Zabudneme na dôkazy?

Shall we forget the proofs?

MAGDALENA TOMANOVÁ

ABSTRACT. *The paper is deals with importance of proofs in mathematics teaching for primary and high schools. We join some simple exercises that are useful for both types of schools.*

Keywords: education, mathematics, tasks, proofs

MESC: D20

Štúdium je cesta do sveta, škola je miestom, ktoré nás má pripraviť pre život a naučiť užitočným veciam. Vyčleniť z množstva užitočných vecí tie dôležité, je zložitý a nikdy nekončiaci proces. Vývoj ide dopredu, život sa neustále mení. Mnohé z toho, čo bolo užitočné pred sto (desiatimi) rokmi je dnes nepotrebné a objavuje sa množstvo vecí nových.
V priebehu tohto nekončiaceho sa procesu je veľmi ťažké vyvarovať sa chýb a omylov vo vzdelávaní. Vzdelanie určite nespočíva len v súhrne poznatkov, návykov, či zručností. Hovorí sa, že vzdelanie je skôr to, čo zostane keď všetko zabudneme. Zostane schopnosť uvažovať, porozumieť sebe, druhému, spoločnosti, prírode a celému svetu. Je dôležité, aby sa študent v škole učil chápať, hľadať príčiny a dôsledky, vyvodzovať závery zo známych predpokladov. Jednoznačne je matematika predmet, v ktorom sa má uvedenému venovať a učiť. Je smutné a zároveň varujúce, že dodnes pretrvávajú (dokonca silnejú) názory nemalej časti technickej a ekonomickej inteligencie, podľa ktorých by sa malo vyučovanie matematiky redukovať na nácvik niekoľkých (pre prax užitočných) návodov.

Za posledných desať rokov sme zaznamenali výrazné redukcie v dotácií vyučovacích hodín matematiky. Týka sa to hlavne niektorých typov stredných a vysokých škôl. Ďalším faktorom, ktorý negatívnym spôsobom zasiahol postavenie matematiky a odsunul ju v poradí dôležitosti vyučovacích predmetov, je nepovinná maturitná skúška. Tieto dva faktory podporujú výučbu matematiky v duchu už spomenutých názorov – nútia vyučujúcich, aby v časovom strese učili študentov dobre fungujúce algoritmy. Na to najdôležitejšie – vzájomné súvislosti, vyvodzovanie, zdôvodňovanie a dokazovanie je vytvorený minimálny priestor. Je nutné tomuto trendu odolávať a nepodľahnúť. Je potrebné pestovať a rozvíjať logické myslenie, viesť študentov k hľadaniu zákonitostí, k potrebe dokazovania

Uvádzame niekoľko jednoduchých inšpirácií, ktoré môže vyučujúci použiť v procese vyučovania na strednej, ale aj základnej škole. Niektoré z nich sú algoritmy, ktoré študenti poznajú a používajú, nepociťujú však potrebu overiť, či dokázať ich platnosť.

- Zdôvodnite, prečo možno druhú mocninu dvojciferných čísel končiacich číslom 5 vypočítať nasledovne:

  $25^2 = 625 \qquad 6 = 2.3$

  $35^2 = 1225 \qquad 12 = 3.4$

  .
  .
  .

$95^2 = 9025 \qquad 90 = 9.10$

Riešenie: Nech $a5$ je dvojciferné číslo končiace 5.
$a5 = 10a + 5$
$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$
Na mieste desiatok je vždy číslo 2, na mieste jednotiek číslo 5. Miesto stoviek je dané súčinom $a(a + 1)$

- Dokážte, že druhú mocninu dvojciferného čísla, ktoré sa začína 5 možno vypočítať:
  $52^2 = (5^2 + 2).100 + 2^2 = 2704$
  $57^2 = (5^2 + 7).100 + 7^2 = 3249$

  Riešenie: nech $5b$ je dvojciferné číslo začínajúce 5.
  $5b = 5.10 + b$
  $(5.10 + b)^2 = 5^2.10^2 + 100b + b^2 = 100(5^2 + b) + b^2$

- Zdôvodnite, prečo možno druhú mocninu ľubovoľného dvojciferného čísla vypočítať aj takto:
  $23^2 = 20.26 + 3^2 = 529$
  $48^2 = 50.46 + 2^2 = 2304$
  $54^2 = 50.58 + 4^2 = 2916$

  Riešenie: Platí $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, z toho $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$

S prostriedkami matematiky je treba narábať presne, pretože v opačnom prípade sa dá „dokázať“ všeličo. Napríklad, že slon váži toľko, ako komár.

- Sledujte úvahy a nájdite chybu v tvrdení, že slon váži toľko, ako komár.

  Nech x je hmotnosť komára, y je hmotnosť slona.
  Označme $x + y = 2a$
  teda $\quad x = 2a - y$ a
  $\qquad x - 2a = -y$
  Vynásobením strán dostaneme:
  $x^2 - 2ax = y^2 - 2ay \,/ + a^2$
  $x^2 - 2ax + a^2 = y^2 - 2ay + a^2$
  $(x - a)^2 = (y - a)^2$
  Z toho:
  $x - a = y - a$
  $x = y$
  Hmotnosť slona je rovnaká ako hmotnosť komára.
  Riešenie: Operácia odmocnenia nebola urobená správne - $\sqrt{(x - a)^2} = |x - a|$

- Kde je chyba v úvahe:
  $1 + 2 + 4 + 8 + ... = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$

$1+2+4+8+...=1+2(1+2+4+...)$

Označme súčet na ľavej strane x. Potom platí:

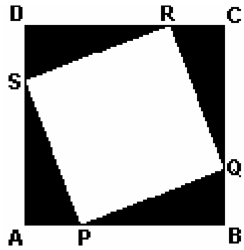
$x=1+2x$

$x=-1$

Riešenie: Súčet uvedeného nekonečného radu nie je reálne číslo, a preto sa s ním nedajú robiť operácie ako s reálnymi číslami.

Na záver dve geometrické úlohy

- Daný je štvorec $ABCD$ a na jeho stranách body P,Q,R,S také, že platí $|PB|=|QC|=|RD|=|SA|$, viď. Obrázok 1. Dokážte, že $PQRS$ je štvorec.



Obrázok 1

Riešenie: Dokázať treba

a) rovnosť strán

Ukážeme, že trojuholník SAP je zhodný s trojuholníkom PBQ.

$|AP|=|BQ|$ a $|SA|=|PB|$

Veľkosť uhla SAP je zhodná s veľkosťou uhla PBQ a je 90°.

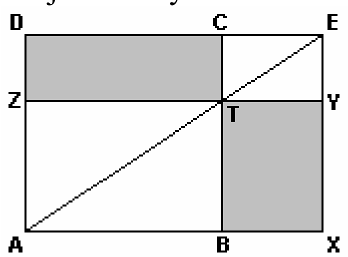
Na základe vety sus platí: $|SP|=|PQ|$

b) veľkosť všetkých uhlov v štvoruholníku PQRS je 90°

APB je priamy uhol, teda má veľkosť $180°$

Veľkosť uhla APS spolu s veľkosťou uhla BPQ je 90° (uhol ASP je zhodný s uhlom QPB). Preto veľkosť uhla SPQ je $180°-90°=90°$

- Ukážte, že obsah štvorca $ABCD$ je rovnaký ako obsah obdĺžnika $AXYZ$



Obrázok 2

Riešenie: Štvorec $ABCD$ a obdĺžnik $AXYZ$ majú spoločnú časť – obdĺžnik $ABTZ$. Stačí ukázať, že obsah obdĺžnika $BXYT$ je rovnaký ako obsah obdĺžnika $ZTCD$.

Keďže $\Delta ABT \cong \Delta ATZ$ a $\Delta TYE \cong \Delta TEC$, zo zhodnosti $\Delta AXE \cong \Delta AED$ vyplýva, že obsah obdĺžnika $BXYT$ je zhodný s obsahom obdĺžnika $ZTCD$

Literatúra

[1] Novoveský, Š. – Križalkovič, K. – Lečko, I.: *Zábavná matematika*, Praha 1975.

Adresa autora:
RNDr. Magdalena Tomanová,
KM TnU AD,
Študentská 1,
911 50 Trenčín
E-mail: tomanova@tnuni.sk