

Výučba kombinatoriky, pravdepodobnosti a matematickej štatistiky na základných, stredných a vysokých školách

Lucia Švábová
MESC: K20, K40, K50

Úvod

Pravdepodobnosť a matematická štatistika je na vysokých školách technického zamerania často súčasťou základného kurzu matematiky, ktorú musia študenti absolvovať väčšinou v prvom ročníku svojho štúdia v rámci predmetov Matematika 1 a 2. Táto časť matematiky býva pre študentov značným problémom, pretože sa výrazne odlišuje od ostatných častí vysokoškolskej matematiky. V ostatných častiach Matematiky 1 a 2 sa študenti naučia riešiť príklady pomocou matíc, limit, derivácií, integrálov podľa určitých predložených schém, naučia sa jednotlivé typy príkladov a vyučujúci im môže dať návod, ako ich riešiť. Avšak pri prechode na pravdepodobnosť a štatistiku nastáva problém pochopenia predkladanej problematiky, pretože tu neexistuje jednoduchá univerzálna schéma, ako študentovi uľahčiť počítanie príkladov. Riešenie príkladov z pravdepodobnosti už vyžaduje schopnosť „iného“ spôsobu rozmýšľania a analýzy daného príkladu. Každý príklad treba rozobrať do detailov, rozpísať jednotlivé podprípady a potom im priradiť hľadanú pravdepodobnosť. Na preriešenie väčšieho množstva príkladov však často na cvičeniach z matematiky nie je dostatočný priestor a keďže riešenie jednotlivých príkladov sa odlišuje, pre študentov je značným problémom vytvoriť riešenie príkladu samostatne.

Tento článok sa zaoberá analýzou súčasného stavu vyučovania pravdepodobnosti a matematickej štatistiky na vysokých školách a tiež kombinatoriky na základných a stredných školách. Bude teda predstavovať vstupnú štúdiu k tejto problematike a obsahuje tiež niektoré návrhy, ako tento stav zmeniť. Neskôr v ďalších článkoch budú uvedené skúsenosti s uvedením týchto návrhov do praxe a tiež ďalšie návrhy na zlepšenie súčasného stavu vyučovania pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.

Kombinatorika na základnej škole

Kombinatorika na základnej škole je pomerne novým učivom, zaradeným do učebných plánov len nedávno. Príklady z kombinatoriky na úrovni základnej školy sa v starších typoch zbierok z matematiky vôbec nevyskytujú, a preto ostáva na učiteľovi, aby žiakom ozrejmil túto časť matematiky a ich prvý kontakt s ňou. Problémom môže byť aj to, že toto učivo je zaradené na konci školského roka a preto naň môže učiteľovi v súvislosti s rôznymi koncoročnými aktivitami ostať málo času. Niektorí učitelia toto učivo so žiakmi vôbec nepreberajú, pretože sa možno viacej zdržali preberaním iných tém. Žiaci sa však s kombinatorickými úlohami stretnú aj v deviatom ročníku na testovaní Monitor 9, kde ide väčšinou

o úlohu, ktorá sa rieši vypisovaním jednotlivých správnych možností. Nehovoriac už o úlohách z pravdepodobnosti, ktoré sa doposiaľ vyskytli v každom ročníku testovania Monitor 9, väčšina žiakov ich však na hodinách matematiky vôbec nepreberala a nepoznajú ani základný vzorec na výpočet pravdepodobnosti. Aj keď s ostatnými učivami niektorí žiaci nemajú väčší problém, kombinatorika, prípadne pravdepodobnosť býva „kameňom úrazu“ pre takmer všetkých žiakov. Niektorí sa s ním stretávajú po prvýkrát až pri príprave na spomínaný Monitor 9, alebo sa s týmto učivom už stretli, chýba im však systematickosť pri vymenovávaní správnych riešení. Veľkým problémom býva fakt, ako majú zistiť, kedy už majú vypísané všetky možnosti. Žiak si už od začiatku nevytvorí systém v riešení a potom namiesto porozmýšľania nad tým, ako by sa dali vytvoriť ďalšie možnosti tým, že vytvorí nejaké symetrie, prehlási, že jeho riešenie je už úplné. Nakoľko v týchto úlohách nie je možnosť skúšky, nepríde na to, že urobil chybu a jeho riešenie úplné nie je.

Napriek všetkým týmto spomenutým problémom je zaradenie kombinatoriky do učebných plánov na základnej škole nanajvýš vhodné, pretože toto odvetvie matematiky dáva šancu aj menej talentovaným žiakom na to, aby ich matematika začala znovu baviť a zaujímať a taktiež rozvíja v žiakoch tvorivosť, systematickosť, logické myslenie. Tu sa slabší žiaci nemusia trápiť nad pochopením pre nich niekedy zložitých zaužívaných postupov na riešenie úlohy, ktoré im učiteľ predloží. V kombinatorike si môžu toto riešenie vytvoriť úplne samostatne a pri troške trpezlivosti a tvorivosti prídu sami aj na systém, ktorý treba do riešenia príkladov zaviesť, aby sa im niektoré správne možnosti „nestratili“.

Uvediem príklad úlohy, ktorú zvládli samostatne vyriešiť žiaci šiestej triedy, ktorí boli slabší v matematike.

Máme 4 číslice 1,2,3,4. Vytvor z nich všetky možné 4 – ciferné čísla, ak každú číslicu smieš použiť len raz. Koľko čísel môžeš takto vytvoriť?

Je to úloha trochu náročnejšia na trpezlivosť žiaka, avšak postupne aj slabší žiak príde na to, ako si riešenie príkladu môže zjednodušiť. Po vypísaní čísel, ktoré začínajú jednotkou a dvojkou príde na to, že čísel, ktoré začínajú trojkou a štvorkou bude rovnako veľa a teda vie, koľko možností musí ešte napísať, aby mohol prehlásiť, že jeho riešenie je úplné. Úlohu možno obmeniť ešte tým spôsobom, že medzi číslice, ktoré má žiak k dispozícii zaradíme nulu. Ak sa žiak aj pomýli tým spôsobom, že povie, že riešenie bude 24, ak mu pripomenieme, že číslo sa nesmie začínať na nulu, bude hneď vedieť určiť, koľko je čísel, ktoré sa začínajú na nulu a teda koľko možností nemal započítať do riešenia úlohy.

Úloha sa dá vyriešiť tiež vytvorením stromu tým spôsobom, ako sú poväčšine riešené úlohy tohto typu v učebniciach matematiky pre základné školy.

Kombinatorika na strednej škole

Spomínané chyby, ktoré robia žiaci na základnej škole, sa u nich prenášajú aj na stredné školy, kde im v kombinatorike pribúdajú definície

kombinácií, variácií, permutácií a vzorce pre výpočet. Tu býva častým problémom rozlišovanie situácie a definícia „záleží na poradí“ a „prvky sa opakujú / neopakujú“. Študenti týmto slovným spojeniam často nie veľmi rozumejú, nevedia identifikovať ani to, či napríklad v úlohe o vytváraní trojciferných čísel z daných číslic záleží alebo nezáleží na poradí číslic. Treba im na každom príklade opakovať vysvetlenie „ak vytvorím nejakú možnosť a zamením poradie prvkov v nej, dostanem tým nové riešenie, alebo je to to isté?“ Rovnako vyjadreniu „prvky sa opakujú, resp. neopakujú“ nerozumejú správne tak, že či sa prvky môžu alebo nemôžu opakovať v rámci jednej možnosti, jedného riešenia úlohy. Uvedomovanie si týchto pojmov treba v žiakoch upevňovať čo najviac na strednej škole, aby si toto kombinatorické správne uvažovanie priniesli so sebou na vysokú školu. Často sa stáva, že aj veľmi dobrý žiak z matematiky, ktorý na strednej škole nemá so žiadnym učivom nejaké väčšie problémy, má s kombinatorikou značný problém a toto učivo patrí medzi jeho najmenej obľúbené a bojí sa ho. Tu si už navyše svoje riešenie môžu len ťažko skontrolovať, nakoľko v mnohých príkladoch neprichádza do úvahy vypisovanie jednotlivých možností. A zas na druhej strane, ak sa úloha dá vyriešiť vypísaním niekoľkých možností a následne určením počtu ich permutácií, veľkým problémom pre študentov býva fakt, ako majú zistiť, kedy už majú vypísané všetky riešenia. Študentom chýba systematickosť pri vymenovávaní správnych riešení.

Ako ďalšie úskalie by som spomenula zložitejšie kombinatorické úlohy toho typu, kde na záver riešenie musia študenti zistiť, či jednotlivé počty možností, ktoré vypočítali, sa majú sčítať alebo vynásobiť.

Majme danú úlohu:

Koľko rôznych ŠPZ na autá sa dá vytvoriť z 24 písmen a 10 číslic, ak sa značka má skladať z dvoch písmen a za nimi nasledujúcich štyroch číslic?

[2]

Študent si správne vypočíta, že počet možností, ako vybrať 2 písmená z 24 je 576 a počet možností, ako vybrať 4 číslice z 10 je 10000. Čo však ďalej s týmito dvoma výsledkami? Treba študenta priviesť k tomu, aby sám prišiel na to, či výsledky treba spočítať alebo vynásobiť. Podobne, ako žiaci konštruujú stromy na základnej škole, kde im slúžili na vymenovanie všetkých správnych možností, použijeme stromy aj v tomto prípade.

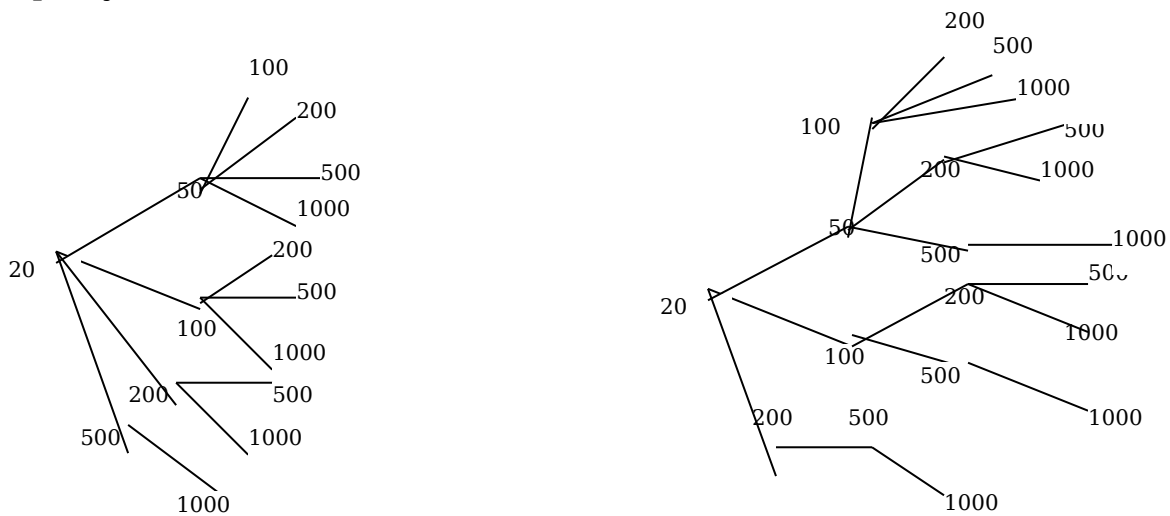
Vezmeme si značku, ktorá obsahuje písmená AA. Ku nej môžeme priradiť 4 čísla spomínanými 10 000 spôsobmi. Ak vezmeme inú značku, AB napríklad, ku nej môžeme priradiť 4 čísla opäť 10 000 spôsobmi. A takto postupujeme ďalej. Pri zobrazení situácie pomocou vetvenia v stromoch študent sám príde na to, že jednotlivé výsledky musí vynásobiť aby dostal konečné riešenie.

Majme druhú úlohu:

Koľko rôznych súm môžeme zaplatiť bankovkami 20, 50, 100, 200, 500, 1000 Sk, ak sa majú použiť 3 alebo 4 bankovky, pričom z každej máme 1 kus? [2]

Študent opäť správne vypočíta, že počet možností, ako vybrať 3 bankovky z 6, ktoré má k dispozícii je 20 a počet možností, ako vybrať 4 bankovky zo 6 je 15. Ďalej musí určiť, či tieto dva výsledky má spočítať, alebo vynásobiť. Ak si situáciu znázorní stromom ako u predchádzajúceho

príkladu, príde na to, že tento krát ide o paralelné možnosti, ktorých počty treba sčítať.



Obrázok 1 Ukážka čiastočného riešenia úlohy pomocou znázornenia stromovým diagramom

Pravdepodobnosť a matematická štatistika na vysokej škole

Na vysokých školách často nie je priestor na precvičovanie veľkého množstva príkladov na cvičeniach z matematiky a pravdepodobnosť a štatistika spôsobuje značné problémy aj tým študentom, ktorí ostatné časti vysokoškolskej matematiky zvládali pomerne dobre. Počítanie príkladov z pravdepodobnosti chce iný systém uvažovania, neexistujú univerzálne schémy na to, ako príklady vyriešiť a stačí zmeniť iba niektoré podmienky dané v príklade a riešenie sa tiež zmení. Študenti sú z tejto časti matematiky značne zmätení. Napríklad sa naučia používať pri výpočte úloh z pravdepodobnosti kombinačné čísla a základný vzorec na výpočet pravdepodobnosti pomocou pomeru „počtu priaznivých možností ku počtu všetkých možností“. Potom pri zadaní odlišného príkladu, ktorý by sa dal jednoducho vyriešiť „sedliackym rozumom“, sa snažia tento príklad „napasovať“ na kombinačné čísla. Často sa potom pýtajú, ako majú vedieť, kedy použiť kombinačné čísla a kedy „iba zlomok“? Nie sú schopní správne určiť, kedy sa príklad môže riešiť použitím kombinačných čísel a kedy treba použiť variácie či permutácie, prípadne stačí trochu pouvažovať a jednotlivé možnosti vymenovať. Nehovoriac už o tom, ako majú identifikovať príklad, ktorý sa týka napr. úplnej pravdepodobnosti, podmienenej pravdepodobnosti atď.

Čo sa týka úloh z matematickej štatistiky, tu sa študenti naučia počítajú jednotlivé momenty náhodnej premennej, koeficienty korelácie, šikmosti a špicatosti atď. podľa daných vzorcov, ktoré sú náročné na zapamätanie a preto ich aj veľmi rýchlo zabudnú. Naučia sa testovať hypotézy pre stredné hodnoty, rozptyly, určovať intervaly spoľahlivosti na

danej hladine významnosti ([1]). Problémom však je správna interpretácia výsledkov. Študent vie, že napr. koeficient korelácie má vypočítať podľa daného vzorca, nemá však dostatočný nadhľad, aby napríklad vedel, že výsledok musí byť z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$, čo by mu mohlo slúžiť pre kontrolu, a vôbec nevie, aké číslo to vlastne vypočítal a aký záver by sa dal z vypočítanej hodnoty urobiť. Nepochopenie tejto problematiky sa ukazuje napríklad pri spracovávaní bakalárskych záverečných prác, kde mnoho študentov spracováva dotazníkový prieskum. Z týchto dotazníkov robia závery iba vo forme percentuálnych vyjadrení a stĺpcových prípadne kruhových diagramov [3]. Ak by však použili aspoň tie jednoduché metódy, ktoré sa naučili na matematickej štatistike, mohli by zo svojich prieskumov dostať veľmi pekné výsledky a ich záverečné práce by boli hodnotnejšie. Preto si myslím, že pri výučbe štatistiky by malo byť, popri tom, aby študenti ovládali správne postupy pri rôznych štatistických metódach, nemenej dôležité aj to, aby vypočítané výsledky vedeli aj správne (alebo vôbec nejako) interpretovať a aby si vedeli zvoliť vhodnú štatistickú metódu pre svoju konkrétnu spracovávanú problematiku.

Vhodným riešením by mohlo byť zaviesť pre slabších študentov (prípadne pre všetkých študentov prvého ročníka) úvodný vyrovnávací kurz matematiky, ktorý by im mal pomôcť zvládnuť prechod na vysokoškolskú matematiku, prípadne doplniť cvičenia z Matematiky 1 a 2. (Takéto predmety už na niektorých univerzitách existujú.) Tu by mohol vzniknúť dostatočný priestor venovať sa aj menej šikovným žiakom, ktorí na strednej škole neabsolvovali dostatočný počet hodín matematiky na to, aby boli pripravený pochopiť učivo vysokoškolskej matematiky. Neskôr by bol priestor na hlbšie pochopenie problémov a úloh z oblasti kombinatoriky a na to nadväzujúcej pravdepodobnosti a štatistiky. Jednotlivé pojmy z pravdepodobnosti a štatistiky by sa mohli zavádzať postupne, začať motivačnými príkladmi, ktoré by študentov zaujali a viedli by ich k hlbšiemu pochopeniu a hlavne záujmu o predkladanú problematiku. Namiesto predostrenia „hotového“ teoretického základu pravdepodobnosti by študenti sami pomocou motivačných príkladov mohli sledovať význam histogramov, distribučných funkcií a momentov náhodných premenných, v štatistike pochopiť význam testovania. Takýmto postupom by sa naučili predkladanej problematike porozumieť a pochopiť význam výpočtov zo vzorcov, ktoré im inak nič nehovoria a rýchlo ich zabudnú. Naučili by sa vypočítané výsledky správne interpretovať a teda by im tieto metódy mohli poslúžiť aj v budúcnosti v praxi.

Literatúra:

- [1] CHAJDIAK, J.: *Štatistika jednoducho*, STATIS, Bratislava, 2003
- [2] KOLEKTÍV AUTOROV: *Zbierka úloh z matematiky na prijímacie skúšky 4. vydanie*, Žilinská univerzita, Fakulta PEDaS, 2005.
- [3] *Záverečné bakalárske práce vypracované na Katedre spojov, Fakulta PEDaS, Žilinská univerzita, 2005 - 2007*

Adresa autora:

RNDr. Lucia Švábová

Žilinská univerzita, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov

Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky

Univerzitná 1

010 26 Žilina

lucia.svabova@fpedas.uniza.sk