Zásady tvorby matematických problémů

Jaroslav Zhouf

Abstract. *The paper deals with methods how to prepare problems for using them in written leaving exams for pupils talented in mathematics, in the mathematical olympiad and in correspondence seminars. It is compared which similar and on the contrary different characteristics these methods have to have in these three fields of study. There are shown examples of such problems as well.*

Úvod

Hned po skončení MFF UK v Praze jsem začal učit na gymnáziu W. Piecka (později s názvem gymnázium Korunní a ještě později gymnázium Zborovská) ve třídách se zaměřením na matematiku. Ředitel školy mne pověřil organizováním matematické olympiády (MO) na škole i ve výboru MO v Praze. Později mne upozornil na nově vznikající korespondenční soutěž Pikomat.

Po tomto začátku jsem se stále více začal zajímat o práci s talentovanými žáky v matematice a s jejich vyhledáváním. Takže v současné době jsem předsedou krajské komise MO v Praze a členem Ústřední komise a členem úlohové komise, která úlohy pro MO v České, ale i Slovenské republice připravuje. Korespondenční seminář Pikomat v Praze organizuju a problémy pro něj vytvářím již dvacet let. Podílel jsem se na zavedení soutěže Matematický klokan v České republice a nyní pro něj vytvářím problémy na celoevropské úrovni. V současné době se o tutéž věc snažím se soutěží Turnaj měst. Během svého působení na gymnáziu jsem vytvářel a dosud vytvářím (i když tam již nepůsobím) maturitní písemné zkoušky a příjímací zkoušky pro třídy se zaměřením na matematiku. Mezi práci s talentovanými žáky v matematice patří i redigování časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální a gestorování konference Ani jeden matematický talent nazmar pro učitele všech stupňů a typů škol.

V současné době se velice diskutuje o tom, jakými způsoby by se mělo pracovat s talentovanými žáky a jakým způsobem by se měli tito žáci vyhledávat. Jsem shodou okolností externím spolupracovníkem řešitelského týmu jednoho grantu, kde tato otázka je vedena jako klíčová. Mám pocit, že se hledá něco zvláštního a samospasitelného, jak tyto žáky identifikovat a motivovat k práci. Já jsem však přesvědčený, že jsou potřebné metody v naší republice a ve Slovenské republice již téměř stoprocentně objeveny a aplikovány. A dle mého názoru to jsou právě nejrůznější soutěže.

Domnívám se tedy, že uvedené soutěže jsou dostatečné pro identifikaci a práci s talentovanými žáky v matematice. Jediné, na co je třeba se zaměřit, aby tyto soutěže byly pro žáky atraktivní, je příprava vhodných problémů pro ně. Slovem "vhodné" zde myslím jejich zajímavý obsah i jejich zajímavě podanou formu.

V začátcích své práce s talentovanými žáky jsem o této potřebě nepřemýšlel, nyní ale vím, že v současné době je to jedna z nejdůležitějších věcí. Je to způsobeno i změnou společnosti po revoluci, neboť odklon mladé talentované populace od matematiky je citelný. Je tedy třeba obecně talentovanou mládež pro matematiku opět získat. Jelikož se tak nemůže stát zjednodušováním problémů, je proto nutné hledat zajímavou podobu předkládaných problémů.

Tyto okolnosti mne vedly k tomu, že jsem si vytvořil jakési schéma, jak by mohly příslušné problémy vypadat, a snažím se podle nich při jejich přípravě řídit. Toto schéma nazývám *Zásady tvorby matematických problémů.* Tento příspěvek se zabývá pouze zásadami tvorby otevřených úloh.

Je jistě jasné, že tyto zásady se liší podle toho, pro jakou soutěž, případně jiné použití jsou problémy zamýšleny. Zaměřím se zde proto na jejich stejné a odlišné aspekty ve třech případech použití, a to v úlohách pro maturitní písemné zkoušky, pro matematickou olympiádu a pro korespondenční semináře.

Zásady tvorby úloh pro maturitní písemné zkoušky

Myslím si, že nejvhodnější seznámit se s mými zásadami tvorby problémů je na úlohách pro maturitní písemné zkoušky pro žáky tříd se zaměřením na matematiku. Mám je také nejvíce propracované.

Každá maturitní písemná zkouška, o níž tu bude řeč, se skládá ze šesti úloh, z nichž úlohy 1, 2 jsou povinně řešitelné, pak následují dvě úlohy 3a, 3b, z nichž je možné vybrat si jednu, a totéž platí i pro poslední dvojici úloh 4a, 4b. Avizované zásady se týkají pohledu na jednotlivé úlohy, ale i pohledu na písemnou zkoušku jako celek.

Moje zásady vznikaly postupně a byly inspirovány odpozorováním formy a obsahu úloh, které byly před mým působením na gymnáziu připravovány Ministerstvem školství. U ministerských úloh se dají vysledovat tyto jevy: *úlohy 1, 2 jsou jednodušší v porovnání s následujícími úlohami*, *různá tématika úloh a zaměření každé úlohy je v podstatě vždy na jedno z těchto témat*, *délky zápisu řešení jednotlivých úloh jsou vyvážené*, *časová náročnost řešení celé písemné zkoušky je též vyvážená.*

Já jsem se z těchto zásad kriticky poučil a rozhodl se, že budu o přípravě jednotlivých úloh i písemné zkoušky jako celku přemýšlet ještě koncepčněji. Vznikl tak soubor jevů, které od té doby sleduji při přípravě maturitní písemné zkoušky z matematiky a které jsem nazval *Zásady tvorby úloh do písemné maturitní zkoušky pro žáky tříd se zaměřením na matematiku*[1]:

1. zařazení většiny úloh rozčleněných na řadu dílčích úkolů a vyžadujících lokální strategii řešení, ale také zařazení aspoň jedné úlohy vyžadující globální strategií řešení,

2. nezávislost jednotlivých lokálních strategií v úlohách s dílčími úkoly,

3. propojení více oblastí matematiky v jedné úloze,

4. zastoupení co nejširšího spektra matematických témat v celé písemné práci a jejich nepřekrývání,

5. používání zobecňování, experimentování, řetězení jednotlivých myšlenkových kroků,

6. zavádění nových pojmů a propojování se známými pojmy,

7. možnost řešení úloh více způsoby,

8. přiměřená míra složitosti úprav pro žáky i opravovatele,

9. "čitelnost" textu a jeho jednoznačnost (dodržování "matematické kultury"),

10. zajímavost a "elegantnost" jednotlivých úloh i celé písemné zkoušky.

Je nutné poznamenat, že tento soubor není žádné konečné schéma, že se neustále vyvíjí podle zkušeností, které postupně získávám při tvorbě úloh pro písemnou maturitní zkoušku, ale také i při tvorbě úloh pro další soutěže.

Dále je zřejmé, že se vždy nepodaří všechny zásady u všech úloh nebo u maturitní písemné práce jako celku splnit. Někdy je dokonce lepší záměrně některou zásadu nedodržet, aby úloha nepřestala být zajímavou, aby se příliš neztížila, či naopak nezjednodušila, aby se neztratila její přehlednost atd.

Aplikaci těchto zásad můžeme jednoduše ověřit na ukázce maturitní písemné zkoušky zadané na gymnáziu Zborovská v Praze v roce 1997 [2]:

Úloha 1
Je dána funkce

$$f : y = x^4 + 3x^3 + mx^2 - 28x + n.$$

a) Určete reálná čísla m, n *tak, aby rovnice* $f(x) = 0$ *měla trojnásobný kořen.*
b) Načrtněte graf funkce f *(stačí pouze přibližně) pro hodnoty parametrů vypočtených v bodu a) a určete obsah útvaru omezeného křivkami* $y = f(x)$, $y = 0$.

Úloha 2
Ve čtverci $ABCD$ *je* K *libovolný bod strany* CD, *osa* p *úhlu* BAK *protíná stranu* BC *v bodě* L.
a) Dokažte, že platí $|BL| + |KD| = |AK|$.
b) Určete $|KD|$ *tak, aby aritmetický a geometrický průměr délek* $|BL|$ *a* $|KD|$ *si byly rovny.*
c) Sestrojte $|KD|$, *kterou jste určili v bodu b), pouze pomocí kružítka a rovného pravítka.*

Úloha 3a
V jedné polorovině s hraniční přímkou p *jsou dány různé body* A, B. *Umístěte na přímce* p *úsečku* CD *dané délky* d *tak, aby délka lomené čáry* $ACDB$ *byla minimální.*
a) Úlohu řešte konstrukčně, tj. zvolte obecně polohu bodů A, B, *přímky* p *i délku* d.
b) Úlohu řešte analyticky, tj. v kartézském souřadném systému Oxy *uvažujte body* $A[4,5;4]$, $B[6;2]$, *přímku* $p : 6x - 8y + 5 = 0$ *a vzdálenost* $|CD| = d = 5$.

Úloha 3b
Řešte v oboru reálných čísel nerovnici

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2,$$

kde a *je reálný parametr.*

Úloha 4a
Je dána jednotková krychle $ABCDA'B'C'D'$. *Bod* Q *probíhá celou úsečku* AC, *bod* R *probíhá celou úsečku* $B'D'$.
a) Určete útvar, který vyplní všechny body S, *které leží uvnitř úseček* QR *a pro něž platí* $|QS| = k|RS|$, *kde koeficient* $k > 0$ *je dán. Zakreslete obrázek pro* $k = 2$.
b) Vypočtěte obsah $P(k)$ *útvaru z bodu a) v závislosti na* k.
c) Pro které k *nabývá* $P(k)$ *maximální hodnoty? A jaké?*

Úloha 4b
Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran. Heronovský trojúhelník je trojúhelník, jehož strany mají celočíselné délky a jehož obsah je celočíselný.
a) Dokažte, že každý pythagorejský trojúhelník je heronovský.
b) Vyslovte obrácenou větu k větě v bodu a) a negaci této obrácené věty. Rozhodněte, která z nich platí.

Zásady tvorby úloh pro matematickou olympiádu

Matematická olympiáda je specifická soutěž, která sestává z problémů, které se v mnohém liší od výše uvedených problémů pro maturitní písemné zkoušky. Obě oblasti zkoumání se mohou shodovat v obtížnosti problémů a v jejich obsahu, ve formě se však podstatně liší. Proberme nyní výše uvedené zásady z pohledu problémů pro MO. Nebudu zde prezentovat žádné konkrétní úlohy MO, neboť jejich obsah i forma je všeobecně známa, každý si je můžeme představit.

Ad zásady 1 a 2: V úlohách MO se většinou používají problémy s globální strategií řešení, aby řešitelé nebyli hned vedeni správnou cestou řešení. Očekává se, že si řešitelé tuto cestu najdou sami. Rozčlenění úloh na dílčí problémy se může v MO použít u nižších kategorií, kde se chce, aby řešitelé nebyli ihned odrazeni od řešení, pokud správnou strategii nemohou najít. Jednoduše se ale dá říci, že členění na jednodušší úlohy je v MO spíše kontraproduktivní.

Ad zásady 3 a 4: Jedno kolo MO obsahuje několik úloh, takže je také možné naplnit zásadu pokrytí více oblastí matematiky, a to spíše v celé sérii než v každé jednotlivé úloze, protože úlohy nejsou členěny na dílčí úlohy.

Ad zásady 5 a 6: Míra používání zobecňování, experimentování, řetězení myšlenkových pochodů a propojování známých a nových pojmů závisí na kategorii MO. Čím jsou žáci starší, tím více se tyto metody používají.

Ad zásady 7 až 10: Toto jsou plně užívané zásady v MO.

Novou a zároveň tou nejdůležitější zásadou při tvorbě úloh do matematické olympiády je zásada *přítomnosti triku* v úloze, což znamená školsky méně standardní formu, přičemž následné řešení je možno provést standardními školskými prostředky.

Stručně o rozdílu mezi úlohami matematické olympiády a úlohami písemné maturitní zkoušky můžeme říci, že v úlohách matematické olympiády se má převážně projevit schopnost žáků objevovat nové poznatky a v úlohách písemné maturitní zkoušky se má převážně projevit schopnost kompletovat známé poznatky. V maturitní úloze je každý další krok znám a víceméně jednoznačně určen, i když je třeba obtížnější než standardní školský úkon. V úloze matematické olympiády je nutno více experimentovat, další kroky nejsou vždy jasně dány.

Na závěr tohoto oddílu si ukažme, že úlohy maturitní písemné zkoušky pro talentované studenty a úlohy MO nemusejí mít od sebe až tak daleko [3]. První z následujících úloh byla zadána na MMO a druhá úloha je mnou modifikovaná úloha pro maturitní zkoušku. Z ukázky je vidět, že ne nutně úloha MMO musí být obtížnější, záleží jen na formě předložení problému studentům. Ba naopak v tomto případě je možné říci, že úloha maturitní písemky je obtížnější, její forma ji však nečiní obtížnou. Navíc v té modifikované úloze je vidět mnoho výše vedených zásad, které ji činí zajímavější a užitečnější než ve formě pro MMO.

Úloha MMO

Zjitěte, pro která reálná čísla x platí:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

Modifikovaná úloha pro maturitní písemnou práci

V oboru reálných čísel je dán výraz

$$V(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}.$$

a) Určete definiční obor výrazu $V(x)$.

b) Řešte v oboru reálných čísel rovnici $V(x)=\sqrt{a}$ *s reálným parametrem* a.

c) Nakreslete graf funkce $y=V^2(x)$.

Zásady tvorby úloh pro korespondenční semináře

Korespondenční semináře z matematiky je známá forma soutěže, která spočívá v zasílání problémů žákům domů nebo na školy a následném zpětném odesílání řešení organizátorům soutěže. Tento proces pak probíhá několikrát ročně.

Míst v České republice i na Slovensku, kde se tato soutěž organizuje, je celá řada. Počet úloh, jejich zveřejňování, vyhodnocování a odměňování úspěšných řešitelů jsou sice různé podle centra organizace, forma úloh je však víceméně stejná, i obtížnost je velice podobná.

Problémy hodně připomínají problémy pro matematickou olympiádu, takže i zásady jejich tvorby jsou velice podobné, proto je zde nebudeme podrobněji komentovat. V poslední době se téměř ve všech organizačních centrech vkládají problémy do beletristického textu. Je to kvůli snaze o upoutání pozornosti většího množství řešitelů a oslovení větší, i zdánlivě nematematické populace. Tím bychom mohli rozšířit zásady tvorby problémů pro korespondenční semináře o *snahu o atraktivitě* a o *zasazení problémů do reálného života*. Mimochodem korespondenční seminář je vhodná forma podpory výuky matematiky na všech stupních škol [4].

Na posouzení těchto zásad uvádím jednu sérii našeho korespondenčního semináře Pikomat v Praze [5].

Putování lorda Edwarda

2. série Na ostrově

Edward a jeho společníci dorazili ke břehu. Vystoupili ze člunu a dali se do hledání místa, které bylo na mapě označeno jako začátek cesty. Aby z mapy zjistili, jak mají dál pokračovat, museli nejprve získat azimut a vzdálenost.

Úloha 7

V rovnici $2a^2 + ad^2 = 1640$ *byl azimut a, pod kterým bylo třeba se vydat, a počet mil d, který udával, jak daleko se poklad nacházel. Obě hodnoty byly uvedeny celými čísly. Pod jakým azimutem a jak daleko měl Edward se svými společníky jít?*

Výprava se vydala do nitra ostrova. Edward si myslel, že je pustý, ale po cestě narazili na tři domorodce. Pomocí posunků se jich zeptali, zda nevědí něco o ukrytém pokladu. Každý jim odpověděl něco jiného.

Úloha 8

První domorodec dodal, že ten druhý vždy lže. Druhý zase řekl, že třetí vždy lže. A třetí tvrdil, že první i druhý vždy lžou. Mohli námořníci některému z domorodců věřit?

Skupinka námořníků došla na palouk, na kterém se měl nacházet poklad. Začali proto hledat body zmíněné na mapě. Na ní bylo též přesně popsáno, jak se podle těchto bodů zorientovat a kde začít kopat.

Úloha 9

Na mapě stálo: "Jsi na místě pokladu. Jdi od dubu D ke zřícenému majáku M. Stejnou vzdálenost odtud ujdi směrem doprava v pravém úhlu a místo, do něhož dojdeš, označ R. Pak jdi od dubu k prameni P, odtud ujdi vlevo v pravém úhlu stejnou vzdálenost do bodu, který označ S. Poklad leží ve středu spojnice RS." Námořníci našli maják i pramen, ale dub zmizel. Jak mohl Edward poklad najít i přesto, že nevěděl, kde dřív stál dub?

Při hledání pokladu potřebovali námořníci vytyčit pravý úhel. Rozhodli se proto, že sestrojí čtverec, ve kterém se pravý úhel nachází. Měli však k dispozici pouze lano a kolíky, na něž se dalo lano navázat, neměli žádné měřítko, takže nemohli vzdálenosti ani násobit, ani dělit.

Úloha 10

Námořníci zatloukli kolíky do zvolených bodů A a B. Jak mohli jen s pomocí lana a kolíků najít body C a D tak, aby vznikl čtverec $ABCD$?

Když se Edwardově družině podařilo nalézt místo, kde měl být poklad ukryt, začali kopat. Kopání bylo zdlouhavé, protože neměli potřebné náčiní. Asi po dvou hodinách narazili na tvrdý předmět. Byla to velká truhla s těžkým visacím zámkem. Na truhle bylo napsáno, že klíč od zámku je zakopán na jiném místě.

Úloha 11
Klíč měl být ve vzdálenosti tolika stop, kolik dělal ciferný součet čísla, které začínalo jedničkou a po přemístění poslední cifry na začátek vzniklo číslo dvakrát větší než původní hledané číslo. Jaké číslo musel Edward určit?

Edwardovi a jeho družině se podařilo vykopat klíč a otevřít truhlu. Ta byla plná zlata a drahokamů, jež piráti za dlouhá léta naloupili. Edward rozhodl, že se s pokladem ihned vydají na břeh, kde přenocují, a druhého dne se vrátí na Viktorii. Truhlu nesli čtyři veslaři a ti se domluvili, že ji v noci ukradnou. Nestačili se však do rána dohodnout, jak poklad rozdělit, a tak zůstal Edwardovi.

Úloha 12
Jak si měli čtyři veslaři v noci rozdělit poklad tak, aby se nikdo z nich necítil ošizen?

Druhého dne časně ráno skupina naložila truhlu do člunu a opustila ostrov. Když dorazili na Viktorii, uvítal je obrovský jásot celé posádky. Námořníci naložili poklad na loď a nadšeně se vydali na zpáteční cestu.

Závěr

Literatura téměř vždy uvádí jen metody řešení úloh (problem solving), metodami tvorby úloh se však nezabývá. Proto všechny úvahy zde provedené jsou jen mým subjektivním přístupem k tvorbě problémů pro soutěže či školní činnosti pro talentované žáky v matematice. Myslím si ale, že vytvořit zásady, jak úlohy řešit, je stejně důležité jako vytvořit zásady, jak úlohy tvořit.

V současné době se začínají prosazovat multiple-choice problémy. Jejich příprava vyžaduje též určité zásady. Dá se vysledovat, že řada z nich se nachází mezi zásadami výše uvedenými. Je to též velmi bohatý studijní materiál.

Poznámka: Příspěvek byl podpořen Výzkumným záměrem MSM 0021620862 - Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání.

Literatúra

[1] ZHOUF, J.: *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice.* Doktorská práce, Praha 2001.

[2] ZHOUF, J.: *Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku.* Pedagogická fakulta UK, Praha 2007.

[3] ZHOUF, J.: Jak zpřístupnit úlohy MMO středoškolákům. In Burjan, V., Hejný, M., Jány, Š. (eds.) *Pythagoras 2002, Letná škola z teorie vyučovania matematiky.* EXAM, Bratislava 2002, s. 89-92.

[4] ZHOUF, J.: Korespondenční seminář jako podpora výuky matematiky. In Lávička, M., Bastl, B., Ausbergerová, M. (eds.) *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Vydavatelský servis, Plzeň 2006, s. 317-321.

[5] ZHOUF, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů.* Prometheus, Praha 2006.

Adresa autora:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova v Praze
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz