroslav Ch. úlohu 10c neriešili. Ivana sa snažila úlohu 10c riešiť numericky, no nakoniec riešenie „vzdala" a uviedla, že treba sčítať viac ako 11 členov radu. Mária

H. zamenila vzťahy pre súčet členov aritmetickej a geometrickej postupnosti. Všetky tri úlohy správne vyriešili 4 študenti (Cecília, Juliana, Zuzana, Jana K.)

4.2 Limita a derivácia funkcie

Tematická previerka so zameraním na pojmy limita funkcie v bode a derivácia funkcie v bode bola písaná s 28 žiakmi 4. ročníka Gymnázia sv. Andreja v Ružomberku (skupina G) dňa 26.11. 2003. Tú istú tematickú previerku písalo aj 29 študentov 1. ročníka učiteľstva všobecnovzdelávacích predmetov kombinácií s matematikou Pedagogickej fakulty KU v Ružomberku (skupina U) dňa 8. 12. 2003. Vzhľadom na malý priestor tried, boli študenti skupín G a U rozdelení na A, B skupiny. Tieto skupiny (spolu 57 žiakov a študentov) tvorili experimentálnu vzorku.

Kontrolnú vzorku pre potreby kvantitatívneho výskumu, ktorá písala tiež túto istú tematickú previerku, tvorilo 28 žiakov paralelnej triedy 4. ročníka Gymnázia sv. Andreja v Ružomberku a 15 študentov 1. ročníka učiteľstva všobecnovzdelávacích predmetov kombinácií s matematikou Pedagogickej fakulty UJEP v Ústí nad Labem. Celú vzorku tak tvorilo spolu 43 žiakov a študentov. Tabuľka s výsledkami žiakov a študentov za obe vzorky je v archíve autora práce.

Vzhľadom na podobnosť zadaní úloh skupín A a B bolo štatistické vyhodnotenie previerky urobené pre jednu skupinu za kontrolnú aj experimentálnu vzorku (spolu 100 žiakov a študentov). Vzhľadom na počet žiakov a študentov spracovanej vzorky nasledujúca tabuľka okrem disperzií a obtiažnosti úloh obsahuje aj ich diskriminačný koeficient Dk. Podľa Tureka (pozri [97, s. 223] sa vypočíta v našom prípade ako rozdiel priemernej percentuálnej úspešnosti 27 žiakov a študentov s najvyšším skóre a 27 žiakov a študentov s najnižším skóre v danej úlohe.

č.úlohy	B_i	$\overline{u_i}$	p_i	obtiažnosť	D_i	$Dk(\%)$
1	1	0,85	0,850	veľmi ľahká	0,128	25,9
2a	2	1,05	0,525	stredná	0,648	53,7
2b	2	1,36	0,680	ľahká	0,771	64,8
2c	2	1,59	0,795	ľahká	0,553	55,6
3	3	1,37	0,457	stredná	1,433	65,4
4	2	0,41	0,205	ťažká	0,418	35,2
5	7	5,57	0,796	ľahká	2,565	30,6
6	5	2,00	0,400	ťažká	2,42	48,9
7	3	1,82	0,607	ľahká	1,208	58,0
8	4	3,37	0,843	veľmi ľahká	1,373	31,5
9	1	0,54	0,540	stredná	0,248	70,4
10	4	2,66	0,665	ľahká	2,664	79,6
11	1	0,79	0,790	ľahká	0,134	40,7
12	5	3,92	0,784	ľahká	1,419	25,2
$\sum$	42	27,47	-	-	15,982	-

Validita r_v=0,699 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie medzi známkou previerky a známkou z vysvedčenia (u gymnaziálnych študentov) resp. známkou zo skúšky z matematickej analýzy (u študentov 1. ročníka učiteľstva matematiky).

Validitu previerky podporuje aj Pearsonov koeficient korelácie skóre vstupnej - skóre výstupnej previerky r_{vv}=0,730.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{100}(0,05)$=0,196
Percento úspešnosti: 65,4
Aritmetický priemer skóre: $\overline{x}$= 27,47
Disperzia skóre: D = 66,17
Smerodajná odchýlka s = 8,13
Reliabilita: r = 0,817
Štandardná chyba: s_p = 3,481

Keďže reliabilita je väčšia ako 0,6 a Pearsonove koeficienty korelácie (validita) sú väčšie ako ich kritická hodnota, tak tematickú previerku považujeme za reliabilnú a súčasne validnú. Z hľadiska obtiažnosti úloh za podozrivé úlohy považujeme úlohy 1 a 8 (veľmi ľahké). Z hľadiska diskriminačného koeficientu Dk sú podozrivé úlohy 1 a 12 ($Dk \leq 30\%$).

Teraz uvedieme kvalitatívny rozbor riešení žiakov a študentov experimentálnej vzorky (28 žiakov skupiny G a 29 študentov skupiny U):

Úlohu 1 v skupine U vyriešili správne všetci študenti, v skupine G sa u štvrtiny žiakov vyskytli nesprávne odpovede. Veronika L., Zuzana Š. a Milada O. uviedli nesprávnu odpoveď B. František M. a Anna K. uviedli nesprávnu odpoveď C. Veronika F. a Paulína K. neuviedli žiadnu odpoveď. Odpoveď D sa nevyskytla, preto predpokladáme, že žiaci dobre zvládli poradie kvantifikátorov v definícii limity funkcie, viac problémov im robí tvar implikácie v danej definícii.

Úlohu 2a v skupine U vyriešila správne približne polovica študentov. Ďalších 9 študentov malo správnu iba odpoveď. U troch z nich nebolo žiadne zdôvodnenie a u ostatných bolo nesprávne, že

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} = \infty.$$

7 študentov malo nesprávnu odpoveď. U piatich z nich to bola nula, lebo tvrdili, že

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0} = 0.$$

Dvaja uviedli funkčný predpis $f(3) = x + 2$.

V skupine G úlohu správne vyriešili približne dve tretiny žiakov. Dvaja žiaci uviedli správnu odpoveď bez zdôvodnenia. Ostatní nemali správnu odpoveď. 4 žiaci úlohu vôbec neriešili a ostatní traja uviedli nesprávne odpovede:

Zuzana Š.: $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

Milada O.: $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}.\frac{x+2}{x+2} = \frac{x+2}{x^2-4}$

Pavol T.: pre $x = 2$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x-2+1}$

Úlohu 2b v skupine U vyriešili všetci okrem 3 študentov správne. Eva J. nesprávne upravila výraz $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+6x+9)$. Miroslav A. nesprávne vypočítal limitu

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9)=21$. Podobnú chybu urobil aj Miroslav Ch.:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2-3x-9)=9-9-9=-9.$$

V skupine G vyriešili túto úlohu správne približne dve pätiny žiakov. Anna J. a Ján K. uviedli správnu odpoveď bez zdôvodnenia. Viac ako štvrtina žiakov nesprávne upravila výraz $x^3-8=(x-2)^3$ a 4 žiaci úlohu neriešili vôbec. Róbert Z. nesprávne upravil výraz $x^3-8=(x-2)(x+2)$.

Mária K. nesprávne vypočítala $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=2+4+4=10$ a Pavol T. nesprávne určil pre $x=2$ $\quad f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2+1}$.

Úlohu 2c vyriešili v skupine U správne všetci študenti. V skupine G úlohu správne vyriešili tri štvrtiny žiakov. 4 žiaci úlohu vôbec neriešili. Anna J. a Ján K. uviedli len správny výsledok bez zdôvodnenia. Zuzana Š. sa dopustila numerickej chyby 3+3=9.

Úlohu 3 v skupine G vyriešili celkom správne 5 žiaci, 5 žiaci správne vyriešili nerovnice, ale nevedeli určiť číslo δ, 6 žiaci správne určili, že číslo δ existuje. 4 žiaci jednu z nerovníc nedokončili správne, lebo pri delení desatinného čísla sa dopustili numerickej chyby(namiesto čísla 2,05 uviedli nesprávne 2,5). 5 žiaci uviedli, že také číslo δ neexistuje a 3 žiaci úlohu neriešili vôbec.

V skupine U úlohu 3 vyriešili správne 11 študenti. 9 študenti správne vyriešili nerovnice, ale nevedeli určiť číslo δ. 6 študenti správne určili, že číslo δ existuje. 3 študenti úlohu neriešili vôbec.

Úlohu 4 v skupine U vyriešili celú správne 4 študenti, 9 študenti správne určili, že číslo δ neexistuje bez zdôvodnenia. 10 študenti nesprávnym riešením nerovníc s neznámou v menovateli určili $\delta=0,001$ resp. 0,1. 6 študenti úlohu neriešili vôbec.

V skupine G úlohu 4 vyriešili správne 3 žiaci. 7 žiaci správne určili, že číslo δ neexistuje bez zdôvodnenia. 10 žiaci určili konkrétnu hodnotu čísla δ. U piatich z nich to bolo podobne ako v skupine U $\delta=0,001$ resp. 0,1. U ďalších piatich to boli iné hodnoty (1, 2, 3, všetky kladné reálne čísla). 4 žiaci uviedli, že také číslo δ existuje bez zdôvodnenia. 4 žiaci úlohu neriešili vôbec.

Úlohu 5 celú správne vyriešili v skupine U 20 študenti. Mária R., Jana Š. Jana G. a Lucia Š. sa dopustili numerických chýb v závere riešenia jednej z úloh (Mária a Lucia $\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$, Jana G. $4+4+4=16$, Jana Š. $18+\frac{1}{2}=9$). Miroslav Ch., Matúš G. a Peter H. riešili úlohu 5a úpravou na spoločného menovateľa a dopustili sa chyby pri úprave výrazov (Miroslav a Matúš G. $4x.3+x=11x$, Peter H. 6.x=6). Cecília K. a Eva J. nesprávne, z nepozornosti, upravili výraz

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x+3)=-3+3=0.$$

Eva J. a Matúš G. nesprávne určili $x^3-8=(x-2)(x+4x+4)$. Podobne aj Jana Š.: $x^3-27=(x-3)(3x+9)$.

V skupine G úlohu 5 vyriešili celú správne 10 žiaci. Dominik neriešil úlohy 5b a 5c. V úlohe 5a len zjednodušil výraz. 10 žiakov urobilo chybu pri úprave výrazu

$x^3 - 8$ resp. $x^3 - 27$. U ôsmich z nich to bolo tvrdenie $x^3 - 8 = (x-2)^3$ resp. $x^3 - 27 = (x-3)^3$. Klaudia K. sa pomýlila v znamienku $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 4)$ a Franišek M. a Jakub B. zapísali $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 4)$. Martin M. riešil úlohu 5b úpravou na spoločného menovateľa a úlohu nedokončil. Anna J. nesprávne upravila

$$\frac{3(x+2)^2 + x}{x+2} = 3(x+2) + x.$$

Soňa G. a Paulína K. urobili numerickú chybu v úlohe a (Soňa 3.(3+3)=27, Paulína $\frac{3}{6} = \frac{1}{3}$).

Úlohu 6 v skupine U vyriešil celkom správne iba Martin B. a Miroslav A. Eva J., Jana Š. úlohu vôbec neriešili. Možnosť a) považovalo za správnu 12 študentov, b) 3 študenti. Nesprávnu možnosť c) považovalo za správnu 6 študentov, z nich traja (Mária H., Viera P., Juliana R.) považovali za správnu aj možnosť d). Ďalší 3 študenti považovali za správnu možnosť e). 10 študentov považovalo možnosť f) za správnu. 18 študentov uvádzalo, že funkcia nie je spojitá, preto nemá limitu. 17 študentov považovalo možnosť g) za správnu. Možnosť h) považovalo za správnu 16 študentov.

Úlohu 6 v skupine G vyriešil celkom správne Klaudia K., Anna J. a Martin M. František M., Mária K. a Lucia B. úlohu vôbec neriešili. Možnosť a) považovalo za správnu 10 žiakov, b) 6 žiaci. Možnosti c), d) nepovažoval za správne nikto. Možnosť e) uviedli ako správnu 4 žiaci. 17 žiakov považovalo možnosť f) za správnu. 8 žiakov uviedlo, že funkcia nie je spojitá, preto nemá limitu. 24 žiakov považovalo možnosť g) za správnu. Možnosť h) považovalo za správnu 20 žiakov.

Úlohu 7 v skupine U vyriešili celkom správne 8 študenti. 8 študenti považovali funkciu danú grafom f) za nespojitú. 5 študenti považovali funkciu v e) za spojitú. Miroslava J. a Ivana S. uviedli, že funkcia v a) je spojitá. Beáta považovala funkciu d) za spojitú. Lucia Š., Anton K. a Mária Š. považovali funkciu b) za spojitú. Ak porovnáme riešenia úloh 6 a 7, tak 8 študenti, ktorí uviedli o niektorej funkcii, že je spojitá v bode, zároveň tvrdili, že nemá v tomto bode limitu.

Úlohu 7 v skupine G vyriešili celkom správne 15 žiaci. 6 žiaci považovali funkciu danú grafom f) za nespojitú. Katarína L. a Pavol T. považovali funkciu v e) za spojitú. František M., Zuzana Š. a Paulína K. uviedli, že funkcia v a) je spojitá. František M. považoval funkciu b) za spojitú. Soňa G. a Gabriela T. považovali funkciu v h) za nespojitú. Ak porovnáme riešenia úloh 6 a 7, tak 6 žiaci, ktorí uviedli o niektorej funkcii, že je spojitá v bode, zároveň tvrdili, že nemá v tomto bode limitu.

Úlohu 8 vyriešilo v skupine G celú správne 19 žiakov, Veronika F. úlohu neriešila. Ôsmi žiaci správne určili derivácou funkcie, ďalej však riešili úlohu nesprávne. Štyria z nich správne určili smernicový tvar priamky. Michal Š. nesprávne určil smernicu priamky $k = 3$. Miroslava B. a Júlia B. použili priamo smernicu $k = 3x^2$, nesprávne dosadili $y - 27 = 3x^2(x-3)$ a dostali $0 = 3x^3 - 9x^2 - y + 27$.

Úlohu 8 vyriešilo v skupine U celú správne 23 študentov. 5 študenti správne určili derivácou funkcie, ďalej už nevedeli pokračovať. Beáta A. nesprávnym spôsobom určila smernicu dotyčnice, keď použila $y-$ovú súradnicu dotykového bodu.

Úlohu 9 vyriešilo v skupine U správne 14 študentov. 3 študenti uviedli dve odpovede a) aj c), ďalší šiesti uviedli a) s d), resp. c) a e). Ostatní úlohu neriešili.

V skupine G úlohu 9 správne vyriešilo 22 žiakov. Zuzana Š. a Veronika F. úlohu neriešili. Anna J. uviedla dve odpovede a) aj c). Lukáš H. namiesto správnej odpovede a), uviedol c). Jakub B. uviedol odpoveď a) a e), Michal Š len e).

Úlohu 10 v skupine G vyriešilo správne 21 žiakov. Dominik M. urobil chybu pri úprave výrazu derivácie: $s'(t) = 2.0,15t + 3.0,02t^2 = 0,36t^2$. 4 žiaci správne určili kvadratickú rovnicu a ďalej nevedeli pokračovať. Katarína L. uviedla oba korene kvadratickej rovnice ako výsledky. František M. vo vzťahu pre korene kvadratickej rovnice nesprávne dosadil namiesto $-b$, číslo $-b^2$.

V skupine U vyriešilo úlohu 10 správne 22 študentov. 4 študenti úlohu neriešili. Beáta A. správne určila kvadratickú rovnicu a ďalej nevedela pokračovať. Eva J. a Jana K. chceli použiť nesprávnu rovnicu s(t)=30. Keďže to bola rovnica tretieho stupňa, nevedeli ďalej pokračovať.

Úlohu 11 v skupine G vyriešili správne všetci okrem dvoch žiakov. Veronika F. a Zuzana Š. uviedli nesprávnu odpoveď A. Podobne aj v skupine U Peter H. uviedol nesprávnu odpoveď A. Študenti si zrejme zapamätali, že druhé členy výrazov čitateľa a menovateľa majú rovnaké znamienko. Ostatní študenti v skupine U úlohu vyriešili správne.

Úlohu 12 v skupine U vyriešilo správne 23 študentov. Peter H. uviedol v úlohe 12a nesprávnu odpoveď $3x - 12x$, keď nesprávne zderivoval funkciu $y = x^3$. Ivana S. podobnú chybu urobila v úlohe 12c, keď uviedla ako výsledok $3x - 9$. Viera P. nesprávne upravila výraz $x(x-3)(x+3) = x(x-3)^2$. Miroslav A. tiež nesprávne upravil výraz $x(x-3)(x+3) = x(x^2-6)$. Eva J. uviedla výsledok 1. Miroslava J. nesprávne derivovala funkciu $f(x) = x(x^2-4)$, keď uviedla $f'(x) = x(2x-4) = 2x^2 - 4x$.

V skupine G úlohu 12 vyriešilo správne 13 žiakov. 8 žiaci nesprávne upravili výraz v úlohe b). Anna J. uviedla $(x+2)^3 = x^3 + 2.2x^2 + 4x + 4$, Martin M. $(x+2)^3 = x^3 + 2x + 2x + 2x^2 + 2.2.2$, Ján K. $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 24x + 8$. Ľubica O. zamenila medzi sebou vzťahy $(a+b)^3$ a $a^3 + b^3$, keď podľa nej $(x+2)^3 = (x+3)(x^2-3x+9)$. Potom urobila podobnú chybu ako Miroslava zo skupiny U, keď zapísala $f'(x) = 1.(2x-3)$. Gabriela T. zapísala $(x+2)^3 = x^3 + 2x^2.3 + 9x + 27$, Lucia B. $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2.3 + 3x + 27$, Lukáš H. $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 18$. Katarína L. sa pomýlila pri násobení 6x.3 = 18.

Miroslava B. v úlohe 12b nesprávne zderivovala funkciu x^3, keď namiesto $3x^2$ uviedla $2x^2$. Michal J. zderivoval konštantnú funkciu $f(x)$=27 ako 27. Dominik M. urobil numerickú chybu -4.1 = 0. Júlia L. nedokončila úlohu, keď nezderivovala funkciu $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. František M., Zuzana Š. a Veronika F. úlohu 12 neriešili.

Kapitola 5

Overenie hypotéz kvantitatívneho výskumu

5.1 Limita postupnosti a súčet nekonečného radu

5.1.1 Hypotézy H1

H1a: Faktory SKal a SPr nekorelujú medzi sebou.
H1b: Faktory SKal a SPr korelujú medzi sebou.

Keďže skupiny G a U písali odlišné záverečné previerky, overovali sme tieto hypotézy v každej skupine zvlášť.

V skupine G (19 žiakov) z nameraných hodnôt faktorov SKal, SPr, skóre sme získali nasledovnú korelačnú maticu:

	SKal	SPr	skóre
SKal	1		
SPr	0,345	1	
skóre	0,859	0,775	1

Hypotézy overíme najprv pomocou testu koeficientu korelácie uvedenom v [102] na strane 186 a v [1] na strane 217. Pearsonov koeficient korelácie medzi SPr a Skal r_p=0,345. Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{19}(0,05)$=0,455. Vidíme, že hodnota r_p nedosahuje kritickú hodnotu, preto hypotézu *H1a* na hladine významnosti 0,05 v skupine G nezamietame.

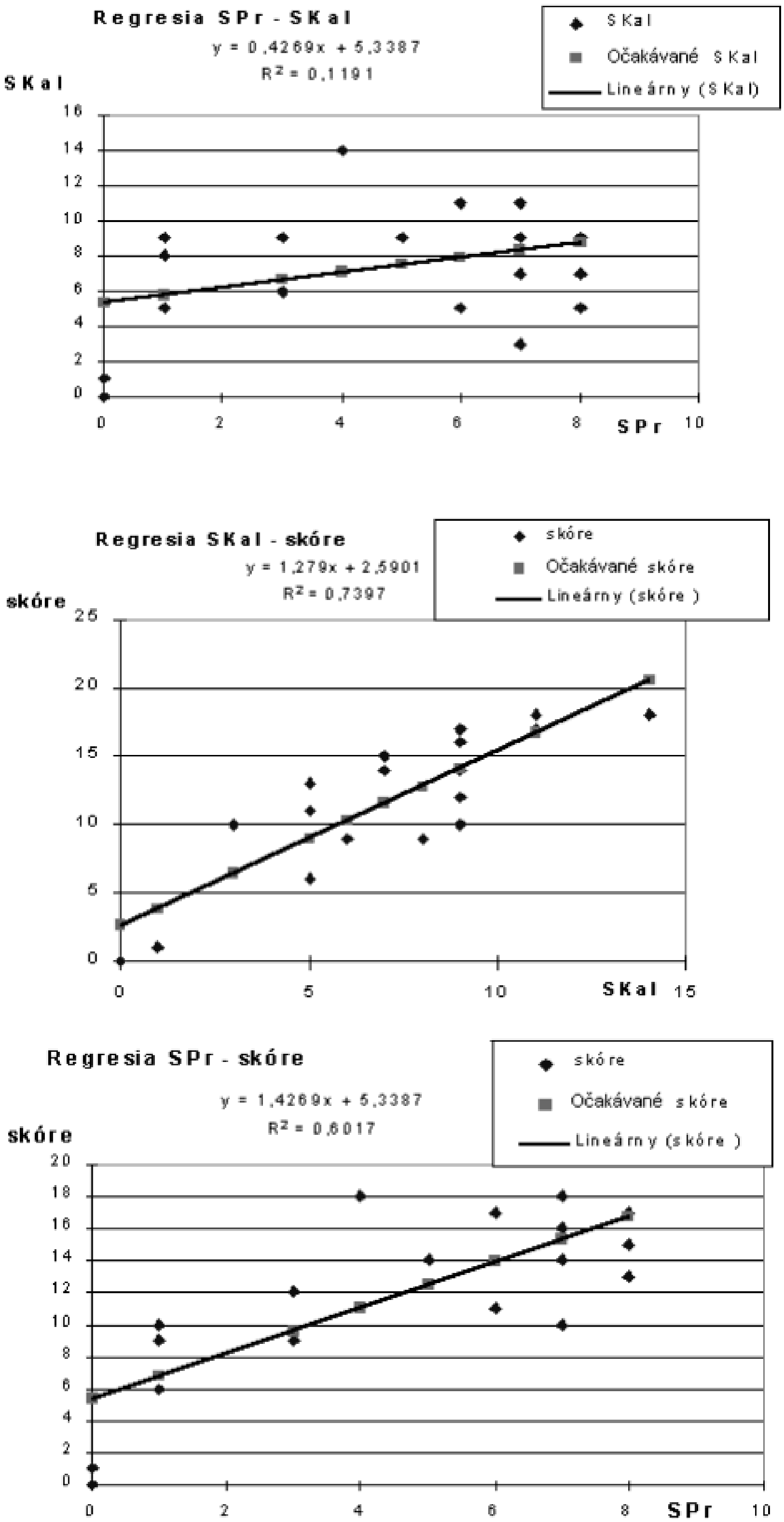
V skupine U (38 študentov) sme získali nasledovnú korelačnú maticu:

	SKal	SPr	skóre
SKal	1		
SPr	0,299	1	
skóre	0,687	0,898	1

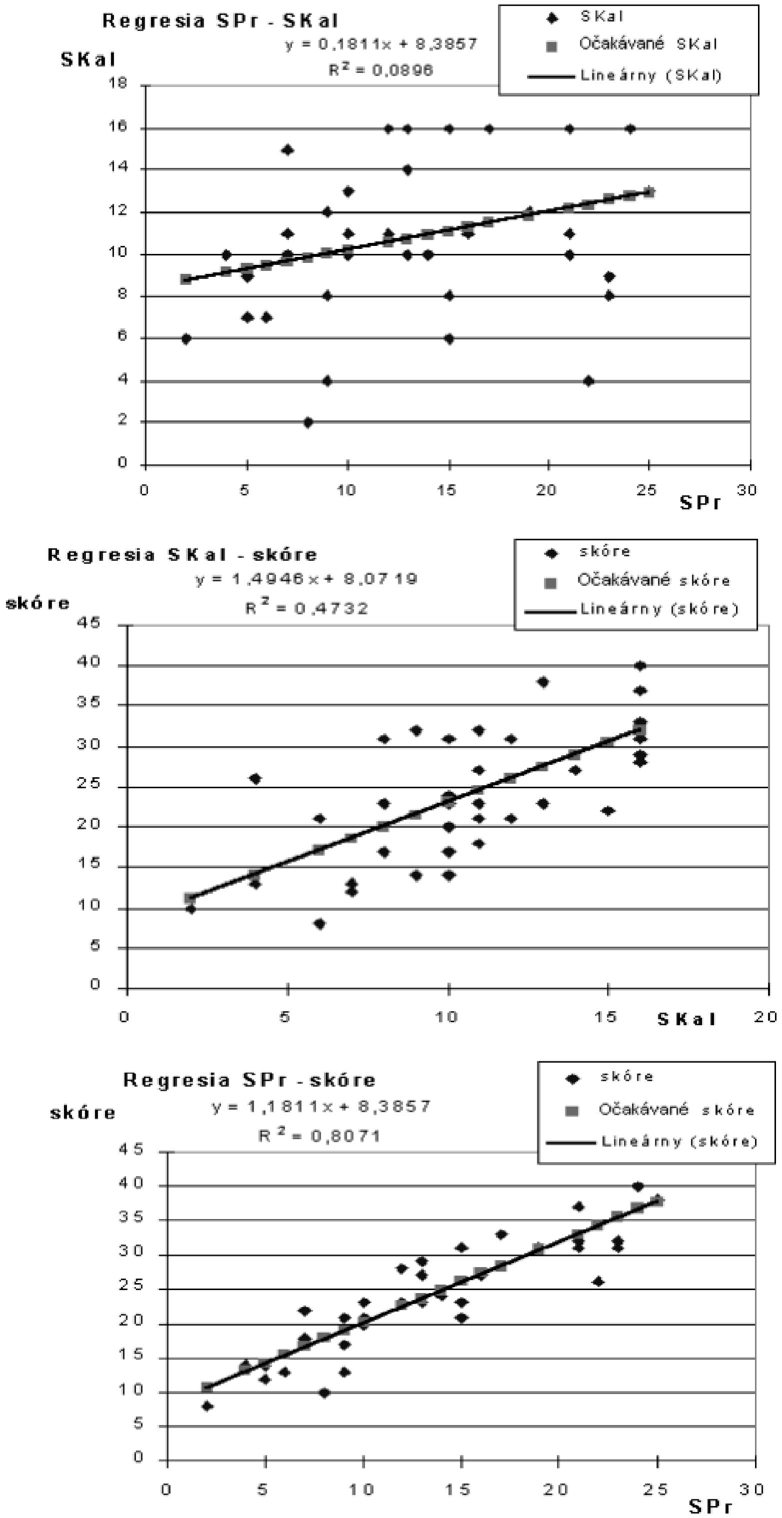
Pearsonov koeficient korelácie medzi SPr a Skal r_p=0,299. Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_{38}(0,05) \doteq 0,312$. Vidíme, že hodnota r_p nedosahuje kritickú hodnotu, preto hypotézu *H1a* na hladine významnosti 0,05 v skupine U nezamietame.

Hypotézu *H1a* podporujú aj grafy regresnej priamky zostrojenej medzi každou dvojicou z faktorov SKal, SPr a skóre v oboch skupinách G a U (pozri obr. 36 a 37).

Obr. 36 *skupina G*



Obr. 37 *skupina U*



V oboch skupinách G a U je z grafov regresnej priamky vidieť, že namerané hodnoty sú okolo regresnej priamky najviac rozptýlené v prípade závislosti SPr - SKal.

5.1.2 Hypotézy H2

H2a: Faktory Chlapci a Dievčatá nevplývajú na faktory SKal, SPr.
H2b: Faktory Chlapci a Dievčatá vplývajú na faktory SKal, SPr.

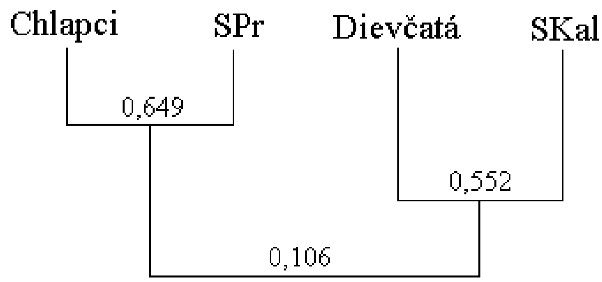
Korelačná matica medzi faktormi Chlapci, Dievčatá, SKal a SPr bola nasledovná:

	Chlapci	Dievčatá	SKal	SPr
Chlapci	1			
Dievčatá	-1	1		
SKal	-0,212	0,212	1	
SPr	-0,015	0,015	0,314	1

Kritická hodnota korelačného koeficientu je $r_{57}(0,05) \doteq 0,254$. Z korelačnej matice vyplýva, že faktory Chlapci, Dievčatá nekorelujú s faktormi SPr, SKal. Ich korelačné koeficienty nedosahujú kritickú hodnotu $(0,015 < 0,254;\ 0,212 < 0,254)$.

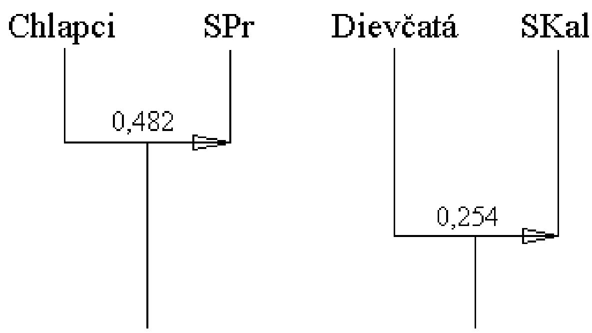
Potom sme dostali z uvedených faktorov nasledovný dendrogram:

Obr. 38



Z koeficientov podobnosti vyplýva pomerne veľká podobnosť medzi dvojicami faktorov Chlapci, SPr a Dievčatá s SKal. Naopak medzi týmito dvomi dvojicami faktorov je nízka podobnosť. Situáciu jasnejšie ozrejmuje implikatívny dendrogram. Z neho vyplýva slabý vplyv faktora Chlapci na faktor SPr a faktora Dievčatá na SKal.

Obr. 39



Pre posúdenie, či tento vplyv je pozitívny alebo negatívny, použili sme dvojvýberový t-test stredných hodnôt s nerovnosťou rozptylov zvlášť chlapcov a dievčat pre faktory SPr a SKal. Overovali sme hypotézu, že u chlapcov bude vyššia stredná hodnota faktora SPr, u dievčat SKal oproti nulovej alternatíve. Keďže sme robili test zo spojenej vzorky G a U, hodnoty faktorov SPr a SKal mali relatívne skóre (z intervalu $\langle 0, 1\rangle$). Dostali sme nasledovné hodnoty:

	Chlapci	Dievčatá	$\lvert tstat\rvert$	t krit
Stredná hodnota-Spr	0,622	0,502	1,231	1,746
Stredná hodnota-SKal	0,625	0,697	0,712	1,761

Keďže v oboch prípadoch $|tstat| < tkrit$, tak nulovú alternatívu nemôžeme zamietnuť a tento test potvrdil, že pozitívny vplyv faktora Chlapci na SPr a faktora Dievčatá na SKal, nie je štatisticky významný.

5.2 Limita a derivácia funkcie

5.2.1 Hypotézy H3

H3a: Stredná hodnota faktora SPr v experimentálnej skupine je väčšia ako stredná hodnota faktora SPr v kontrolnej skupine.
H3b: Stredná hodnota faktora SPr v experimentálnej skupine je rovnaká ako stredná hodnota faktora SPr v kontrolnej skupine.

Označme hodnotu faktora SPr v experimentálnej skupine ako PrE, v kontrolnej skupine PrK. Hodnotu faktora SKal v experimentálnej skupine označme KalE, v kontrolnej skupine KalK. Hodnotu faktorov v skupinách budeme reprezentovať strednou hodnotou. Podľa Tureka v [97] je to možné iba v prípade, ak variačný koeficient $V = \frac{s}{\overline{x}}.100$ (s - smerodajná odchýlka skóre, $\overline{x}$ - aritmetický priemer skóre) neprekročí veľkosť 50 %. Podľa nameraných hodnôt uvedené štyri súbory dát túto podmienku spĺňajú:

	PrE	PrK	KalE	KalK
Smerodajná odchýlka	4,182	4,515	3,768	4,117
Aritmetický priemer	13,386	9,046	16,632	15,046
Variačný koeficient	31,24	49,91	22,66	27,36

Z hodnôt variačných koeficientov vyplýva, že všetky štyri súbory môžeme považovať za dostatočne homogénne.

Pre počet žiakov a študentov experimentálnej a kontrolnej skupiny platí, že 57 je z intervalu $\langle 31, 100\rangle$, $43 \in \langle 31, 100\rangle$. Na zistenie normality súborov dát podľa Vrábelovej v [102, s. 179], Wimmera v [106, s. 12-13] použijeme d´Agostinov test. Pre prijatie hypotézy na hladine významnosti 0,05 o normálnom rozdelení pre súbory PrE, KalE (n = 57) je potrebné, aby hodnota testovacej charakteristiky Y bola z intervalu $\langle -3, 81; 1, 34\rangle$. Pre súbory PrK, KalK (n=43) by muselo platiť $Y \in \langle -3, 98; 1, 17\rangle$. Pre testovaciu charakteristiku Y tohto testu sme vypočítali nasledovné hodnoty:

	PrE	PrK	KalE	KalK
Y	1,025	0,386	-3,029	-2,967

Keďže platí $1,025 \in \langle -3,81; 1,34\rangle$ a $-3,029 \in \langle -3,81; 1,34\rangle$, tak súbory PrE a KalE majú normálne rozdelenie. To isté platí aj pre súbory PrK a KalK, lebo 0,386 je z intervalu $\langle -3,98; 1,17\rangle$ a $-2,967 \in \langle -3,98; 1,17\rangle$. Keďže súbory majú normálne rozdelenie a zároveň sú aj homogénne, tak všetky nasledové štatistické testy použité v tejto kapitole sú korektné.

Keďže testujeme a porovnávame výkon žiakov a študentov kontrolnej a experimentálnej skupiny, je ešte potrebné otestovať, či boli na začiatku experimentálneho výskumu tieto skupiny výkonovo rovnocenné. K tomu nám pomôže celkové skóre vstupnej previerky, ktoré označíme ako faktor SF, lebo ho môžeme dostať ako súčet faktorov L + AV + CV + N. Označme jeho hodnotu v kontrolnej skupine ako SFK a v experimentálnej skupine ako SFE. Použijeme dvojvýberový t-test s nerovnosťou rozptylov medzi súbormi SFK a SFE. Pomocou programu *Excel* dostaneme nasledovnú tabuľku:

	SFK	SFE
Stredná hodnota	18,465	19,649
Rozptyl	49,017	36,339
Smerodajná odchýlka	7,001	6,028
Variačný koeficient	37,916	30,679
t stat	-0,888	
P(T<=t) (1)	0,188	
t krit (1)	1,663	
P(T<=t) (2)	0,377	
t krit (2)	1,989	

Keďže $|\text{t stat}| < \text{t krit}$, tak stredné hodnoty faktorov SFK a SFE nie sú štatisticky významne rozdielne. Experimentálnu aj kontrolnú skupinu možno považovať za výkonovo rovnocenné. Korektnosť tohto testu podporujú aj hodnoty variačných koeficientov, ktoré sú menšie ako 50 percent.

Hypotézy *H3* overíme pomocou dvojvýberového t-testu s nerovnosťou rozptylov pre dvojice PrE, PrK a KalE, KalK:

	PrE	PrK	KalE	KalK
Stredná hodnota	13,386	9,046	16,632	15,046
Rozptyl	17,491	20,386	14,201	16,950
t stat	4,228		1,998	
P(T<=t) (1)	$3,32.10^{-5}$		0,026	
t krit (1)	1,666		1,663	
P(T<=t) (2)	$6,64.10^{-5}$		0,051	
t krit (2)	1,992		1,987	

Pre dvojicu faktorov PrE a PrK $|\text{t stat}| > \text{t krit}$ (4,228 > 1,992). Preto zamietame hypotézu *H3b* o rovnosti stredných hodnôt faktora SPr v experimentálnej a kontrolnej skupine. Platí hypotéza *H3a*. Ďalším zaujímavým výsledkom je štatisticky významné mierne zvýšenie faktora SKal v experimentálnej skupine, lebo pre dvojicu faktorov KalE, KalK tiež platí $|\text{t stat}| > \text{t krit}$ (1,998 > 1,987).

Uvedené výsledky podporuje aj analýza rozptylu *ANOVA*. Pre dvojicu faktorov PrE, PrK sme vypočítali hodnotu testovacieho kritéria F = 19,434 a jeho kritickú hodnotu F krit = 3,938. Podobne pre dvojicu faktorov KalE, KalK sme vypočítali hodnoty F = 4,004 a F krit = 3,938. Pre obe dvojice faktorov platí F > F krit.

5.2.2 Hypotézy H4

H4a: Faktor L ovplyvňuje faktor SPr1, faktor N1 ovplyvňuje faktor SPr2.
H4b: Faktor L neovplyvňuje faktor SPr1, faktor N1 neovplyvňuje faktor SPr2.

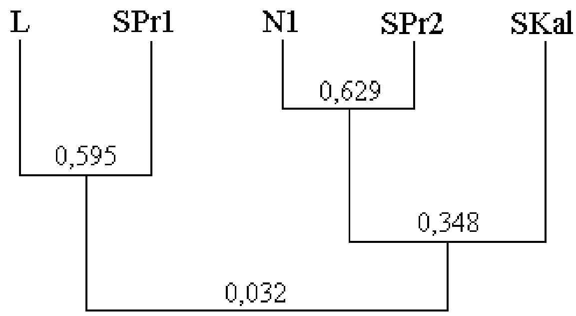
Tieto hypotézy sme overovali pomocou korelačnej matice a zhlukovej analýzy medzi faktormi L, N1, SPr1, SPr2 a SKal. Z nameraných hodnôt sme získali korelačnú maticu:

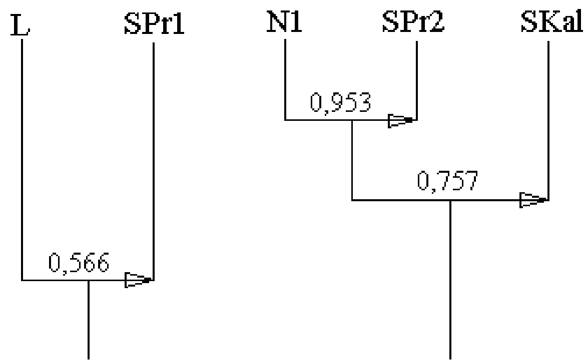
	L	N1	SPr1	SPr2	SKal
L	1				
N1	-0,069	1			
SPr1	0,322	0,134	1		
SPr2	-0,005	0,446	0,121	1	
SKal	0,029	0,501	0,388	0,331	1

Kritická hodnota korelačného koeficientu je $r_{57}(0,05) \doteq 0,254$. Z korelačnej matice vyplýva, že faktor L koreluje s faktorom SPr1 a faktor N1 s faktorom SPr2 $(0,322 > 0,254;\ 0,446 > 0,254)$. Naopak faktor L nekoreluje s faktorom SPr2 a faktor N1 nekoreluje s faktorom SPr1. $(|-0,005| < 0,254,\ 0,134 < 0,254)$. Preto môžeme hypotézu *H4b* na hladine významnosti 0,05 zamietnuť.

Hypotézu *H4a* podporuje aj zhlukovací a implikatívny zhlukovací dendrogram.

Obr. 40





Z nich vyplýva, že dvojice faktorov L, Spr1 a N1, SPr2 sú si nielen podobné, ale je medzi nimi v zmysle hypotézy *H4a* aj pomerne silný implikatívny vzťah.

5.2.3 Hypotézy H5

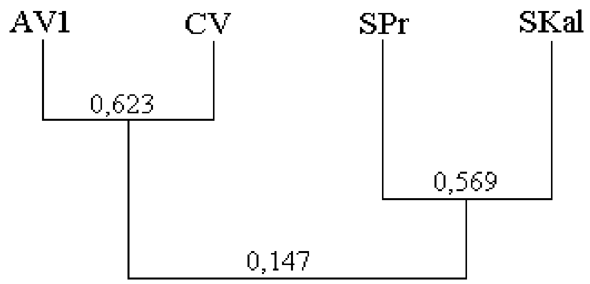
H5a: Faktory AV1, CV ovplyvňujú faktor SKal.
H5b: Faktory AV1, CV a SKal sú nezávislé.

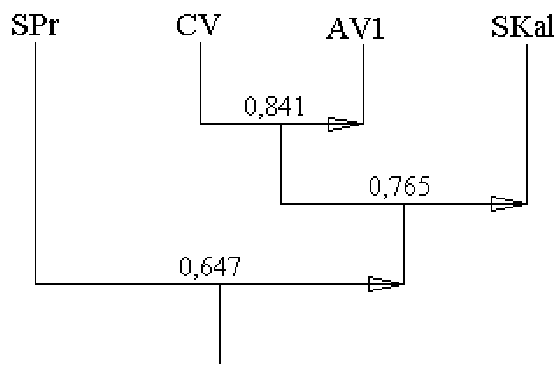
Tieto hypotézy sme najskôr overovali pomocou korelačnej matice medzi faktormi AV1, CV a SKal:

	AV1	CV	SKal	SPr
AV1	1			
CV	0,423	1		
SKal	0,631	0,485	1	
SPr	0,518	0,408	0,465	1

Kritická hodnota korelačného koeficientu je $r_{57}(0,05) \doteq 0,254$. Z korelačnej matice vyplýva, že faktory AV1, CV korelujú s faktorom SKal ($0,631 > 0,254$; $0,485 > > 0,254$). Preto je možné hypotézu *H5b* zamietnuť. Platnosť hypotézy *H5a* podporuje zhlukovací, ale najmä implikatívny zhlukovací dendrogram.

Obr. 41





Silnejšia podobnosť je medzi faktormi AV1 a CV ako medzi ich dvojicou a faktorom SKal. Naopak tieto faktory ako dvojica pomerne silno vplývajú na faktor SKal. Ďalším zaujímavým výsledkom je vplyv faktora SPr na faktor SKal.

5.2.4 Hypotézy H6

H6a: Stredná hodnota faktora AV1 je väčšia ako stredná hodnota faktora AV a stredná hodnota faktora N1 je väčšia ako stredná hodnota faktora N.
H6b: Stredné hodnoty dvojíc faktorov AV, AV1 a N, N1 sú rovnaké.

Skôr než začneme overovať hypotézy *H6*, zistíme, či variačné koeficienty faktorov AV, AV1 a N, N1 neprekročia veľkosť 50 %. Podľa nameraných hodnôt uvedené štyri súbory dát túto podmienku spĺňajú:

	AV	AV1	N	N1
Smerodajná odchýlka	2,797	2,754	3,312	2,066
Aritmetický priemer	8,491	9,947	6,754	8,737
Variačný koeficient	32,94	27,69	49,04	23,65

Z hodnôt variačných koeficientov vyplýva, že všetky štyri súbory môžeme považovať za dostatočne homogénne.

Na zistenie normality súborov dát použijeme podobne ako pri hypotézach *H3* d´Agostinov test. Pre prijatie hypotézy na hladine významnosti 0,05 o normálnom rozdelení pre súbory AV, N AV1 a N1(n = 57) je potrebné, aby hodnota testovacej charakteristiky Y bola z intervalu $\langle -3,81; 1,34 \rangle$. Pre testovaciu charakteristiku Y tohto testu sme vypočítali tieto hodnoty:

	AV	N	AV1	N1
Y	1,242	-3,359	-0,147	-3,673

Všetky hodnoty testovacej štatistiky Y sú z intervalu $\langle -3,81; 1,34 \rangle$, a teda všetky súbory majú normálne rozdelenie. Keďže súbory majú normálne rozdelenie a sú zároveň aj homogénne, tak všetky nasledové štatistické testy použité v tejto kapitole sú korektné.

Hypotézy *H6* overíme pomocou dvojvýberového párového t-testu pre strednú hodnotu dvojíc faktorov AV, AV1 a N, N1 pomocou programu *Excel*:

	AV	AV1	N	N1
Stredná hodnota	8,491	9,947	6,754	8,737
Rozptyl	7,826	7,586	10,974	4,269
t stat	-4,422		-4,824	
P(T<=t) (1)	$2,28.10^{-5}$		$5,6.10^{-6}$	
t krit (1)	1,673		1,673	
P(T<=t) (2)	$4,55.10^{-5}$		$1,12.10^{-5}$	
t krit (2)	2,003		2,003	

Pre dvojicu faktorov AV a AV1 je |t stat| > t krit (4,422 > 2,003). To isté platí aj pre dvojicu faktorov N a N1 (4,824 > 2,003). Preto zamietame hypotézu *H6b* o rovnosti stredných hodnôt faktorov AV, AV1 a rovnosti stredných hodnôt faktorov N, N1. Tým je hypotéza *H6a* overená.

Uvedené výsledky podporuje aj analýza rozptylu *ANOVA*. Pre dvojicu faktorov AV, AV1 sme vypočítali hodnoty testovacieho kritéria F = 7,842 a jeho kritickú hodnotu F krit = 3,926. Podobne pre dvojicu faktorov N, N1 hodnoty F = 12,992 a F krit = 3,926. Pre obe dvojice faktorov platí F > F krit.

5.2.5 Hypotézy H7

H7a: Faktory Chlapci, Dievčatá nevplývajú na faktory AV1, CV, N1, L, SPr, SKal.
H7b: Faktory Chlapci, Dievčatá vplývajú na faktory AV1, CV, N1, L, SPr, SKal.

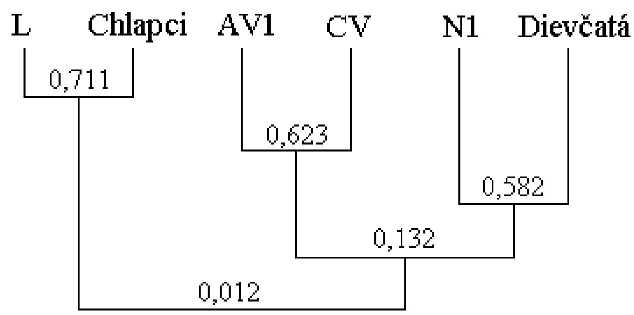
Faktory L, AV1, CV, N1 sú vstupné faktory. Najskôr budeme skúmať koreláciu týchto faktorov s faktormi Chlapci a Dievčatá. Z nameraných hodnôt sme dostali nasledovnú korelačnú maticu:

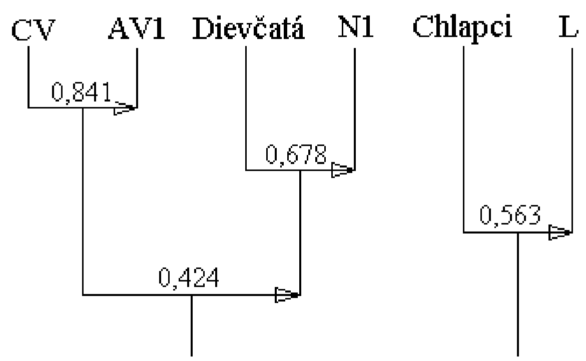
	L	AV1	CV	N1	Dievčatá	Chlapci
L	1					
AV1	0,114	1				
CV	0,173	0,423	1			
N1	-0,069	0,330	0,046	1		
Dievčatá	-0,248	0,241	0,104	0,211	1	
Chlapci	0,248	-0,241	-0,104	-0,211	-1	1

Kritická hodnota korelačného koeficientu je $r_{57}(0,05) \doteq 0,254$. Z posledných dvoch riadkov korelačnej matice vyplýva, že faktory Chlapci, Dievčatá nekorelujú so vstupnými faktormi L, AV1, CV a N1, lebo ich hodnoty sú v absolútnej hodnote menšie ako 0,254.

Zhluková analýza nám poskytla dendrogramy, z ktorých vyplýva určitá podobnosť a vplyv faktora Chlapci na faktor L a faktora Dievčatá na faktor N1.

Obr. 42





Aby sme zistili, či je pozitívny podobne ako pri hypotéze H2 sme použili dvojvýberový t-test s nerovnosťou rozptylov pre stredné hodnoty faktorov L, N1 zvlášť pre chlapcov a zvlášť pre dievčatá. Získali sme tieto hodnoty:

	Chlapci	Dievčatá	$\vert tstat\vert$	$tkrit$
Stredná hodnota-L	4,150	3,135	1,737	1,697
Rozptyl - L	5,292	2,842		
Stredná hodnota-N1	7,950	9,054	1,731	1,701
Rozptyl - L	6,576	2,885		

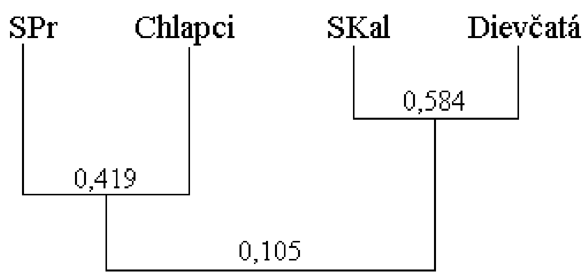
V oboch prípadoch $|tstat|$ je mierne väčšie ako $tkrit$, preto možno konštatovať, že existuje mierne pozitívny vplyv faktora Chlapci na faktor L a faktora Dievčatá na faktor N1. Teraz budeme skúmať koreláciu medzi faktormi Chlapci, Dievčatá a výstupnými faktormi SPr, SKal. Ich korelačná matica je:

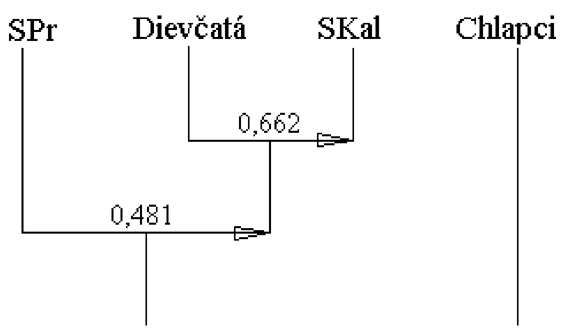
	SPr	SKal	Chlapci	Dievčatá
SPr	1			
SKal	0,464	1		
Chlapci	-0,139	-0,232	1	
Dievčatá	0,139	0,232	-1	1

Ani výstupné faktory SPr a SKal nekorelujú s faktormi Chlapci a Dievčatá, lebo absolútna hodnota ich korelačných koeficientov je menšia ako 0,254 ($0{,}139 < 0{,}254$, $0{,}232 < 0{,}254$).

Zhluková analýza nám poskytne ďalšie informácie o vzťahoch medzi faktormi.

Obr. 43





Vidíme, že existuje podobnosť medzi dvojicami faktorov Chlapci, SPr a Dievčatá, SKal. Pritom podobnosť faktorov Dievčatá, SKal je väčšia a existuje aj implikatívny vzťah faktora Dievčatá na faktor SKal. Faktor Chlapci nevplýva na žiadny faktor.

Pozitívny vplyv faktora Dievčatá na faktor SKal sme testovali pomocou dvojvýberového t-testu stredných hodnôt s nerovnosťou rozptylov faktora SKal zvlášť pre chlapcov a dievčatá.

	Chlapci	Dievčatá	$\|tstat\|$	$tkrit$
Stredná hodnota-SKal	15,450	17,271	1,732	1,687
Rozptyl - SKal	15,102	12,924		

Test potvrdil mierne pozitívny vplyv faktora Dievčatá na faktor SKal.

Kontrolná a experimentálna vzorka žiakov a študentov obsahovala 100 žiakov a študentov (36 chlapcov, 64 dievčat). Preto môžeme realizovať aj χ^2 test nezávislosti skóre záverečnej previerky od pohlavia žiakov a študentov. Hodnota skóre bola transformovaná na faktor výkon nasledovným spôsobom:

a - slabý výkon (relatívne skóre menej ako 50 %, absolútne skóre 0 - 20 bodov)

b - stredný výkon (relatívne skóre 50 % až 75 % , absolútne skóre 21 - 31 bodov)

c - silný výkon (relatívne skóre viac ako 75 % , absolútne skóre 22 - 42 bodov)

Za chlapcov a dievčatá sme získali nasledovnú kontingenčnú tabuľku:

Výkon	a	b	c	Celkový súčet
Chlapci	7	16	13	36
Dievčatá	13	23	28	64
Celkový súčet	20	39	41	100

Podľa [108] očakávané početnosti by boli nasledovné:

Výkon	a	b	c
Chlapci	7,20	14,04	14,76
Dievčatá	12,80	24,96	26,24

Potom testovacia štatistika χ^2 = 0,682 a podľa [108]

$$\chi^2_{krit} = \chi^2_{(3-1)(2-1)}(0.05) = \chi^2_2(0.05) = 5,992.$$

$\chi^2 < \chi^2_{krit}$, preto na hladine významnosti 0,05 nezamietame hypotézu o nezávislosti výkonu na pohlaví. Test je korektný, lebo všetky očakávané početnosti sú väčšie ako 5.

Kapitola 6

Výsledky dizertácie s odporúčaniami pre pedagogickú prax

Výsledky kvalitatívneho výskumu

Pri preberaní pojmu *súčet nekonečného radu* žiaci majú problémy s potencionálnym a aktuálnym nekonečnom. Použili sme pri jeho prekonávaní úlohu, či platí rovnosť $0,\overline{9} = 1$. U žiakov je veľmi rozšírená predstava, že $0,\overline{9} < 1$. Ukázalo sa, že pri riešení tejto úlohy sú vhodnou pomôckou pri vyučovaní Zenónove apórie, najmä Achilles a korytnačka. Tento paradox v nich spontánne vytvoril predstavu, že tak ako „Achilles dobieha korytnačku", tak sa číslo $0,\overline{9}$ „približuje" k číslu 1 a vyslovili správny záver $0,\overline{9} = 1$. Zároveň má učiteľ matematiky na tomto mieste možnosť predstaviť žiakom pojem nekonečného geometrického radu a pomocou vhodných (napríklad geometrických) separovaných a univerzálnych modelov odvodiť vzťah pre výpočet jeho súčtu. Žiaci dokázali sami vypočítať súčty geometrických radov pomocou geometrických separovaných modelov, čo prispelo k spontánnejšiemu pochopeniu vzťahu pre súčet nekonečného geometrického radu. Pri úlohách pre posúdenie konvergencie nekonečného geometrického radu mali väčšie problémy pri radoch so záporným ako s kladným kvocientom. Je to z fylogenetického hľadiska pochopiteľné, lebo aj geometrické modely nekonečných geometrických radov sú určené pre rady s kladným kvocientom.

Pri zavedení pojmu *súčet nekonečného radu* je potrebné žiakom ukázať pomocou vhodných kontrapríkladov štruktúru jeho definície, najmä poradie kvantifikátorov. V etape kryštalizácie a automatizácie bol problém pre niektorých žiakov(najmä gymnaziálnej skupiny) používať sumačné znamienko, a preto bolo výhodnejšie pre nich riešiť úlohy pomocou rozpisu niekoľkých prvých členov radov. Úspešnosť v riešení kalkulatívnych úloh negatívne ovplyvňujú chyby žiakov pri upravovaní číselných výrazov a výrazov s mocninami (napríklad $0{,}6=\frac{6}{10^{-1}}$). Pre žiakov bolo pomerne ťažké pochopiť, že konvergenciu radov neovplyvňuje správanie sa niekoľkých prvých členov radu (ak ich počet je konečný). Analogickej chyby sa žiaci dopustili pri *limite postupnosti*, keď nevedeli viacerí z nich pochopiť, že limitu postupnosti neovplyvňuje jej niekoľko prvých členov (ak ich počet je konečný). Preto je potrebné so žiakmi viac precvičovať tento typ úloh. U niektorých sa vyskytli problémy s rozlíšením konečnej a nekonečnej množiny, keď množinu prirodzených číslel považovali síce za nekonečnú, ale množinu prirodzených čísel väčších ako určité prirodzené číslo (napríklad 10) už za konečnú. Úlohy zamerané na definíciu *limity postupnosti* niektorí žiaci nevedeli vyriešiť, lebo nevedeli upravovať nerovnice s neznámou v menovateli.

Pri riešení problémových úloh je u viacerých žiakov pozorovateľná neschopnosť interpretovať výsledky svojich úvah, výpočtov a postupov. Žiak použije pri riešení úlohy správny algoritnus riešenia, dostane správny výsledok a nesprávne ho interpretuje. Druhou možnosťou je, že žiak použije nesprávny algoritmus, ktorý je po kalkulatívnej stránke úplne bezchybný, ale keďže urobil hneď na začiatku chybu, výsledok je nesprávny. Preto nestačí, keď učiteľ matematiky venuje pozornosť pri riešení úloh len kalkulatívnemu zvládnutiu riešenia úloh, ale je potrebné venovať väčšiu pozornosť aj fáze matematizácie a interpretácie (pozri Plocki [71]). Ďalším problémom je neschopnosť riešiť divergentné úlohy, žiaci sú prilíš zvyknutí na to, že úloha má práve jedno riešenie, čo poukazuje nato, že týchto úloh je vo vyučovaní stále málo.

Pri riešení kalkulatívnych úloh na *limitu postupnosti* a *limitu funkcie* sa u žiakov prejavili nedostatky pri úpravách algebrických výrazov($(n+1)! = (n+1)(n-1)!$, $x^3 - 8 = (x-2)^3$. U slabých žiakov bola častá chyba „delenie nulou" ($\frac{1}{0} = 0$).

Pri precvičovaní definície *limity funkcie v bode* sa ukázalo, že je potrebné venovať väčšiu pozornosť ako súvisí limita funkcie v bode a tvar jej grafu v okolí tohto bodu. Niektorí žiaci zamenili pojmy *limita funkcie v bode* a *spojitosť funkcie v bode*. Vtedy je dôležité, aby učiteľ matematiky ukázal žiakom ich rozdiel najmä na príklade funkcie, ktorá:

1. má v danom bode limitu a je v ňom aj spojitá,
2. má v danom bode limitu a nie je v ňom spojitá,
3. nemá v danom bode limitu.

Pri zavedení pojmu *derivácia funkcie v bode* sa spôsob prezentovaný v experimentálnom učebnom texte ukázal ako výhodný pri zdôvodnení neexistencie derivácie funkcie v bode (napríklad derivácia funkcie $y = |x|$ v bode 0). Je potrebné venovať pozornosť aj súvisu medzi tvarom grafu funkcie a deriváciou funkcie v bode. Žiaci nie sú zvyknutí prenášať získané matematické poznatky do iných oblastí (napríklad úlohy na pohyb vo fyzike), čo komplikuje fázy matematizácie a interpretácie slovných úloh. Pri propedeutike bol použitý aj program *Mathematica*, ktorý umožnil študentom bez použitia klasického diferenciálneho počtu určiť smernicu dotyčnice v bode. Niektorí žiaci si zvolili vhodné funkcie tak, že vypočítané a skutočné hodnoty smerníc sa prakticky ani nelíšili. V experimentálnych skupinách sa ukázalo, že tento spôsob viac motivuje chlapcov ako dievčatá.

Pri zavedení pojmu *určitý integrál* bolo pre študentov prekvapujúce, že pri výpočte konkrétnej úlohy dáva *Riemannov* aj *Newtonov integrál* rovnaký výsledok. Vďaka výkladu učiva podľa experimentálneho učebného textu žiaci a študenti pochopili pomerne rýchlo pojem určitého integrálu a boli schopní riešiť úlohy. Pri riešení kalkulatívnych úloh sa prejavili problémy s úpravou algebrických a číselných výrazov, kreslením grafov elementárnych funkcií. Tieto chyby a ich kombinácia negatívne ovplyvňovali úspešnosť žiakov a študentov pri riešení týchto úloh. V praxi by bolo užitočné ukázať žiakom viaceré (aj historické) prístupy k zavedeniu pojmu určitý integrál pomocou limitného procesu a klásť väčší dôraz na jeho aplikácie.

Výsledky kvantitatívneho výskumu

Pri preberaní učiva *limita postupnosti a súčet nekonečného radu* kvantitatívny výskum potvrdil, že zvládnutie kalkulatívnych úloh ešte neznamená, že žiaci aj chápu preberané pojmy, pretože faktory SPr a SKal nekorelujú v oboch experimentálnych skupinách (gymnaziálni študenti, študenti 1. ročníka učiteľstva matematiky).

Z hľadiska vplyvu pohlavia žiakov na výkon v úlohách na pochopenie pojmov a klakulatívnych úloh sa potvrdilo, že pohlavie žiakov neovplyvňuje výkon žiakov v oboch skupinách úloh. Aj keď zhluková analýza poukázala na určitý pozitívny vplyv faktora Chlapci na faktor SPr a fakora Dievčatá na faktor SKal, tento nie je štatisticky významný.

Pri preberaní učiva *limita a derivácia funkcie* kvantitatívny výskum potvrdil, že úspešnosť pochopenia pojmov je do značnej miery ovplyvnená vstupnými vedomosťami žiakov z predchádzajúcich učív matematiky (najmä algebrické a číselné výrazy).

Zvládnutie kalkulatívnych úloh je podmienené vedomosťami najmä z algebrických a číselných výrazov, čo potvrdila korelačná aj zhluková analýza. Podobne potvrdili obe analýzy vplyv vedomostí žiakov z matematickej logiky a riešenia nerovníc na schopnosť zvládnuť úlohy na pochopenie pojmov.

Úprava algebrických výrazov a riešenie nerovníc sa na gymnáziu preberá v 1. ročníku a u viacerých žiakov a študentov sa prejavilo to, že vedomosti z týchto oblastí zabudnú a nevedia ich potom použiť v iných učivách matematiky, čo sa prejavilo aj na začiatku preberania úloh na *limitu a deriváciu funkcie.* Po precvičení učiva viacerí žiaci, ktorý predtým nevedeli riešiť úlohy typu - zjednodušte výraz $\dfrac{x^3-8}{x-2}$, dokázali riešiť úlohu - vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$. Podobný jav, pozorovateľný aj pri riešení nerovníc viedol k hypotéze, že u žiakov počas preberania pojmov *limita a derivácia funkcie* sa zlepšuje schopnosť upravovať algebrické výrazy a riešiť nerovnice. Kvantitatívny výskum na experimentálnej vzorke potvrdil, že toto zlepšenie je štatisticky významné.

V učebniciach sa nevyskytuje dostatok úloh na pochopenie týchto pojmov, preto vyučovanie v experimentálnej skupine kládlo v zmysle vypracovaného experimentálneho učebného textu väčší dôraz na riešenie tohto typu úloh. Kvantitívne bolo zistené, že výkon žiakov a študentov v experimentálnej skupine bol štatisticky významne lepší ako v kontrolnej skupine. Ako sekundárny pozitívny jav sme zistili, že aj pri riešní kalkulatívnych úloh bola experimentálna skupina štatisticky významne lepšia. Potvrdila to aj zhluková analýza, ktorá ukázala, že dobrý výkon žiakov pri riešení úloh na porozumenie pozitívne stimuluje dobrý výkon žiakov aj pri riešení kalkulatívnych úloh.

Korelačná analýza nepotvrdila vplyv pohlavia žiakov na vstupné ani výstupné faktory. Rovnaký výsledok poskytol aj χ^2 test nezávislosti výkonu žiaka od jeho pohlavia. Zhluková analýza ukázala pozitívny vplyv faktora Chlapci na schopnosť riešiť úlohy z matematickej logiky a faktora Dievčatá riešiť nerovnice. To dokázalo aj testovanie pomocou dvojvýberového t-testu s nerovnosťou rozptylov. Faktor Chlapci neovplyvňuje výstupné faktory SPr a SKal. Faktor Dievčatá pozitívne ovplyvňuje faktor SKal, čo dokázalo aj testovanie pomocou dvojvýberového t-testu s nerovnosťou rozptylov.

Určitú odlišnosť medzi závermi korelačnej a zhlukovej analýzy vysvetľuje skutočnosť, že korelačná analýza vyjadruje lineárny vplyv faktorov. Tento vplyv v praxi môže byť aj odlišný.

Z hľadiska overenia hypotéz *H1* až *H7* možno konštatovať, že sa podarilo dokázať hypotézy *H1a* až *H6a*. Hypotézu *H7a* potvrdili výsledky korelačnej analýzy a χ^2 testu.

Hodnoty koeficientov reliability a validity ukazujú, že výsledky tematických previerok možno považovať za reliabilné ($r_p > 0,6$ vo všetkých prípadoch) a validné (hodnota r_v je väčšia ako kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie vo všetkých prípadoch).

Pre učiteľa matematiky tieto výsledky ukazujú, že pojmy súvisiace s limitnými procesmi vyžadujú venovať pozornosť nielen kalkulatívnym úlohám, ale aj úlohám venovaným pochopeniu pojmov. Pri ich preberaní si žiaci môžu zopakovať viaceré tematické celky ako matematická logika, úprava algebrických a číselných výrazov, riešenie nerovníc. Pri viacerých z nich sa riešením úloh môžu zlepšiť schopnosti a zručnosti žiakov (napríklad upravovať algebrické výrazy, riešiť nerovnice).

Rozvoj výpočtovej techniky umožňuje učiteľovi matematiky venovať väčšiu pozornosť úlohám na pochopenie pojmov, pričom nemusí mať obavy, žeby došlo k zhoršeniu schopnosti žiakov riešiť kalkulatívne úlohy. Toto úsile môže priniesť zlepšenie schopnosti žiakov riešiť úlohy zamerané na pochopenie pojmov. Vo vyučovacom procese by mal dbať aj na individuálne osobitosti žiakov. Napríklad pri riešení kalkulatívnych úloh je potrebné venovať väčšiu pozornosť chlapcom, logicky zamerané úlohy vyžadujú venovať väčšiu pozornosť dievčatám.

Kapitola 7

Záver dizertácie s námetmi pre ďalší výskum

Predložená práca je príspevkom do diskusie o spôsobe vyučovania limitných procesov na gymnáziu a na začiatku 1. ročníka vysokoškolského štúdia budúcich učiteľov matematiky. V súčasnosti zaznieva často otázka, či má byť problematika limitných procesov vôbec zaradená do učebných osnov stredoškolskej matematiky.

Limitné procesy zohrali významnú úlohu v histórii matematiky pri riešení otázok súvisiacich s pojmom nekonečna v matematike. Navyše ani objav pojmov derivácia a integrál by bol bez limitných procesov nemysliteľný. Už v histórii možno vidieť, že sa limitnými procesmi zaoberali aj filozofi, teológovia, fyzici, prípadne vedci z iných vedných odborov. Preto podľa nášho názoru limitné procesy presahujú hranice matematiky a ich poznanie zaraďujeme medzi súčasť všeobecného vzdelania.

Vyučovanie limitných procesov je teda potrebné už na strednej škole a predložená práca hľadá odpovede ako ich vyučovať. Za jeden z účinných nástrojov a pomôcok pre učiteľa považujeme aj experimentálny učebný text. Experimentálny učený text uvedený v tejto práci nie je koncipovaný tak, aby svojou úrovňou presne zodpovedal výlučne stredoškolskému učivu matematiky podľa súčasne platných učebných osnov. Obsahuje aj náročnejšie časti, ktoré sú určené hlavne pre nadaných žiakov, ktorí sú v súčasnosti často sústredení v posledných ročníkoch osemročných gymnázií alebo v triedach gymnázií zameraných na matematiku.

Okrem toho sa v súčasnosti ukazuje potreba zavádzať v 1. ročníku vysokoškolského štúdia budúcich učiteľov matematiky na základných a stredných školách kurzy matematiky, ktorých cieľom je byť akýmsi „mostom" medzi matematikou na strednej a vysokej škole. Napríklad na Pedagogickej fakulte Karlovej Univezity v Prahe je to predmet *Elementární matematika*, na Pedagogickej fakulte Katolíckej Univerzity v Ružomberku sú to predmety *Proseminár z matematickej analýzy* alebo *Proseminár z algebry*. Experimentálny učebný text je inšpiráciou aj pre vyučujúcich takýchto predmetov na vysokých školách.

V súvislosti s rozširovaním výuky pomocou počítačových programov je vhodné niektoré vyučovacie hodiny pri preberaní pojmov súvisiacich s limitnými procesmi zamerať na využitie týchto programov (napríklad program *Mathematica*).

Kvalitatívny a kvantitatívny výskum ukázal, že pri preberaní všetkých pojmov súvisiacich s limitnými procesmi je učiteľ matematiky v triede determinovaný vstupnými vedomosťami žiakov (vstupné faktory), ktoré výrazne ovplyvňujú výkon žiakov aj ich úspešnosť pri riešení úloh zameraných na poroznumenie pojmov a kalkulatívnych úloh. Konkrétne pre pojmy súvisiace s limitnými procesmi sú to schopnosť rozlíšiť konečné a nekonečné množiny, upravovať algebrické a číselné výrazy, riešiť nerovnice a poznatky z matematickej logiky.

Ak majú žiaci nedostatky vo viacerých vstupných vedomostiach, tak sa dopúšťajú pri riešení úloh nielen chýb v jednej ale aj vo viacerých oblastiach súčasne. Z ich pohľadu je veľmi náročné odstrániť tieto nedostatky a súčasne aj pochopiť pojmy súvisiace s limitnými procesmi. Z hľadiska učiteľa je pomerne ťažké žiacke chyby identifikovať (najmä ak sú kombináciou viacerých druhov chýb) a súčasne ich odstraňovať. Táto sitácia spôsobuje veľkú obtiažnosť pojmov súvisiacich s limitnými procesmi nielen pre žiakov, ale aj pre učiteľov.

Veľké množstvo vstupných faktorov pri preberaní pojmov súvisiacich s limitnými procesmi spolu s problémami pochopenia aktuálneho a potencionálneho nekonečna považujeme za hlavné príčiny veľkej obtiažnosti týchto pojmov pre žiakov a učiteľov matematiky.

Pozitívny vplyv úloh na porozumenie pojmov na kalkulatívne úlohy dokazuje potrebu vyučovať pojmy súvisiace s limitnými procesmi s porozumením a rešpektovaním etáp poznávacieho procesu.

Pri preberaní nového učiva učiteľ matematiky vždy nadväzuje na predchádzajúce vedomosti žiakov a ich skúsenosti (vstupné faktory). Pritom si kladie určité ciele a snaží sa naučiť naučiť žiakov nové pojmy a zručnosti (výstupné faktory). Vstupné faktory žiackych vedomostí a zručností môžu byť dôležité aj pre iné pojmy školskej matematiky, ktoré neboli témou tejto práce. Preto uvedená metodika didaktického výskumu v tejto práci je použiteľná aj v iných tematických celkoch školskej matematiky. Z výskumného hľadiska je zaujímave zisťovať, ktoré vstupné faktory vplývajú na výstupné a ako silný je ich vplyv na výstupné faktory a do akej miery výstupné faktory ovplyvňujú individuálne osobitosti žiakov - pohlavie, rodinné a sociálne zázemie atď.

Štruktúru a množstvo vstupných faktorov ovplyvňuje postavenie skúmaného tematického celku medzi ostatnými tematickými celkami školskej matematiky. Z hľadiska matematickej pedagogickej praxe by bolo užitočné zistiť, ktoré tematické celky školskej matematiky sú nezávislé od ostatných a ktoré sú prepojené s ktorými ďalšími tematickými celkami školskej matematiky, pretože to potom ovplyvňuje štruktúru a zložitosť vstupných faktorov. Bolo by zaujímavé zistiť, ktoré iné tematické celky školskej matematiky majú zložitú štruktúru vstupných faktorov a či ich zložitosť nie je príčinou ich veľkej obtiažnosti pre žiakov a učiteľov. Z praktického hľadiska takéto tematické celky vyžadujú, aby v učebných osnovách mali dostatočnú hodinovú dotáciu.

Kvalitatívny výskum má svoje nezastupiteľné miesto pri identifikácii a klasifikácii žiackych chýb a hľadaní vstupných a výstupných faktorov v danom tematickom celku školskej matematiky, najmä v prípade, že je objektom vedeckého výskumu v teórii vyučovania matematiky.

Ako ukazujú výsledky tejto dizertačnej práce niektoré tematické celky školskej matematiky zlepšujú vedomosti a zručnosti žiakov z predchádzajúcich tematických celkov. Mohli by sme ich nazvať tematickými celkami „druhej šance" pre žiakov. V našom prípade sa podarilo kvantitatívne overiť, že tematický celok *limita a derivácia* *funkcie v bode* je tematickým celkom „druhej šance" pre tematické celky *algebrické a číselné výrazy*. Preto je z výskumného hľadiska zaujímave zistiť, ktoré tematické celky školskej matematiky sú pre aké predchádzajúce tematické celky tematickými celkami „druhej šance" pre žiakov a do akej miery sa môžu zlepšiť zručnosti a vedomosti žiakov v tých matematických oblastiach, ktoré v skoršom veku nezvládli.

Kapitola 8

Publikácie a citácie autora súvisiace s témou dizertácie

[1] Gunčaga, J.: *Limitné procesy z didaktického hľadiska.* Rigorózna práca, Ružomberok, KU, 2002.

[2] Gunčaga, J.: *Zum Thema Folgen und Reihen*, In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Berlin, Verlag Franzbecker, 2002, s. 203-206.

[3] Gunčaga, J.: *Experyment s ciagami v gimnazjum*, In: *Studia Matematyczne Akademii Swietokrzyskej*, č. 9, Kielce, 2002, s. 195 - 200.

[4] Gunčaga, J.: *Možnosť využitia problémového vyučovania pri limitných procesoch.* In: *Disputationes Scientificae Univesitatis Catholicae in Ružomberok*, č. 1, 2002, s. 3 - 8.

[5] Gunčaga, J.: *Archimedova kvadratúra paraboly*, In: *III. Vedecká konferencia doktorandov*, UKF Nitra, 2002, s. 43- 47.

[6] Gunčaga, J.: *Niektoré motivačné metódy pri vyučovaní limitných procesov*, In: *Aktivní konstrukce poznání.* Ústí nad Labem, UJEP, 2002, s. 105-109.

[7] Gunčaga, J.: *Lernsequenz zum Thema Summe einer unendlichen geometrischen Reihe*, In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Berlin, Verlag Franzbecker, 2003, s. 265-268.

[8] Gunčaga, J.: *Remarks on continuous fractions.* In: *16 Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica III.* Kraków, 2003, s. 61 - 66.

[9] Gunčaga, J.: *Limita postupnosti a súčet nekonečného radu - ukážka kvalitatívneho a kvantitatívneho výskumu.* In: *Acta Mathematica 6.* Nitra, FPV UKF, 2003, s. 249 - 256.

[10] Gunčaga, J.: *Limita a derivácia funkcie - ukážka kvantitatívneho výskumu.* In: *V. Vedecká konferencia doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov.* Nitra, UKF, 2004, s. 356 - 359.

Práca [1] je citovaná v

Eisenmann P.: *Sčítání číselných řad*, In: *Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis*, č. 6, Trnava, PF TU, s. 16-20.

Kontrová L.: *Limita postupnosti a „prípad skákajúceho panáčika".* In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Zborník príspevkov. Ružomberok, KU 2003, s. 21 - 23.

Eisenmann P.: *Součet řady a limita posloupnosti*, In: *matematika, Fyzika, Informatika*, č. 7, Praha, Prometheus, 2004, s. 388 - 394.

Eisenmann P.: *Součet řady jako didaktický problém*, In: *Acta Mathematica 6.* Nitra, FPV UKF, 2003, s. 157 - 163.

Práca [3] je citovaná v

Domoradzki S.: *Interakcja nauczyciel - ucen Komentarz dydaktyczny - Przyklady*, In: *Disputationes Scientificae Univesitatis Catholicae in Ružomberok*, č. 3, 2003, s. 11 - 19.

Práca [5] je citovaná v

Eisenmann P.: *Propedeutika infinitezimálního počtu.* Ústí nad Labem, UJEP, 2002.

Literatúra

[1] Anděl J.: *Statistické metody.* Praha, Matfyzpress, 1998.

[2] Babianski W. a kol.: *Matematyka 2. Podrecznik dla liceum ogólnokszta lcacego.* Warszawa, Nowa Era, 2003.

[3] Babianski W. a kol.: *Program nauczania matematyki dla liceum ogólnokształcacego, liceum profilowanego i technikum.* Warszawa, Nowa Era, 2002.

[4] Bauer L.: *Interesse als mathematikdidaktische Kategorie.* In: *Jornal für Mathematik-Didaktik*, č. 2, 1989, s. 141 - 171.

[5] Bauer L.: *Mathematische Fähigkeiten und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben.* Dizertačná práca, Universität Regensburg, 1977.

[6] Bauer L.: *Didaktik der Mathematik Überlegung zum Selbstverständnis der Disziplin.* In: *Nachriten und Berichte der Universität Passau*, č. 3, 1993, s. 12 - 14.

[7] Bender P.: *Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten.* In: *Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, č. 4, 1991, s. 238 - 243.

[8] Bender P.: *Zwei „Zugänge" zum Integral-Begriff?* In: *Mathematica didactica*, č. 3/4, 1990, s. 102 - 127.

[9] Bero P., Hejný M.: *Vyučovanie infinitezimálneho počtu.* In: *Matematické obzory*, č.36,s. 15 - 22.

[10] Bero P.: *Nosné pojmy diferenciálneho počtu z hľadiska vyučovania.* Kandidátska dizertačná práca. Bratislava, MFF UK, 1985.

[11] Bikner A., Herget W.: *Fehler im Analysisunterricht* In: *Mathematik lehren*, č. 36, 1984, s. 54 - 57.

[12] Bindl A.: *Geometrischen Reihen an der 9. Klasse.* In: *Praxis der Mathematik* Heft 3, 1999, s. 158 - 162.

[13] Blum W.: *Perspektiven für Analysisunterricht.* In: *Mathematikunterricht*, č. 4-5, 2000, s. 5-17.

[14] Blum W.: *Zum vereinfachen Grenzwertbegriff.* In: *Mathematikunterricht*, č. 3 , 1979, s. 42 - 50.

[15] Böker T.: *Analysis I.* Manheim, BI Bibliographisches Institut & FA Brockhaus AG, 1992.

[16] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 1.* Leipzig, Teubner Verlag, 1900.

[17] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 2.* Leipzig, Teubner Verlag, 1900.

[18] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 3.* Leipzig, Teubner Verlag, 1901.

[19] Davis B. R., Vinner S.: *The notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages.* In: *Journal of Mathematical Behavior*, č. 5, 1986, s. 281 - 303.

[20] Dedera P., Kôpka F.: *O niektorých aspektoch prijímacích skúšok a výučby matematiky na vojenskej akadémii.* In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Zborník príspevkov. Ružomberok, KU, 2001, s. 57 - 65.

[21] Domoradzki S.: *Refleksje na temat nowego egzaminu maturalnego z matematyki v Polsce*, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Zborník príspevkov. Ružomberok, KU, 2001, s. 66 - 81.

[22] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus.* New York; Heidelberg; Tokyo, Springer Verlag, 1979.

[23] Eisenmann P.: *Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu ve výuce matematiky na střední škole I/ II/ III/ IV*, In: Matematika, Fyzika, Informatika. Praha, Prometheus, 1997, č. 7, s. 353 - 359/ č. 8, s. 421 - 430/ č. 9, s. 481 - 487/ č. 10, s. 549 - 559.

[24] Eisenmann P.: *Dvojí klasifikace limitního procesu.* In: *Czech - Polish Mathematical School.* Ústí nad Labem, 1996, s. 94 - 100.

[25] Eisenmann P.: *Propedeutika infinitezimálního počtu.* Ústí nad Labem, UJEP, 2002.

[26] Ervynck G.: *Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of the limit of a function.* In: *Proceeding of the fifth conference of the intern. group for the Psychology of Mathematics Education.* Berkeley, 1981, s. 330 - 333.

[27] Fischer R., Malle G., Bürger H.: *Človek a matematika (úvod do didaktického myslenia a konania).* Bratislava, SPN, 1992. Slovenský preklad knihy Mensch und Mathematik. Zürich, Bibliographisches Institut, 1985.

[28] Fischer R.: *Sinn im Analysisunterricht.* In: *Journal für Mathematikdidaktik*, č. 3/4, 1982, s. 265-294.

[29] Freudenthal H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2.* Stuttgart, Klett, 1973.

[30] Fulier J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy.* Nitra, UKF, 2001.

[31] Fulier J., Šedivý O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky.* Nitra, UKF, 2001.

[32] Gavora P.: *Úvod do pedagogického výskumu* . Bratislava, UK, 2001.

[33] Gunčaga J.: *Možnosť využitia problémového vyučovania pri limitných procesoch.* In: *Disputationes Scientificae Univesitatis Catholicae in Ružomberok*, 2002, č. 1, s. 3-8.

[34] Hauke F.: *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten.* Dizertačná práca, Universität Paderborn, 2001, In: http://ubdata.uni-paderborn.de/ediss/17/2001/friedric/index.htm

[35] Hayen J.: *Zur Entwicklung des Begriffverständnisses vom Grenzwert.* In: *Mathematica didactica*, č. 3/4, s. 72 - 95.

[36] Hecht T.: *Postupnosti.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2000.

[37] Hecht T.: *Matematická analýza. Logika.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2000.

[38] Hejný M., Kuřina F.: *Dítě, škola a matematika.* Praha, Portál, 2001.

[39] Hejný M., Michalcová A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava, MC, 2001.

[40] Hejný M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky* 2. Bratislava, SPN, 1989.

[41] Herden G., Knoche N., Pickartz U.: *Eine Untersuchung zur Diskussion über Schwierigkeiten im Umgang mit dem Konvergenzbegriff. Teile I/II.* In: *Jornal für Mathematik-Didaktik*, č. 4, 1983, s. 263-305/1984, s. 211 - 237.

[42] Hilbert A.: *Mathematik.* Leipzig, VEB Fachbuchverlag, 1989.

[43] Hischer H., Scheid H.: *Grundbegriffe der Analysis: Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht.* Heidelberg; Berlin; Oxford, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

[44] Hofe vom R.: *Probleme mit dem Grenzwert-Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse.* In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, č. 4, 1998, s. 257-291.

[45] Hofmann J. E.: *Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik.* München, Leibniz Verlag, 1949.

[46] Hronec J.: *Diferenciálny a integrálny počet I.* Bratislava, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1957.

[47] Hrubý D., Kubát J.: *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet.* Praha, Prometheus, 2002.

[48] Jost D.: *Eine ganz elementare Flächenberechnung und ihre physikalische Anwendung.* In: *Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 1970, 23. Band, Heft 16, s. 342- 343.

[49] Kahl U.: *Analysis unter topologischen Gesichtspunkten im Unterricht.* In: *Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 1970, 23. Band, Heft 2, s. 83 - 92.

[50] Kakol H. a kol.: *Granica a ciagłość funkcji. Matematyka dla ciekawych.* Bielsko - Biala, Dla szkoly, 1998.

[51] Kirsch A.: *Eine „intelektuell ehrliche" Einfürung des Integralbegriffs in Grundkursen.* In: *Didaktik der Mathematik* 4, 1976, s. 87 - 105.

[52] Klaczkow K. a kol.: *Matematyka dla licealistów. Podrecznik do II klasy.* Warszawa, Oficyna Edukacyjna, 2000.

[53] Klaczkow K. a kol.: *Analiza matematyczna dla licealistów. Podrecznik* . Warszawa, Oficyna Edukacyjna, 2002.

[54] Kluvánek I.: *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet.* Žilina, VŠDS, 1991.

[55] Kluvánek I.: *Čo nie je dobré vo vyučovaní matematickej analýzy? I/II.* In: *Matematické obzory*, 1991, č. 36, s. 23 - 49/č. 37, s. 47 - 66.

[56] Knoche N., Wippermann H: *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis.* Mannheim; Wien; Zürich, Bibliographisches Institut, 1986.

[57] Knoche N.: *Analysisunterricht unter dem Lernziel „Mathematische Grundbildung".* In: *Disputationes Scientificae Univesitatis Catholicae in Ružomberok* č. 1, 2002, s. 32 - 39.

[58] Königsberger B.: *Analysis I.* Berlin; Heidelberg; New York, Springer Verlag, 2001.

[59] Kontrová L.: *Limita postupnosti a „prípad skákajúceho panáčika".* In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Zborník príspevkov. Ružomberok, KU, 2003, s. 21 - 23.

[60] Kraemer E. a kol.: *Přehled elementární matematiky.* Štvrté nezmenené vydanie. Praha, SNTL 1964.

[61] Kvasz L.: *Prednášky z dejín matematickej analýzy*, In: www.matika.sk

[62] Lukasová A., Šarmanová J.: *Metody shlukové analýzy.* Praha, SNTL, 1985.

[63] *Matematika (učebné osnovy povinného predmetu stredných odborných škôl).* In: www.spu.sanet.sk/Pedagogicke_dokumenty/UO-Gym_SS/matematika_SOS.doc

[64] Meschkowski H. a kol.: *Didaktik der Mathematik III.* Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1973.

[65] Mundy F. J., Graham K.: *Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives, and Integrals.* In: *MAA Notes*, č. 33, 1994, s. 31 - 45.

[66] Odvárko O. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia.* Bratislava, SPN, 1985.

[67] Odvárko O. a kol.: *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady.* Praha, Prometheus, 2002.

[68] *OSNOVY osemročné štúdium Matematika povinný učebný predmet.* In: www.spu.sanet.sk/Pedagogicke_dokumenty/UO-Gym_SS/osnovy_mat_gym_8r.doc

[69] Papy F.: *Pierwsze lekcje analizy matematicznej.* In : *Liczby, Funkcje, Granice* Krakov, WSP 1972. Poľský preklad časti knihy Premiéres lesons d´ analyse mathematique. Bruxelles, Centre belge de pédagogie de la mathématique, 1966.

[70] Pickert G.: *Aufbau der Analysis vom Stetigkeitsbegriff her.* In: *Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 1968, 21. Band, Heft 11, s. 384 - 388.

[71] Plocki A.: *Stochastyka 2. Zarys dydaktyki.* Kraków, WSP, 1997.

[72] Popp W.: *Fachdidaktik der Mathematik.* Köln, Aulis Deubner Verlag, 1999.

[73] Przenioslo M.: *Rozumenie granicy fukcji wyniesione ze szkoly sredniej.* Kielce, Takt, 2000.

[74] Przenioslo M.: *Obraz granicy fukcji uksztaltowany w czasie studiów matematycznych.* Kielce, Wydawnictwo Akademii Swietokrzyskiej, 2002.

[75] Püschel W: *Direkte Integrationsmethoden von einigen Klassen von Potenzfunktionen.* In: *Der Mathematikunterricht*, 1960, Heft 2, s. 52 - 65.

[76] Riečan B. a kol.: *Matematika pre 4. ročník gymnázia.* Bratislava, SPN, 1987.

[77] Riečan B.: *O limite bez epsilónov.* In: *Matematické obzory*, č. 9, 1976, s. 39 - 54.

[78] Riečan B.: *Diferencovane o diferencovaní.* In: *Matematické obzory*, č. 19, 1982, s. 11 - 24.

[79] Riede H.: *Die Einführung des Ableitungsbegriffs.* Mannheim, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1994.

[80] Rosenbloom C. P., Schuster S.: *Wstep do analizy.* In : *Liczby, Funkcje, Granice.* Krakov, WSP 1972. Poľský preklad časti knihy Introduction to the calculus. New Jersey, Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966.

[81] Scimone A.: *Pupils´ conception about an open historical question: Goldbach conjencture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint.* Dizertačná práca. Bratislava, MFF UK, 2002.

[82] Schwabik Š.: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století*, In: *Matematika v 19. století*, Zborník prednášok z letných škôl histórie matematiky, Dějiny matematiky, svazek 3. Praha, Prometheus, 1996.

[83] Sierpinska A.: *Some remarks on understanding in mathematics.* In: *For the Learning of Mathematics*, č. 3, 1990, s. 24 - 41.

[84] Sierpinska A.: *Humanities students and epistemological obstacles related to limits.* In: *Educational Studies in Mathematics*, č. 18, 1987, s. 371 - 397.

[85] Skalková J.: *Úvod do metodologie a metod pedagogického výzkumu.* Praha, SPN, 1983.

[86] Soltys D., Szmigiel M.K.: *Doskonalenie kompetencji nauczycieli w zakresie diagnozy edukacyjnej.* Kraków, Zamiast korepetycji, 1999.

[87] Steinberg G.: *Experimente im Analysisunterricht.* In: *Mathematikunterricht*, č. 4/5, 2000, s. 72 - 89.

[88] Stoľar A. A.: *Praktikum po pedagogike matematiki.* Minsk, Vyšejšaja škola, 1978.

[89] Strick K. H.: *Endlich oder unendlich gross.* In: *Mathematik lehren* , Heft 112, 2002, s. 61 - 64.

[90] Tall D.: *Mathematical intuition, with special reference to limiting processes.* In: *Proceedings of the 4th Intern. Group for the Psychology of Mathematics Education. Berkeley, Ca* , č. 4, 1980, s. 170 - 176.

[91] Tall D., Winner S.: *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* In: *Educational Studies in Mathematics*, č. 12, 1981, s. 151 - 169.

[92] *Tematický plán pre školský rok 2003/2004 Predmet: matematika Trieda: 2.A, 3.A, 4.A*, Gymnázium v Košiciach, Poštová 9

[93] Tietze U. P., Klika M., Wolpers H.: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Band 1 Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis.* Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg, 2000.

[94] Trenčanský I. a kol.: *Slovník teórie didaktických situácií 1. časť*, In: *Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky.* Bratislava, UK, 2001, s. 95 - 103.

[95] Trojovský P.: *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada*, In: *Člověk-umění-matematika*, Zborník prednášok z letných škôl histórie matematiky, Dějiny matematiky, svazek 4. Praha, Prometheus, 1996.

[96] Trojovský P.: *Číselné řady u Bernoulliů*, In: *Matematika v proměnách věků*, Zborník prednášok z letných škôl histórie matematiky, Dějiny matematiky, svazek 11. Praha, Prometheus, 1998.

[97] Turek I.: *Kapitoly z didaktiky vysokej školy.* Košice, TU, 1998.

[98] Turek I.: *Zvyšovanie efektívnosti vyučovania.* Bratislava, MC, 2002.

[99] *Učební osnovy pro gymnazia Matematika.* In: http://www.vuppraha.cz/downloads/0015-Ucebnidokumentyprogymnazia/matematika.pdf

[100] *Učebné osnovy gymnázia štvorročné štúdium Matematika.* In: *Učebné osnovy gymnázia štvorročné štúdium (povinné učebné predmety).* Bratislava, MŠ SR, 1997.

[101] Volkert K.: *Geschichte der Analysis.* Zürich, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1988.

[102] Vrábelová M., Markechová D.: *Pravdepodobnosť a štatistika.* Nitra, FPV UKF, 2001.

[103] Weigand H. G.: *Zur Didaktik des Folgenbegriffs.* Mannheim, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, 1993.

[104] Wellenreuther M.: *Hypothesenprüfung, Theorieenntwicklung und Erkenntnisfortschritt in der Mathematikdidaktik Ein Pläyoder für Methodenpluralismus.* In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 1997, Heft 2/3, s. 186 - 216.

[105] Wigand K.: *Grenzprozesse in der Unterstufe.* In: *Der Mathematikunterricht*, 1959, Heft 1, s. 7 - 16.

[106] Wimmer G.: *Štatistické metódy v pedagogike.* Hradec Králové, Gaudeamus, 1993.

[107] Znám Š. a kol.: *Pohľady do dejín matematiky.* Bratislava, Alfa, 1986.

[108] Zvára K., Štěpán J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Praha, Matfyzpress, 1997.

[109] Žukova L. T.: *Analiza matematyczna i algebra* . In: *Liczby, Funkcje, Granice.* Krakov, WSP 1972. Poľský preklad časti knihy Matematičeskij analiz i algebra. Moskva, Prosveščenie, 1967.

Dodatky

Dodatok A

Limitné procesy v histórii matematiky

Podľa Fuliera/Šedivého v [31] dejiny matematiky

- zvyšujú motiváciu žiakov a študentov počas vyučovacieho procesu,
- poskytujú impulzy pre samostatnú prácu a štúdium učiteľa matematiky, žiakov a študentov,
- humanizujú vyučovanie matematiky a eliminujú negatívny obraz žiakov o matematike,
- napomáhajú lepšiemu pochopeniu matematických pojmov, porovnaním historických a súčasných algoritmov riešenia matematických problémov pomáhajú zdôvodniť súčasné postupy a techniky,
- identifikovaním prekážok v historickom vývoji matematickej disciplíny(napríklad matematickej analýzy) umožňujú zdôvodniť na základe paralely fylogenézy a ontogenézy matematického myslenia obtiažnosť niektorých častí matematiky.

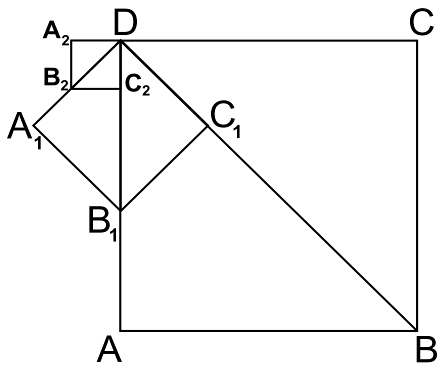
V oblasti limitných procesov sú pomerne náročné pre žiakov a študentov pojmy súvisiace napríklad s potencionálnym a aktuálnym nekonečnom, konvergencia nekonečného číselného radu, limita funkcie a ďalšie. Cieľom historického prehľadu, ktorý je uvedený v nasledujúcich kapitolách, nie je podať úplne podrobné a vyčerpávajúce „dejiny limitných procesov". Chceme poskytnúť učiteľovi matematiky impulzy, ktoré prispejú k motivácii žiakov a k prekonaniu prekážok pri pochopení pojmov súvisiacich s limitnými procesmi. V histórii matematiky môže učiteľ matematiky nájsť veľa podnetných postupov a príkladov, ktoré sú použiteľné aj vo vyučovaní.

Domnievame, že matematika by sa nemala vyučovať ako čisto abstraktný predmet, ale ako súčasť ľudskej kultúry a žiaci by sa mali dozvedieť, v akom kultúrnom kontexte vznikali v minulosti poznatky, ktoré získavajú počas vyučovacieho procesu. To je vidieť aj z niektorých cieľov, ktoré sú uvedené v učebných osnovách matematiky štvorročného štúdia gymnázia (pozri [100]): „Žiak by mal pochopiť zmysel a hodnotu matematiky v histórii i v súčasnosti, oboznámiť sa s hlavnými historickými a kultúrnymi etapami vývoja matematiky, spoznať možnosť jej aplikácie v prírodných a humanitných vedách, pochopiť matematiku ako dynamický systém s množstvom otvorených problémov."

A.1 Staroveké Grécko

Prvé náznaky limitných procesov možno pozorovať v matematike starovekého Grécka. Najčastejšie je vidieť tieto procesy v počiatočnej fáze v geometrických úlohách. Podľa Kvasza v [61] prvý „dotyk s potrebou limitných procesov" je vidieť v objave nesúmerateľnosti dvoch úsečiek, ktorý súvisí s objavom iracionálneho čísla. Ako prvý na to prišiel jeden z pytagorejcov *Hippasos z Metapontu* (5. stor. pr. Kr.). Pytagorejci odmietali existenciu iracionálnych čísel, a preto tento poznatok udržiavali dlho v tajnosti. Vďaka tomu existujú dnes iba dohady, akým spôsobom a kedy to zistili. Kým Kvasz v [61] ho datuje do roku okolo 500 pr. Kr., tak Volkert v [101] do roku okolo 450 pr. Kr.

Obr. 44



Volkert uvádza v [101] zaujímavý geometrický dôkaz nesúmerateľnosti uhlopriečky a strany štvorca, ktorý vychádza z gréckych skúseností konštrukčných úloh pomocou „kružidla a pravítka". Skúmajme štvorec $ABCD$ (pozri obr. 44).

Keďže $|AB| < |BD|$ existuje bod $C_1 \in BD$, pričom $AB \cong BC_1$. Zostrojme kolmicu v bode C_1, ktorá pretína stranu AD v bode B_1. $|\measuredangle ADB| = 45°$, a preto $|\measuredangle C_1B_1D| = 45°$. Trojuholník DB_1C_1 je rovnoramenný a pravouhlý, takže $B_1C_1 \cong C_1D$. Teraz doplňme trojuholník DB_1C_1 na štvorec $A_1B_1C_1D$. Strana tohto štvorca má dĺžku $|BD| - |AC|$. Keďže $|A_1B_1| < |B_1D|$, môžeme zopakovať konštrukciu, ktorú sme použili vo štvorci $ABCD$ a získať štvorec$A_2B_2C_2D$. Takto môžeme postupovať donekonečna, pričom dĺžky strán príslušných štvorcov „konvergujú" k nule. Predpokladajme teda, že úsečky AB, CD sú súmerateľné. Potom existuje úsečka dĺžky x, pre ktorú platí: $|AB| = px$ a $|BD| = qx$, pričom $p, q \in N$. Keďže $|DC_1| = |BD| - |AC| = (q-p)x$, tak aj DC_1 je súmerateľné s AB. Zrejme $|AB_1| = |B_1C_1|$, lebo $\triangle B_1AB \cong \triangle B_1C_1B$. To však znamená, že $|AB_1| = (q-p)x$ a $|B_1D| = |AD| - |AB_1| = px - (q-p)x = (2p-q)x$. Podobne môžeme ukázať, že $|C_2D| = (3p-2q)x$, a teda je násobkom dĺžky x. V každom štvorci $A_iB_iC_iD$ pre každé $i \in N$ je dĺžka jeho strany násobok dĺžky x, čo nie je možné, lebo musí existovať štvorec $A_kB_kC_kD$ so stranou kratšou ako x.

Antifón z Atén (5. stor. pr. Kr.) sa snažil vypočítať obsah kruhu pomocou postupného vpisovania mnohouholníkov. Začal štvorcom, potom pokračoval osemuholníkom, potom šestnásťuholníkom atď.

Problém limitných procesov naznačil vo svojich apóriách aj *Zenón z Eley* (490 - 430 pr. Kr.). Ako príklad uveďme aspoň dve, ktoré uvádza aj Znám a kol. v [107] :

1. Dichotómia

Teleso má prejsť dráhu z bodu A do bodu B. Najprv musí prejsť polovicu dráhy, potom polovicu zo zvyšnej polovice, potom polovicu z úseku, ktorý sa ešte zvýšil, atď. Takto možno uvažovať donekonečna, a preto sa do bodu B nikdy nedostane.

2. Achilles a korytnačka

Achilles a korytnačka utekajú spolu na štadióne. Achilles jej dá náskok napríklad 100 metrov. Nech Achilles má 100 krát väčšiu rýchlosť ako korytnačka. Keď Achilles prebehne spomínaných 100 metrov, korytnačka sa posunie o 1 meter. Ak Achilles prebehne tento meter, tak sa korytnačka posunie o 1 cm. Ak aj tento cm prejde, korytnačka sa posunie o 0,1 mm a takto by sme mohli pokračovať do nekonečna. Preto Achilles korytnačku nikdy nedobehne.

V oboch apóriách vidno, že Zenón si nevedel predstaviť, žeby súčet nekonečného počtu dĺžok úsečiek mohol mať konečný súčet. Nastolil problém chápania nekonečna, ktorým sa matematici zaoberali celé stáročia a aj v pedagogickej praxi v súvislosti s ním narážame aj dnes na podobné problémy. Prvú apóriu poznajú žiaci skôr pod verziou „delenie čokolády". Rozdelíme tabličku čokolády na polovicu a zvyšnú polovicu znova na polovicu atď. Dokedy môžeme takto deliť čokoládu? Neminie sa nám, tak, že už nebudeme mať, čo rozdeliť? Apórie môžu motivovať žiakov vo vyučovacom procese a v prípade, že sa nimi vyučujúci so žiakmi zaoberá skôr, môžu mať aj propedeutickú funkciu.

Za limitný proces možno považovať aj Eudoxovu exhaustačnú metódu, ktorú vypracoval *Eudoxos z Knidu* (408 - 355 pr. Kr.), ktorý využil Antifónove poznatky. Jej hlavnou myšlienkou je, že obsahy rovinných útvarov ohraničené krivkami možno vypočítať pomocou postupného vypĺňania týchto útvarov mnohouholníkmi. Túto metódu využili najmä *Euklides* (330 - 270 pr. Kr.) a *Archimedes* (287 - 212 pr. Kr.).

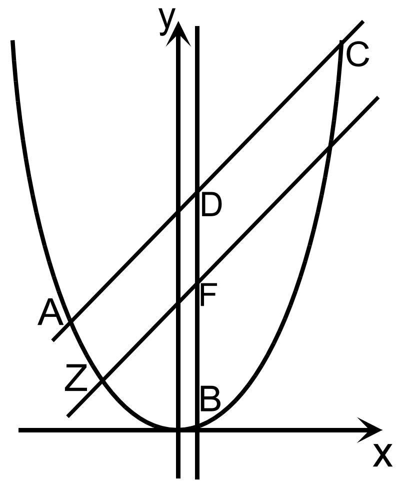
Obr. 45 *Archimedes (287 - 212 pr. Kr.)*

Veľmi známa je Archimedova kvadratúra paraboly. Archimedes využíva v nej nasledovnú vlastnosť paraboly (pozri aj obr. 46):

$$\frac{|BD|}{|BF|} = \frac{|AD|^2}{|ZF|^2}, \text{ pričom } D \text{ je stredom úsečky } AC. \tag{A.1}$$

Pokúsme sa tento vzťah dokázať pomocou analytickej geometrie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme umiestniť každú parabolu do súradnicového systému tak, aby pre jej všetky body $X[x, y]$ platilo $y = kx^2$, kde $k \in R^+$.

Obr.46



Zvoľme body A, C paraboly tak, že $A[-a, ka^2], C[c, kc^2]$, kde $a, c \in R$. Potom priamka AC je sečnicou paraboly. Súradnice ostatných bodov sú nasledovné:

$$D\left[\frac{c-a}{2}, k\frac{a^2+c^2}{2}\right], \qquad B\left[\frac{c-a}{2}, k\frac{(c-a)^2}{4}\right], \qquad Z\left[z, kz^2\right], \text{ pričom } a < z < c.$$

Priamky AC, ZF sú navzájom rovnobežné a hodnota ich smernice je

platí: $k\dfrac{c^2-a^2}{c+a} = k(c-a)$. Rovnica priamky ZF je $y = k(c-a).x + kz^2 - kz(c-a)$.

Pomocou nej určíme súradnice bodu F $\left[\dfrac{c-a}{2}, k\dfrac{(c-a)^2}{2} + kz^2 - kz(c-a)\right]$. Platí

$$|BD| = k\frac{a^2+c^2}{2} - k\frac{(c-a)^2}{4} = k\frac{2c^2+2a^2-c^2+2ac-a^2}{4} = k\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

$$|BF| = k\frac{(c-a)^2}{2} + kz^2 - kz(c-a) - k\frac{(c-a)^2}{4} = k\frac{(c-a)^2}{4} + kz^2 - kz(c-a) =$$

$$= k\left(\frac{(c-a)^2}{4} + z^2 - z(c-a)\right)$$

$$|AD|^2 = \left(\frac{c-a}{2} + a\right)^2 + \left(k\frac{a^2+c^2}{2} - ka^2\right)^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(k\frac{c^2-a^2}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 . \left(1 + k^2(c-a)^2\right)$$

$$|ZF|^2 = \left(\frac{c-a}{2} - z\right)^2 + \left(k\frac{(c-a)^2}{2} - kz(c-a)\right)^2 =$$

$$= \frac{(c-a)^2}{4} - z(c-a) + z^2 + k^2\frac{(c-a)^4}{4} - k^2 z(c-a).(c-a)^2 + k^2 z^2 (c-a)^2 =$$

$$= z^2\left(1+k^2(c-a)^2\right) - z(c-a)\left(1+k^2(c-a)^2\right) + \left(\frac{c+a}{2}\right)^2\left(1+k^2(c-a)^2\right) =$$

$$= \left(1+k^2(c-a)^2\right).\left[\left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + z^2 - z.(c-a)\right]$$

Teraz dosaďme

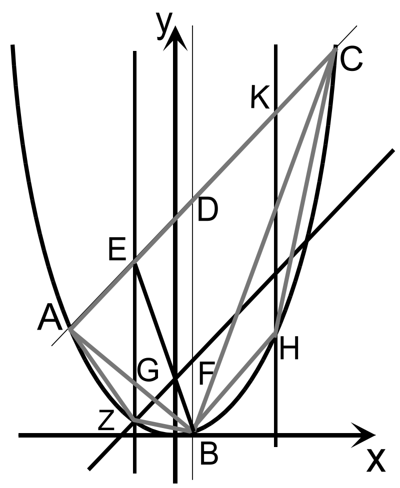
$$\frac{|BD|}{|BF|} = \frac{k\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{k\left(\frac{(c-a)^2}{4} + z^2 - z(c-a)\right)} = \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{\left(\frac{(c-a)^2}{4} + z^2 - z(c-a)\right)}$$

$$\frac{|AD|^2}{|ZF|^2} = \frac{\left(\frac{c+a}{2}\right)^2.(1+k^2(c-a)^2)}{(1+k^2(c-a)^2).\left[\left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + z^2 - z.(c-a)\right]} =$$

$$= \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{\left(\frac{(c-a)^2}{4} + z^2 - z(c-a)\right)} = \frac{|BD|}{|BF|}$$

Ďalej postupoval Archimedes podľa Eudoxovej exhaustačnej metódy. Zo vzťahu A.1 dostaneme, že $|BD| = 4.|BF|$.

Obr. 47



Potom $\frac{1}{4}|BD| = |BF|$, z čoho $\frac{3}{4}|BD| = |FD| = |EZ|$, a teda

$$|BF| = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}|BD| = \frac{1}{3}|EZ|.$$

Okrem toho $|BD| = \left(1+\frac{1}{3}\right).|EZ| = \frac{4}{3}|EZ|$. Podobne platí $|BD| = 2|EG|$. Odtiaľ

$|EG| = \frac{2}{3}|EZ|$ a súčasne $|GZ| = |EZ| - |EG| = \frac{1}{3}|EZ|$. Teda $|EG| = 2|GZ|$.

Trojuholníky AEG a AGZ majú spoločnú výšku a preto pre ich obsahy platí $S_{\triangle AEG} =$

$= 2S_{\triangle AGZ}$. Podobne aj $S_{\triangle GBE} = 2S_{\triangle ZGB}$, a tak $S_{\triangle AEB} = 2S_{\triangle AZB}$. Aj trojuholníky AEB a ACB majú spoločnú výšku a $|AC| = 4.|AE|$, preto pre ich obsahy platí $S_{\triangle ACB} = 4S_{\triangle AEB} = 8S_{\triangle AZB}$. Podobne platí $S_{\triangle ACB} = 8S_{\triangle BHC}$. Čiže

$$S_{\triangle AZB} + S_{\triangle BHC} = \frac{1}{4}S_{\triangle ACB}.$$

Tak ako sme mohli do úseku paraboly ACB s trojuholníkom ACB vpísať trojuholníky AZB a BHC, tak takéto trojuholníky môžeme vpísať do úseku paraboly AZB s trojuholníkom AZB a do úseku BHC s trojuholníkom BHC, a takto možno postupovať do nekonečna. Vďaka všeobecnej platnosti vzťahu A.1 je celkový obsah všetkých nových vpísaných trojuholníkov štvrtinou z celkového obsahu predchádzajúcej skupiny trojuholníkov. Obsah úseku paraboly ACB je

$$S = S_{\triangle ACB}.\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\right).$$

Archimedes takto stál pred problémom, ako určiť súčet $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots$

Členy tohto nekonečného radu chápal ako dĺžky úsečiek a postupoval nasledovne:

Nech a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sú členy geometrického radu s kvocientom $\frac{1}{4}$, t.j.

$a_2 = \frac{1}{4}a_1$, $a_3 = \frac{1}{4}a_2$, $a_4 = \frac{1}{4}a_3$, $a_5 = \frac{1}{4}a_4$. Ďalej nech $b_2 = \frac{1}{3}a_2$, $b_3 = \frac{1}{3}a_3$,

$b_4 = \frac{1}{3}a_4$, $b_5 = \frac{1}{3}a_5$. Potom platí $b_2 + a_2 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{12}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{3}a_1$.

Podobne aj $b_3 + a_3 = \frac{1}{3}a_1$, $b_4 + a_4 = \frac{1}{3}a_3$, $b_5 + a_5 = \frac{1}{3}a_4$.

Sčítaním horeuvedených rovností dostaneme

$$\begin{aligned}
a_2+a_3+a_4+a_5+b_2+b_3+b_4+b_5 &= \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3+a_4)\\
a_2+a_3+a_4+a_5+\underbrace{b_2+b_3+b_4}_{\frac{1}{3}(a_2+a_3+a_4)}+\frac{1}{3}a_5 &= \frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}.(a_2+a_3+a_4)\\
a_2+a_3+a_4+a_5+\frac{1}{3}a_5 &= \frac{1}{3}a_1\\
\underbrace{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}_{s_5}+\frac{1}{3}a_5 &= \frac{4}{3}a_1,\ \text{z čoho } s_5+\frac{1}{3}a_5=\frac{4}{3}a_1.
\end{aligned}$$

Podobne by sa dalo dokázať, že

$$s_n + \frac{1}{3}a_n = \frac{4}{3}a_1. \tag{A.2}$$

Členmi tohto geometrického radu v našom prípade sú obsahy trojuholníkov vpisovaných do úseku paraboly ACB a $a_1 = S_{\triangle ACB}$. Keďže sa obsahy týchto vpisovaných trojuholníkov zmenšujú a približujú k nule, tak možno predpokladať podľa vzťahu A.2, že obsah úseku paraboly ACB $S = \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$. Archimedes tento vzťah dokázal tak, že obsah S nemôže byť ani väčší a ani menší ako $\frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$.

Predpokladajme najprv, že $S > \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$ a označme $\varepsilon = S - \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$. Vpisujme do úseku paraboly trojuholníky. Obsah zvyšnej časti $S - s_n$ paraboly pre isté n je menšie ako ε. Odtiaľ dostaneme, že $S - \varepsilon < s_n$. Potom $S - (S - \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}) < s_n$, z čoho $\frac{4}{3}S_{\triangle ACB} < s_n$. Podľa vzťahu A.2 by však platilo $s_n + \frac{1}{3}a_n < s_n$, a tak $a_n < 0$, čo nie je možné, lebo a_n je obsah nejakej skupiny trojuholníkov, ktorý nemôže byť záporný.

Predpokladajme teraz, že $S < \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$ a označme $\varepsilon = \frac{4}{3}S_{\triangle ACB} - S$. Využime znova vzťah A.2. Nech a_m je prvý člen geometrickej postupnosti, pre ktorý $0 < a_m < < \varepsilon$. Potom, ale platí $s_m + \frac{1}{3}a_m = \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$, a teda $a_m > \frac{1}{3}a_m = \frac{4}{3}S_{\triangle ACB} - s_m$. Keďže $0 < a_m < \varepsilon$, tak $\frac{4}{3}S_{\triangle ACB} - s_m < a_m < \varepsilon = \frac{4}{3}S_{\triangle ACB} - S$.

Potom $\frac{4}{3}S_{\triangle ACB} - s_m < \frac{4}{3}S_{\triangle ACB} - S$, takže $s_m > S$. To ale nie je možné, lebo trojuholníky sú do úseku paraboly vpisované. Ak tak uvážime, že nemôže platiť $S > \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$ a ani $S < \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$, musí platiť $S = \frac{4}{3}S_{\triangle ACB}$.

Domnievame sa, že uvedený príklad môže poslúžiť ako námet zaujímavým spôsobom predstaviť žiakom aj náročnú problematiku. Týmto spôsobom je možné realizovať propedeutiku aj iných tematických celkov. Okrem propedeutickej funkcie má tento príklad aj ďalšie funkcie. Žiaci si môžu zopakovať viaceré tematické celky s ktorými sa už počas štúdia stretli (funkcie a ich grafy, analytická geometria, planimetria, algebrické výrazy). Ďalším aspektom je to, že vo vyučovacom procese ešte stále nie je docenená paralela fylogenézy a ontogenézy matematického myslenia.

Cantor uvádza v [16], že Archimedes pri hľadaní obsahu a obvodu kruhu používal veľké množstvo približných hodnôt odmocnín. Napríklad hodnotu $\sqrt{3}$ odhadol

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Ak hodnoty zlomkov zaokrúhlime na 6 desatinných miest, dostaneme

$$1,732051 > \sqrt{3} > 1,732026.$$

Volkert v [101] sa domnieva, že v tom čase bol už známy Euklidov algoritmus a grécki matematici sa odmocniny pokúšali vyjadriť v tvare reťazcových zlomkov. Ukážeme si to na príklade $\sqrt{2}$. Vráťme sa k dôkazu nesúmerateľnosti uhlopriečky a strany štvorca, všimnime si znova obrázok 44.

Označme $|A_iB_i| = a_i$, pričom $i \in N$ a $|AB| = a_0 = 1$. Potom $|BD| = \sqrt{2}$ a zároveň $|BD| = |BC_1| + |C_1D|$, odkiaľ $\sqrt{2} = 1 + a_1$. Ďalej $|B_1D| = |B_1C_2| + |C_2D| = = |AD| - |AB_1|$, čo možno zapísať ako $1 - a_1 = a_1 + a_2$, a teda $a_0 = 1 = 2a_1 + a_2$. Pokračujme ďalej: $|B_2D| = |B_2C_3| + |C_3D| = |A_1D| - |A_1B_2|$, čo možno zapísať ako

$a_1 - a_2 = a_2 + a_3$, čiže $a_1 = 2a_2 + a_3$. Vo všeobecnosti pre každé prirodzené číslo a nulu platí: $a_n = 2a_{n+1} + a_{n+2}$. Zapíšme si známe rovnice pod seba a upravme ich:

$$\sqrt{2} = 1 + a_1$$

$1 = 2a_1 + a_2$, z čoho $\dfrac{1-a_2}{a_1} = 2$, a tak $\dfrac{1}{a_1} = 2 + \dfrac{a_2}{a_1}$.

$a_1 = 2a_2 + a_3$, potom $\dfrac{a_1 - a_3}{a_2} = 2$ a dostaneme $\dfrac{a_1}{a_2} = 2 + \dfrac{a_3}{a_2}$.

$a_2 = 2a_3 + a_4$, z čoho $\dfrac{a_2 - a_4}{a_3} = 2$, takže $\dfrac{a_2}{a_3} = 2 + \dfrac{a_4}{a_3}$.

$$\vdots$$

$a_n = 2a_{n+1} + a_{n+2}$, potom $\dfrac{a_n - a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2$, takže $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2 + \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

$$\vdots$$

Teraz postupne dosadzujme:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} = 2 + \frac{a_2}{a_1} &= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{a_1}{a_2}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{a_3}{a_2}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{a_4}{a_3}}} = \\ &= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{a_5}{a_4}}}} = \ldots = \\ &= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots \cfrac{1}{2 + \cfrac{a_{n+1}}{a_n}}}} \quad \text{a nakoniec}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{a_1} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}, \text{ takže } a_1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}.$$

Takto sme získali tvar reťazcového zlomku pre číslo $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + a_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}.$$

Tento reťazcový zlomok môžme chápať ako postupnosť približných hodnôt čísla $\sqrt{2}$. Konkrétne:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}\doteq 1,413793,$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{12}{29}}=1+\frac{29}{70}=\frac{99}{70}\doteq 1,414286.$$

Dostávame odhad $\frac{99}{70}>\sqrt{2}>\frac{41}{29}$. Z pohľadu školskej matematiky je dôležité uviesť, že tento reťazcový zlomok možno zapísať ako postupnosť danú rekurentným vzťahom

$$a_1=\frac{3}{2},\; a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n} \text{ pre } \forall n\in N.$$

A.2 Stredoveká Európa

S prácami gréckych matematikov sa zoznámila stredoveká Európa v 10. a 11. storočí prostredníctvom arabských prekladov prác Archimeda, Euklida, Aristotela. Tieto práce boli neskôr využívané hlavne v Rímskej ríši a v Arabskom svete, odkiaľ sa v priebehu 10. a 11. storočia dostali aj do stredovekej Európy. *Richard Swineshead* v 14. storočí podľa Trojovského [95] sa zaoberal rovnomerne zrýchleným pohybom.

Riešil aj takúto úlohu: Pri pohybe sa v časových intervaloch $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots$ (v tvare geometrickej postupnosti) sa postupne rýchlosť zväčšuje podľa nekonečnej aritmetickej postupnosti 1, 2, 3,... Slovne dokazuje, že stredná rýchlosť je 2. V našom prípade pre strednú rýchlosť platí

$$v_s=\frac{v_1t_1+v_2t_2+\ldots+v_nt_n+\ldots}{t_1+t_2+\ldots+t_n+\ldots}=\frac{\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2^2}.2+\ldots+\frac{1}{2^n}.n+\ldots}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2^2}.2+\ldots+\frac{1}{2^n}.n+\ldots$$

Swineshead ďalej vychádza z poznatkov o súčte nekonečného geometrického radu:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$

Po vertikálnom sčítaní týchto radov dostaneme

$$\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2^2}.2+\ldots+\frac{1}{2^n}.n+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2.$$

Nové impulzy priniesol aj *Nicola Oresme* (1320-1382).

Obr. 48 *Nicola Oresme (1320-1382)*

Podľa Kvasza [61] Oresme verbálne dokázal, že rad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

je divergentný. Využíva pri tom myšlienku, že

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{2},\ldots$$

Edwards [22] dodáva, že to bol prvý príklad divergentného nekonečného radu, ktorého členy konvergujú k nule.

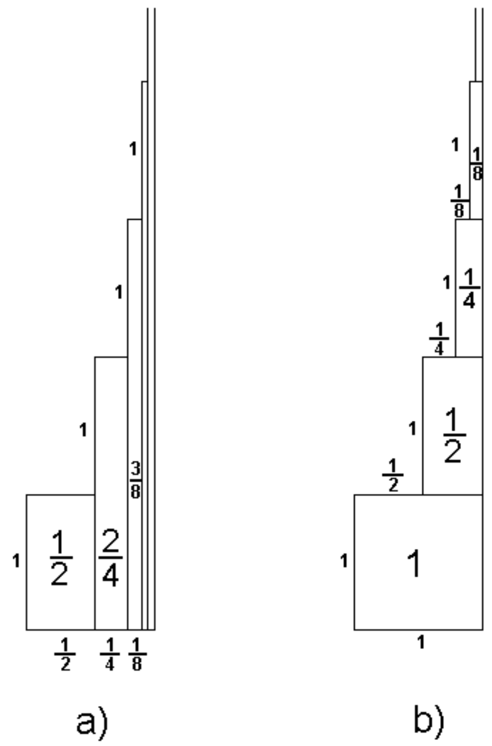
Pri dôkaze súčtu Swinesheadovho radu použil Oresme aj geometrickú metódu (Edwards [22] , Kluvánek [54])

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots=2.$$

Členy tohto radu modeloval pomocou obsahov obdĺžnika (pozri obr. 49). Ak zmeníme vnútorné členenie nekonečného útvaru, dostaneme

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+\ldots=2.$$

Obr. 49



Okrem toho Edwards [22] uvádza, že v traktáte okolo roku 1350 Oresme dokázal, že

$$\frac{a}{k} + \frac{a}{k}.\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \ldots + \frac{a}{k}.\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a}{k}.\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i = a \qquad \text{(A.3)}$$

Oresme postupoval tak, že vo vzťahu A.3 postupne odčitoval najprv prvý člen radu, potom druhý člen radu atď. Teda

$$\begin{aligned}
\frac{a}{k} + \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \ldots + \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n + \ldots &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i = a, \\
\frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \ldots + \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n + \ldots &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{k}.\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i = a - \frac{a}{k}, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i &= a\left(1 - \frac{1}{k}\right). \\
\text{Ďalej } \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i &= a\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right). \\
\text{Tak zovšeobecníme} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i &= a\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^i = a\left(1-\frac{1}{k}\right)^n.$$

To však znamená, že $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^i + a\left(1-\frac{1}{k}\right)^n = a$. Ak n pôjde do nekonečna, tak člen $a\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$ pôjde k nule, a tak $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a}{k}.\left(1-\frac{1}{k}\right)^i = a$. Tento vzťah je všeobecnejší ako Archimedov $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{4}{3}$. Archimedov vzťah je jeho špeciálnym prípadom pre $a = k = \frac{4}{3}$.

A.3 Obdobie renesancie

Francois Viéte (1540-1603) objavil podľa Hischera [43] v roku 1579 vzťah

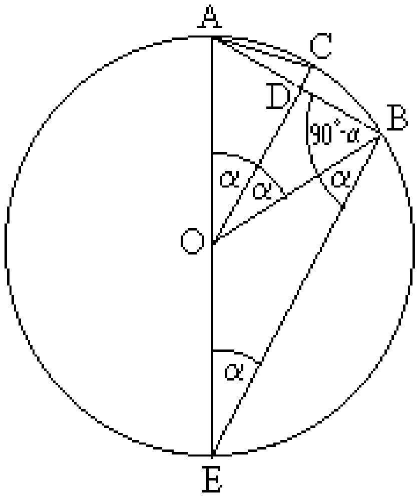
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Obr. 50 *Francois Viéte(1540-1603)*

Podľa Cantora [17] to bol prvý nekonečný súčin, ktorý bol konvergentný. Viete uvažoval takto:

Nech AB je strana pravidelného n-uholníka vpísaného do kružnice, ktorého obsah je S_n (pozri obr. 51). AE nech je priemer kružnice a BE nech je druhá odvesna trojuholníka ABE. Označme $|BE| = \alpha_n$. Nech AC je strana pravidelného $2n$-uholníka, ktoreho obsah je S_{2n}. Polomer kružnice označme r. Nech $|\measuredangle AOC| = \alpha$. Potom $|\measuredangle COB| = \alpha$ a $|\measuredangle OBA| = 90° - \alpha$.Keďže uhol ABE je pravý, tak $|\measuredangle OBE| = \alpha$. Trojuholník EBO je rovnoramenný, preto aj $|\measuredangle AEB| = \alpha$. Ak D je priesečník úsečiek AB a OC, tak $\triangle ADO \sim \triangle ABE$ (pozri obr. 51).

Obr. 51



Preto $|BE| : |AE| = |OD| : |OA|$ alebo $\dfrac{\alpha_n}{2r} = \dfrac{|OD|}{r}$. Ďalej platí

$S_{\triangle OAC} = \dfrac{S_{2n}}{2n}$, a tak $S_{\triangle ODA} = \dfrac{1}{2} S_{\triangle OBA} = \dfrac{1}{2}\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{S_n}{2n}$. Vyjadrime teraz

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{S_{\triangle ODA}}{S_{\triangle OAC}} = \frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|OD|}{r} = \frac{\alpha_n}{2r}.$$

Podobne by sme dostali, že $\dfrac{S_{2n}}{S_{4n}} = \dfrac{\alpha_{2n}}{2r}, \dfrac{S_{4n}}{S_{8n}} = \dfrac{\alpha_{4n}}{2r}, \ldots$ Potom platí

$$\frac{S_n}{S_{8n}} = \frac{S_n}{S_{2n}}\frac{S_{2n}}{S_{4n}}\frac{S_{4n}}{S_{8n}} = \frac{\alpha_n}{2r}\frac{\alpha_{2n}}{2r}\frac{\alpha_{4n}}{2r} = \frac{\alpha_n.\alpha_{2n}.\alpha_{4n}}{2^3.r^3}$$ a po zovšeobecnení

$$\frac{S_n}{S_{2^k.n}} = \frac{\alpha_n.\alpha_{2n}.\alpha_{4n}\ldots\alpha_{2^{k-1}.n}}{2^k.r^k}.$$

Využime tento vzťah pre n=4. S_4 je obsah štvorca vpísaného do kruhu s uhlopriečkou $2r$, preto $S_4 = 2r^2$. Takže platí

$$\frac{S_4}{S_{2^k.4}} = \frac{\alpha_4.\alpha_8.\alpha_{16}\ldots\alpha_{2^{k-1}.4}}{2^k.r^k},$$ z čoho $\dfrac{2r^2}{S_{2^{k+2}}} = \dfrac{\alpha_4.\alpha_8.\alpha_{16}\ldots\alpha_{2^{k+1}}}{2^k.r^k}$. Vyjadrime

$$S_{2^{k+2}} = \frac{2^k.r^k.2r^2}{\alpha_4.\alpha_8.\alpha_{16}\ldots\alpha_{2^{k+1}}} = 2r^2\frac{2r}{\alpha_4}\frac{2r}{\alpha_8}\ldots\frac{2r}{\alpha_{2^{k+1}}}.$$ Pre $k \to \infty$ dostaneme pre $S_{2^{k+2}}$ obsah kruhu.

To znamená, že by platilo $\pi.r^2 = 2r^2\dfrac{2r}{\alpha_4}\dfrac{2r}{\alpha_8}\ldots\dfrac{2r}{\alpha_{2^k}}\ldots$, a potom $\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\alpha_4}{2r}\dfrac{\alpha_8}{2r}\ldots\dfrac{2r}{\alpha_{2^k}}\ldots$

Vzhľadom na to, že $\dfrac{\alpha_n}{2r} = \cos\alpha = \cos\dfrac{360^\circ}{2n}$, tak $\dfrac{2}{\pi} = \cos\dfrac{90^\circ}{2}.\cos\dfrac{90^\circ}{4}.\cos\dfrac{90^\circ}{8}\ldots$

Ak uvážime, že $\cos\dfrac{90^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ a pre $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ platí $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} =$

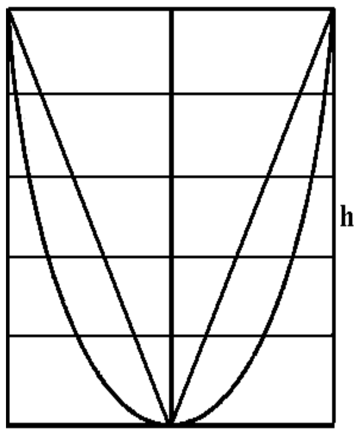
$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}$, tak ľahko nahliadneme, že

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}.\dots$$

Podľa Hischera [43] v propedeutike limitných procesov zohral významnú úlohu aj taliansky matematik *Luca Valerio* (1552-1618), ktorý zaujímavým spôsobom vypočítal objem rotačného paraboloidu s polomerom r a výškou $h = ar^2$.

V rovine nech je daný rovnoramenný trojuholník so základňou $2r$ a výškou h.

Obr. 52



Rozdeľme výšku h v trojuholníku a v paraboloide na n rovnakých častí. Paraboloidu môžeme priradiť n opísaných valcov s objemami $p_1, p_2, \dots, p_n$ a trojuholníku n opísaných obdĺžnikov s obsahmi $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Nech $P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$ a nech $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$. Ak R_k je polomer podstavy k-teho opísaného valca, tak $k\frac{h}{n} = aR_k^2$. Keďže $h = ar^2$, potom $R_k^2 = \frac{k}{n}r^2$. Okrem toho $R_n = r$. Ak $2r_k$ je dlhšia zo strán k-teho opísaného obdĺžnika, potom $r_n = r$ a $r_k = k\frac{r}{n}$.

Preto $\frac{p_k}{p_n} = \frac{\pi R_k^2 \frac{h}{n}}{\pi R_n^2 \frac{h}{n}} = \frac{R_k^2}{R_n^2} = \frac{\frac{k}{n}r^2}{r^2} = \frac{k}{n}$ a tiež $\frac{d_k}{d_n} = \frac{r_k}{r} = \frac{k}{n}$. Využitím čoho máme

$\frac{p_k}{p_n} = \frac{d_k}{d_n}$.

Nech teraz V_z je objem valca opísaného paraboloidu (s polomerom podstavy r a výškou h) a A_r je obsah obdĺžnika vpísaného trojuholníku (so stranami $2r$, h). Platí $V_z = np_n$ a $A_r = nd_n$. Potom

$$\frac{P_n}{V_z} = \frac{1}{V_z}\sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{d_n} = \frac{1}{A_r}\sum_{k=1}^{n} d_k = \frac{D_n}{A_r}.$$

Ak by sme išli s n do nekonečna, potom P_n by sa blížilo k objemu paraboloidu V_p a D_n k obsahu trojuholníka A_t. Preto

$$\frac{V_p}{V_z} = \frac{A_t}{A_r} = \frac{1}{2}.$$

Ak uvážime, že $V_z = \pi r^2 h$, tak $V_p = \frac{1}{2}\pi r^2 h$.

Podobným spôsobom spočítal Valério aj objem polgule (ako dvojnásobok objemu vpísaného kužeľa). Z jeho prác vo svojich výpočtoch objemov čerpal aj *Bonaventura Cavalieri* (1591-1647).

Podľa Edwardsa[22], Kvasza[61] a Hischera[43] ďalším významným úspechom v rozvoji limitných procesov v 17. storočí bol výpočet integrálu $\int_0^1 x^k\,dx$ pomocou limity súčtu integrálnych súčtov. *John Walis* (1616-1703) ho predstavil v diele *Arithmetica infinitorum* (1655). Najprv si vzal funkciu $y = x^k$ pre prirodzené čísla k. Interval $\langle 0,1\rangle$ rozdelil na n rovnakých častí. Potom počítal v zmysle dnešnej terminológie horný integrálny súčet zodpovedajúci tomuto deleniu intervalu $\langle 0,1\rangle$:

$$S = \frac{1}{n}.\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{2}{n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^k\right) = \frac{1}{n}\frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^k}$$

Z toho vyplýva, že $\int_0^1 x^k\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=1}^{n} j^k$. Odkiaľ pre $k=1$ platí

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \text{ a pre k = 2}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Walis zovšeobecnil uvedený vzťah pre všetky prirodzené čísla k vzťahom

$$\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}. \tag{A.4}$$

Potom použil inverznú funkciu $y = x^{\frac{1}{k}}$ a dostal $\int_0^1 x^k\,dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{k}}\,dx = 1$, odtiaľ $\int_0^1 x^{\frac{1}{k}}\,dx = 1 - \int_0^1 x^k\,dx = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$, čiže $\int_0^1 x^{\frac{1}{k}}\,dx = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$.

Neskôr *Pierre Fermat* (1601-1665) a *Evangelista Toriccelli* (1601-1648) dokázali vzťah A.4 aj pre $k \in Q^+$.

Podľa Hofmanna [45] *Gotfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) zaujímavo počítal nekonečné súčty prevrátených hodnôt figurálnych čísel. Ako príklad si ukážeme súčet nekonečného radu prevrátených hodnôt trojuholníkových čísel:

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots \tag{A.5}$$

Vynásobením tejto rovnosti číslom $\frac{1}{2}$ dostaneme

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} + \dots$$

Členy tohto radu sú diferenciami susedných členov harmonického radu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \text{ lebo } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$= \frac{1}{n.(n+1)}, \dots$ Potom označil $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, odkiaľ

$$A - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots, \text{ teda}$$

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots, \text{ čiže}$$

$$A - 1 + \frac{1}{2}s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots.$$

Dostaneme $A - 1 + \frac{1}{2}s = A$, teda $s = 2$. Dnes by sme nemohli s takýmto výpočtom súhlasiť, lebo nekonečný harmonický rad nemá súčet, a teda číslo A neexistuje. Je zaujímavé, že napriek tomuto nedostatku získaný výsledok je správny. Ak totiž použijeme len konečný počet členov harmonického radu, môžeme postupovať nasledovne:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$A_n - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} + \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$A_n - 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \text{ a } s_n = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Ak $n \to \infty$, tak $s_n \to 2$. Tento výpočet ukazuje, že Leibniz mal skôr na mysli tento postup. Chýbala mu však skúsenosť s týmito algebrickými formulami. Podobné situácie nastávajú aj v súčasnosti v súvislosti s vznikom hypotéz a paradoxov, ba i pri riešení úloh olympiád či úloh z aplikačne praxe.

Isaac Newton (1642 - 1727) vo svojej známej knihe *Philosophiae naturalis principia mathematica* podľa Hischer/Scheid [43] a Kvasza [61] v roku 1687 prvý krát pokúša vysvetliť pojem limity: *„Posledným pomerom dvoch miznúcich veličín treba rozumieť pomer týchto veličín nie predtým, ako zmiznú, ani potom, ale s ktorým miznú... Tieto posledné pomery s ktorými veličiny miznú, nie sú pomery posledných hodnôt veličín, ale limity ku ktorým pomery veličín, neobmedzene klesajúcich, vždy konvergujú; a ku ktorým sa priblížia bližšie než každý daný rozdiel, ale za ktorý nikdy neprejdú ani ho v skutočnosti nedosiahnu, kým klesajú in infinitum".* Tu vidieť, že pojem limity sa tu spomína v súvislosti s dnešným pojmom derivácie funkcie.

Číselnými radmi podľa Trojovského [96] sa zaoberali aj Bernoulliovci. *Jacob I. Bernoulli* (1654 - 1705) v rokoch 1689 až 1704 vydal 5 prác pod názvom *Aritmetické vety o nekonečných radoch a ich konečných súčtoch.* Spomína zaujímavý dôkaz divergencie harmonického radu.

Použil súčet n^2-nčlenov, ktoré nasledujú za členom $\dfrac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2} &> \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{n^2-n \text{ krát}}\\
\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2} &> \frac{n^2-n}{n^2}\\
\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2} &> 1-\frac{1}{n}\\
\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2} &> 1
\end{aligned}$$

Jacob Bernoulli interpretuje tento výsledok takto: *„Môžeme zoskupiť členy radu do skupín tak, že každá skupina má súčet väčší ako 1. Pretože takto vytvorených skupín je nekonečne mnoho, je aj súčet vždy väčší ako každé číslo, a teda je nekonečný."* Divergenciu harmonického radu prakticky dokázal použitím dnešnej Cauchy-Bolzanovej podmienky konvergencie číselného radu.

Ďalej Trojovský v [95] uvádza, že Jacob Bernoulli ako prvý použil pre dôkaz divergencie radu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

majorantné kritérium, pretože argumentuje tým, že každý člen tohto radu je väčší ako príslušný člen harmonického radu, a preto musí mať nekonečný súčet.

V roku 1703 mních *Guido Grandi* v diele *Kvadratúra kruhu a hyperboly* na základe dosadenia $q = 1$ do vzťahu $1-\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}-\dfrac{1}{q^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{q^n}+\ldots=\dfrac{1}{1+q}$ tvrdil, že

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Tento rad vyvolal polemiku medzi viacerými významnými vtedajšími matematikmi. Je zaujímavé, že na Grandiho stranu sa pridal aj Leibniz, ktorý v roku 1712 v *Acta Eruditorum* argumentuje takto: „V postupnosti čiastočných súčtov radu párny člen je 0, nepárny 1 a takto to ide až do nekonečna, teda súčtom radu je priemerná hodnota

$$\frac{(0+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

" Leibnizovo riešenie prijali dokonca aj takí významní matematici ako boli *Johann, Jacob a Daniel Bernoulliovci*, *Joseph Luis Lagrange* (1736-1813), *Leonhard Euler* (1707-1783). Proti Leibnizovi sa postavili najmä *Pierre de Varignon* (1654 - 1722) a *Mikuláš I. Bernoulli* (1687 - 1759). Tento spor inicioval v matematike hľadanie presnejšieho definovania pojmov konvergentný a divergentný nekonečný rad, ako aj bol jedným z podnetov, ktoré viedli k vybudovaniu „betónového $\varepsilon - \delta$ základu" limitných procesov. V tejto kapitole sme sa okrajovo dotkli aj problému predĺženia identity. Tento princíp by sa metodicky mohol využiť aj pri iných príležitostiach, napríklad pri definícii niektorých elementárnych funkcií v iracionálnych číslach.

A.4 Od Eulera k „betónovému základu $\varepsilon - \delta$"

Leonhard Euler publikoval viaceré svoje myšlienky o limitných procesoch v známej knihe *Introductio in Analysin infinitorum.*

Obr. 53 *Leonhard Euler (1707-1783)*

V 4. kapitole vyjadruje racionálne lomené funkcie pomocou nekonečných radov. Funkciu $y = \frac{k}{c+dx}$vyjadruje takto: Nech $\frac{k}{c+dx} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, pričom $a_i, i \in N_0$ sú neznáme reálne koeficienty. Potom
$k = (c + dx).(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)$
$k = ca_0 + (ca_1 + da_0)\,x + (ca_2 + da_1)\,x^2 + \ldots + (ca_n + da_{n-1})\,x^n + \ldots$
Porovnaním koeficientov na pravej a ľavej strane rovnice postupne dostaneme $k = ca_0$.

Odtiaľ $a_0 = \dfrac{k}{c}$. Ďalej $0 = ca_1 + da_0$, z čoho $0 = ca_1 + d\dfrac{k}{c}$ a nakoniec $a_1 = -d\dfrac{k}{c^2}$.

$$0 = ca_2 + da_1, \text{ z čoho } 0 = ca_2 + d\left(-d\frac{k}{c^2}\right) \text{ a nakoniec } a_2 = \frac{k}{c}\left(-\frac{d}{c}\right)^2.$$

$$0 = ca_3 + da_2, \text{ a preto } 0 = ca_3 + d\frac{k}{c}\left(\frac{d}{c}\right)^2, \text{ z čoho } a_3 = \frac{k}{c}\left(-\frac{d}{c}\right)^3.$$

Vo všeobecnosti platí $a_n = \frac{k}{c}\left(-\frac{d}{c}\right)^n$ pre $n \in N_0$. Takto Euler dostal vzťah

$$\frac{k}{c+dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{c}\left(-\frac{d}{c}\right)^n x^n.$$

V kapitole 6 o logaritmoch a hodnotách exponenciálnych funkcií využíva limitný proces na určenie pomerne presnej hodnoty čísla $\log 5$. Využíva pritom rekurentne definovanú postupnosť $a_1 = 1, a_2 = 10, a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}a_n}$. Táto postupnosť konverguje k číslu 5. Ak si vezmeme logaritmy členov tejto postupnosti dostaneme vzťahy:

$$\log a_1 = 0, \log a_2 = 1, \log a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\log a_{n-1} + \log a_n\right)$$

Takto získal číslo $\log 5 \doteq 0,6989700$. V 7. kapitole definuje číslo e, ktoré bolo nazvané jeho menom. Pri jeho definícii vychádza z faktu, že pre každé reálne číslo rôzne od nuly platí $a^0 = 1$. Ak číslo a je väčšie ako 1, potom pre $u > 0$, platí $a^u = 1 + v$, kde v je kladné reálne číslo. Nech teraz $v = ku$, kde k je konštanta závislá od a. Potom $a^u = 1 + ku$. Potom platí pre číslo N

$$a^{Nu} = (1+ku)^N = 1 + \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} ku + \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} k^2u^2 + \begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix} k^3u^3 +$$

$$+ \ldots = 1 + \frac{N}{1}ku + \frac{N.(N-1)}{1.2}k^2u^2 + \frac{N.(N-1).(N-2}{1.2.3}k^3u^3 + \ldots$$

Nech teraz u je nekonečne malé číslo a nech $N = \frac{x}{u}$, t.j. $u = \frac{x}{N}$, kde x je reálne číslo. Potom N musí byť nekonečne veľké číslo, pričom platí

$$a^{N\frac{x}{N}} = a^x = 1 + \frac{N}{1}k\frac{x}{N} + \frac{N.(N-1)}{1.2}k^2\left(\frac{x}{N}\right)^2 + \frac{N.(N-1).(N-2}{1.2.3}k^3\left(\frac{x}{N}\right)^3 +$$

$$+ \ldots = 1 + kx + \frac{1.(N-1)}{1.2N}k^2x^2 + \frac{1.(N-1).(N-2}{1.2N.3N}k^3x^3 + \ldots$$

Tu Euler pripomína, že N je nekonečne veľké číslo, ale k je reálna konštanta, ktorá závisí od a. Potom argumentuje tým, že ak N je nekonečne veľké číslo, potom musí platiť

$$\frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \frac{N-3}{N} = \ldots = 1, \text{ a teda } \frac{N-1}{2N} = \frac{1}{2}, \frac{N-2}{3N} = \frac{1}{3}, \ldots$$

Tvrdí, že so zväčšujúcim sa N sa hodnoty zlomkov v posledných rovniciach na ľavej strane približujú k hodnotám zlomkov na pravej strane. Takto dostaneme, že

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1.2} + \frac{k^3x^3}{1.2.3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^jx^j}{j!}. \tag{A.6}$$

Tu Euler poznamenáva, že ak $x = 1$, dostávame vzťah medzi číslami a a k:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!}.$$

A teraz Euler definuje svoje číslo e ako hodnotu čísla a, pre ktorú platí $k = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Euler ho na tomto mieste aj vyčísľuje s presnosťou na 23 miest:

$$e = 2,71828182845904523536028\ldots$$

Ak by sme sa vrátili teraz k vzťahu A.6, tak pre $k = 1$ máme aj mocninový rad exponenciálnej funkcie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

V 18. kapitole sa zaoberá reťazcovými zlomkami. Nadväzuje tu istým spôsobom aj na matematiku v starovekom Grécku. Ak pre kladné reálne číslo x platí

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}, \text{ tak } x = \frac{1}{2 + x}.$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu $x^2 + 2x = 1$ a $x = \sqrt{2} - 1$. Tento príklad ďalej zovšeobecňuje. Ak by napríklad

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}, \text{ tak by } x = \frac{1}{a + x}, \text{ kde } a \text{ je kladná reálna konštanta a}$$

$$x^2 + ax = 1, \text{ z čoho } x = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}.$$

V tom čase boli tieto reťazcové zlomky vhodným nástrojom, ako vypočítať približné hodnoty odmocnín. Okrem toho hľadal spôsob ako previesť nekonečné rady do tvaru reťazcových zlomkov. Môžeme si uviesť ako príklad nekonečný rad zlomkov so striedavými znamienkami.

Nech $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \ldots$ a nech reťazcový zlomok tohto čísla má tvar

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\dots}}}}.$$

Čiastočné súčty nekonečného radu sú $\frac{1}{A}, \frac{B-A}{AB}, \frac{BC-AC+AB}{ABC}, \dots$ a jednotlivé

aproximácie reťazcového zlomku sú $\frac{1}{a}, \frac{b}{ab+\alpha}, \frac{bc+\beta}{abc+a\beta+\alpha c}, \dots$. Ak ich dáme do rovnosti, dostaneme systém rovníc, ktorého riešenie si ukážeme na prvých troch členoch čiastočných súčtov:

$$\begin{aligned} a &= A \\ b &= B-A \\ AB &= ab+\alpha \\ BC-AC+AB &= bc+\beta \\ ABC &= abc+a\beta+\alpha c \end{aligned}$$

Prvé dve rovnice sú priamo riešenia. Ak do tretej rovnice dosadíme za b dostaneme $A(B-A)+\alpha = AB$, potom $\alpha = A^2$. Piatu rovnicu môžeme upraviť: $ABC = a(bc+\beta)+\alpha c$. Keď do nej dosadíme zo štvrtej rovnice dostaneme $ABC = a(BC - AC+AB)+\alpha c$, z čoho $ABC = A^2(BC-AC+AB)+\alpha c$, a tak $c = C-B$. Teraz ak v štvrtej rovnici dosadíme za b aj c dostaneme: $BC-AC+AB = (B-A)(C-B)+\beta$, teda $\beta = B^2$. Euler tieto vzťahy zovšeobecnil takto:

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\dots = \cfrac{1}{A+\cfrac{A^2}{B-A+\cfrac{B^2}{C-B+\cfrac{C^2}{D-C+\dots}}}}.$$

Uviedol aj nasledovný zaujímavý príklad, v ktorom použil v tom čase známy Leibnizov rad:

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\dots}}}}.$$

V tomto čase používali matematici pomerne často pri riešení problémov limitných procesov pojem *„nekonečne malá veličina"*. Používanie tohto pojmu kritizoval *George Berkeley* (1685-1753). Okrem toho v tom čase boli nevyjasnené aj také pojmy ako konvergencia a divergencia radu, či spojitosť funkcie. Tieto námietky a nejasnosti podnietili matematikov k hľadaniu presnejšieho vymedzenia týchto pojmov.

Jean d´Alembert (1717-1783) podľa Volkerta [101] a Hischer/Scheid [43] definuje v roku 1760 v knihe *Encyclopédie* pojem limity takto:

„Hovoríme, že nejaká hodnota je limitou iných hodnôt, ak sa k týmto hodnotám približuje viac ako akékoľvek predpokladané ohraničenie. Pritom tieto hodnoty nemôžu limitu prekročiť, pričom rozdiel medzi takýmito hodnotami a ich limitou je absolútne nepodstatný...Presne vzaté, limita sa ani neprekrýva, ani sa nerovná k nej blížiacim sa hodnotám; ale tieto hodnoty sa k limite približujú viac a viac a líšia sa od nej ľubovoľne málo."

Z nášho hľadiska táto definícia nie je uspokojivá, ale je možné v nej vycítiť základné myšlienky exaktného pojmu limity. Z kontextu vyplýva, že d´Alembert mal na mysli hlavne konvergenciu monotónnych postupností.

Schwabik [82], Fulier [30] uvádza zaujímavú definíciu spojitej funkcie od *Bernarda Bolzana*(1781-1848) z knihy *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultät gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*z roku 1817:

To, že funkcia $f(x)$ sa pre všetky hodnoty x, ktoré ležia vo vnútri alebo zvonka určitých medzí, mení podľa zákona spojitosti rozumieme len to, že keď x je taká hodnota, tak rozdiel $f(x + a) - f(x)$ je možné urobiť menším než je každá daná veličina, keď a možno brať tak malé, ako len chceme.

Obr. 54 *Augustin Louis Cauchy (1789-1857)*

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)podľa Kvasza [61], Hischer/Scheid [43] presne vymedzil pojem limity v *Cours d'analyse* v roku 1821:

Keď sa hodnoty pripísané premennej veličine postupne blížia k určitej pevnej hodnote tak, že nakoniec sa od nej líšia o ľubovoľne malú hodnotu, potom hovoríme, že táto pevná hodnota je limitou postupnosti hodnôt premennej veličiny. Tak napríklad iracionálne číslo je limitou rôznych zlomkov, ktoré dávajú jeho lepšie a lepšie priblíženie.

Nekonečný číselný rad definuje podľa Volkerta [101] ako konvergentný, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov má vlastnú limitu. Ak ju nemá, definuje rad ako divergentný. Vyslovuje aj známu nutnú aj postačujúcu podmienku konvergencie radu. Upozorňuje na to, že aby číselný rad mohol byť konvergentný, tak nestačí, aby *sa členy radu a_n neohraničene zmenšovali s rastúcim n, ale aj rozličné sumy $a_n + a_{n+1}, a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \ldots$ nadobúdali konečné numerické hodnoty, ktoré sú menšie ako každé ohraničenie. Naopak, konvergencia radu je zaistená, ak všetky tieto podmienky sú splnené.* Dnes je táto podmineka známa ako *Cauchy-Bolzanova podmienka konvergencie.*

Okrem toho zaviedol pomocou limity aj deriváciu funkcie:

„Keď funkcia $y = f(x)$ ostáva spojitá medzi dvomi hranicami premennej x, a keď tejto premennej priradíme hodnotu medzi týmito hranicami, tak nekonečne malý prírastok pridaný k premennej spôsobí nekonečne malý prírastok samotnej funkcie ... Dva členy podielu prírastkov budú nekonečne malé veličiny. Avšak aj keď tieto dve veličiny sa neohraničene blížia k limite rovnej nule, ich podiel môže konvergovať k inej limite, či už kladnej alebo zápornej. Táto limita, ak existuje, má určitú hodnotu pre každú špeciálnu hodnotu x, ale mení sa s x. Tvar tejto novej funkcie, ktorá je limitou podielu bude závisieť od tvaru pôvodnej funkcie $y = f(x)$. Aby sme naznačili túto závislosť, nazveme novú funkciu derivovanou funkciou a označujeme ako y' alebo ako $f'(x)$."

Dnes známu „$\varepsilon - \delta$ techniku" použil Cauchy podľa Volkerta [101] a Poppa [72] prvýkrát vo svojej knihe *Resumé* v roku 1823 pri dôkaze vety o strednej hodnote funkcie. Použil nasledovnú definíciu:

Definícia 19. *Reálne číslo L sa nazýva limitou funkcie f v hromadnom bode a jej definičného oboru D, ak $\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists \delta \in R^+ \ \forall x \in D$ platí $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Z týchto definícií a postupov vidno, že spôsob vyučovania limitných procesov na našich gymnáziách vychádza z Cauchyho koncepcie matematickej analýzy. V Nemecku pri pojme limita funkcie je veľmi obľúbená aj Heineho definícia, ktorá využíva konvergentné číselné rady.

Definícia 20. *Reálne číslo L sa nazýva limitou funkcie f v hromadnom bode a jej definičného oboru D, ak pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \neq a$, ktorá konverguje k číslu a platí, že postupnosť $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$konverguje k číslu L.*

Vypracoval ju *Eduard Heine* (1821-1881), publikoval ju v roku 1872 v článku *Die Elemente der Funktionenlehre.*

Dodatok B

Učebný text

B.1 Limita postupnosti a súčet nekonečného radu

B.1.1 „Vystúpi korytnačka”

Všimnime si kalkulačku na nasledovnom probléme:
Príklad 1. Vydelil som 1 : 3 = 0,3333333 na kalkulačke. Potom som vynásobil a dostal som 0,3333333x3=0,9999999 Je 0,9999999=1? Keď x=1:3, je potom 3x=1? Čo vieme povedať o čísle x? Je 0,99999.....=1? Prečo? Existujú aj kalkulačky ktoré vypočítajú 0,3333333 x 3 = 1. Sú tieto kalkulačky lepšie?
Riešenie. Existujú dva typy kalkulačiek, jeden typ počíta tak, že vypočíta hodnotu čísla a ak je jeho desatinný rozvoj dlhší ako počet miest na displeji, tak prekračujúcu časť jednoducho „odreže”. Druhý typ (najmä vedecké kalkulačky) počíta niekoľko miest aj „za displejom” kalkulačky, pričom podľa nich zaokrúhľuje. Prvý typ kalkulačiek ukazuje v spomínanom príklade 0,9999999 a druhý typ 1. Určite si pamätáme, že 5342 = 5. 1000 + 3. 100 + 4. 10 + 2. Rozložme aj číslo 0,99999.... $= 0,\overline{9}$ v desiatkovej sústave.

$$0,\overline{9} = 9.0,1 + 9.0,01 + 9.0,001 + \ldots = 9.\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) = 9.\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i$$

Sú čísla $0,\overline{9}$ a 1 rovnaké alebo rôzne? K riešeniu tejto úlohy nám pomôže nasledujúci príklad.

Známy grécky filozof *Zenón* (496 - 429 pr. Kr.) riešil takýto problém:
Príklad 2. Achilles, hrdina trójskej vojny, ktorý mal povesť rýchleho bežca a korytnačka bežali spolu preteky. Achilles dal korytnačke veľkodušne náskok jedného kola. Achilles bežal 10 krát väčšou rýchlosťou. Zenón uvažoval ďalej takto: Keď Achilles prebehol jedno kolo, korytnačka prešla desatinu kola, keď Achilles prebehol tú desatinu, korytnačka sa posunula o stotinu kola ďalej atď. Na základe toho Zenón usúdil, že Achilles korytnačku nikdy nedobehne. Mal pravdu?
Riešenie. Predpokladajme, že sa Achilles a korytnačka pohybovali stálou rýchlosťou rovnakým smerom. Achilles dal korytnačke náskok 100 metrov a keďže korytnačka je 10 krát pomalšia, tak $v_k = 0,1v_a$.

Ak Achilles prešiel 100 metrov, tak korytnačka prešla desatinu tejto vzdialenosti, čiže 10 metrov, ak Achilles prešiel ďalších 10 metrov, tak krytnačka prešla 1 meter atď.

Ak chce Achilles dobehnúť korytnačku, musí prejsť vzdialenosť:

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 111 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i .$$

Táto vzdialenosť je vlastne súčtom všetkých členov nekonečnej geometrickej postupnosti, ktorej prvý člen je 100 a kvocient $\frac{1}{10}$. Zenón si nevedel predstaviť, žeby takýto súčet mohol byť konečné číslo.

Z poznania riešení úloh o pohybe vieme ľahko nájsť riešenie aj tohto príkadu. Je to podobný príklad ako príklad o bicyklistovi, ktorý má dobehnúť chodca, ktorému dal nejaký náskok a my sa pýtame, kde ho dobehne. Ak by sme to aplikovali na náš príklad, kde rýchlosť Achilla je v_a, rýchlosť korytnačky $0,1v_a$ a t je čas, za ktorý sa stretnú, tak platí: $v_a.t = 100 + 0,1v_a.t$. Dráha, ktorú prejde Achilles, je $s = v_a.t$ a teda: s = 100 + 0,1s. Odtiaľ s = $\frac{100}{1-0,1} = \frac{1000}{9}$.

Vráťme sa teraz k problému, či $0,\overline{9} = 1$ alebo $0,\overline{9} \neq 1$. Práve sme vypočítali, že

$$\frac{1000}{9} = 111 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i . \text{ Takto dostaneme } \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1000}{9} - 111 = \frac{1}{9}.$$

Z čoho $0,\overline{9} = 9. \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 9.\frac{1}{9} = 1.$

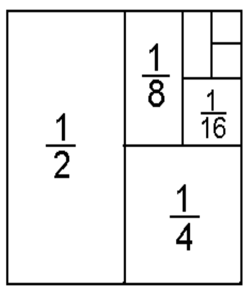
Vypočítali sme, že súčet členov nekonečnej geometrickej postupnosti s prvým členom 100 a kvocientom $\frac{1}{10}$ je $\frac{1}{9}$.

Ak by sme delili čokoládu tak, že prvému človeku dáme polovicu, druhému štvrtinu, tretiemu osminu, . . . , tak by sme ju mohli deliť donekonečna, lebo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

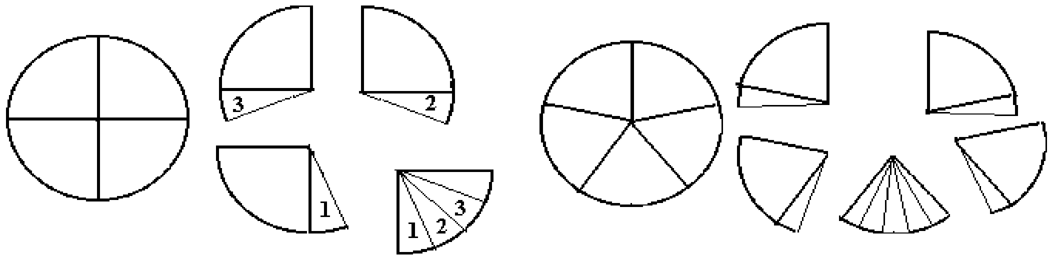
To sa dá aj graficky znázorniť (členy postupnosti sú obsahy obdĺžnikov alebo štvorcov):

Obr. 55



Ak by sme delili napríklad tortu, odvodíme vzťahy:

Obr. 56

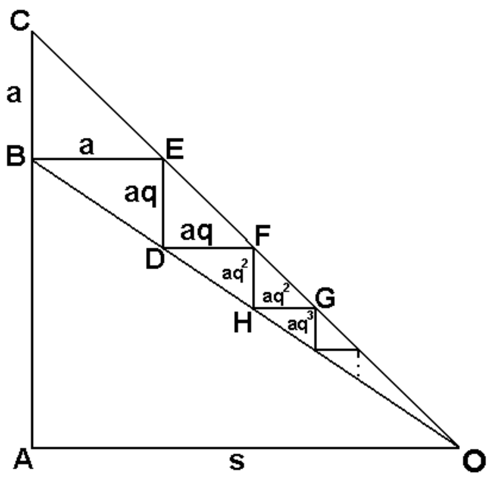


$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots=\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\ldots=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{1}{n-1}$$

Zovšeobecnime posledný výsledok pre súčet členov nekonečnej geometrickej postupnosti s prvým členom a_1 a kvocientom $q (0 < q < 1)$. Predstavme si členy postupnosti ako dĺžky úsečiek v nasledovnom geometrickom útvare:

Obr. 57



Podľa obrázka $\triangle DEB \sim \triangle BAO$ podľa vety (uu). Preto platí $\dfrac{|BA|}{|AO|} = \dfrac{|DE|}{|EB|}$. Členy geometrickej postupnosti, reprezentované dĺžkami úsečiek, sú rovnobežné so stranami AC alebo AO. Ak označíme súčet nekonečného geometrického radu ako s, potom $|AO| = |AC| = s$. Ďalej $|EB| = a, |DE| = aq$.

Takto dostaneme $\dfrac{|BA|}{s} = \dfrac{aq}{a}$, a teda $|BA| = sq$. Platí aj $|AC| = |BA|+|BC|$. Po dosadení $s = sq + a$. Odtiaľ

$$s = \frac{a_1}{1-q}. \tag{B.1}$$

Ak by $-1 < q < 0$, označme $p = -q$. Potom by súčet vyzeral nasledovne:

$$s = a_1 - a_1 p + a_1 p^2 - a_1 p^3 + a_1 p^4 - \ldots = a_1 \sum_{i=1}^{\infty} p^{2(i-1)} + (-a_1 p) \sum_{i=1}^{\infty} p^{2(i-1)}.$$

Keďže $0 < p < 1$, použijeme vzťah B.1, lebo súčet s môžeme chápať ako súčet členov dvoch nekonečných geometrických postupností s kvocientom p a rôznymi prvými členmi.

$$s = \frac{a_1}{1-p^2} + \left(-\frac{a_1 p}{1-p^2}\right) = \frac{a_1(1-p)}{1-p^2} = \frac{a_1}{1+p} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Vzťah B.1 teda platí pre každú geometrickú postupnosť s prvým členom a_1 a kvocientom $-1 < q < 1$.

Typickým názorným príkladom na vzťah B.1 sú aj iné desatinné čísla s periodickým desatinným rozvojom ako spomínané číslo $0,\overline{9}$. Iste si každý pamätá, že

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$. Ďalej vieme, že $0,\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i}$.

To je geometrická postupnosť s prvým členom $\frac{3}{10}$ a kvocientom $\frac{1}{10}$, tak platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Teraz pre zjednodušenie terminológie, zavedieme pojem nekonečného radu a definujeme niektoré jeho základné vlastnosti:

Definícia 21. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sa nazýva nekonečný rad patriaci postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. N-tý člen postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva aj n-tým členom radu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Súčet $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ sa nazýva n-tým čiastočným súčtom radu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.*

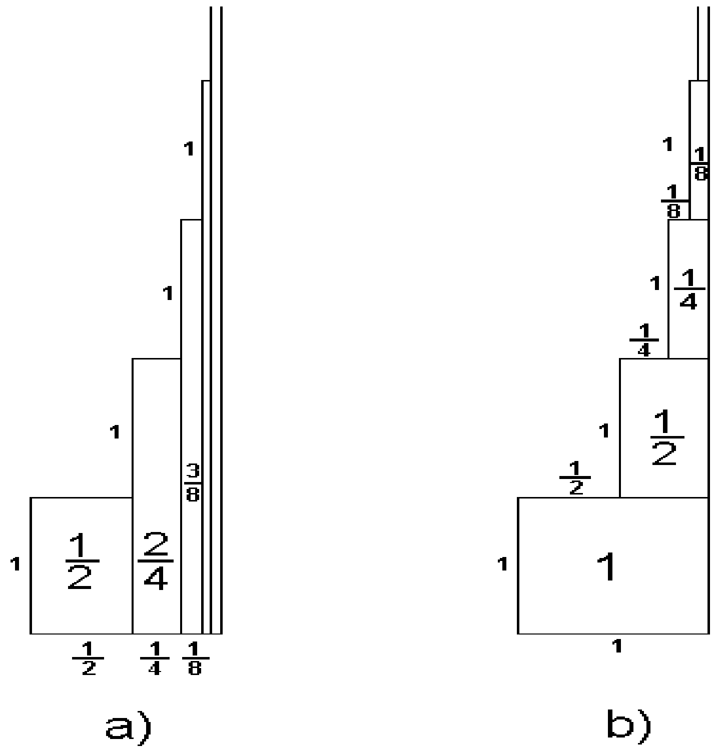
Poznámka: Ak postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, budeme pre rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ používať pojem **nekonečný geometrický rad** alebo jednoducho **geometrický rad**. Pri iných postupnostiach budeme hovoriť iba o **nekonečnom rade**, resp. **rade**.

Graficky možno riešiť aj náročnejšie súčty nekonečných radov. Asi v roku 1350 francúzsky matematik *Nicole Oresme* (1323-1382) graficky určil súčet

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}.$$

Znázornil ho pomocou nekonečného schodovitého mnohouholníka takto:

Obr. 58



Spodná strana tohoto mnohouholníka má dĺžku $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ (pozri obr. 58a). Tento istý rovinný útvar možno rozdeliť aj tak, ako je to znazornené na obrázku 58b. Takže platí:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2.$$

Všetky doteraz spomínané príklady boli síce pekné, ale zabudli sme na jednu dôležitú vec. Nie každý nekonečný rad má konečný súčet. Iste ho nemá rad, ktorého členy tvoria konštantnú, rastúcu alebo neklesajúcu postupnosť s kladnými členmi. Ale existujú aj rady, ktorých členy tvoria klesajúce postupnosti, ktoré nemajú konečný súčet. Vezmime si rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}}+\ldots>$$

$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$ Takže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ nemá súčet.

O tomto probléme si povieme viac v nasledujúcom článku.

Cvičenia

1. V jednej televíznej relácii bola takáto hádanka: Z dvoch železničných staníc vzdialených od seba 100 km vyrazili dva vlaky idúce oproti sebe rýchlosťou 50 $km.h^{-1}$. V okamihu štartu vlakov z okna rušňa jedného vlaku vyrazila smerom k druhému vlaku mucha rýchlosťou 70 $km.h^{-1}$. Keď dorazila k oknu rušňa druhého vlaku, vrátila sa k prvému vlaku tou istou rýchlosťou. Takto lietala hore - dole stálou rýchlosťou, až kým sa vlaky nestretli. Akú dráhu prešla?

2. Nájdite zlomky, ktorých desatinné rozvoje sú
(a) $3,\overline{142857}$; (b) $2,\overline{123}$; (c) $4,\overline{32}$; (d) $0,\overline{5}$.

3. Dokážte pomocou „metódy" Nicolu Oresmeho, že

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{4^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}=\frac{4}{9},$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6.$$

4. Vymyslite tri rôzne geometrické rady tak, aby ich súčet bol
(a) 5; (b) -3; (c) $-6,4$; (d) $0,1$.

B.1.2 Súčet nekonečného radu

V predchádzajúcom článku sme dokázali, že ak $-1<r<1$, tak $\sum\limits_{i=1}^{\infty}r^{i-1}=\dfrac{1}{1-r}$.

Potom $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_1.r^{i-1}=\dfrac{a_1}{1-r}$. Určili sme súčet nekonečného geometrického radu.

Tento dôkaz má „malú chybičku krásy" v tom, že sme to urobili bez toho, aby sme presnejšie špecifikovali pojem súčtu nekonečného radu. Nakoniec sme v predchádzajúcej kapitole ukázali, že rad $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ nemá súčet. Čo to ten súčet je? Ako rozlíšiť nekonečné rady, ktoré majú súčet od tých, ktoré súčet nemajú?

Kvôli jednoduchosti skúsme skúmať čiastočné súčty geometrických radov. Ako príklady zvoľme

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}3.\left(-\frac{1}{2}\right)^j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}1.$$

Označme ich n-té čiastočné súčty $a_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j$, $b_n = \sum_{j=1}^{n}3.\left(-\frac{1}{2}\right)^j$, $c_n = \sum_{j=1}^{n}1$.

Zoraďme prvých sedem čiastočných súčtov týchto radov do tabuľky:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0,5	0,75	0,875	0,9375	0,96875	0,984375	0,9921875
b_n	-1,5	-0,75	-1,125	-0,9375	-1,03125	-0,984375	-1,0078125
c_n	1	2	3	4	5	6	7

Vidíme, že hodnoty súčtov a_n sa približujú k číslu 1, hodnoty b_n k -1 a hodnoty c_n sa nepribližujú k žiadnemu číslu. Zároveň si môžeme všimnúť, že hodnoty súčtov a_n sa postupne zväčšujú.

Najprv vyslovíme podmienku, že nekonečný rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ má súčet s, ak pre každé reálne čísla u, v také, že $u < s < v$ existuje prirodzené číslo m také, že

$$u < \sum_{i=1}^{m} a_i < v.$$

Jednoduchšie je zvoliť čísla u, v v tvare $u = s - \varepsilon, v = s + \varepsilon$, kde ε je kladné reálne číslo. Teda tvrdíme, že

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N; s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{m} a_i < s + \varepsilon \tag{B.2}$$

To znamená, že m-tý čiastočný súčet radu vieme aproximovať s ľubovoľnou presnosťou. Skutočne, ak sa pozrieme do tabuľky súčty a_4, b_4 aproximujú súčet s presnosťou 0,1 a a_5, b_5 s presnosťou 0,05. Je B.2 dobrou podmienkou pre definovanie súčtu radu? Odpoveď je záporná. Vezmime si rad $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$. Označme jeho čiastočné súčty $d_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i$ a zoraďme ich do tabuľky:

k	1	2	3	4	5	6	7
d_k	-1	0	-1	0	-1	0	-1

Podmienka B.2 by umožňovala, aby rad $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i$ mal súčet 0 aj -1, lebo pre obe čísla viem príslušné m nájsť.

Ak si však bližšie všimneme čiastočné súčty a_n, b_n zo začiatku článku, vidíme, že nielen súčty a_4, b_4 aproximujú súčet príslušného radu s presnosťou na 0,1; ale aj všetky nasledujúce, t.j. a_k, b_k pre $k = 4, 5, 6, \ldots$. Preto podmienku B.2 stačí doplniť:

Definícia 22.

Nekonečný rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *má súčet* $s \in R$, *ak*

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall k \in N; k \geq m \Rightarrow s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{k} a_i < s + \varepsilon.$$

Rad, ktorý má súčet sa nazýva konvergentný. Každý iný rad nazývame divergentný.

V nasledovnom príklade sa vrátime k radu $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ z predchádzajúceho článku:

Príklad 1.

Dokážte, že rad $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ je divergentný.

Riešenie.

Ak by mal rad súčet s, tak by podľa definície 22 pre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existovalo také $m \in N$, že pre $\forall k \in N \wedge k \geq m$ by platilo: $s - \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} < s + \frac{1}{2}$. Vezmime si $k = m$ a vzťah $s - \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$. Dostaneme:

$$s < \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \right) + \frac{1}{2} \tag{B.3}$$

Ďalej platí: $\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ krát}} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}$.

Teda $\sum_{i=m+1}^{2m} \frac{1}{i}$. Ak to dosadíme do podmienky B.3, tak $s < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{1}{i}$.

$$s < \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i} \tag{B.4}$$

Podobne ako v B.3 platí:

$$\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} + \ldots + \frac{1}{4m}}_{2m \text{ krát}} < \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} + \ldots + \frac{1}{4m-1} + \frac{1}{4m}$$

$$\frac{1}{2} < \sum_{i=2m+1}^{4m} \frac{1}{i} \tag{B.5}$$

Teraz sčítame nerovnosti B.4 a B.5: $s + \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i} + \sum_{i=2m+1}^{4m} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{4m} \frac{1}{i}$.

Lenže $4m > m$, to znamená, že rad nespĺňa definíciu 22 a je divergentný.

Veta 1. *Každý konvergentný rad má práve jeden súčet.*

Dôkaz. Budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že konvergentný rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ má dva súčty s_1 a s_2. To by pre $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N$, že pre všetky prirodzené čísla $k \geq m$ by platilo

$$s_1 - \varepsilon < \sum_{i=1}^{k} a_i < s_1 + \varepsilon. \tag{B.6}$$

Súčasne by rad spĺňal podmienku,že $\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists p \in N$, že pre všetky prirodzené čísla

$$k \geq p \text{ platí } s_2 - \varepsilon < \sum_{i=1}^{k} a_i < s_2 + \varepsilon. \tag{B.7}$$

Bez ujmy na všeobecnosti, predpokladajme, že $s_1 < s_2$. Zvoľme číslo ε_1 také, že $s_1 + \varepsilon_1 < s_2 - \varepsilon_1$. Teda nech

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{s_2 - s_1}{2}.$$

Potom existuje prirodzené číslo $m = m_1$, ktoré spĺňa podmienku B.6 pre $\varepsilon = \varepsilon_1$ a prirodzené číslo $p = p_1$, ktoré spĺňa podmienku B.7 pre $\varepsilon = \varepsilon_1$. Označme väčšie z čísel m_1, p_1 ako t a vtedy pre prirodzené čísla $k \geq t$, platia obe podmienky B.6 a B.7 súčasne. Dostaneme takto

$$\sum_{i=1}^{k} a_i < s_1 + \varepsilon_1 < s_2 - \varepsilon_1 < \sum_{i=1}^{k} a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i < \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Dospeli sme k sporu. □

Medzi konvergentné rady patria také, ktorých členy od určitého člena počnúc tvoria nulovú postupnosť. To vyjadruje nasledovná jednoduchá veta:

Veta 2. *Nech p je prirodzené číslo a nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť, že $a_n = 0$ pre $n = p+1, p+2, \ldots$.*

Potom rad $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ je konvergentný a jeho súčet je $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i$.

Dôkaz.

Je jasné, že pre každé $k \geq p$ platí: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i$. V zmysle definície 22 stačí položiť $m = p$. Vtedy je definícia splnená a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i$. $\square$

Cvičenia

1. Zistite, či nasledovné rady sú konvergentné

   (a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{5}{n}$, (b) $0,6 + 0,66 + 0,666 + \ldots$, (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

2. Zistite, či nasledovné rady sú konvergentné. Ak áno, určte ich súčet.

   (a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pre } n \leq 10, \\ 0 & \text{pre } n > 10, \end{cases}$

   (b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$, kde $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pre } n \text{ párne}, \\ 0 & \text{pre } n \text{ nepárne}, \end{cases}$

   (c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{pre } n \leq 10, \\ 0 & \text{pre } n > 10. \end{cases}$

B.1.3 Výpočty súčtov niektorých nekonečných radov

V článku B.1.1 nebol vzťah B.1 vypočítaný celkom korektne, lebo ešte nebola známa definícia 22. Najprv dokážeme, že vzťah B.1 vyhovuje definícii 22. K tomu budeme potrebovať nasledovnú vetu.

Veta 3.

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad a c je reálne číslo. Potom je konvergentný aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ a platí: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz. Pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ so súčtom s platí, že $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in N$ také, že pre všetky prirodzené čísla $k, k \geq m$ platí $s-\varepsilon < \sum_{n=1}^{k} a_n < s+\varepsilon$. Ak $c > 0$ dostaneme

$cs-c\varepsilon < c\sum_{n=1}^{k} a_n < cs+c\varepsilon$. Ak $c\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k}(ca_n)$, tak $cs-c\varepsilon < \sum_{n=1}^{k}(c.a_n) < cs+c\varepsilon$.

Podobne pre $c < 0$ platí $cs-(-c\varepsilon) < \sum_{n=1}^{k}(ca_n) < cs+(-c\varepsilon)$.

Označme $\tau = c\varepsilon$ pre $c > 0$ a $\tau = -c.\varepsilon$ pre $c < 0$ alebo $\tau = \mid c \mid .\varepsilon$. Potom

$$\varepsilon = \frac{\tau}{\mid c \mid} \text{ a platí podmienka } cs - \tau < \sum_{n=1}^{k}(ca_n) < cs + \tau. \tag{B.8}$$

Pre každé $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$ a teda vždy existuje $m \in N$ také, že platí vzťah B.8.

Ak $c = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 = 0s$.

Teda pre každé reálne číslo c platí: $\sum_{n=1}^{\infty}(c.a_n) = c.s = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Príklad 1. Dokážte, že pre každé reálne číslo q , kde $|q| < 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_1.q^{i-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Riešenie. Keďže platí veta 3, stačí dokázať, že platí $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = \frac{1}{1-q}$.Treba dokázať, že pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo m také, že

$$\text{pre všetky prirodzené čísla } k \ (k \geq m) \text{ platí } \frac{1}{1-q} - \varepsilon < \sum_{i=1}^{k} q^{i-1} < \frac{1}{1-q} + \varepsilon. \tag{B.9}$$

Potom $-\varepsilon < \left(\sum_{i=1}^{k} q^{i-1}\right) - \frac{1}{1-q} < \varepsilon$ a dostaneme $-\varepsilon < \frac{1-q^k}{1-q} - \frac{1}{1-q} < \varepsilon$.

Po úprave $-\varepsilon < \frac{-q^k}{1-q} < \varepsilon$. Keďže $|q| < 1$ tak iste $1-q > 0$ a preto platí

$-\varepsilon(1-q) < -q^k < \varepsilon(1-q)$ alebo $-\varepsilon(1-q) < q^k < \varepsilon(1-q)$. Označme $\varepsilon(1-q) = \tau$. Potom $-\tau < q^k < \tau$. Je zrejmé, že τ je kladné reálne číslo.

Ak q je kladné, tak stačí, aby bola splnená podmienka $q^k < \tau$, teda $k.\ln q < \ln \tau$. Keďže $q < 1$, tak $\ln q < 0$ a $k > \frac{\ln \tau}{\ln q}$, tu nám stačí zvoliť nejaké prirodzené číslo $m > \frac{\ln \tau}{\ln q}$, aby podmienka B.9 bola splnená.

Ak $q = 0$, tak pre každé prirodzené číslo k platí $0^k = 0$ a stačí zvoliť $m = 1$.

Ak $q < 0$, tak $-q > 0$ a $q^k = (-1)^k.(-q)^k$. V prípade, že k je párne, $q^k = = (-q)^k > 0 > -\tau$ a je potrebné ešte splniť podmienku $(-q)^k < \tau$. Ak je k je nepárne, $q^k = -(-q)^k < 0 < \tau$ a je potrebné ešte splniť podmienku $-(-q)^k > -\tau$, tak znova dostaneme $(-q)^k < \tau$. Potom $k.\ln(-q) < \ln \tau$. Potom $-q < 1$ a $k > \frac{\ln \tau}{\ln(-q)}$. Zvoľme prirodzené číslo $m > \frac{\ln \tau}{\ln(-q)}$ a podmienka B.9 je splnená.

Pri výpočtoch je možné používať aj substitučnú metódu. Napríklad rady

$\sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$ sú oba konvergentné a majú rovnaké súčty. Tak platí:

Veta 4.

Nech p je prirodzené číslo. Rad $\sum_{i=p+1}^{\infty} a_{i-p}$ je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Ak sú oba rady konvergentné, tak platí $\sum_{i=p+1}^{\infty} a_{i-p} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Na túto vetu sa možno dívať ako na výsledok substitúcie $j = i - p$. Ďalšia veta bude o nekonečnom rade súčtu:

Veta 5.

Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady, tak je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Ďalej platí: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôkaz. Z predpokladov vyplýva, že, pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo m také, že pre každé prirodzené číslo k $(k \geq m)$ platí:

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{k} a_n < s + \frac{\varepsilon}{2} \text{ , pričom s je súčet radu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{B.10}$$

Podobne pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo p také, že pre každé prirodzené číslo k $(k \geq p)$ platí:

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{k} b_n < r + \frac{\varepsilon}{2} \text{ , pričom } r \text{ je súčet radu } \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{B.11}$$

Pre také prirodzené číslo k, ktoré spĺňa podmienku $k \geq m \wedge k \geq p$, platia podmienky B.10 a B.11 súčasne, takže ich môžeme sčítať:

$$(s+r) - \varepsilon < \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n < (s+r) + \varepsilon. \text{ Platí } \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n).$$

Dostaneme $(s+r)-\varepsilon < \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) < (s+r)+\varepsilon$. To ale znamená, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + r = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad \square$$

Príklad 2. Vypočítajte

$$s = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{2.3^{i+4}}{5^i}.$$

Riešenie. Neformálne by sme dostali

$$s = \frac{2.3^7}{5^3} + \frac{2.3^8}{5^4} + \frac{2.3^9}{5^5} + \ldots = \frac{2.3^7}{5^3}.\left(1 + \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{4374}{125}.\frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{2187}{25}.$$

Formálne by sme urobili výpočet takto:

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{2.3^{i+4}}{5^i} = \frac{2.3^7}{5^3} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{3^{i-3}}{5^{i-3}} = \frac{4374}{125} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{3^{i-3}}{5^{i-3}} = \frac{4374}{125} \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{i-3}.$$

Za predpokladu, že rad na pravej strane je konvergentný, tak podľa vety 4 urobíme substitúciu $i-2 = k$ a dostaneme $s = \frac{4374}{125} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{5^{k-1}}$, čo je konvergentný geometrický rad. Preto súčet s existuje a bude sa rovnať číslu $\frac{2187}{25}$.

Príklad 3. Vypočítajte

$$t = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{3.4^{j-2}}{5^j}.$$

Riešenie. Úlohu budeme riešiť formálne:

$$t = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{3.4^{j-2}}{5^j} = \frac{3}{5^2}.\sum_{j=3}^{\infty} \frac{4^{j-2}}{5^{j-2}} = \frac{3}{25}.\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k =$$

$$= \frac{3}{25}.\frac{4}{5}.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{12}{125}.\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{12}{25}.$$

Príklad 4. Vypočítajte

$$r = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{2.3^{i+4} + 3.4^{j-2}}{5^j}.$$

Riešenie. Podľa vety 5 dostaneme

$$r = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{2.3^{i+4} + 3.4^{j-2}}{5^j} = \sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{2.3^{i+4}}{5^j} + \frac{3.4^{j-2}}{5^j}\right) = \sum_{j=3}^{\infty}\frac{2.3^{i+4}}{5^j} + \sum_{j=3}^{\infty}\frac{3.4^{j-2}}{5^j}.$$

Využitím príkladov 2 a 3 dostaneme $r = \dfrac{2187}{25} + \dfrac{12}{25} = \dfrac{2199}{25}$.

Cvičenia

1. Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné. Dokážte, že rad

   $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ je konvergentný a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné a nech u, v sú reálne čísla. Dokážte, že

   rad $\sum_{n=1}^{\infty}(ua_n + vb_n)$ je konvergentný a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(ua_n + vb_n) = u\sum_{n=1}^{\infty} a_n + v\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Vypočítajte: (a) $\sum_{n=3}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{3}\right)^n$, (b) $\sum_{n=4}^{\infty} 5.\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Vypočítajte: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.3^{n+1} + 5.4^{n-1}}{5^{n+2}}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3.4^{n-3}}{6^n}\right]$.

B.1.4 Limita postupnosti

Vráťme sa k definícii 22 konvergentného nekonečného radu z článku B.1.2.

Nekonečný rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sme definovali ako konvergentný, ak pre

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \text{ také, že } \forall k \in N \wedge k \geq m \text{ platí: } s - \varepsilon < \sum_{i=1}^{k} a_i < s + \varepsilon. \quad \text{(B.12)}$$

Pritom s sme považovali za súčet radu. V článku B.1.1 v definícii 21 sme definovali pre rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ postupnosť čiastočných súčtov $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Podmienku B.12 vyjadríme

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \text{ také, že } \forall k \in N \wedge k \geq m \text{ platí: } s - \varepsilon < s_k < s + \varepsilon,$$

čo je to isté ako $|s_k - s| < \varepsilon$, kde $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Ak by sme „zabudli" na to, že je to postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, číslo s je číslom, ku ktorému sa „približujú" členy tejto postupnosti, teda je **limitou postupnosti** $(s_n)_{n=1}^{\infty}$,

čo budeme zapisovať $s_k \to s$ pre $k \to \infty$ alebo $\lim_{k\to\infty} s_k = s$. Preto definujeme:

Definícia 23.

Postupnosť reálnych čísel $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu, ktorou je reálne číslo L a zapisujeme

$\lim_{n\to\infty} u_n = L$, ak $\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall k \in N; \quad k \geq m \Rightarrow |u_k - L| < \varepsilon$. Postupnosť reálnych čísel, ktorá má limitu, sa nazýva konvergentná. Postupnosť, ktorá nemá limitu sa nazýva divergentná.

Poznámka. Na základe tejto definície sa môžeme na konvergenciu nekonečného radu pozerať ako na existenciu limity postupnosti jeho čiastočných súčtov.

Príklad 1.

Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Riešenie. Najprv pomocou tabuľky si všimnime prvé členy tejto postupnosti:

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{n}$	1	0,5	$0,\overline{3}$	0,25	0,2	$0,1\overline{6}$

Vidíme, že hodnoty sa „približujú" k číslu 0. Podľa definície 23 musíme pre každé kladné reálne číslo ε nájsť príslušné prirodzené číslo m, aby platilo, že

$$\forall k \in N \wedge k \geq m \text{ platí: } \left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon, \text{ čo je to isté ako } -\varepsilon < \frac{1}{k} < \varepsilon. \quad \text{(B.13)}$$

Keďže $\frac{1}{k} > 0 > -\varepsilon$ stačí, aby $\frac{1}{k} < \varepsilon$, teda $k > \frac{1}{\varepsilon}$.

Preto stačí, ak zvolíme prirodzené číslo $m > \frac{1}{\varepsilon}$ a podmienka B.13 bude splnená.

Veta 6. *Každá konvergentná postupnosť má práve jednu limitu.*

Dôkaz. Budeme dokazovať sporom. Nech L, K sú dve limity postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a bez ujmy na všeobecnosti nech $L > K$. Potom existuje kladné reálne číslo ε také, že $L - \varepsilon > K + \varepsilon$ čiže také, že $0 < \varepsilon < \frac{L-K}{2}$. Podľa predpokladov vety existuje k tomuto číslu prirodzené číslo m také, že pre všetky $k \geq m$ platí

$$|a_k - L| < \varepsilon, \text{ čo je to isté ako } L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon. \tag{B.14}$$

K tomuto istému ε existuje prirodzené číslo n také, že pre všetky $k \geq n$ platí

$$|a_k - K| < \varepsilon, \text{ čo je to isté ako } K - \varepsilon < a_k < K + \varepsilon. \tag{B.15}$$

Potom pre každé prirodzené číslo $k \geq max(m, n)$ platia obe podmienky B.14, B.15 a aj $a_k < K + \varepsilon < L - \varepsilon < a_k$. Odtiaľ $a_k < a_k$. Dospeli sme k sporu. □
Príklad 2.

Dokážte, že pre $|q| < 1$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Riešenie. Treba dokázať, že pre každé kladné reálne číslo τ existuje prirodzené číslo m také, že pre všetky$k \geq mn$ platí

$$|q^k - 0| < \tau, \text{ čo je to isté ako } -\tau < q^k < \tau. \tag{B.16}$$

Podľa príkladu 1 v článku B.1.3, ak $0 < q < 1$ tak v prípade, že $m > \frac{\ln\tau}{\ln q}$ je podmienka B.16 splnená. Ak $q = 0$ stačí zvoliť $m = 1$ a ak $-1 < q < 0$ je potrebné $m > \frac{\ln\tau}{\ln(-q)}$.

Veta 7. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *tak:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$,

b) ak ešte $a \neq 0$, *tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$.

Dôkaz.
a) Pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo m také, že pre všetky prirodzené čísla k,

$$k \geq m \text{ platí: } |a_k - a| < \varepsilon. \tag{B.17}$$

Potrebujeme dokázať, že pre každé kladné reálne číslo τ existuje prirodzené číslo p také, že pre všetky prirodzené čísla k,

$$k \geq p \text{ platí: } |a_k^2 - a^2| < \tau. \tag{B.18}$$

Podmienku B.18 upravíme s využitím podmienky B.17 takto: $|a_k^2 - a^2| = |(a_k - a)(a_k + a)| = |a_k - a||a_k + a| < \varepsilon|a_k + a| \leq \varepsilon(|a_k| + |a|) = \varepsilon|a_k| + \varepsilon|a|$. Dostali sme $|a_k^2 - a^2| < \varepsilon|a_k| + \varepsilon|a|$. Urobme ešte tento odhad: $|a_k| = |(a_k - a) + a| \leq \leq |a_k - a| + |a| < \varepsilon + |a|$. Preto platí $\varepsilon|a_k| + \varepsilon|a| \leq \varepsilon(\varepsilon + |a|) + \varepsilon|a| = \varepsilon^2 + 2\varepsilon|a|$.

Ak označíme $\varepsilon^2 + 2\varepsilon|a| = \tau$, platí podmienka B.18. Kladným koreňom kvadratickej rovnice $\varepsilon^2 + 2\varepsilon|a| - \tau = 0$ s neznámou ε je $\varepsilon = \sqrt{a^2+\tau} - |a|$. Ak teda vychádzame z toho, že podmienka B.17 platí, stačí nájsť pre špeciálne číslo $\varepsilon = \sqrt{a^2+\tau} - |a|$ príslušné prirodzené číslo $m = p$ a vtedy platí aj podmienka B.18.
b) Predpokladajme, že platí B.17. Pre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ existuje m_1, že pre všetky všetky prirodzené čísla k, $k \geq m_1$ platí $|a_k - a| < \frac{|a|}{2}$. Teraz urobíme nasledovný odhad:

$$|a_k| = |a - (a - a_k)| \geq |a| - |a - a_k| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} > 0.$$

To znamená, že $a_k \neq 0$ pre prirodzené čísla $k \geq m_1$ a výraz $a_k^{-1} = \dfrac{1}{a_k}$ má zmysel a

navyše platí $|a_k^{-1} - a^{-1}| = \left|\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a}\right| < \dfrac{|a - a_k|}{|a|.|a_k|} < \dfrac{|a-a_k|}{\frac{1}{2}a^2} = \dfrac{2.|a-a_k|}{a^2}$.

Stačí dokázať, že $\left|\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a}\right| < \tau$, kde τ je kladné reálne číslo. Ak položíme

$$\frac{2.|a-a_k|}{a^2} < \tau \Rightarrow |a - a_k| < \frac{a^2\tau}{2} \text{ a pre } \varepsilon = \frac{a^2\tau}{2}$$

nájdeme podľa B.17 príslušné $m = m_2$, potom pre každé prirodzené číslo $k, k \geq$ $\geq max(m_1, m_2)$ platí

$$\left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a}\right| < \tau, \text{ čo znamená, že } \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}. \ \square$$

Ďalšia veta bude charakterizovať aritmetické vlastnosti limít postupností:

Veta 8.

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Potom*

a) *Ak* $c \in R$ *tak* $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = ca$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$,

d) *Ak* $b \neq 0$, *tak* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Dôkaz.
a) Pre pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo m také, že pre všetky prirodzené čísla k,

$$k \geq m \text{ platí: } |a_k - a| < \varepsilon, \text{ čo je to isté ako } a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon. \tag{B.19}$$

Dokážeme, že pre každé kladné reálne číslo τ existuje prirodzené číslo n také, že pre všetky všetky prirodzené čísla k,

$$k \geq n \text{ platí: } |ca_k - ca| < \tau, \text{ čo je to isté ako } ca - \tau < ca_k < ca + \tau. \tag{B.20}$$

Ak $c = 0$, tak $ca_k = 0$ pre všetky prirodzené čísla k a podmienka B.20 je splnená už pre $n = 1$.
Ak $c > 0$, tak prenásobením podmienky B.19 číslom c dostaneme

$$ca - c\varepsilon < ca_k < ca + c\varepsilon.$$

Ak $c < 0$, tak prenásobením podmienky B.19 číslom c dostaneme

$$ca + c\varepsilon < ca_k < ca - c\varepsilon \Rightarrow ca - (-c)\varepsilon < ca_k < ca + (-c)\varepsilon.$$

Preto ak $c \neq 0$ môžeme tvrdiť $ca - |c|\varepsilon < ca_k < ca + |c|\varepsilon$. Označme $\tau = |c|\varepsilon$ pre $c \neq 0$.
Pre špeciálne $\varepsilon = \dfrac{\tau}{|c|}$ existuje prirodzené číslo n také, že

$$a - \frac{\tau}{|c|} < a_k < a + \frac{\tau}{|c|} \Rightarrow ca - \tau < ca_k < ca + \tau.$$

b) Pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo m také, že pre

$$\forall k \in N \wedge k \geq m \text{ platí: } |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{čo je to isté ako } a - \frac{\varepsilon}{2} < a_k < a + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{(B.21)}$$

Pre to isté ε existuje prirodzené číslo n také, že pre

$$\forall k \in N \wedge k \geq m \text{ platí: } |b_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{čo je to isté ako } b - \frac{\varepsilon}{2} < b_k < b + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{(B.22)}$$

Ak si vezmeme $k \geq max(m, n)$ platia podmienky B.21 a B.22 súčasne, a potom aj ich súčet:

$$(a + b) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_k + b_k < b + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon.$$

c) Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Využime rovnosť

$$a_n b_n = \frac{1}{4}\left[(a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2\right] = \frac{1}{4}\left[(a_n + b_n)^2 + (-1)(a_n + (-1)b_n)^2\right]. \quad \text{(B.23)}$$

Podľa vety 7 a dokázaných častí *a)* a *b)* tejto vety platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[(a_n + b_n)^2 + (-1).(a_n + (-1)b_n)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(a + b)^2 + (-1)(a + (-1)b)^2\right] = ab.$$

Podľa B.23 potom platí aj $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.
d) Použijeme vetu 7 a dokázanú časť *c)* tejto vety:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n b_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b}. \ \square$$

Vieme, že postupnosti sú vlastne funkcie definované na množine prirodzených čísel, a tak ako existujú rastúce, klesajúce, nerastúce a neklesajúce funkcie, tak existujú aj rastúce, klesajúce, nerastúce a neklesajúce postupnosti:

Definícia 24. *Postupnosť reálnych čísel*$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je*

1. *rastúca (klesajúca) ak* $\forall n \in N; \quad a_n < a_{n+1} (a_n > a_{n+1})$,
2. *nerastúca (neklesajúca) ak* $\forall n \in N; \quad a_n \geq a_{n+1} (a_n \leq a_{n+1})$.

Cvičenia

1. Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Dokážte, že existuje také prirodzené číslo ε, že pre všetky prirodzené čísla n_0, $n \geq n_0$ číslo $3n^5+13n^3+236$ nie je deliteľné číslom $2n^5+11n^4+5n^3+178n^2+1009$.

3. Vypočítajte:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+1)! - (n-1)!}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 + 13n^3 + 236}{2n^5 + 11n^4 + 5n^3 + 178n^2 + 1009}$,

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7^n + 6^n}{7^n - 6^n}$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$,

   (e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^{n-2}}$, (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{n} \frac{i+2}{i}$.

4. Zistite, či dané postupnosti sú konvergentné. Ak áno, nájdite ich limitu. Postupnosti sú dané n-tým členom.

   (a) $$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pre } n \leq 10^6, \\ 1 & \text{pre } n > 10^6, \end{cases}$$

   (b) $$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pre } n \leq 10^6, \\ 0 & \text{pre } n > 10^6, \end{cases}$$

   (c) $$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pre } n \text{ párne}, \\ 1 & \text{pre } n \text{ nepárne}, \end{cases}$$

   (d) $$d_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pre } n \text{ párne}, \\ 0 & \text{pre } n \text{ nepárne}, \end{cases}$$

   (e) $e_n = (-1)^n$,

   (f) $f_n = 1^n$.

5. Určte limitu nasledovných postupností:

   (a) $a_1 = 0,3;\quad a_2 = 0,33;\quad a_3 = 0,333; \ldots,$

   (b) $b_1 = 0,5;\quad b_{n+1} = b_n + 0,1^n b_n$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots,$

   (c) $c_1 = 4;\quad c_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{a_n}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

6. Nájdite aspoň dve postupnosti, ktoré konvergujú k číslu

   (a) 1; (b) $\dfrac{5}{2}$; (c) $0,48$.

B.2 Limita funkcie

B.2.1 Spojitosť funkcie

Určite ste sa stretli s nejakým „spojitým” dejom, ktorý prebiehal postupne bez „skokov”. Ako príklad si môžme vziať rozbiehanie vlaku pri odchode zo železničnej stanice. Keby sme chceli zakresliť graf dráhy s od času t, mohol by vyzerať nasledovne:

Obr. 59

Graf funkcie $s(t)$ nikde nie je „pretrhnutý”. Takýto typ funkcií je veľmi často používaný v praxi, lebo veľa dejov napríklad v prírode, doprave možno znázorniť práve týmto typom funkcií. Na to, aby sme vedeli charakterizovať tento typ funkcií, potrebujeme pojem okolia bodu.

Najľahšie je možné si predstaviť tento pojem v rovine alebo v priestore. Ak k bodu roviny A zostrojíme kružnicu tak, aby tento bod bol jej stredom, tak všetky body vnútra kružnice, patria do okolia tohto bodu.

V priestore by sme zostrojili zrejme guľovú plochu. Ak by sme sa zaujímali o okolie bodu napríklad na priamke alebo číselnej osi, patrili by do neho vnútorné body úsečky so stredom v danom bode. Z toho vyplýva, že okolím bodu je otvorený interval.

Predpokladajme, že dĺžka tejto úsečky je 2ε a máme daný bod na číselnej osi, ktorý vyjadruje hodnotu reálneho čísla a. Koncové body úsečky budú od bodu a o ε „napravo” a o ε „naľavo”, t. j. $a-\varepsilon, a+\varepsilon$. Takto dostaneme ako okolie bodu a otvorený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Definícia 25. *ε-ovým okolím $O_\varepsilon(a)$ bodu (reálneho čísla) a nazývame otvorený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Množinu $O_\varepsilon(a)-\{a\}=(a-\varepsilon, a)\cup(a, a+\varepsilon)$ nazývame prstencové okolie bodu a.*

Teraz sa môžme vrátiť k funkcii $s(t)$. Vezmime si konkrétny časový okamih $t=a$. Vlak by mal vtedy prejdenú dráhu $s(a)$. Ak si vezmeme ε-ové okolie bodu $s(a)$, tak vždy viem nájsť také δ okolie bodu a, že všetky funkčné hodnoty bodov z tohto okolia mi „padnú” do ε-ového okolie bodu $s(a)$. Toto však môže nastať iba v prípade, že funkcia $s(t)$ je definovaná v nejakom okolí bodu a.

Definícia 26. *Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí bodu a. Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď ku každému ε-ovému okoliu $O_\varepsilon(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje δ okolie $O_\delta(a)$ bodu a také, že pre všetky $x\in O_\delta(a)$ platí $f(x)\in O_\varepsilon(f(a))$.*

Pomocou definície 25 možno preformulovať definíciu 26 nasledovne.

Definícia 27. *Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí bodu a, jej definičný obor nech je množnina D(f). Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď* $\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists \delta \in R^+$ *, že pre* $\forall x \in D(f)$*;* $a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$.

Poznámka: Podmienka $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ je ekvivalentná s podmienkou $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Dôsledok. Ak funkcia f je spojitá v bode a a $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), tak existuje také δ - okolie bodu a , že pre všetky reálne čísla z tohto okolia platí $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Dôkaz. Toto tvrdenie vyplýva priamo z definície 27. Stačí zvoliť vhodné reálne číslo ε. V prvom prípade $f(a) > \varepsilon > 0$. Ak k tomuto ε nájdeme príslušné reálne číslo δ, tak pre všetky reálne čísla x platí $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) - \varepsilon > 0$. Druhý prípad, keď je príslušná funkčná hodnota záporná sa dokáže analogicky.

Ako funguje definícia 27 si ukážeme aj na nasledovnom príklade.

Príklad 1. Dokážte, že funkcia 2x + 5 je spojitá v bode 3. Nájdite vhodné δ pre $\varepsilon = 0,1$.

Riešenie. Najprv budeme pre každé ϵ hľadať vhodné δ. Podľa definície 27 by sme potrebovali, aby $11 - \varepsilon < 2x + 5 < 11 + \varepsilon$. Odtiaľ $6 - \varepsilon < 2x < 6 + \varepsilon$ a nakoniec

$3-\dfrac{\varepsilon}{2} < x < 3+\dfrac{\varepsilon}{2}$. Teda zvolíme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ak by sme doterajší postup otočili, dokázali by sme spojitosť funkcie $2x + 5$ v bode 3.

Funkcia $2x + 5$ je spojitá nielen v bode 3, ale v každom reálnom čísle.

Definícia 28. *Funkcia f je spojitá na množine* $A \subset R$ *práve vtedy, keď je spojitá v každom bode množiny* A.

Príklad 2. Dokážte, že

1. funkcie x^2, cx (c je reálna konštanta) sú spojité na množine všetkých reálnych čísel.

2. funkcia $\frac{1}{x}$ je spojitá na množine všetkých reálnych čísel rôznych od nuly.

Riešenie.

1. Nech a je reálne číslo. Nech ε je kladné reálne číslo a pre toto číslo nájdime kladné reálne číslo δ, pre ktoré platí $\delta < 1$ a súčasne $\delta < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$. V zmysle definície 27 potrebujem pre funkciu $y = x^2$ dokázať, že ak $|x - a| < \delta$, tak potom $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Keďže sme δ zvolili menšie ako 1, platí $|x| < |a| + 1$. Ďalej
   $|x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a||x + a| \leq |x - a|(|x| + |a|) <$
   $< |x - a|(|a| + 1 + |a|) = |x - a|(2|a| + 1) < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}(2|a| + 1) = \varepsilon$.

   Pokračujme teraz funkciou $y = cx$. Teraz nech ε je kladné reálne číslo a pre toto číslo nájdime kladné reálne číslo δ, pre ktoré platí $\delta < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ak $|x - a| < \delta$, tak potom $|cx - ca| = |c|.|x - a| < |c|.\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$.

2. Nech a je reálne číslo rôzne od nuly. Zvoľme pre kladné reálne číslo ε kladné reálne číslo $\delta,$ pre ktoré platí $\delta < \dfrac{|a|}{2}$ a súčasne $\delta < \dfrac{1}{2}a^2\varepsilon.$

   Ak teda $|x{-}a| < \delta$, tak potom $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{x-a}{xa}\right| = \dfrac{|x-a|}{|x||a|}.$

   Vďaka podmienkam pre δ platí $|x| > \frac{|a|}{2}$. Potom

$$\frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{|x-a|}{\frac{|a|}{2}|a|} = \frac{|x-a|}{\frac{a^2}{2}} < \frac{1}{\frac{a^2}{2}}\frac{1}{2}a^2\varepsilon = \varepsilon.$$

Na spojitú funkciu $2x+5$ sa môžme pozerať aj ako na súčet spojitej funkcie $2x$ a spojitej konštantnej funkcie 5. Preto sa teraz budeme zaoberať súčtom, rozdielom, súčinom a podielom spojitých funkcií.

Veta 9. *(Spojitosť zloženej funkcie) Nech funkcia f je spojitá v bode a a funkcia g v bode $b = f(a)$. Potom zložená funkcia $h(x) = g(f(x))$ je spojitá v bode a.*

Dôkaz. Keďže funkcia g je spojitá v bode $f(a)$, tak pre každé okolie $O_\varepsilon(g(f(a)))$, existuje okolie $O_\tau(f(a))$, že pre všetky $y \in O_\tau(f(a))$ platí, že $g(y) \in O_\varepsilon(g(f(a)))$. Keďže aj f je spojitá v bode a, tak pre $O_\tau(f(a))$ existuje $O_\delta(a)$, že pre všetky $x \in$ $\in O_\delta(a)$, platí $f(x) \in O_\tau(f(a))$. Ďalej ak vezmeme $x \in O_\delta(a)$, tak $y = f(x) \in$ $\in O_\tau(f(a))$. Preto potom $g(y) = g(f(x)) \in O_\varepsilon(g(f(a)))$. Funkcia $g(f(x))$ je spojitá v bode a. □

Podľa príkladu 2 funkcia $y = x^2$ je spojitá na množine reálnych čísel, preto ak funkcia $g(x)$ je spojitá v bode a, tak funkcia $g^2(x)$ je spojitá v bode a. Funkcia $y = cx$, kde c je reálna konštanta, je spojitá na množine reálnych čísel. Potom ak funkcia $g(x)$ je spojitá v bode a, tak aj funkcia $cg(x)$ je spojitá v bode a. Ďalej funkcia $\frac{1}{x}$ je spojitá na množine všetkých reálnych čísel rôznych od nuly. Teraz ak funkcia $f(x)$ je spojitá v bode a, pričom $f(a) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{1}{f(x)}$ je spojitá v bode a. Tieto poznatky použijeme v nasledujúcej vete.

Veta 10. *Nech funkcie f, g sú definované v nejakom okolí bodu a, nech sú spojité v bode a. Potom funkcie*

1. $f(x) + g(x)$,
2. $f(x) - g(x)$,
3. $f(x)g(x)$,
4. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ *v prípade, že $f(a) \neq 0$ sú spojité v bode a.*

Dôkaz.

1. Keďže f je spojitá, tak pre každé $\varepsilon \in R^+$, existuje $\delta_1 \in R^+$, že pre všetky $x \in R$ platí

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobne aj g je spojitá, tak pre každé $\varepsilon \in R^+$, existuje $\delta_2 \in R^+$, že pre všetky $x \in R$ platí

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ak vezmeme ako δ menšie číslo z čísel δ_1, δ_2, tak pre všetky reálne čísla x platí

$$|x-a| < \delta \Rightarrow \left(|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Z poslednej podmienky vyplýva, že ak reálne číslo x spĺňa podmienku $|x-a| < < \delta$, tak $|f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))| = |f(x)-f(a)+g(x)-g(a)| \leq$

$$\leq |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tým sme dokázali, že funkcia $f(x)+g(x)$ je spojitá v bode a.

2. Keďže funkcia $g(x)$ je spojitá v bode v bode a, tak aj funkcia $(-1)g(x) = -g(x)$ je spojitá v bode v bode a a podľa predchádzajúcej časti aj $f(x)-g(x) = = f(x) + (-g(x))$ je spojitá v bode a.

3. Funkciu $f(x)g(x)$ vyjadrime: $f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left[(f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2\right]$. Keďže $(f(x)+g(x))^2$, $(f(x)-g(x))^2$ sú spojité funkcie, tak aj $f(x)g(x) = = \frac{1}{4}\left[(f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2\right]$ je spojitá funkcia.

4. Funkcia $\frac{1}{f(x)}$ je spojitá v bode a. Podľa predchádzajúcej dokázanej časti funkcia $\frac{g(x)}{f(x)} = g(x)\frac{1}{f(x)}$ je spojitá v bode a. $\square$

Cvičenia

1. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Ako by ste zovšeobecnili tento poznatok pre lineárne lomené funkcie?

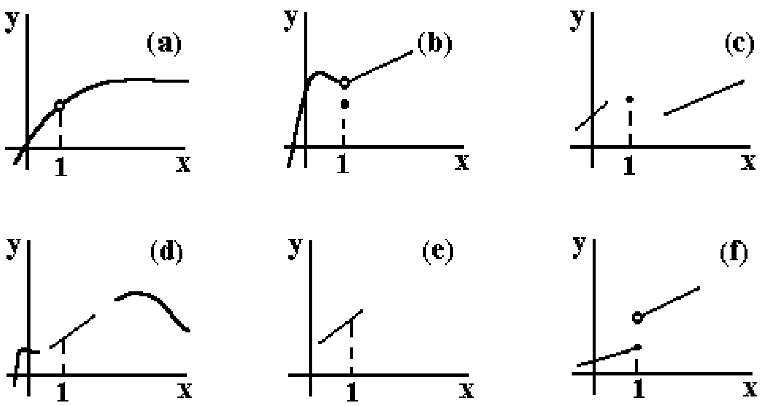
2. Zistite, či je funkcia

$$\text{(a)} \qquad g(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \text{ spojitá v bode 3,}$$

$$\text{(b)} \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x = 0, \\ \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0 \text{ spojitá v bode 0.} \end{cases}$$

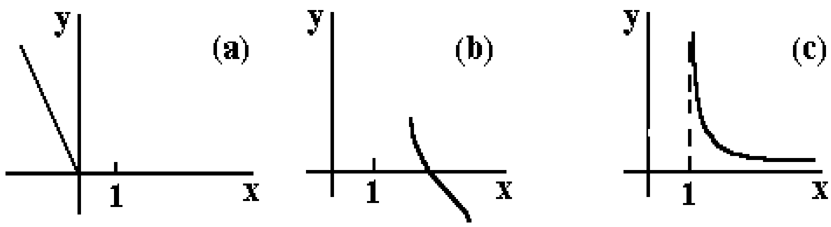
3. Zistite, či dané funkcie zadané svojimi grafmi sú spojité v bode 1.

Obr. 60



4. Dokreslite graf funkcie tak, aby bola spojitá v bode 1 (ak sa to dá).

Obr. 61

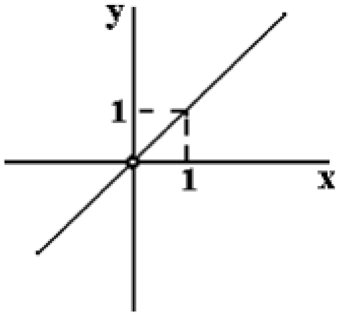


5. Dokážte pomocou definície, že funkcia y = x^3 je spojitá v bode 2.
6. Dokážte pomocou viet uvedených v tejto kapitole, že funkcie x^3 a $3x^2 - 6x + 5$ sú spojité v každom reálnom čísle.

B.2.2 Limita funkcie v bode

Nie každá funkcia je spojitá, iste si pamätáme na funkciu $y = \frac{1}{x}$, ktorá nie je spojitá v bode 0. Ak si vezmeme funkciu $\frac{x^2}{x}$, tá tiež nie je spojitá v bode 0, ale je možné ju „dodefinovať" tak, aby sa stala spojitou (pozri obr. 62).

Obr. 62



Túto funkciu by stačilo dodefinovať tak, že by sme bodu 0 priradili funkčnú hodnotu 0. Okrem toho z grafu vidieť, že ak by sme sa približovali k bodu 0, funkčné hodnoty funkcie $\frac{x^2}{x}$ sa približujú k číslu 0. Toto číslo budeme nazývať **limitou funkcie v bode 0**. Tento pojem presnejšie formulujme v nasledovnej definícii.

Definícia 29. *Nech M je otvorený interval obsahujúci bod a a funkcia f je definovaná na množine $M - \{a\}$. Nech k je reálne číslo. Označme F ako funkciu, pre ktorú platí:*

1. *$F(x) = f(x)$ pre každé $x \neq a$ v definičnom obore funkcie f,*
2. *$F(a) = k$.*

Limitou funkcie f v bode a je číslo k práve vtedy, keď funkcia F je spojitá v bode a.

To označíme nasledovne: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$.

Príklad 1. Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 3}(2x + 5)$.
Riešenie. Pre funkciu $f(x) = 2x + 5$ je funkciou

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{pre každé } x \neq 3, \\ k & \text{pre } x = 3. \end{cases}$$

V príklade 1 v predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že funkcia $2x+5$ je spojitá v bode 3 a jej funkčná hodnota v tomto bode je 11. Preto je pochopiteľné, že $F(3) = 11$. Tak dostávame, že $\lim\limits_{x \to 3}(2x + 5) = 11$.
Poznámka: Tento príklad ukazuje, že ak $f(x)$ je spojitá funkcia, tak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Príklad 2. Vypočítajte

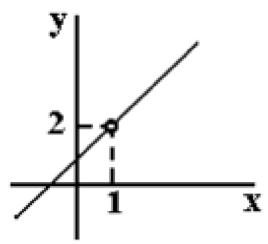
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Riešenie. V tomto prípade

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 & \text{pre každé } x \neq 1, \\ k & \text{pre } x = 1. \end{cases}$$

Funkcia $F(x)$ je lineárna funkcia, ktorá je definovaná v každom reálnom čísle okrem čísla 1. Ak by sme si ju znázornili graficky, vidíme, že stačí položiť $F(1) = 2$ a

Obr. 63



funkcia F sa stane spojitou. Preto platí $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Aby sme mohli počítať limity ďalších funkcií, k tomu nám pomôže nasledujúca veta.

Veta 11.

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. *Potom platí*

$$\begin{aligned}
&1. \quad \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c,\\
&2. \quad \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = b-c,\\
&3. \quad \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc,\\
&4. \quad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c} \text{ v prípade, že } c \neq 0.
\end{aligned}$$

Dôkaz. Keďže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ v zmysle definície 18 funkcie $F(x)$ a $G(x)$, ktoré prislúchajú funkciám $f(x)$ a $g(x)$, sú spojité v bode a, pričom platí $F(a) = b$, $G(a) = c$. Podľa vety 10 sú aj funkcie

$$F(x)+G(x),\ F(x)-G(x),\ F(x)G(x),\ \frac{F(x)}{G(x)}$$

spojité v bode a, pričom vzhľadom k definícii 18 prislúchajú funkciám

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Keďže $F(a)+G(a) = b+c$, $F(a)-G(a) = b-c$, $F(a)G(a) = bc$, $\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{b}{c}$, tak $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = b-c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}. \quad \square$$

Príklad 3.

$$\text{Vypočítajte } \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2-3x+2}\right).$$

Riešenie. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=3-1=2$$

Cvičenia

1. Pomocou definície limity funkcie v bode určte

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1}(x+3),\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

2. Vypočítajte limity

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2},\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{5x^2-20}{x-2}+\frac{x^2-9}{x+3}\right),$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\qquad \text{(d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.$$

3. Doplňte predpis pre funkciu f(ak je to možné) tak, aby $\lim_{x\to 3} f(x)=0$.

$$\text{(a)}\qquad f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{pre } x\in(-10,3\rangle,\\ \dots & \text{pre } x\in(3,25),\end{cases}$$

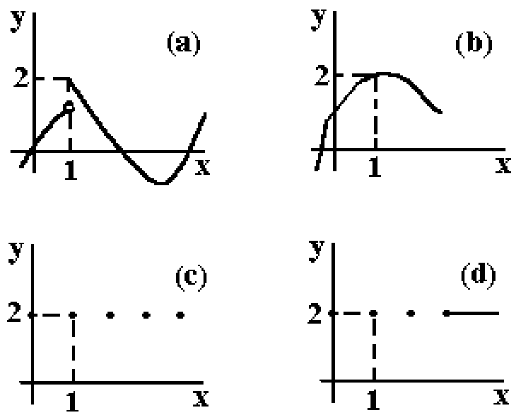
$$\text{(b)}\qquad f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{pre } x\in(-\infty,3\rangle,\\ \dots & \text{pre } x\in(3,\infty),\end{cases}$$

$$\text{(c)}\qquad f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{pre } x\in(-\infty,3)\cup(3,\infty),\\ \dots & \text{pre } x=3,\end{cases}$$

$$\text{(d)}\qquad f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{pre } x\in(-\infty,3),\\ \dots & \text{pre } x\in\langle 3,\infty).\end{cases}$$

4. Pre funkciu g platí, že $\lim_{x\to 1} g(x)=2$. Ktorý z uvedených grafov (pozri obr. 64) by mohol byť grafom tejto funkcie?

Obr. 64



B.3 Derivácia funkcie

B.3.1 „Rýchlosť zmeny"

Iste sa už každý viezol v aute a mal príležitosť sledovať napríklad na diaľnici tabule, ktoré označujú príslušný kilometer diaľnice. Tomu je venovaná nasledovná úloha.
Príklad 1. Vodič pohybujúci sa stálou rýchlosťou po priamej diaľnici si všimol, že jeho tachometer ukazuje rýchlosť 120 $km.h^{-1}$. Jeho spolujazdec si všimol, že úsek medzi 56 a 57 kilometrom diaľnice prešli za 30 sekúnd. Ukazuje tachometer správnu rýchlosť?
Riešenie. Áno, pretože za minútu by auto prešlo 2 km a za hodinu, čo je 60 minút by prešlo $2.\ 60 = 120\ km$. Ale nie vždy je pohyb určitého telesa taký jednoduchý.
Príklad 2. Peter sa vybral na cyklotúru. Vyštartoval popoludní o 13.00 hodine a do cieľa dorazil večer o 18:00 hodine. Dráhu v kilometroch, ktorú prešiel na bicykli počas doby t v hodinách od okamihu štartu vyjadruje funkcia

$$f(t) = \frac{23t(10-t)}{5}.$$

1. Po troch hodinách jazdy stretol na ceste Juraja. Akú vzdialenosť vtedy prešiel od okamihu štartu?

2. Na druhý deň bol Juraj zvedavý na to, akú priemernú rýchlosť mal Peter počas tých troch hodín.

3. Akú priemernú rýchlosť mal Peter za posledné dve hodiny, hodinu, polhodinu kým stretol Juraja?

4. Peter mal na bicykli aj tachometer. Čo mohol ukazovať o 16:00 hodine, keď stretol Juraja?

Riešenie.

1. Od okamihu štartu prešiel vzdialenosť

$$f(3) = \frac{23.3(10-3)}{5} = 96,6\,km.$$

2. Keďže priemerná rýchlosť je podiel celkovej prejdenej dráhy za daný časový interval, tak v tomto prípade je priemerná rýchlosť

$$v_p = \frac{96,6\,km}{3\,h} = 32,2\,km.h^{-1}.$$

3. Tu si pomôžeme tabuľkou, do ktorej zapíšeme vzdialenosti, ktoré prešiel Peter po časoch, ktoré budeme potrebovať pri riešení úlohy.

t	1	2	2,5	3
$f(t)$	41,4	73,6	86,25	96,6

Medzi prvou a treťou hodinou jazdy prešiel Peter $(96,6-41,4)\,km = 55,2\,km$. Preto je ho priemerná rýchlosť za tieto dve hodiny je

$$v_1 = \frac{55,2\,km}{2\,h} = 27,6\,km.h^{-1}.$$

Medzi druhou a treťou hodinou prešiel $(96,6-73,6)\,km = 23\,km$. Preto jeho priemerná rýchlosť $v_2 = 23\,km.h^{-1}$. A za poslednú polhodinu pred stretnutím s Jurajom prešiel $(96,6-86,25)\,km =$ 10,35 km. Jeho priemerná rýchlosť bola

$$v_3 = \frac{10,35\,km}{0,5\,h} = 20,7\,km.h^{-1}.$$

4. Tachometer musel ukazovať rýchlosť, ktorú mal Peter v okamihu 16:00 hodiny, teda *okamžitú rýchlosť*. Priblížime si ju na priemerných rýchlostiach, za časové inervaly, ktoré sa postupne skracujú. Preto budeme pokračovať v tabuľke z predchádzajúcej časti, pričom do tabuľky budeme zapisovať aj priemerné rýchlosti za časový interval medzi okamihom t a $t_0 = 3\,h$, resp. $t_0 = 3\,h$ a t, ktoré vypočítame podľa vzťahu

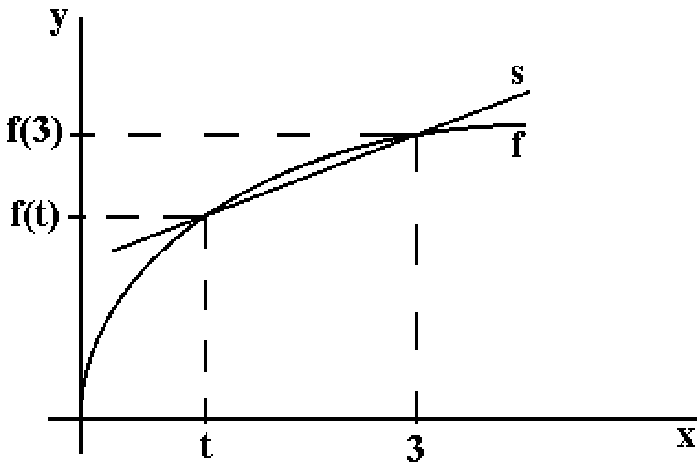
$$v(t) = \frac{f(t)-f(3)}{t-3}.$$

t	2,5	2,9	2,99	3,5	3,1	3,01
$f(t)$	86,25	94,714	96,41554	104,65	98,394	96,78354
$v(t)$	20,7	18,86	18,446	16,1	17,94	18,354

Z tabuľky vidíme, že hodnota okamžitej rýchlosti bude niekde medzi hodnotami 18,354 $km.h^{-1}$ a 18,446 $km.h^{-1}$. Preto s presnosťou na jedno desatinné miesto môžeme povedať, že okamžitá rýchlosť Petra o 16:00 hodine bola 18,4 $km.h^{-1}$.

Aký geometrický význam má funkcia $v(t)$? Ak by sme si nakreslili graf funkcie $f(t)$, tak vidíme, že rozdiel $f(t) - f(3)$ je zmena funkčnej hodnoty funkcie f medzi bodmi t a 3.

Obr. 65



Potom hodnota $v(t)$ je smernicou sečnice grafu funkcie f, ktorá prechádza bodmi $[t, f(t)]$ a $[3, f(3)]$.

Všimnime si teraz funkčný predpis funkcie $v(t)$. V predchádzajucom príklade sme ju potrebovali mať definovanú pre $t \in \langle 0, 5\rangle$. Ona však nie je definovaná ani v bode 3. V ostatných bodoch jej predpis získame tak, že dosadíme za $f(t)$.

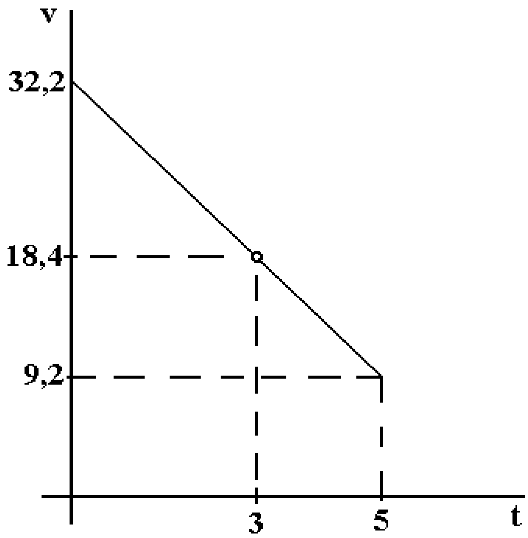
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\dfrac{23t(10-t)}{5} - 96,6}{t-3} = \frac{\dfrac{23t(10-t) - 483}{5}}{t-3} = \frac{230t - 23t^2 - 483}{5(t-3)} = \\ &= \frac{23(10t - t^2 - 21)}{5(t-3)} = \frac{23(t-3)(7-t)}{5(t-3)} = \frac{23}{5}(7-t) \end{aligned}$$

Keby sme nakreslili graf tejto funkcie na intervale $\langle 0, 5\rangle$, dostali by sme nasledovný graf (pozri obr. 66). Je to lineárna funkcia, ktorá nie je v bode 3 definovaná. „Dodefinujme" ju tak, že

$$v(3) = \frac{23}{5}(7-3) = 18,4.$$

Tak by sa táto funkcia stala spojitou. A hodnota 18,4 je v zmysle predchádzajúceho príkladu hodnota *okamžitej rýchlosti*, pretože k tejto hodnote sa „blížia" hodnoty priemernej rýchlosti Petra medzi okamihmi t a $t_0 = 3h$, ak sa t „blíži" k t_0.

Obr. 66



Je táto hodnota okamžitej rýchlosti v nejakom vzťahu k závislosti prejdenej dráhy od času? Už sme spomínali, že hodnoty priemerných rýchlostí, ktoré sme počítali, sú smernicami sečníc grafu funkcie f, pričom prechádzajú bodmi $[t, f(t)]$ a $[3, f(3)]$. Ak sa t „blíži” k $t_0 = 3\ h$, tak sa bod $[t, f(t)]$ „blíži” k bodu $[3, f(3)]$. To ale znamená, že sa sečnica „blíži” k dotyčnici ku grafu funkcie f v bode $[3, f(3)]$ a hodnota okamžitej rýchlosti vyjadruje smernicu tejto dotyčnice.

Akú informáciu nám môže poskytnúť smernica dotyčnice grafu nejakej funkcie? Podobne ako v predchádzajúcom príklade sme hľadali okamžitú rýchlosť cyklistu v určitom časovom okamihu, tak aj smernica dotyčnice grafu funkcie v bode nám môže poskytnúť informáciu, ako „rýchlo rastie” alebo „klesá” táto funkcia v danom bode alebo v jeho „blízkom” okolí.

To môže mať význam aj v iných oblastiach ľudskej činnosti, čo nám napovie aj nasledovný príklad.

Príklad 3. Manažment cukrovaru analyzoval svoje výrobné náklady a zistil, že tieto náklady predstavujú pri výrobe x ton cukru $(40x^2 - 52x + 41690)$ Sk. Aké sú ich marginálne náklady(rýchlosť rastu funkcie výrobných nákladov) pri produkcii

1. 4 ton cukru,
2. 6,5 tony cukru?

Riešenie.

1. Výrobné náklady podniku pri výrobe 4 ton cukru sú $(40.4^2 - 52.4 + 41690)$ Sk= 42122 Sk. Označme si funkciu výrobných nákladov ako f. Priemernú rýchlosť zmeny výrobných nákladov pri vzraste produkcie podniku z x ton cukru na 4 tony cukru alebo zo 4 ton cukru na x ton cukru vyjadruje funkcia definovaná

pre $x \neq 4$

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{40x^2-52x+41690-42122}{x-4} = \frac{40x^2-52x-432}{x-4} = \\ &= \frac{4(10x^2-13x-108)}{x-4} = \frac{40(x^2-1,3x-10,8)}{x-4}. \end{aligned}$$

Vo výraze pre v v čitateli $f(x)-f(4)$ je kvadratický trojčlen, ktorý je deliteľný výrazom $x-4$. To nám pomôže pri ďalšom výpočte.

$$v(x) = \frac{40(x-4)(x+2,7)}{x-4} = 40(x+2,7)$$

Dostali sme lineárnu funkciu, ktorá nie je spojitá v bode 4. Preto ju treba „dodefinovať" pomocou $v(4) = 40(4+2,7) = 268$. Preto sú marginálne náklady pri produkcii 4 tony cukru 268 Sk.

2. Predchádzajúce výpočty by sa dali zovšeobecniť aj pre ľubovoľnú produkciu a ton cukru. Vtedy priemerná rýchlosť zmeny výrobných nákladov pri vzraste produkcie podniku z x ton cukru na a ton cukru alebo z a ton cukru na x ton cukru vyjadruje funkcia definovaná pre $x \neq a$

$$\begin{aligned} v_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{40x^2-52x+41690-(40a^2-52a+41690)}{x-a} = \\ = \frac{40(x^2-a^2)-52(x-a)}{x-a} &= \frac{(x-a)(40(x+a)-52)}{x-a} = 40(x+a)-52 \end{aligned}$$

Túto lineárnu funkciu treba ešte „dodefinovať" pomocou $v_a(a) = 40(a+a) - 52 = 80a - 52$. Vtedy sa stane táto funkcia spojitou. Preto pri úrovni výroby 6,5 tony budú marginálne náklady $(80.6,5-52)$ Sk = 468 Sk.

Cvičenia

1. Závislosť dráhy padajúceho kameňa v metroch od času vyjadreného v sekundách je približne $s = 5t^2$. Odhadnite rýchlosť kameňa podobným spôsobom ako v príklade 2 v okamihu $t = 4\ s$.

2. Pokúste sa pomocou odhadu určiť rovnicu dotyčnice ku krivke $y = x^3$ v bode $[1,1]$.

3. Závislosť výšky slnečnice od času možno aproximovať pomocou funkcie

$$H(t) = \frac{10}{1+9e^{-t}},$$

kde H je výška slnečnice v metroch a t je čas v mesiacoch. Odhadnite rýchlosť rastu slnečnice pre $t = 1$ a $t = 5$. Kedy rástla slnečnica rýchlejšie?

4. Odhadnite smernicu dotyčníc funkcie f: $y = x^2 - 6x$ vedených bodmi $a)1$, $b)3$, $c)5$.
Majú tieto hodnoty nejakú súvislosť s tvarom grafu funkcie f ?

B.3.2 Definícia derivácie funkcie v bode

V príkladoch 2 a 3 z kapitoly B.3.1 sme pri hľadaní „rýchlosti rastu" funkcie f v bode a využívali funkciu
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
Keďže určuje, ako sme už predtým spomínali, smernicu sečnice grafu funkcie f, budeme ju nazývať **funkcia smernice sečnice**. Keďže nie je v bode a spojitá, tak sme ju vždy museli „dodefinovať" tak, aby sa stala spojitou. Pri niektorých funkciách f to je možné, pri iných nie. Tie funkcie, pri ktorých je to možné, budeme nazývať **funkcie diferencovateľné v bode a**. Tieto poznatky formulujeme v nasledovnej definícii.

Definícia 30. *Nech funkcia f je definovaná na intervale I, nech a je bod z intervalu I a nech k je reálne číslo. Ak funkcia smernice sečnice definovaná na I*
$$s_{f,a}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pre } x\neq a,\\ k & \text{pre } x=a\end{cases}$$
je spojitá v bode a, tak funkcia f je diferencovateľná v bode a. Číslo k sa nazýva derivácia funkcie f v bode a, označujeme ju $f'(a)$.

V zmysle tejto definície je napríklad okamžitá rýchlosť *deriváciou dráhy podľa času*, marginálne náklady sú *deriváciou funkcie výrobných nákladov podľa počtu vyrobených výrobkov* a z geometrického hľadiska je derivácia smernicou dotyčnice grafu funkcie v bode. Podobne by sa dala derivácia funkcie využiť aj v iných oblastiach.
Príklad 1. Nech $f(x)=x^3$ je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Dokážte, že funkcia f je diferencovateľná v bode 2 a nájdite $f'(x)$.
Riešenie.

Podľa definície pre $x\neq 2$ je $s_{f,2}(x)=\dfrac{x^3-2^3}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4.$

Grafom tejto funkcie je parabola, ktorá nie je definovaná v bode 2. Preto stačí položiť $s_{f,2}(2)=2^2+2.2+4=12$ a funkcia sa stane spojitou. Preto $f'(2)=12$.
Príklad 2. Nech $f(x)=|x-2|$. Dokážte, že táto funkcia nie je diferencovateľná v bode 2.
Riešenie.

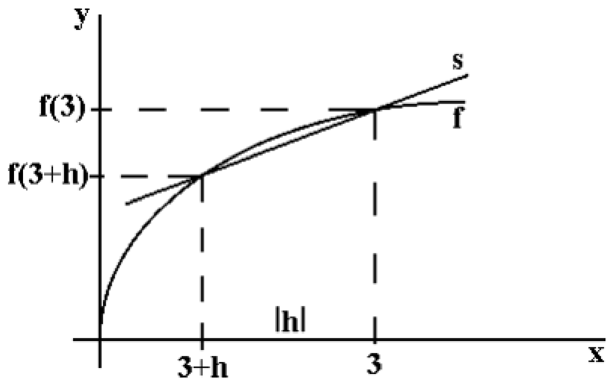
Podľa definície pre $x\neq 2$ je $s_{f,2}(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}1 & \text{pre } x>2,\\ -1 & \text{pre } x<2.\end{cases}$

Pre $x>2$ je grafom tejto funkcie konštantná funkcia s funkčnou hodnotou 1 a pre $x<2$ je grafom tejto funkcie konštantná funkcia s funkčnou hodnotou -1. Preto nie je možné zvoliť žiadne reálne číslo $k=s_{f,2}(2)$, aby sa funkcia stala spojitou. Teda funkcia f nie je diferencovateľná v bode 2.
Príklad 3. Nech f je konštantná funkcia definovaná na množine reálnych čísel a nech a je reálne číslo. Dokážte, že táto funkcia je diferencovateľná v bode a. Nájdite $f'(a)$.

Riešenie. Nech $f(x) = c$, kde c je reálne číslo. Potom $f(x) - f(a) = c - c = 0$. Preto v zmysle definície $s_{f,a}(x) = 0$ pre všetky reálne čísla $x \neq a$. Jej grafom je os x okrem bodu a. Preto je pochopiteľné, že ak položíme $s_{f,a}(a) = 0$, tak funkcia $s_{f,a}(x)$ sa stane spojitou a funkcia f je diferencovateľná v bode a, pričom $f'(a) = s_{f,a}(a) = 0$.

Vráťme sa teraz k príkladu 2 z kapitoly B.3.1. V tomto príklade sme spomínali, že priemerná rýchlosť je smernicou sečnice grafu závislosti dráhy od času. Body sečnice by sme mohli zadať aj iným spôsobom. V príklade to boli body $[t, f(t)]$ a $[3, f(3)]$. Bod $[t, f(t)]$ by sa dal zapísať aj ako $[3 + h, f(3 + h)]$, kde $|h|$ by bola vzdialenosť bodu $3 + h$ od bodu 3 na osi x.

Obr. 67



Znamienko čísla h by určovalo, či by bod $3 + h$ bol „napravo” alebo „naľavo” od bodu 3. Tieto úvahy, ktoré sme urobili, pre bod $[3, f(3)]$, ktorý bol pre nás pevný, sa dajú zovšeobecniť pre každý bod $[a, f(a)]$. Využijeme to v nasledujúcej vete, ktorá nám pomôže pri výpočte niektorých derivácií.

Veta 12. *Nech funkcia f je definovaná na intervale I, nech a je bod z intervalu I. Nasledovné tvrdenia sú navzájom ekvivalentné:*

1. *Funkcia f je diferencovateľná v bode a.*
2. *Existuje limita* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Ak uvedené tvrdenia platia, tak $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Dôkaz. Podľa definície 18 $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existuje práve vtedy,

keď funkcia $F(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} & \text{pre } h \neq 0, \\ k & \text{pre } h = 0 \end{cases}$

definovaná na I je spojitá v bode 0, pričom $k = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Urobme v definícii 30 vo vzťahu pre funkciu smernice sečnice $s_{f,a}(x)$ substitúciu $x - a = h$. Dostaneme, že $x = a + h$, a tak zistíme, že $F(h) = s_{f,a}(a + h)$. Preto funkcia F je spojitá v bode 0 práve vtedy, keď funkcia $s_{f,a}(x)$ je spojitá v bode a. To podľa definície 30 nastane práve vtedy, keď je funkcia f diferencovateľná v bode a. Ďalej podľa definície 30 ak je funkcia f diferencovateľná v bode a, tak

$$f'(a) = s_{f,a}(a) = F(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad \square$$

Poznámka: Limita uvedená v tejto vete sa často používa ako definícia derivácie funkcie v bode.

Príklad 4. Nech $f = x^n$, kde n je prirodzené číslo. Nájdite $f'(a)$.

Riešenie. Podľa vety 12 vypočítame

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - (a)^n}{h} = \\
= \; &\lim_{h\to 0} \frac{\left[a^n + na^{n-1}h + \binom{n}{2} a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right] - a^n}{h} = \\
= \; &\lim_{h\to 0} \frac{h\left[na^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right]}{h} = \\
= \; &\lim_{h\to 0} \left[na^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right] = na^{n-1}.
\end{aligned}$$

Preto $f'(a) = na^{n-1}$.

Na deriváciu funkcie sa môžeme pozerať ako na funkciu, preto je prirodzené zapisovať $f'(x) = nx^{n-1}$. Preto $(x^4)' = 4x^3$.

V kapitole B.2.1 sme dokázali, že ak f je spojitá funkcia v bode a, tak aj jej reálny násobok je spojitá funkcia. Ak sú dve funkcie spojité v bode a, tak aj ich súčet je spojitá funkcia v bode a. Podobne je to aj s diferencovateľnosťou funkcie v bode.

Veta 13. *Ak f, g sú funkcie diferencovateľné v bode a a c je reálne číslo, tak sú diferencovateľné aj funkcie $cf, f + g$ v bode a, pričom platí $(cf)'(a) = c(f'(a))$, $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

Dôkaz. Ak f, g sú funkcie diferencovateľné v bode a, potom ich príslušné funkcie smernice sečnice $s_{f,a}(x), s_{g,a}(x)$ sú spojité v bode a. Pre $x \neq a$ ďalej platí

$$s_{f+g,a}(x) = \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x-a} =$$

$$= \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = s_{f,a}(x) + s_{g,a}(x).$$

Podobne platí $s_{cf,a}(x) = \dfrac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} = \dfrac{cf(x) - cf(a)}{x-a} = c\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = cs_{f,a}(x)$.

Podľa vety 10 je funkcia $s_{f,a}(x) + s_{g,a}(x) = s_{f+g,a}(x)$ je tiež spojitá v bode a. Preto funkcia $(f+g)(x)$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(f+g)'(a) = s_{f+g,a}(a) = s_{f,a}(a) + s_{g,a}(a) = f'(a) + g'(a).$$

Podľa príkladu 2 z kapitoly B.2.1 je funkcia $s_{cf,a}(x) = cs_{f,a}(x)$ spojitá v bode a. Preto funkcia $(cf)(x)$ je diferencovateľná v bode a, ďalej

$$(cf)'(a) = s_{cf,a}(a) = cs_{f,a}(a) = c(f'(a)). \qquad \square$$

Príklad 5. Nech $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x - 6$. Napíšte všeobecnú rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[4, f(4)]$.
Riešenie. Z analytickej geometrie využijeme smernicový tvar rovnice priamky, v našom prípade $y - f(4) = k(x-4)$, kde k je smernica dotyčnice. Vypočítame funkčnú hodnotu:

$$f(4) = 4^4 - 4.4^3 + 2.4 - 6 = 2.$$

Ako sme už spomínali, derivácia funkcie v bode je smernicou dotyčnice v bode. Preto $k = f'(4)$. $f'(x) = 4x^3 - 4.(3x^2) + 2.1 + 0 = 4x^3 - 12x^2 + 2$. $k = f'(4) = 4.4^3 - 12.4^2 + 2 = (16-12).16 + 2 = 66$. Rovnica dotyčnice bude $y - 2 = 66(x-4)$. Odtiaľ dostaneme všeobecnú rovnicu $66x - y - 262 = 0$.

Veta 14. *Nech funkcia f je diferencovateľná v bode a, ktorý je bodom intervalu I. Ak $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$, tak existuje δ - okolie bodu a v ktorom*

$$f(y) < f(a) < f(z) \quad (f(y) > f(a) > f(z))$$

pre všetky reálne čísla y, z δ - okolia bodu a spĺňajúcich podmienku $y < a < z$.

Dôkaz. Predpokladajme, že $f'(a) > 0$. Podľa definície 30 funkcia smernice sečnice definovaná na I

$$s_{f,a}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{pre } x \neq a, \\ k & \text{pre } x = a \end{cases}$$

je spojitá v bode a. Číslo $k = s_{f,a}(a)$ je deriváciou funkcie f v bode a a je podľa predpokladu kladné.

Keďže táto funkcia je spojitá a v bode a nadobúda kladnú funkčnú hodnotu, tak podľa dôsledku definície 27 existuje také δ - okolie bodu a, v ktorom funkcia $s_{f,a}(x)$ nadobúda kladné funkčné hodnoty, t. j.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \quad \text{pre } x \neq a.$$

Ak teraz si vezmeme reálne čísla y, z δ - okolia bodu a spĺňajúce podmienku $y < a < z$, tak $y - a < 0$ a $z - a > 0$. Potom musí platiť $f(y) - f(a) < 0$ a $f(z) - f(a) > 0$. Odtiaľ dostávame $f(y) < f(a) < f(z)$. Prípad, keď $f'(a) < 0$ sa dokáže analogicky. $\square$

Dôsledok Z definície rastúcej a klesajúcej funkcie vyplýva, že ak $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$, tak existuje δ - okolie bodu a v ktorom je funkcia f rastúca (klesajúca).

Nasledovné dve vety nám pomôžu ukázať súvis derivácie funkcie s tým, či je rastúca alebo klesajúca. $\square$

Veta 15. *Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a diferencovateľná na intervale (a, b). Potom existuje také reálne číslo $t \in (a, b)$, pre ktoré platí*

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Táto veta sa nazýva aj vetou o strednej hodonote. Jej geometrický význam spočíva v tom, že dotyčnica v bode t je rovnobežná so sečnicou prechádzajúcou bodmi $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.

Veta 16. *Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a diferencovateľná na intervale (a, b). Ak pre všetky $x \in (a, b)$ je $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$, tak funkcia f je rastúca (klesajúca) na (a, b).*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre rastúcu funkciu, lebo pre klesajúcu by sa urobil analogicky. Nech c, d sú čísla z intervalu (a, b), pričom $c < d$. Potom podľa vety o strednej hodnote existuje taký bod $v \in (c, d)$, že platí

$$f'(v) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Podľa predpokladu vety $f'(v)$ je kladné číslo. Preto

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} > 0.$$

Keďže $c < d$, tak $d - c > 0$ a $f(d) - f(c) > 0$. Odkiaľ $f(c) < f(d)$. □

Cvičenia

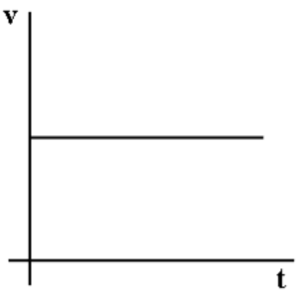
1. Pomocou definície 30 zistite, či
   (a) funkcia $x^3 - 4x$ je diferencovateľná v bode 1,
   (b) funkcia $\sqrt{x^2}$ je diferencovateľná v bode 0.
2. V ktorom bode grafu funkcie $x^3 + x - 2$ je dotyčnica k tejto funkcii rovnobežná s priamkou $4x - y - 1 = 0$?
3. Nájdite všeobecnú rovnicu dotyčnice ku krivke $y = x^3 + 3x^2 - 5$, ktorá je kolmá na priamku $2x - 6y + 1 = 0$.
4. Veľkosť tepla Q (v kalóriách) potrebná na zohriatie vody z 0 na t stupňov Celzia je $Q = t + 0,00002t^2 + 0,0000003t^3$. Nájdite špecifické teplo (veľkosť tepla potrebnú na zohriatie vody o stupeň Celzia) pri teplote 30 a 100 stupňov Celzia.
5. Vypočítajte derivácie funkcií
   (a) $x^3 - 6x^2 + 15$, (b) $x^3 - 24x^2 + 18x - 10$.

B.4 Určitý integrál

B.4.1 Obsah a integrál

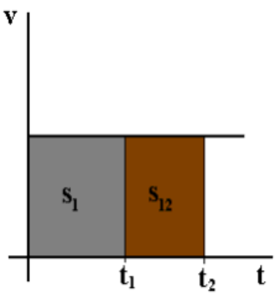
Vráťme sa k príkladu 1 z kapitoly B.3.1. Ak sa auto pohybuje po diaľnici konštantnou rýchlosťou, tak závislosť jeho rýchlosti od času je konštantná funkcia.

Obr. 68



Ak auto ide po diaľnici konštantnou rýchlosťou 120 kilometrov za hodinu, tak to znamená, že za jednu hodinu prejde 120 kilometrov. Preto je pochopiteľné, že ak by sme merali čas od okamihu $t_0 = 0\ s(0\ h)$, tak pre prejdenú dráhu s_1 spomínaného auta pri rýchlosti v platí $s_1 = vt_1$, kde t_1 je čas, ktorý uplynul od okamihu t_0. Graficky by sme mohli dráhu s znázorniť ako obdĺžnik „pod" grafom funkcie závislosti rýchlosti od času, pričom veľkosť rýchlosti je obsahom tohto obdĺžnika.

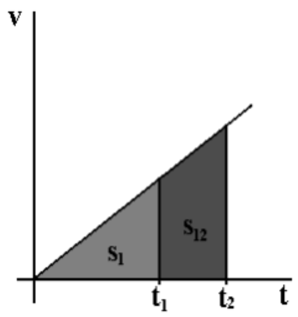
Obr. 69



Ak by sme chceli určiť veľkosť prejdenej dráhy s_2 za „dlhší" čas t_2, tak by $s_2 = vt_2$. Ak by nás zaujímala dráha s_{12} prejdená medzi okamihmi t_1 a t_2, tak už aj z obrázka vidíme, že $s_{12} = s_2 - s_1 = vt_2 - vt_1 = v(t_2 - t_1)$.

Nielen dráha je obsahom rovinného útvaru „pod" grafom funkcie závislosti rýchlosti od času, ale týmto spôsobom vzájomne súvisia aj iné fyzikálne veličiny. Rýchlosť je obsah rovinného útvaru „pod" grafom funkcie závislosti zrýchlenia od času. Pri voľnom páde sa teleso pohybuje s konštantným zrýchlením g, preto analogicky ako v predchádzajúcej úvahe pre jeho rýchlosť t_1 v čase t_1 platí $v_1 = gt_1$. Bolo by možné určiť dráhu tohto telesa v čase t_1? Už Galileo Galilei v 17. storočí prišiel na to, že sa to dá pomocou grafu závislosti rýchlosti od času.

Obr. 70



Dráhu telesa s_1 môžeme vypočítať ako obsah pravouhlého trojuholníka podľa vzťahu

$$s_1 = \frac{1}{2}v(t_1)t_1 = \frac{1}{2}gt_1t_1 = \frac{1}{2}gt_1^2.$$

Podobne by sme vypočítali pre čas t_2 prejdenú dráhu

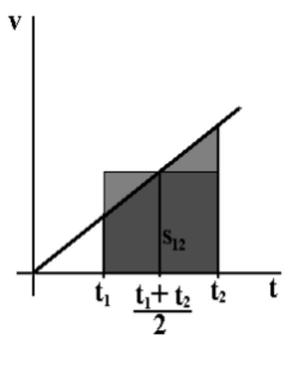
$$s_2 = \frac{1}{2}gt_2^2.$$

Ak $t_2 > t_1$ vypočítame dráhu s_{12} prejdenú medzi okamihmi t_1 a t_2 podľa vzťahu

$$s_{12} = s_2 - s_1 = \frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) = \left(g\frac{t_1 + t_2}{2}\right)(t_2 - t_1).$$

Všimnime si posledný výraz medzi veľkými zátvorkami. Aký je jeho význam?

Obr. 71

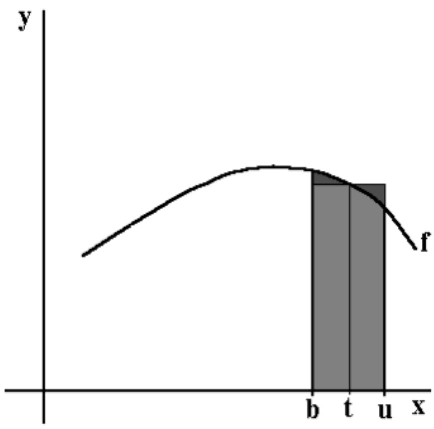


Tento výraz je priemerná rýchlosť telesa medzi časovými okamihmi t_1 a t_2, lebo by sme ho mohli získať ako podiel celkovej prejdenej dráhy a celkového času. Navyše, ak by sa teleso pohybovalo celý časový interval touto rýchlosťou, prešlo by práve celkovú dráhu telesa pri voľnom páde za tento istý časový interval. Graficky sa to dá znázorniť tak, že obsah obdĺžnika so stranami priemernej rýchlosti a časového intervalu je zhodný s obsahom lichobežníka - dráhou s_{12}. Všimnime si, že obsah trojuholníka, ktorým „prečnieva" obdĺžnik „ponad" lichobežník je zhodný s obsahom trojuholníka, ktorým „prečnieva" lichobežník „ponad" obdĺžnik.

Ďalej vidíme, že priemerná rýchlosť v našom prípade je rýchlosťou v okamihu aritmetického priemeru koncových bodov časového intervalu, resp. jej hodnota je v tomto prípade aritmetickým priemerom rýchlostí v koncových bodoch časového intervalu. Neplatí táto súvislosť vždy, ak by mala závislosť rýchlosti od času iný tvar, tak by to už neplatilo.

Aj v matematike existuje pojem, ktorý zodpovedá pojmu priemerná rýchlosť telesa medzi časovými okamihmi. Je ním *stredná hodnota funkcie f na intervale* $\langle a, b\rangle$. Graficky si ju môžeme znázorniť nasledovne.

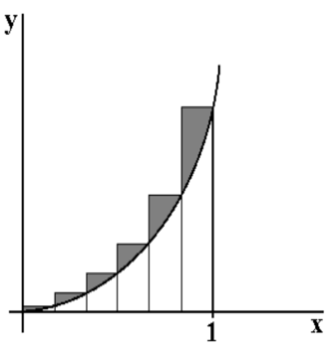
Obr. 72



Nech funkcia f je spojitá a definovaná na uzavretom intervale a body b, u sú body z tohto intervalu. Stredná hodnota funkcie $f(t)$ $(b \leq t \leq u)$ je číslo s vlastnosťou, že obsah obdĺžnika so stranami $f(t)$ a $u - b$ je zhodný s obsahom rovinného útvaru ohraničeného x-ovou osou, priamkami $x = b$, $x = u$ a grafom funkcie f. Na obrázku to môžeme vidieť tak, že obsah časti obdĺžnika, ktorý „prečnieva nad" útvar je zhodný s obsahom časti útvaru, ktorá „prečnieva nad" obdĺžnik.

John Wallis v 17. storočí vypočítal obsah rovinného útvaru ohraničeného x-ovou osou, grafom funkcie $y = x^2$ a priamkou $x = 1$.

Obr. 73



Rozdeľme interval $\langle 0,1\rangle$ na n rovnakých častí. Na obrázku vidíme rozdelenie intervalu na 6 častí. Namiesto priameho počítania obsahu daného útvaru, je jednoduchšie najprv vypočítať obsah mnohouholníka, ktorý sa skladá z obdĺžnikov. Jedna strana každého z obdĺžnikov je príslušná časť intervalu $\langle 0,1\rangle$. Druhá strana je funkčná hodnota funkcie $y = x^2$ v ľavom koncovom bode príslušnej časti intervalu $\langle 0,1\rangle$. Vzniknutý mnohouholník má prirodzene väčší obsah ako hľadaný rovinný útvar, ale ak bude prirodzené číslo n rásť nad „všetky medze”, tak delenie intervalu $\langle 0,1\rangle$ bude „jemnejšie”. Vtedy bude mnohouholník „prečnievať ponad” útvar čoraz menej a v limite bude konvergovať k hľadanému útvaru, čo platí rovnako aj pre jeho obsah. Teraz vypočítajme obsah mnohouholníka S_n pre príslušné prirodzené číslo n:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{j^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

Možno sme už zabudli, ako sa vypočíta súčet prvých n druhých mocnín prirodzených čísel. Môžeme si ho odvodiť, ak vieme z vedomostí o súčte členov aritmetických postupností, že $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Využijeme nasledovný teleskopický súčet:

$$\sum_{i=1}^{n}\big((i+1)^3 - i^3\big) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)^3 - \sum_{i=2}^{n} i^3 - 1 =$$

$$\begin{aligned} &= (n+1)^3 + \sum_{i=2}^{n} i^3 - \sum_{i=2}^{n} i^3 - 1 = (n+1)^3 - 1^3 = n\big((n+1)^2 + (n+1) + 1\big) = \\ &= n(n+1)^2 + n(n+1) + n. \end{aligned}$$

Na druhej strane môžeme dostať

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\big((i+1)^3 - i^3\big) &= \sum_{i=1}^{n}\big((i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3\big) = \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

Takže platí:

$$\begin{aligned} n(n+1)^2 + n(n+1) + n &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \\ n(n+1)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ n(n+1)\left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \end{aligned}$$

Teraz vypočítame obsah mnohouholníka.

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Hľadaný útvar má potom obsah $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$.

Cvičenia

1. Skúste pomocou veľkosti obsahu rovinného útvaru ohraničeného grafom závislosti rýchlosti od času, časovou súradnicovou osou a priamkami $t = t_1, t = t_2$, určiť závislosť dráhy od času auta pohybujúceho sa rýchlosťou 20 $m.s^{-1}$, ktoré po 10 sekundách začalo spomaľovať so zrýchlením -1 $m.s^{-2}$ (Využite graf závislosti rýchlosti od času). Akú celkovú dráhu prejde auto, kým sa zastaví?

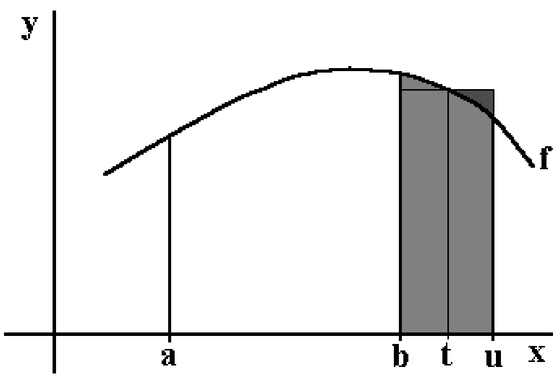
2. Určte priemernú rýchlosť auta z predchádzajúceho príkladu. Vedeli by ste pomocou grafu znázorniť súvislosť tejto rýchlosti so strednou hodnotou funkcie rýchlosti od času?

3. Výpočet, ktorý urobil John Walis by sa dal urobiť aj iným spôsobom. Vezmime si objem ihlana so štvorcovou podstavou. Strana štvorca a výška ihlana nech majú dĺžku 1. Ak rozrežeme tento ihlan $n-1$ rovinami kolmými na výšku na „rovnako hrubé" časti, môžeme každej i-tej časti (ak ich počítame od vrcholu ihlana) opísať kváder so stranou podstavy $\frac{i}{n}$. Každý kváder by mal výšku $\frac{1}{n}$. Aký objem by mala stupňovitá pyramída, ktorá by vznikla zložením vpísaných kvádrov? Pokúste sa nájsť súvislosť medzi Walisovým výpočtom a výpočtom objemu stupňovitej pyramídy, ktorá by vznikla zložením vpísaných kvádrov. Má objem ihlana nejakú súvislosť s obsahom rovinného útvaru, ktorú počítal Walis?

B.4.2 Definícia určitého integrálu

Skúmajme obsah rovinného útvaru ohraničeného priamkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.

Obr. 74



Predpokladajme, že funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a pre jednoduchosť nech na tomto intervale nadobúda kladné hodnoty. Nech bod a je pevný, bod b pohyblivý a $b > a$. Obsah rovinného útvaru medzi priamkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f sa mení v závislosti od polohy bodu b. Je zrejmé aj z obrázka, že čím bude viac napravo, tým bude obsah väčší. Keďže je prakticky funkciou premennej b, označme ho ako $g(b)$. Teraz nás zaujíma, ako „rýchlo rastie" alebo ako sa „mení" funkcia g.

Z kapitol B.3.1 a B.3.2 vieme, že „rýchlosť zmeny" vyjadruje derivácia, preto je prirodzené pokúsiť sa nájsť hodnotu $g'(b)$. Ak sa vrátime k definícii derivácie z kapitoly B.3.2, tak pre funkciu smernice sečnice $s_{g,b}(u)$ platí

$$s_{g,b}(u) = \frac{g(u) - g(b)}{u - b} = \frac{\text{obsah „sivého útvaru"}}{u - b} \qquad \text{pre } u \neq b.$$

Pre zjednodušenie budeme uvažovať prípad, že $u > b$. „Obsah sivého útvaru" $S = g(u) - g(b)$ možno vyjadriť v tvare $(u - b).f(t)$, pre vhodné t z intervalu $\langle b, u\rangle$. $f(t)$ je stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle b, u\rangle$, o ktorej sme sa zmienili v predchádzajúcej kapitole. Vtedy obsah tohto obdĺžnika $(u - b).f(t)$ je zhodný s obsahom S. To sa dá znázorniť tak, že obsah časti útvaru S „nad" priamkou $y = f(t)$ je zhodný s obsahom časti obdĺžnika „nad" grafom funkcie $y = f(x)$.

Tak dostanene pre $u \neq b$ $\qquad s_{g,b}(u) = \dfrac{(u - b)f(t)}{u - b} = f(t).$

Keďže funkcia f je spojitá aj v bode b, tak môžeme funkciu $s_{g,b}(u)$ „dodefinovať", aby sa stala spojitou. Ak vezmeme do úvahy, že $t \in \langle b, u\rangle$, ak sa bod u „blíži" k bodu b, tak sa bod t „blíži" k bodu b. Preto $s_{g,b}(b) = f(b)$. To podľa definície 16 znamená, že $g'(b) = f(b)$. Teraz sme dostali zaujímavý vzťah. Funkcia g je v takom vzťahu k funkcii f, že funkcia f je priamo jej deriváciou. Takéto funkcie budeme nazývať **primitívne funkcie.**

Má ľubovoľná funkcia iba jednu primitívnu funkciu? Vieme napríklad, že $(x^2)' = 2x$. Takže funkcia $y = x^2$ je primitívnou funkciou funkcie $y = 2x$. Ale aj $(x^2+4)' = 2x$. Preto aj funkcia $y = x^2 + 4$ je primitívnou funkciou funkcie $y = 2x$. Ak tieto dve primitívne funkcie porovnáme, tak sa líšia len o konštantu. To je pochopiteľné, veď derivácia súčtu je súčet derivácií a derivácia konštanty je nula. Keby sme to chceli zovšeobecniť, tak každá funkcia v tvare $y = x^2 + c$ je primitívnou funkciou funkcie $y = 2x$, kde c je reálne číslo.

Tieto poznatky si presnejšie zadefinujeme v nasledovnej definícii.

Definícia 31. *Nech funkcia f je definovaná na intervale I. Ak pre každé reálne číslo $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$, tak funkcia $F(x)$ sa nazýva primitívnou funkciou funkcie f na intervale I. Množinu všetkých primitívnych funkcií funkcie f na intervale I nazývame neurčitým integrálom funkcie f a označujeme*

$$\int f(x)\, dx.$$

Podľa predchádzajúcej úvahy môžme preto zapísať $\displaystyle\int (2x)\, dx = x^2 + c.$

Vráťme sa teraz k nášmu problému s obsahom rovinného útvaru. V zmysle definície 31 sme dostali, že funkcia g je primitívnou funkciou funkcie f. Lenže ktorou? Veď tých funkcií nekonečne veľa. A obsah rovinného útvaru musí byť jednoznačne určený. Ak primitívnu funkciu funkcie f môžeme zapísať v tvare $F(x)+c$, tak v našom prípade, v zmysle významu funkcie g platí, že $g(a) = 0$. Ak $0 = g(a) = F(a) + c$, potom $c = -F(a)$ a $g(b) = F(b) - F(a)$. Táto funkcia jednoznačne určuje obsah rovinného útvaru pri danej polohe bodu b. Týmto sme dokázali *Newton - Leibnizovu formulu.* Hodnota čísla $g(b) = F(b) - F(a)$ je zároveň hodnotou **(Newtonovho) určitého integrálu funkcie** f **v hraniciach od** a **po** b**.** Tieto poznatky formulujme v nasledovnej definícii.

Definícia 32. *Nech funkcia f je spojitá a definovaná na intervale I. Nech funkcia $F(x)$ je primitívnou funkciou funkcie f na intervale I. Nech $a, b \in I$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

nazývame (Newtonovým) určitým integrálom funkcie f v hraniciach od a po b.

V zmysle tejto definície možno potom zapísať pre dráhu telesa, ktorú prejde medzi časovými okamihmi t_1 a t_2 $s_{12} = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$, ak poznáme závislosť rýchlosti od času.

Určitý integrál nemá význam len v matematike a fyzike, ale aj v ďalších oblastiach napríklad v ekonómii. V podobnom vzťahu ako je rýchlosť a dráha je aj funkcia marginálnych a výrobných nákladov, ktoré sme spomínali v kapitole B.3.2.
Príklad 1. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného priamkami
$y = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 2x$.
Riešenie. Tento útvar je pravouhlý lichobežník so základňami, ktoré majú dĺžku 2 a 6 a výškou 2. Preto jeho obsah je

$$S = \frac{(6+2).2}{2} = 8.$$

Iný spôsob môže byť ten, ak vieme, že primitívnou funkciou k funkcii $2x$ je funkcia x^2. Vtedy

$$S = \int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8.$$

Načo nám je potom integrálny počet, keď sme sa v predchádzajúcom príklade vedeli zaobísť aj bez neho? Nie vždy sa mnohé problémy dajú riešiť týmto spôsobom ako v predchádzajúcom príklade. Občas je potrebné vypočítať určité integrály z iných funkcií.

V kapitole B.3.2 sme sa naučili derivovať polynomické funkcie, čiže funkcie tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ak ich vieme derivovať, tak nebude problém dokázať nasledujúcu vetu, pomocou ktorej sa ich naučíme integrovať.

Veta 17. *1. Pre každé prirodzené číslo n platí*

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

2. Nech na intervale I existujú neurčité integrály

$$\int f(x)\, dx, \int g(x)\, dx, \int (f(x)+g(x))\, dx \text{ a pre reálne číslo } k \text{ aj } \int (kf(x))\, dx.$$

Potom sú medzi nimi nasledovné vzťahy:

$$\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx, \int (kf(x))\, dx = k\left(\int f(x)\, dx\right).$$

Dôkaz.

1. Potrebujeme nájsť takú funkciu, ktorej derivácia je práve funkcia x^n. Ak by sme zderivovali funkciu x^n dostaneme nx^{n-1}. Ak by sme sa chceli dostať vo výsledku derivácie o stupeň vyššiu mocninu, tak potrebujeme zderivovať o stupeň vyššiu mocninu,teda $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Ešte nám „vadí" to číslo $n+1$. Z kapitoly B.3.2 vieme, že $(cf(x))' = cf'(x)$.

   Ak zvolíme $c = \dfrac{1}{n+1}$, tak $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$. Dostali sme

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

2. Nech $F(x)$, $G(x)$ sú primitívne funkcie k funkciám $f(x)$, $g(x)$.

   Potom $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x), (kF(x))' = kF'(x) = k.f(x)$. To znamená, že funkcia $F(x)+G(x)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)+g(x)$ a funkcia $kF(x)$ je primitívnou funkciou k funkcii $kf(x)$. Odtiaľ

$$\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx, \int (kf(x))\, dx = k\left(\int f(x)\, dx\right). \square$$

Táto veta nemá vplyv len na výpočet neurčitých integrálov, ale v dôsledku Newton-Leibnizovej formuly aj na výpočet určitých integrálov. Lebo v zmysle označenia v jej dôkaze musí platiť

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\, dx = [F(x)+G(x)]_a^b = F(b)+G(b)-(F(a)+G(a)) =$$

$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$\int\limits_a^b (kf(x))\ dx = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right).$$

To môžeme presnejšie formulovať nasledovne.

Dôsledok. Nech funkcie f, g sú spojité a definovaná na intervale I. Nech $a, b \in I$ a k je reálne číslo. Potom

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx, \int\limits_a^b (kf(x))\ dx = k\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right).$$

Cvičenia

1. Vypočítajte neurčité integrály:

   (a) $\int (x-1)^3\,dx$, (b) $\int (x+3)(x-5)\,dx$, (c) $\int (x^3+9x^2-1)\,dx$.

2. Vypočítajte určité integrály:

   (a) $\int_2^4 (x-1)^3\,dx$, (b) $\int_2^4 (x-1)(x^2+x+1)\,dx$,

   (c) $\int_1^2 x(x-1)(x+1)\,dx$, (d) $\int_1^2 (x-1)(x^2+1)(x+1)\,dx$.

3. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného

   (a) priamkami $x = 1$, $x = 2$ a grafom funkcie $y = 15x^2$,

   (b) grafom funkcie $y = x^2 + x - 1$ a priamkou $y = 4x - 3$,

   (c) grafmi funkcií $y = x^3$ a $y = 4x^2 - 4x$.

4. Teleso sa pohybuje rýchlosťou, ktorej závislosť od času vyjadreného v sekundách má tvar $(t^3 + 9t^2 - 1)\ m.s^{-1}$. Nájdite vzťah pre závislosť dráhy od času (medzi okamihmi $t = 0$ a $t = t_0$. Akú dráhu prejde teleso medzi druhou a piatou sekundou?