O definíciach - neformálne a formálne

Zdenko Takáč

ABSTRACT: *The paper deals with the definitions. There are described definitions from informal point of view at the beginning. And in the next part of article are definitions described from formal point of view - what does it mean to give definition in the mathematical theory.*
MESC: E40

1 Úvod

Podľa [6] je definícia konvencia, stanovujúca, aký význam má byť pridelený výrazu, ktorý sa v určitom obore ešte nevyskytol, a ktorý nemusí byť bezprostredne zrozumiteľný. Pri uvádzaní definície sa často používa slovné spojenie "práve vtedy, keď", ktoré naznačuje, že sa jedná o ekvivalenciu dvoch formúl. Ľavá strana ekvivalencie, nazývaná definiendum, má byť jednoduchá formula obsahujúca výraz, ktorý chceme definovať. Pravá strana, nazývaná definiens, je formula ľubovoľnej štruktúry obsahujúca iba výrazy, ktorých význam už je známy.

Uvažujme jednoduchý príklad: v aritmetike ešte nepoznáme význam symbolu $\leq$, pričom predpokladáme, že symbol $<$ už bol zavedený. Uvedieme nasledujúcu definíciu symbolu $\leq$:

Hovoríme, že $x \leq y$ práve vtedy, keď platí $x < y$ alebo $x = y$.

Slovným spojením "hovoríme, že" (prípadne "nazývame") zdôrazňujeme konvenciálnu povahu definície. Formulovaná definícia skutočne spĺňa uvedené podmienky, jedná sa o ekvivalenciu dvoch formúl:

$$x \leq y\,, \qquad\qquad \text{definiendum}$$

a

$$x < y \vee x = y\,, \qquad\qquad \text{definiens.}$$

Práve fakt, že definiendum a definiens sú navzájom ekvivalentné, nám umožňuje ľubovoľnú formulu obsahujúcu definovaný symbol (v našom prípade symbol $\leq$) zapísať v tvare, ktorý už tento symbol neobsahuje, t.j. každý výskyt výrazu $x \leq y$ nahradiť výrazom $x < y \vee x = y$. Inak povedané, definovaný symbol nie je nepostrádateľný pre prácu matematika, jeho funkciou je "iba" dosiahnuť jednoduchosť a väčšiu prehľadnosť formúl. Že to nie je úloha márna, vidieť už pri porovnaní nasledujúcich ekvivalentných formúl vyjadrujúcich tranzitívnosť (prvá obsahuje symbol $\leq$, druhá nie):

$$(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z\,,$$

$$((x < y \vee x = y) \wedge (y < z \vee y = z)) \rightarrow (x < z \vee x = z).$$

Matematici často dávajú pri definíciach prednosť tvaru implikácie pred ekvivalenciou. Naša definícia by v takom prípade znela:

Hovoríme, že $x \leq y$, ak platí $x < y$ alebo $x = y$.

To však nie je presné, vyzerá to akoby opačný kauzálny vzťah neplatil. V skutočnosti ide o nevyslovenú dohodu, že definíciu chápeme ako ekvivalenciu, i keď je uvedená v tvare implikácie.

Opísali sme, čo to je definícia a aká je jej úloha v matematike. Pozrime sa teraz na formálnu stránku problému, t.j. ako je zavedenie definície chápané z pohľadu axiomatickej matematickej teórie.

2 Matematická teória a jej jazyk

Budovanie axiomatickej matematickej teórie spočíva v nasledujúcich krokoch: zvolíme jazyk teórie, zvolíme axiómy teórie, prípadne odvodzovacie pravidlá a potom skúmame vlastnosti takto vytvorenej teórie, t.j. uvádzame tvrdenia (formuly vo zvolenom jazyku) a konštruujeme ich dôkazy.

Pod pojmom matematická teória chápeme množinu axióm (uzavretých formúl v jazyku teórie), označujeme ju písmenom $\mathbf{T}$. Výraz $\mathbf{T} \vdash \varphi$ označuje, že formula φ je dokázateľná v teórii $\mathbf{T}$, resp. formula φ je vetou teórie $\mathbf{T}$. Jazyk $\mathcal{L}$ ľubovoľnej teórie obsahuje tzv. logické symboly:

- logické spojky	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kvantifikátory	$\forall, \exists$
- premenné	$x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
- zátvorky	(,)

a špeciálne symboly:

- symboly relácií (predikáty)	$P, R, \ldots$
- symboly operácií	$f, g, \ldots$
- individuálne konštanty	$a, b, \ldots$

Logické symboly majú všetky jazyky zhodné[1], preto si tieto nebudeme všímať a upriamime pozornosť na špeciálne symboly. Na úplné určenie konkrétneho jazyka teda stačí vypísať všetky jeho špeciálne symboly:

$$\mathcal{L} = \{P, R, \ldots, f, g, \ldots, a, b, \ldots\}\,.$$

Napríklad jazyk teórie okruhov obsahuje, okrem logických symbolov, iba symbol binárnej relácie $=$, symboly binárnych operácií $+, \cdot$ a individuálne konštanty $0, 1$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}} = \{=, +, \cdot, 0, 1\}\,.$$

Axiómy teórie okruhov sú vyjadrené iba pomocou symobolov jazyka $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$:

$(\forall x)x = x$	reflexívnosť $=$
$(\forall x)(\forall y)x = y \to y = x$	symetria $=$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)x = y \wedge y = z \to x = z$	tranzitívnosť $=$
$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(x = u \wedge y = v) \to x + u = y + v$	dos. do operácie $+$
$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(x = u \wedge y = v) \to x \cdot u = y \cdot v$	dos. do operácie $\cdot$
$(\forall x)(\forall y)(\forall c)a + (b + c) = (a + b) + c$	asociatívny z. pre $+$
$(\forall x)x + 0 = x = 0 + x$	z. nulového prvku
$(\forall x)(\exists y)x + y = y + x = 0$	z. opačných prvkov
$(\forall x)(\forall y)x + y = y + x$	komutatívny z. pre $+$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	asociatívny z. pre $\cdot$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	ľavý distributívny z.
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$	pravý distributívny z.

Prvú skupinu tvoria axiómy rovnosti, ktoré sa často explicitne neuvádzajú, ale berú sa ako samozrejmá súčasť každej teórie s rovnosťou. Z nich prvé tri (reflexívnosť, symetria a tranzitívnosť) sú všeobecne známe a ďalšie dve sa zaoberajú dosadením do jednotlivých operácií - pre každú operáciu i reláciu jazyka musí existovať axióma takéhoto typu, prípadne možno uviesť dve schémy axióm (dosadenie do ľubovoľnej operácie a dosadenie do ľubovoľnej relácie). Viac o tejto problematike možno nájsť v [1].

O dôležitosti a nezastupiteľnosti úlohy presne definovaného jazyka matematickej teórie snáď netreba polemizovať. Problém je v tom, že pokiaľ sa pri práci v konkrétnej matematickej teórii striktne držíme symbolov jazyka tejto teórie, zápisy formúl sú zdĺhave a neprehľadné. Preto si matematici prácu uľahčujú zavádzaním nových symbolov jazyka (symbolov relácií, symbolov

[1]Sú to symboly potrebné pre využitie predikátového počtu, ako kalkulu pri budovaní axiomatickej teórie. Viac o jazyku matematickej teórie možno nájsť v [4], [5], príp. v [3].

operácií a individuálnych konštánt), ktorých zmyslom je udržať rozumnú dĺžku formúl.

Definícia 1 *Hovoríme, že jazyk $\mathcal{L}'$ je rozšírenie jazyka $\mathcal{L}$, ak každý symbol jazyka $\mathcal{L}$ je obsiahnutý v jazyku $\mathcal{L}'$ s rovnakou árnosťou a rovnakým významom.*

K manipulácii s novými symbolmi nás oprávňuje fakt, že každý z nich je možné vyjadriť v pôvodnom jazyku teórie. A tu sa dostávame k úlohe definície - zaviesť nový symbol (relácie, operácie alebo individuálnu konštantu) a vyjadriť jeho význam pomocou symbolov pôvodného jazyka. Definícia teda okrem rozšírenia jazyka, rozširuje i teóriu, t.j. pridáva k jazyku nový symbol a k teórii novú axiómu, ktorá definuje tento symbol.

Definícia 2 *Hovoríme, že teória $\mathbf{T}'$ s jazykom $\mathcal{L}'$ je rozšírenie teórie $\mathbf{T}$ s jazykom $\mathcal{L}$, ak $\mathcal{L}'$ je rozšírenie jazyka $\mathcal{L}$ a ľubovoľná formula jazyka $\mathcal{L}$, ktorá je vetou teórie $\mathbf{T}$ je i vetou teórie $\mathbf{T}'$.*

Poznámka: Práve uvedená definícia je napríklad zavedenie binárnej relácie "teória $\mathbf{T}'$ je rozšírenie teórie $\mathbf{T}$", pričom si môžeme všimnúť, že je v tvare implikácie, hoci v súlade s konvenciou ju chápeme ako ekvivalenciu.

3 Konzervatívne rozšírenie teórie

Opísaným spôsobom dostaneme pomocou definície namiesto pôvodnej teórie $\mathbf{T}$ rozšírenú teóriu $\mathbf{T}'$. Vlastnosti rozšírenej teórie zabezpečujú: každá formula jazyka $\mathcal{L}$ dokázateľná v pôvodnej teórii $\mathbf{T}$, je dokázateľná i v rozšírenej teórii $\mathbf{T}'$. Nie je však vylúčené, že rozšírená teória bude silnejšia ako pôvodná, t.j. existuje formula jazyka $\mathcal{L}$ dokázateľná v rozšírenej teórii $\mathbf{T}'$, ktorá nie je dokázateľná v pôvodnej teórii $\mathbf{T}$. To ale odporuje našim požiadavkám na definíciu, pretože tým zmeníme teóriu a cieľom definície nie je meniť teóriu, ale skrátiť zápisy a zjednodušiť prácu v pôvodnej teórii. Preto zavedieme nový pojem - konzervatívne rozšírenie teórie, ktoré zabezpečí: ľubovoľná formula jazyka $\mathcal{L}$ je dokázateľná v rozšírenej teórii $\mathbf{T}'$ práve vtedy, keď je dokázateľná v pôvodnej teórii $\mathbf{T}$ a navyše ku každej formule rozšíreného jazyka $\mathcal{L}'$, existuje ekvivalentná formula v jazyku $\mathcal{L}$.

Definícia 3 *Hovoríme, že teória $\mathbf{T}'$ je konzervatívne rozšírenie teórie $\mathbf{T}$, ak $\mathbf{T}'$ je rozšírenie teórie $\mathbf{T}$ a ľubovoľná formula jazyka teórie $\mathbf{T}$, ktorá je vetou teórie $\mathbf{T}'$ je i vetou teórie $\mathbf{T}$.*

Pozorný čitateľ si určite všimol, že konzervatívne rozšírenie teórie je presne to, čo očakávame od zavedenia definície: rozšírenie jazyka o nový symbol, rozšírenie teórie o novú axiómu, ktorá definuje tento symbol a pritom sa nezmenia vlastnosti teórie, t.j. množina dokázateľných formúl v teórii zostane identická. Nasledujúce tvrdenia hovoria o tom, že rozšírená teória, získaná z pôvodnej teórie pridaním definície, je skutočne konzervatívne rozšírenie pôvodnej teórie.

Tvrdenie 1 *[o definícii relácie] Nech $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je formula teórie $\mathbf{T}$ s jazykom $\mathcal{L}$, nech jazyk $\mathcal{L}'$ vznikne z jazyka $\mathcal{L}$ pridaním nového symbolu relácie P s árnosťou n a nech $\mathbf{T}'$ vznikne z $\mathbf{T}$ pridaním axiómy*

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n).^2 \tag{1}$$

Potom teória $\mathbf{T}'$ s jazykom $\mathcal{L}'$ je konzervatívne rozšírenie teórie $\mathbf{T}$.

Navyše pre ľubovoľnú formulu ψ^* v jazyku $\mathcal{L}'$ je možné zostrojiť formulu ψ v jazyku $\mathcal{L}$ takú, že $\mathbf{T}' \vdash \psi^* \leftrightarrow \psi$.

Nebudeme robiť dôkazy tvrdení, sú technicky pomerne náročné a predpokladajú slušnú znalosť predikátového počtu. V prípade záujmu čitateľ dôkazy nájde v [4], prípadne v [5]. Nasledujúce tvrdenie sa zaoberá zavedením symbolu operácie.

Tvrdenie 2 *[o definícii operácie] Nech $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ je formula teórie s rovnosťou $\mathbf{T}$ s jazykom $\mathcal{L}$, pričom*

$$\mathbf{T} \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\exists! y)\varphi(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Nech jazyk $\mathcal{L}'$ vznikne z jazyka $\mathcal{L}$ pridaním nového symbolu operácie f s árnosťou n a nech $\mathbf{T}'$ vznikne z $\mathbf{T}$ pridaním axiómy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightarrow \varphi(y, x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Potom teória $\mathbf{T}'$ s jazykom $\mathcal{L}'$ je konzervatívne rozšírenie teórie $\mathbf{T}$.

Navyše pre ľubovoľnú formulu ψ^* v jazyku $\mathcal{L}'$ je možné zostrojiť formulu ψ v jazyku $\mathcal{L}$ takú, že $\mathbf{T}' \vdash \psi^* \leftrightarrow \psi$.

Je zrejmé, že nie je možné definovať operáciu bez rovnosti, preto Tvrdenie 2 platí iba v teórii s rovnosťou. Rovnako použitie kvantifikátora $\exists!$ nie je možné bez rovnosti. Podobná situácie je i v Tvrdení 3.

[2] Porovnaj so slovnou definíciou binárnej relácie $\leq$ v úvode. Navyše neuvádzame všeobecné kvantifikátory, hoci je zrejmé, že formula má platiť pre všetky $x_1, \ldots, x_n$. Podobne sa budeme riadiť interpretáciou všeobecnosti i v tvrdeniach 2 a 3.

Nie je ťažké nahliadnuť, že symbol operácie s árnosťou nula zodpovedá individuálnej konštante: operácia s árnosťou nula je operácia, ktorá nezávisí od žiadnej premennej, t.j. výsledkom takejto operácie je konštanta. Preto v Tvrdení 2 je implicitne zahrnuté i zavedenie individuálnej konštanty. Napriek tomu uvedieme i Tvrdenie 3, v ktorom naznačíme definíciu novej individuálnej konštanty.

Tvrdenie 3 *[o definícii individuálnej konštanty] Nech $\varphi(y)$ je formula teórie s rovnosťou $\mathbf{T}$ s jazykom $\mathcal{L}$, pričom*

$$\mathbf{T} \vdash (\exists! y)\varphi(y).$$

Nech jazyk $\mathcal{L}'$ vznikne z jazyka $\mathcal{L}$ pridaním novej individuálnej konštanty c a nech $\mathbf{T}'$ vznikne z $\mathbf{T}$ pridaním axiómy

$$c = y \leftrightarrow \varphi(y). \tag{3}$$

Potom teória $\mathbf{T}'$ s jazykom $\mathcal{L}'$ je konzervatívne rozšírenie teórie $\mathbf{T}$.

Navyše pre ľubovoľnú formulu ψ^* v jazyku $\mathcal{L}'$ je možné zostrojiť formulu ψ v jazyku $\mathcal{L}$ takú, že $\mathbf{T}' \vdash \psi^* \leftrightarrow \psi$.

Uvedené tri tvrdenia charakterizujú definície z pohľadu predikátového počtu, pričom je evidentné, že takto chápaný pojem definície zodpovedá skutočnostiam opísaným v úvodnej kapitole tohto článku.

Príklad Jazyk teórie množín obsahuje iba dva symboly binárnych relácií $=$ a $\in$. Tieto dva symboly, spolu s logickými symbolmi, stačia na úplný opis teórie množín. Ale jednotlivé formuly by boli veľmi dlhé a len ťažko pochopiteľné, pri striktnom dodržiavaní takého chudobného jazyka. Preto sa definujú nové symboly, bez ktorých si zápisy formúl v teórii množín možno len ťažko predstaviť (pozri napr. axiómy teórie množín v [2]):

- *Definícia symbolu relácie* $\subseteq$
  K jazyku teórie množín pridáme symbol binárnej relácie $\subseteq$ a k teórii množín pridáme axiómu, ktorá definuje reláciu "byť podmnožinou"(porovnaj s (1)):
  $$X \subseteq Y \leftrightarrow (\forall x)(x \in X \rightarrow x \in Y).$$
- *Definícia symbolu operácie* $\cap$
  K jazyku teórie množín pridáme symbol binárnej operácie $\cap$ a k teórii množín pridáme axiómu, ktorá definuje operáciu "prienik"(porovnaj s (2)):
  $$X \cap Y = Z \leftrightarrow (\forall x)(x \in Z \leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)).$$
  Navyše treba zaručiť existenciu a jednoznačnosť takejto množiny Z pre ľubovoľnú dvojicu množín X, Y.

- *Definícia individuálnej konštanty* $\emptyset$
  K jazyku teórie množín pridáme symbol individuálnej konštanty $\emptyset$ a k teórii množín pridáme axiómu, ktorá definuje konštantu "prázdna množina"(porovnaj s (3)):
  $$Z = \emptyset \leftrightarrow \neg(\exists x) x \in Z.$$
  Opäť treba zaručiť existenciu a jednoznačnosť množiny $\emptyset$.

4 Záver

Zistili sme, že definícia je pomenovanie konkrétneho objektu (definícia novej individuálnej konštanty), pomenovanie vzťahu medzi objektmi (definícia novej relácie), alebo pomenovanie operácie (definícia novej operácie). Uvedením definície v teórii $\mathbf{T}$ získame rozšírenú teóriu $\mathbf{T}'$, ale ukázali sme, že sa jedná o konzervatívne rozšírenie, t.j. množina dokázateľných formúl sa nezmení. Môžeme teda konštatovať, že úlohou definície v matematike je uľahčiť prácu v danej teórii, ako aj skrátiť a zjednodušiť matematické zápisy formúl, bez vplyvu na vlastnosti samotnej teórie.

Referencie

[1] BLAŽEK, J. - KUSSOVÁ, B. - VOPĚNKA, P.: *Množiny a přirozená čísla.* SPN, Praha 1977.

[2] BUKOVSKÝ, L.: *Množiny a všeličo okolo nich.* Alfa, Bratislava 1985.

[3] GUNČAGA, J.: *Prípravný kurz z matematickej analýzy.* KU, Ružomberok 2004.

[4] SOCHOR, A.: *Klasická matematická logika.* Karolinum, Praha 2001.

[5] ŠTEPÁNEK, P.: *Matematická logika.* SPN, Praha 1982.

[6] TARSKI, A.: *Úvod do logiky.* Academia, Praha 1969.

Adresa autora:
RNDr. Zdenko Takáč, PhD.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta KU
Ružomberok
takac@fedu.ku.sk