Dlaczego trudno jest się porozumieć z uczniem na lekcji matematyki[1]

Why it is so difficult to understand pupil's talk during mathematical lessons?

Jana Slezakova, Ewa Swoboda

Abstract
The main aim of this paper is to illuminate some obstacles in mathematical discourse. One of the characteristic phenomena of class communication is misunderstanding. We will describe moments of mutual misunderstandings in communication between teacher and student during math. lessons.

MESC: C50, B50

Wstęp

Matematyczny dyskurs pomiędzy nauczycielem i uczniem nie jest sprawą łatwą. Każdy, kto uczył matematyki w szkole z pewnością spotkał się z sytuacją, że uczniowska wypowiedź (lub działanie) bardzo go zaskoczyło. Nauczyciel nie przewidział pewnej odpowiedzi, lub interpretacja podana przez ucznia nie była zgodna z tą, której oczekiwał. Bywają również takie momenty w trakcie lekcji, kiedy uczeń działa zgodnie z intencją nauczyciela ale manifestuje, że nie jest to jego rozumienie problemu. Nierzadko taki uczeń jest diagnozowany przez nauczyciela jako „mało bystry", „niedouczony", „niezdolny". Są to opinie głęboko krzywdzące, niezależnie od faktu, że samo zjawisko etykietowania ucznia jest bardzo niepożądane.

Badania dydaktyczne, które prowadzimy wspólnie od kilku lat pozwoliły na zdiagnozowanie zjawiska nieporozumień między nauczycielem i uczniem. (literatura). Naszym zdaniem, jest ono związane z różnym zakresem doświadczeń matematycznych po obu stronach. Te przeszkody w komunikowaniu się mają podłoże kognitywne, i są bardzo ściśle związane z budowaniem własnej matematyki. Tworzenie matematyki wymaga czasu, a podczas tego procesu następują głębokie zmiany rozumienia wielu pojęć i procedur. Jest oczywiste, że nauczyciel spędził więcej czasu w obcowaniu z matematyką niż uczeń, stąd jego rozumienie musi odbiegać od rozumienia ucznia. Istnieją również przeszkody o charakterze emocjonalnym i społecznym. Mają one jednak uniwersalny charakter, związany nie tylko z matematyką. Tymi przeszkodami nie zajmujemy się w tym opracowaniu.

Nasze rozważania doprowadziły do wyróżnienia czterech podstawowych grup przeszkód w porozumiewaniu się nauczyciela i ucznia. Podajemy krótki ich opis:

A. Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania. Nauczyciel, planując zadanie które ma przybliżyć ucznia do rozumienia pojęcia - potrafi to pojęcie wyłuskać z kontekstu, wie, co jest ważne, a co nie. Stara się tak dobrać kontekst, by jego zdaniem dobrze ilustrował matematyczne pojęcie. Jednak uczeń może z kontekstu wydobyć zupełnie inne elementy, niż to zaplanował nauczyciel. Wiedza matematyczna, którą tutaj wykorzysta może okazać się

[1] The paper was supported by the project MSM0021620862.

inna niż ta, którą zakładał nauczyciel, a wiedza pozamatematyczna może spowodować, że pewne aspekty sytuacji, nieistotne dla nauczyciela, staną się dominujące.

B. *Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji.* Na ogół informacje, które odbieramy, są wieloaspektowe, a skupienie uwagi tylko na jej fragmencie może być niezgodne z intencją osoby wysyłającej informację. Dobrym przykładem ilustrującym ten fakt jest następująca anegdota: Prof. Tischner rozmawia w szpitalu ze swoim nauczycielem: Czy to prawda, że jeden z lekarzy stwierdził, że człowiekowi potrzeba tylko 4 godzin snu, a inny, że najefektywniejszy jest sen przed północą? Odpowiedź: nieprawda, to był ten sam lekarz. Podobne sytuacje są możliwe również w komunikacji matematycznej.

C. Skupienie się na własnych celach. Nauczyciel dobiera zadania zgodnie z własnym celem, który zamierza osiągnąć. Może to być wyćwiczenie pewnej sprawności lub odkrycie określonych własności czy związków. Te cele często determinują sposób pracy nad zadaniem, a odstępstwo od oczekiwanych sposobów pracy jest oceniane jako działanie błędne. Uczeń podejmując zadanie realizuje je zgodnie z własnym rozumieniem, akcentując te elementy, które są dla niego ważne. Nie muszą by one zgodne z celami nauczyciela.

D. Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu. Budowanie własnej matematyki jest długotrwałym procesem, w trakcie którego może następować zmiana znaczenia pewnych słów. Oto kilka przykładów: Dla ucznia polecenie „dodać” może oznaczać „powiększyć”, podczas kiedy w rozumieniu nauczyciela jest to wezwanie do stworzenia sumy. Inne jest znaczenie ułamka, rozumianego jedynie jako wynik oddzielenia z jedności pewnej liczby równych części (w takim aspekcie często jest to pojecie wprowadzane), a inne – jako stosunek dwóch wielkości. Różne znaczenie nadawane tym samym słowom stymuluje do wykonywania różnych procedur i operacji związanych z danym pojęciem; powoduje, że to samo słowo wywołuje inne własności, budzi inne powiązania i relacje.

W prezentowanym opracowaniu przedstawimy kilka przykładów rzeczywistych sytuacji lekcyjnych, w których miało miejsce wzajemne nieporozumienie[2]. Podamy również analizę dydaktyczną tych sytuacji. W ten sposób chcemy przekonać, że problem nie jest marginalny, i że nie występuje w czasie typowych zajęć matematycznych.

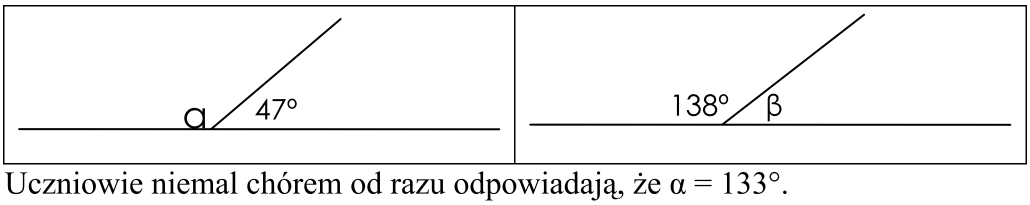
Analiza dydaktyczna obserwowanych sytuacji klasowych

1. **Różne rozumienie kontekstu sytuacji / zadania**

Lekcja w klasie I gimnazjum.

Temat lekcji: Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe.

Nauczyciel podaje zadanie: Jaka jest rozwartość kątów α, β?

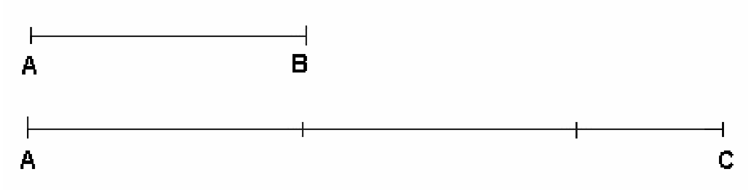


Uczniowie niemal chórem od razu odpowiadają, że α = 133°.
Nauczycielka: *A β?*

[2] Prezentowane przykłady zostały zaobserwowane przez Justynę Lis-Gubernat oraz Anetę Skorupę, studentki Uniwersytetu Rzeszowskiego podczas praktyk pedagogicznych, w roku akademickim 2006/2007. Stały się one później podstawą ich prac licencjackich napisanych w ramach Seminarium Dyplomowego, pod kierunkiem dr Ewy Swobody. Ostatni przykład został nam udostępniony przez dr Mariannę Ciosek z Akademii Pedagogicznej w Krakowie, za co bardzo dziękujemy.

Prawie wszyscy zgodnie mówią: *Ale to nie jest kąt rozwarty.*

W przedstawionym przykładzie miało miejsce różne znaczenie odpowiednie rozumienie treści zadania, w którym pojawił się termin „rozwartość". Trudno mówić tutaj o błędzie, popełnionym przez którąkolwiek ze stron uczestniczących w rozmowie. Być może nauczyciel niepotrzebnie starał się stosować język, do którego przywykł podczas studiów, nie sprawdziwszy uprzednio, czy jest w ten sposób rozumiany w klasie. Uczniowie mieli jeszcze mały zakres słownictwa matematycznego oraz doświadczeń matematycznych. W stosunku do zaistniałej sytuacji wiedzieli, ze istnieje „miara kąta" – a nie „rozwartość kąta". Rozwartość kojarzyli jednie z kątem rozwartym. Mogli słowo „rozwartość", które było dla nich nowe, wytłumaczyć następująco: nauczycielka w nowy dla nas sposób mówi o kątach rozwartych, pytanie „jaka jest rozwartość kata" rozumieć w sensie "ile wynosi miara kąta rozwartego".



Sytuacja wydaje się czytelna, i łatwa do sprostowania. Problem leży w warstwie językowej. W sytuacji dyskursu, bezpośredniej rozmowy, nauczyciel może łatwo zorientować się, gdzie leży problem, i go rozwiązać. Gorzej, gdyby uczniowie taki problem napotkali w czasie rozwiązywania pisemnego testu. Brak „poprawnej" odpowiedzi z pewnością wpłynąłby na ogólną ocenę.

Przykład 2

N.01: Proszę zwiększyć długość danego odcinka półtora raza.

U.01: Uczennica przedłużyła dany odcinek AB poza jego koniec B, odłożyła go od tego końca raz, a potem jeszcze pół raza, otrzymując punkt C. Stwierdziła wyraźnie, że odcinek AC jest tym, o który chodziło.

W zadaniu chodziło o zbudowanie odcinka, którego miara w stosunku do odcinka danego miałaby się jak 1:1,5. Gdyby nauczyciel inaczej sformułował zadanie, być może nie doszłoby do tego nieporozumienia. Można to było powiedzieć: zbuduj odcinek, mający półtora długości odcinka AB.

Nauczyciel podał od razu własną interpretację tego zadania. Wiedział, (co było przecież oczywiste, pewnie również dla uczniów) że długość nowego odcinak będzie większa niż odcinak AB, stąd sformułowanie: "powiększ". Wprowadziło ono chaos i szum informacyjny. Dla uczniów na tym poziomie matematycznych kompetencji słowo „powiększ" wciąż najczęściej kojarzy się z dodawaniem. Powiększ = dodaj jest skojarzeniem funkcjonującym od pierwszego kontaktu z działaniami arytmetycznymi. Powiększ – to: dodaj dołóż, daj jeszcze trochę do tego co istnieje. Porównywanie ilorazowe nie równoważy porównywania różnicowego – jest zwykle uważanie za trudniejsze, i dość niechętnie realizowane w klasie na poziomie nauczania wczesnoszkolnego.

2. Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji

Przykład 3 Lekcja matematyki w klasie IV.

Temat lekcji: <u>*Pojęcie ara i hektara.*</u>

Przy omawianiu pojęcia pola figury wprowadza się pojęcie ara i hektara. Nauczycielka wytłumaczyła dzieciom, że ar jest to pole kwadratu o boku 10 metrów (taka definicja jest w podręczniku). Dzieci policzyły, że jest to 100 metrów kwadratowych.

Kolejne zadanie polega na obliczeniu pola prostokąta o bokach 20 m na 5 m.
N.01: Ile wam wyszło?
U.01: 100 m^2.
N.02: Widzicie ten prostokąt ma powierzchnię 1 ara.
U.02: Jak to? Przecież to nie jest kwadrat.....

W tej sytuacji uczniowie skupili uwagę na fakcie, że ar to pole *kwadratu.* Prawdopodobnie w ich wyobrażeniach powstało skojarzenie, że z pewnych powodów taki duży kwadrat nazywa się *arem*. Powód mógł być związany z niezbyt dobrze ukształtowanym pojęciem jednostki miary i samej procedury mierzenia. W tej sytuacji kolejne interpretacje mogły być następujące: dwa ary – to dwa kwadraty. Prawdopodobnie wcześniej uczniowie wymierzali pola prostokątów i kwadratów jednostką którą był kwadrat o boku 1 cm. Jest mało oczywiste, by dochodziło wtedy do podziału tej jednostki na mniejsze części, i do zwrócenia uwagi, że te części mają inny kształt niż kwadrat. Nauczanie mogło mieć wtedy formę podającą, nie związaną z manipulacjami wykonywanymi przez uczniów.

W tej szczególnej sytuacji nastąpiła bardzo specyficzna zbitka znaczeń – 1 ar jako kwadrat o określonych wymiarach i jeden ar jako pole dowolnej figury. Jest to niejako sytuacja graniczna dla pojęcia pola jak i dla pojęcia jednostki pola.

Dla nauczycielki było oczywiste, że ar i hektar mogą dotyczyć figur o różnych kształtach – że jest to jedynie jednostka miary. Nie zwróciła uwagi na niezręczność definicji. Jest jednak godne podkreślenia, że na możliwość błędnej dziecięcej interpretacji nie zwrócili uwagi autorzy podręcznika podając właśnie taką a nie inną definicję ara.

3. Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Przykład 4

N01 proszę x zwiększyć o połowę
U01: pisze: x + ½
N02: Czy na pewno tak będzie?
U02: przecież jeżeli zwiększymy x o 5 dostaniemy x + 5

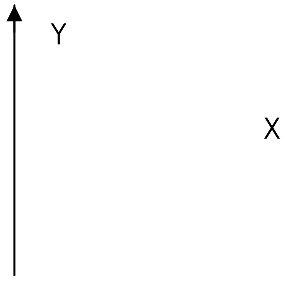
Uczeń wyraźnie tłumaczy, skąd się wzięło nieporozumienie. Połowa została skojarzona ułamkiem i zapisana symbolem ½. W wielu podręcznikach, wprowadzenie pojęcia ułamka połączone jest z rysowaniem różnych „połówek” konkretnych obiektów a tym rysunkom towarzysz symboliczny zapis ½. Uczeń wiedział, że wypowiedź słowna dotyczy zadania matematycznego. Postanowił w sposób dosłowny przetłumaczyć ją na język symboli matematycznych. „Zwiększyć” zakodował jako +, połowę jako ½.

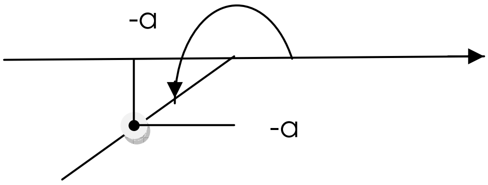
Uczeń prawdopodobnie wielokrotnie spotykał się z zapisami w których równocześnie występowały liczby i litery (podany przez niego przykład świadczy o tym). Dlatego nie widział niczego niepokojącego w zapisie, który właśnie stworzył.

4. Skupienie się na własnych celach

Przykład 5

Lekcja w liceum, poświęcona związkom między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Uczeń ma w prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczyć drugie ramię kąta skierowanego, i napisać jego współrzędne. Praca jednej z uczennic wyglądała następująco:





Jak widać, uczennica zaznaczyła ramię w trzeciej ćwiartce i wybrany punkt oznaczyła P(-a, -a). Prowadząca poleciła zmazać zapisane współrzędne i oznaczyć je jako (x, y). Nie padło przy tym żadne wytłumaczenie tej decyzji, ani pytanie prowadzącej do uczennicy, dlaczego tak oznaczyła wybrany punkt.

Wydaje się, że intencją uczennicy było zaznaczenie, że wybrany punkt leży w trzeciej ćwiartce, gdzie obie współrzędne są ujemne. Nie wiadomo, dlaczego wybrała tę samą wartość liczbową dla współrzędnych – być może w jej mniemaniu narysowane ramę pokrywało się z osią symetrii ćwiartki, a być może – tak mocno była skupiona na zaznaczeniu wartości ujemnej współrzędnych, że na resztę zapisu nie zwróciła uwagi. Nauczycielka jednak nie zdecydowała się na wyjaśnienie tej kwestii. Dla niej w tym momencie najważniejsze było w zaznaczanie kątów których ramiona leżą w różnych ćwiartkach, własności współrzędnych były dla niej sprawą drugorzędną.

Zakończenie

Nieporozumienia między dwiema osobami są zjawiskiem powszednim, i nie powinny nikogo dziwić. Jednak w sytuacji kiedy nieporozumienie ma miejsce, zupełnie naturalne powinno być dążenie do jego wyjaśnienia. Taka też powinna być postawa nauczyciela na lekcji: w momencie, kiedy uczeń sygnalizuje rozumienie inne niż oczekiwane, nauczyciel powinien dać szanse uczniowi na przedstawienie własnego rozumienia, a następnie zdiagnozować skąd się wzięła różnica rozumień. Daje to szanse nauczycielowi na lepsze poznanie uczniowskich rozumowań oraz sposobów budowania jego własnej matematyki. Czasami wybrnięcie z nieporozumienia jest sprawą bardzo łatwą, czasami odkrywa głębokie błędy w rozumieniu pojęć.

Podane przykłady pochodzą z typowych lekcji matematyki. Jak widać, nauczyciele nie zawsze korzystają z szansy, jaką jest nieporozumienie między nim a uczniem. A przecież, prowadząc z uczniem rozmowę, mogliby się tak wiele od ucznia dowiedzieć o dziecięcym myśleniu i rozumowaniu! Zbyt często ignorują uczniowskie uwagi, narzucając własny tok postępowania z zadaniem, nie zastanawiają się nad głębokim sensem dyskusji, która może się toczyć na lekcji. Dyskusji kształcącej dla obu stron w niej uczestniczących.

Literatura:

Hejný, M. (2004). Understanding and Structure. In Mariotti, M.A. (ed.). Proceedings CERME3 Bellaria-Italy, 28th Febr - 3t 2003. ISBN 88 8492 184 8

Kieran C., Forman E., Sfard A. (2001). Bridging the Individual and the Social: Discursive Approach to Research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics, A PME Special Issue,* Vol.46, s.1-3.

Kratochvilova J., Swoboda E.(2003). *Aspects Affecting Pupil's Thinking in Mathematics During Interactions Resarcher-Pupil,* In Mariotti, M.A. (ed.) Proceedings CERME3 Bellaria-Italy, 28th Febr - 3t 2003. ISBN 88 8492 184 8

Krygowska A.Z. (1989), *CIEAEM 39,* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka Matematyki 10, 149 – 160.

Jana Slezakova
Charles University
Department of Mathematics and
Mathematical Education
Pedagogical Faculty
M.D. Rettigove 4
116 39 Praha 1
Czech Republic

Ewa Swoboda
Uniwersytet Rzeszowski
Department of Mathematics and
Science
Instytut Matematyki
Rejtana 16 A
35 959 Rzeszów
Poland