

Úlohy z diskkrétnej matematiky

INGRID SEMANIŠINOVÁ

ABSTRACT. In this paper, we show utilization of discrete mathematics problems in mathematical classroom. Selected problems illustrated different student approaches and their solution. Reasons for inclusion of such problems are formulated in conclusion.

Úvod

V súčasnosti sa vo vyučovaní matematiky prejavuje výrazná snaha obrátiť pozornosť na rozvíjanie vyšších kognitívnych funkcií na úkor tradičného rozvíjania schopnosti počítat' a nácviku rôznych algoritmov, ktoré u žiakov rozvíjajú predovšetkým nižšie kognitívne funkcie. V tejto súvislosti sa často spomína zaradenie úloh z diskkrétnej matematiky do vyučovania. Podľa Core-Plus Mathematics Project - CPMP (projekt zaoberajúci sa rozvojom, testovaním a vyhodnocovaním osnov a štandardov matematiky na stredných školách v USA) diskrétna matematika pozostáva z pojmov a metód na modelovanie a riešenie problémov zahŕňajúcich konečné procesy a diskkrétne javy. Presnejšie, diskrétna matematika sa zaoberá problémami, ktoré zahŕňajú vymenovanie a výpočet všetkých možností, rozhodovanie v konečných množinách, relácie medzi konečným počtom prvkov a postupné zmeny. Ústredné témy diskkrétnej matematiky v CPMP sú existencia (existuje riešenie?), algoritmizácia riešenia úlohy (môžeme nájsť efektívne riešenie úlohy?) a optimalizácia (ktoré riešenie je najlepšie?) (pozri [1]).

Sformulujeme niekoľko dôvodov pre zaradenie úloh z diskkrétnej matematiky do vyučovania:

- Diskrétna matematika poskytuje veľa úloh, ktorých riešenie nevyžaduje žiadne špecifické vstupné vedomosti a zručnosti (často vystačíme so základnými poznatkami z aritmetiky).
- Diskrétna matematika poskytuje mnoho otvorených úloh, ktoré majú viacero riešení, resp. ponúkajú viacero prístupov k riešeniu.
- Mnoho úloh z diskkrétnej matematiky umožňuje zdôrazniť aplikovateľnosť poznatkov z matematiky a predstaviť nové, zaujímavé, stále sa rozvíjajúce oblasti matematiky.
- Úlohy z diskkrétnej matematiky poskytujú možnosť pre opakovanie algebraických, resp. geometrických zručností v novom kontexte.
- Pri riešení úloh často nie je potrebné používať ustálené odborné výrazy a symboliku. Žiakom môžeme dovoliť, aby hľadali vlastné formy zápisu (napr. grafické formy reprezentácie), prípadne aby riešenie úlohy zapísali slovne.
- Neoddeliteľnou súčasťou diskkrétnej matematiky je objavovanie a overovanie algoritmov. Ich zápis umožňuje učiteľovi upozorniť žiaka na potrebu presného matematického vyjadrovania.

Úlohy z diskkrétnej matematiky

V tejto časti príspevku uvedieme úlohy z diskkrétnej matematiky a stručne popíšeme skúsenosti z realizácie úloh v praxi.

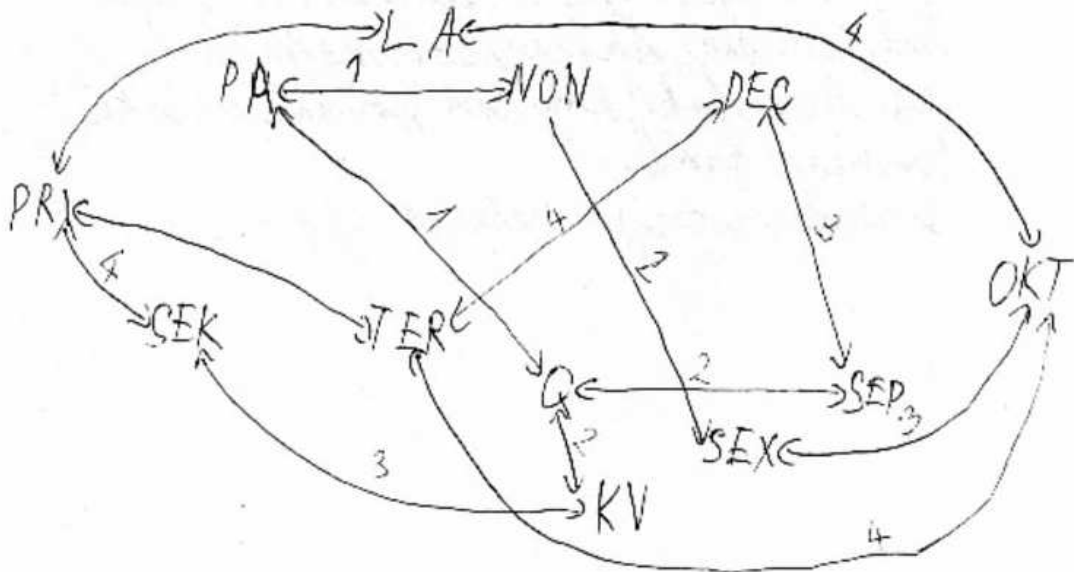
Úloha 1. Koľko je všetkých magických štvorcov rádu 3?

Komentár. Úlohu riešili žiaci 8. a 9. ročníka ZŠ a žiaci 1. ročníka SŠ. Väčšina žiakov ju začala riešiť metódou pokus-omyl. Nájdené magické štvorce sa vypisovali na tabuľu. Niektorí žiaci si postupne uvedomili, že nevystačia s metódou pokusov a omylov, ale musia hľadať logické argumenty pre tvrdenie: „Už máme všetky!“. Títo žiaci si rýchlejšie všimli, že získané riešenia sú rovnaké („ak tú tabuľku otočíme, resp. preklopíme, dostaneme takú istú tabuľku ako už na tabuli máme“ - myšlienka symetrií štvorca). Objavili tiež vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3.

Úloha 2. Ovečka sa potrebuje dostať z planéty PALANDIA na planétu LAMÍDIU. Priamo však neletí žiadna vesmírna loď. Lode lietali dvojsmerne medzi planétami PALANDIA - KVARTAN, PALANDIA - NONAN, PRIMOS - SEKUN, PRIMOS - TERCEN, PRIMOS - LAMÍDIA, SEKUN - KVINT, TERCEN - OKTAN, TERCEN - DECIMOS, KVARTAN - KVINT, KVARTAN - SEPTUN, SEKSTEN - OKTAN, SEKSTEN - NONAN, SEPTUN - DECIMOS, OKTAN - LAMÍDIA. Ako má ovečka cestovať, keď chce:

- prestupovať čo najmenej,
- prestupovať čo najviac? (aj viackrát na jednej planéte, no každú cestu medzi dvoma planétami môže akýmkoľvek smerom prejsť len raz),
- prestupovať na každej planéte práve raz.

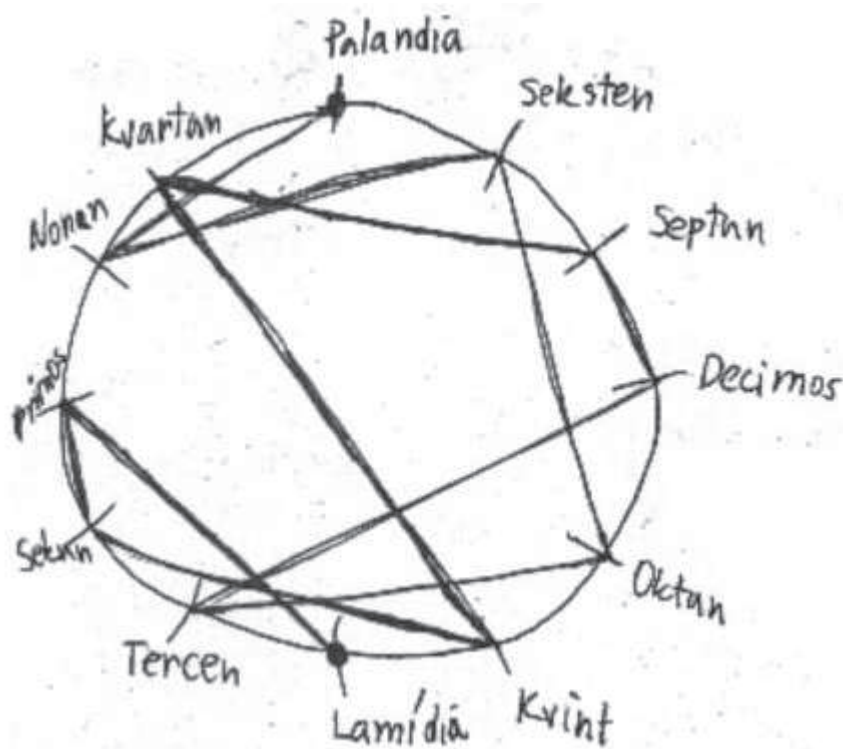
Komentár. Úloha bola zadaná v rámci korešpondenčného seminára Malynár (seminár je určený pre žiakov 4. až 6. ročníka ZŠ) v septembri 2005. Riešilo ju spolu 108 žiakov, z toho 42 reprezentovalo informácie zo zadania pomocou obrázka. Žiaci, ktorí boli schopní použiť vhodnú reprezentáciu (pozri obrázky 1, 2, 3), boli pri riešení výrazne úspešnejší ako ostatní žiaci.



Obrázok 1 – Žiak si na hrany zapisuje počet prestupov pri ceste z PALANDIE. Hrany majú navyše šípky, ktoré označujú smer letu.



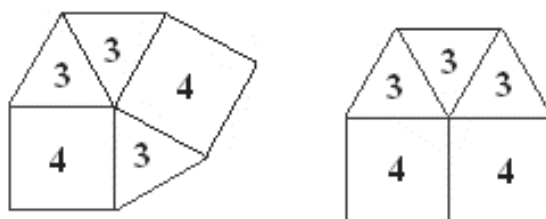
Obrázok 2 – Žiak si nakreslil planárny graf.



Obrázok 3 – Žiak si planéty rozložil na kružnicu, časti kružnice však nereprezentujú hrany grafu.

Úloha 3. Zistíte, z ktorých pravidelných mnohoúhelníkov sa dá vytvoriť rovinná mozaika. Skúste kombinovať viacero typov pravidelných mnohoúhelníkov. Mozaiky, ktoré sa podľa vás dajú vytvoriť evidujte na papier.

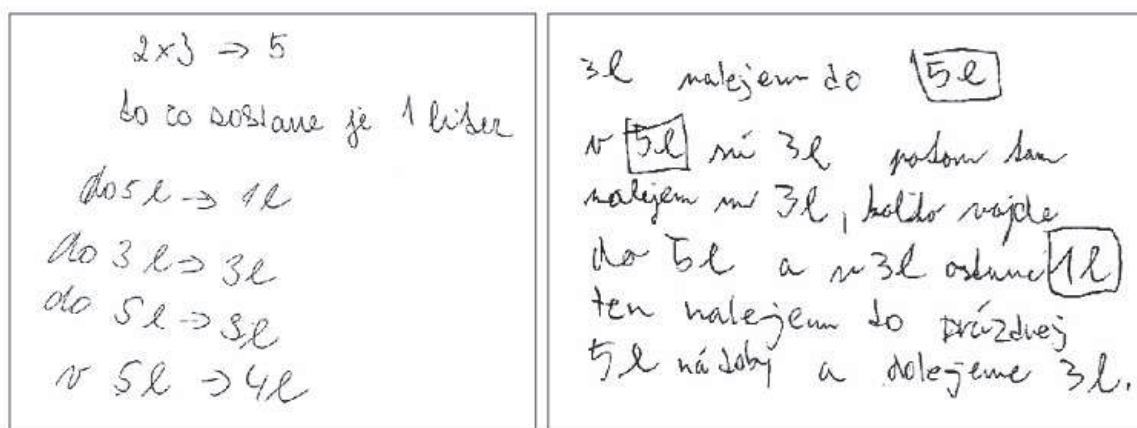
Komentár. Žiaci 8. ročníka, ktorým bola úloha zadaná, na začiatku riešenia zisťovali kombinácie mnohoúhelníkov len experimentálne. Neskôr si uvedomili nepresnosti experimentu. Začali hľadať inú stratégiu riešenia úlohy - objavili súvislosť medzi veľkosťou vnútorného uhla v mnohoúhelníku a možnosťou vytvoriť mozaiku. Niektorí žiaci si navyše uvedomili rozdiely medzi mozaikami s rôznym poradím rovnakých mnohoúhelníkov pri jednom vrchole mozaiky (pozri obrázok 4).



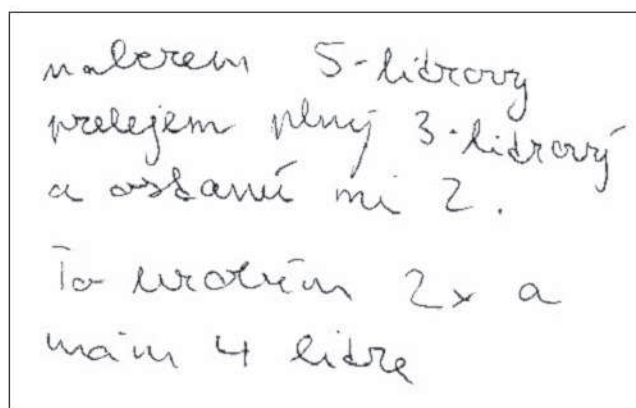
Obrázok 4 – Rovnaké mnohouholníky - rôzne poradie okolo vrchola.

Úloha 4. Odmerajte 4 litre vody, ak máte k dispozícii 3-litrovú a 5-litrovú nádobu a neobmedzené množstvo vody. Na žiadnej nádobe nie sú značky označujúce jednotky.

Komentár. Žiaci 8. ročníka ZŠ našli viacero rôznych postupov, ako úlohu vyriešiť (pozri obrázky 5, 6, 7), čo umožnilo na hodine rozvinúť diskusiu o správnosti, presnosti a efektívnosti navrhovaných algoritmov. Žiaci boli nútení, hlavne kvôli kritike svojich spolužiakov, spresňovať svoje formulácie, upraviť svoj zápis na tabuli. Úloha motivovala žiakov aj k diskusii o efektívnosti algoritmu. (V ktorom riešení menej prelievame? V ktorom riešení je spotreba vody nižšia?)



Obrázok 5 – 1. riešenie úlohy 4.



Obrázok 6 – 2. riešenie úlohy 4.

Naplním 5-litrovú nádobu.
 Prelejem 3 litre z 5-litrovej nádoby do 3-litrovej nádoby.
 V 5-litrovej nádobe ostanú 2 litre.
 Vylejem vodu z 3-litrovej nádoby.
 Prelejem 2 litre z 5-litrovej nádoby do 3-litrovej.
 Naberiem plnú 5-litrovú nádobu.
 Prelejem z 5-litrovej nádoby vodu do 3-litrovej nádoby,
 v ktorej sú už 2 litre.
 V 5-litrovej nádobe teda máme $5 - 1 = 4$ litre.

Obrázok 7 – 3. riešenie úlohy 4. vytvorili viacerí žiaci pri tabuli z nesprávneho 2. riešenia.

Záver

Myslíme si, že diskrétna matematika ponúka pre vyučovanie atraktívne úlohy, ktoré môžu vo výraznej miere pomôcť pri napĺňaní všeobecných cieľov vyučovania matematiky (pozri [4]), ku ktorým patrí rozvíjanie nasledujúcich schopností:

- schopnosť riešiť divergentné úlohy, naučiť žiakov vyslovovať hypotézy, overovať ich platnosť, robiť odhady, svoje výroky argumentovať (úloha 1),
- schopnosť vybrať vhodný typ reprezentácie pre riešenie úlohy (úloha 2),
- schopnosť odhaliť vzájomné prepojenie matematických myšlienok (úloha 3),
- schopnosť používať jazyk k zrozumiteľnému a logicky presnému vyjadrovaniu matematických myšlienok (úloha 4).

Literatúra

- [1] HART, E. W.: *Discrete Mathematical Modeling in the Secondary Curriculum: Rationale and Examples from The Core-Plus Mathematics Project*. Discrete Mathematics in the Schools, Dimacs: Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science zv. 36, AMS 1997, 265-280, ISBN 0-8218-1137-1.
- [2] TRENKLER M.: *Magické štvorce a kocky - zdroj námetov na vyučovanie matematiky*. Disputationes Scientifcae Universitatis Catholicae 2(2002), 88-94.
- [3] KOTOROVÁ, R. – SEMANIŠINOVÁ, I.: *Teória grafov a cestovanie*. Matematika, fyzika, informatika, č. 6, 2005/2006, 328-334.
- [4] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

Adresa autora:

RNDr. Ingrid Semanišinová, PhD.
 Ústav matematických vied
 Prírodovedecká fakulta
 Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach
 Jesenná 5
 041 54 Košice
 e-mail: ingrid.semanisinova@upjs.sk