Eulerovy zásluhy o reformu goniometrie

Radka Smýkalová

Abstract.
Leonhard Euler was born in Basle in 1707, three hundred years ago. He expanded and completed all areas of mathematical thinking as well as if they were newly created.

Hereinafter we'll only deal with one scientific branch. That discipline is goniometry, the area of mathematics, which deals with goniometric functions. Part of goniometry is also trigonometry, which attends to practical use of these functions in solving different exercises about triangles.

Before we will talk about Euler's activities in mentioned discipline, we'd like to give a short view about his life.

MESC: F40

Úvod

Píše se rok 2007. Před třemi sty léty se v Basileji narodil Leonhard Euler. Člověk, který rozšířil a doplnil všechny oblasti matematického myšlení, mnohé tak dobře, jako by byly nově vytvořeny.

My se v následujícím budeme zabývat pouze jednou vědeckou disciplínou. Tou disciplínou je *goniometrie*, oblast matematiky, která se zabývá goniometrickými funkcemi. Její součástí je také *trigonometrie*, která se věnuje praktickému užití těchto funkcí při řešení různých úloh o trojúhelnících.

Dříve než si vezmeme na mušku Eulerovy aktivity ve zmíněné disciplíně, chtěli bychom podat krátký přehled o životních podmínkách tohoto skvělého muže.

Leonhard Euler

Leonhard Euler se narodil 15. dubna roku 1707 v Basileji (Švýcarsko) jako syn duchovního Paula Eulera, který sám byl nadšeným studentem Jakoba Bernoulliho. Svého syna, který od něho zdědil sklon k matematice, nejdříve sám vyučoval. Leonhard Euler se brzy odebral na univerzitu v Basileji, kde již v 16 letech nabyl hodnosti magistra. Jeho učitelem matematiky byl Johann Bernoulli, jeho spolužáci Bernoulliho synové - Mikuláš II a Daniel. Když Kateřina I. roku 1724 založila akademii v Petrohradu podle návrhu Petra Velikého, Mikuláš a Daniel tam byli povoláni. A když první brzy zemřel, odcestoval do Petrohradu také Euler ve svých 20 letech původně na místo učitele fyziologie. Avšak když již roku 1730 Švýcar Jakub Herman, potom Bilfinger a Daniel jeden po druhém opustili Petrohrad, stal se Euler profesorem fyziky (později i matematiky) a členem akademie. Vzhledem k neustálé palácové revoluci a výměně trůnu a také pro neradostné vztahy v akademii se mu jeho pobyt tak zprotivil, že byl roku 1741 Bedřichem Velikým povolán do Berlína, kde se stal roku 1744 ředitelem v nově vytvořené matematické třídě akademie Berlíňanů. Když však za vlády Kateřiny II. začala nová doba rozkvětu vědy v Petrohradu, vrátil se roku 1766 zase zpět. Bohužel se stalo neštěstí. Ještě v tom stejném roce úplně oslepnul, poté co již roku 1735 na jedno oko vidět přestal. Ale přesto pracoval dále s nepřerušeným úsilím, podporovaný znamenitou pamětí a přispěním obětavých přátel až do své smrti roku 1783. Jeho spisy se skládají ze 32 kvartových svazků a 13 osmerkových svazků samostatné práce a dále asi z 800ti pojednání. Mnohé z nich byli vydány až po jeho smrti. Věru nevídaná plodnost, která nás naplňuje větším obdivem, když jeho - ve všech směrech - nová a průkopnická činnost obepnula všechny oblasti čisté i aplikované matematiky.

Hlavní rysy Eulerovy reformy

Z obecného pohledu na goniometrii je nejvýraznější Eulerovou zásluhou, že různé (do té doby pouze numericky vyčíslované a tabulizované) trigonometrické hodnoty *přetvořil ve funkce*. Toto tvrzení vzhledem ke složitému historickému pojmu funkce nyní vysvětlíme a upřesníme.

V dnešní době je pojem funkce v matematice název pro *zobrazení* z nějaké množiny M do množiny čísel (většinou reálných nebo komplexních), nebo do množiny vektorů (pak se mluví o vektorové funkci). Je to tedy jakýkoliv předpis, který každému prvku z M jednoznačně přiřazuje nějaké číslo nebo vektor (hodnotu funkce). Někdy se však slovo funkce používá pro libovolné zobrazení.

Pro Eulera, od něhož pochází označení $y = f(x)$ z roku 1748, však pojetí funkce znamenalo existenci analytického výrazu obsahujícího x, podle kterého se dá y vypočítat. Na funkci tedy musela být dána určitá formule, do které mohlo být za proměnnou x dosazeno jakékoliv číslo - reálné či komplexní. Euler pak rozděloval funkce na dvě skupiny, a to na funkce *algebraické* a *transcendentní*. Nejjednodušší tvary algebraických funkcí s proměnnou x jsou:

$$y = a + x,\ y = a - x,\ y = ax,\ y = \frac{a}{x},\ y = x^a,\ y = \sqrt[a]{x}.$$

Skládáním takových funkcí dostaneme všechny algebraické funkce, které Euler dále rozlišuje na funkce racionální a iracionální, celistvé a lomené. Transcendentní funkce jsou podle Eulera takové, které nelze úkony algebraickými konečným tvarem vyjádřit. Patří sem funkce exponenciální, goniometrické, logaritmické a cyklometrické. Tak pro dříve výlučně geometricky chápané hodnoty sinu a kosinu Euler objevil analytické formule ve tvaru (nekonečných) řad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \ , \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$

Tyto formule odstranily pochybnosti, jak definovat hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro čísla x, která nevyjadřují velikost ostrých úhlů.

Do doby Eulerovy bylo v trigonometrii mnoho nedořešených problémů. Jak jsme právě naznačili, nebyla ještě vyjasněna otázka znamének goniometrických funkcí úhlů v různých kvadrantech. To bylo příčinou toho, že často vznikal zmatek v převodních vzorcích. Neexistovala jednotná symbolika, každý vzorec se odvozoval geometricky pomocí zvláštního náčrtku atd.

Hodnoty goniometrických funkcí Euler důsledně spojoval s pravoúhlým trojúhelníkem o jednotkové přeponě. Právě Eulerovou zásluhou je myšlenka považovat goniometrické hodnoty za čísla. Euler tedy chápal hodnoty sinu a kosinu jako čísla, nikoli jako délky úseček, jak tomu bylo ve starověku a ve středověku. Tato čísla vyjadřovala poměr příslušných goniometrických délek k poloměru kružnice. Přitom poloměr kružnice jakožto *plný sinus* kladl Euler rovný číslu 1.

Euler nemá ani v níže rozebíraném díle *Introductio*, ani nikde jinde definované trigonometrické funkce explicitně jako podíly délek stran pravoúhlého trojúhelníka, to znamená jako čísla. Avšak podle autora [1] pro ty, kteří jeho spisy přesně znají, neexistuje žádná pochybnost, že Euler goniometrické funkce jako takové chápal, neboť na různých místech jeho prací se vyskytují přímo napsané poměry. Je důležité ještě jednou poukázat na fakt, že pro Eulera to nebyly pouhé podíly délek stran v trojúhelníku, ale byly to skutečné (analytické) funkce úhlů.

Euler se díval na hodnoty goniometrických funkcí jako na čísla bez geometrického rozměru. To mu umožnilo je začít používat ve vzorcích, aniž by narušil jejich homogenitu. Krásným příkladem je kosinová věta. Sám Euler o tom píše: *Domnívám se, že jsem první zavedl do algebry siny a tangenty úhlu tak, aby se s nimi mohlo zacházet jako s ostatními čísly a nerušeně provádět operace všeho druhu.*

Označování stran trojúhelníka malými písmeny latinské abecedy a, b, c, protějších úhlů pak velkými písmeny téže abecedy A, B, C umožnilo Eulerovi značně zjednodušit trigonometrické vzorce, které tak nabyly známé symetrie. Témuž účelu sloužilo Eulerem zavedené zkrácené označení goniometrických funkcí úhlu z znaky $\sin .z, \cos .z$, $\mathrm{tang}.z, \cot .z, \sec .z, \mathrm{cosec}.z$ nebo $\sin .A.z, \cos .A.z$ atd. Písmeno A u posledních zápisů je počátečním písmenem latinského slova *arcus* - oblouk. Tu a tam se také v jeho spisech vyskytuje $\sin .v.z$ namísto sinvers (*sinus versus* - latinsky - vzepětí oblouku, hodnota daná vzorcem $v = \mathrm{versin}\alpha = 1 - \cos\alpha$).

Euler stanovil neobyčejně jednoduchý a nečekaný vztah mezi goniometrickými a exponenciálními funkcemi (v komplexní rovině), který lze vyjádřit vzorcem $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Přestože Euler nenapsal žádné dílo věnované ucelenému výkladu goniometrických funkcí, jeho práce byly již v 18. století vědeckým podkladem pro sestavení některých učebnic trigonometrie a goniometrie, na svou dobu velice pokrokových. Jednou z takových prvních byla např. učebnice akademika M. J. Golovina *Rovinná a prostorová trigonometrie s algebraickými důkazy*, vydaná v Rusku roku 1789. Tato učebnice obsahovala všechny nejdůležitější goniometrické vzorce a funkce téměř v tom tvaru, v jakém jich používáme v nynější době.

Goniometrické funkce vystupují v jedné z Eulerových stěžejních knih. Dílo Úvod do Analýzy z roku 1748 se stalo základní učebnicí infinitezimálního počtu a podnítilo další rozvoj matematické analýzy ve druhé polovině 18. století.

Literatura

[1] Dr. A. von Braunmühl. *Geschichte der Trigonometrie*. 1900.

[2] Veselý Jiří. *Matematická analýza pro učitele*. 1997.

[3] P. J. Kožeurov. *Trigonometrie*. 1955.

[4] Ivor Grattan-Guinness. *The rainbow of mathematics*. 1997.

[5] Victor J. Katz. *A history of mathematics*. 1998.

[6] Veselý Jiří. *články z časopisu Učitel matematiky*. 1995.

[7] http://wikipedia.org/.

Adresa autora:
Mgr. Radka Smýkalová
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita v Brně
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno
e-mail: smyky@seznam.cz