

Vyučovanie analytickej geometrie na gymnáziách a rozvíjanie kľúčových kompetencií žiaka

Teaching of analytic geometry on grammar schools and development of student's key competences

Jozef Sekerák

ABSTRACT. *Teaching of analytic geometry in grammar school belongs to difficult parts of high schools mathematics. The paper deals with this problem and problem with development of key competences of students. On the basis of survey we try to answer question: In such extent does education of analytic geometry in grammar school develop key competences of students? There are characterized aim and hypothesis, sample and subject, methodology and organization of the survey. In the final part of this paper the summarization of results and recommendations are presented.*

Key words: Analytic geometry, categories of mathematical key competences, development of key competences, pedagogical survey, working lists, interviews.

MESC: A04; B14; D44; D54; D74; G04; G74;

Úvod

Geometria i napriek svojej kráse patrí medzi najproblematickejšie časti v stredoškolskej matematike. Učitelia sa pri jej preberaní neustále stretávajú s neschopnosťou žiakov experimentovať, skúmať, využívať pri riešení geometrického problému i poznatky z iných oblastí matematiky, kombinovať metódy výpočtovej geometrie a metódy konštrukčnej, vektorovej, či analytickej geometrie. Žiakom robí problém aj priestorová predstavivosť. To všetko súvisí s ich kľúčovými kompetenciami na úrovni prepojenia a reflexie. Rieši tieto problémy súčasné vyučovanie geometrie? Rozvíjajú sa u žiakov aj kompetencie na úrovni reflexie alebo vyučovanie geometrie rezignuje už pri kompetenciách na úrovni prepojenia? Tieto otázky nás motivovali a viedli k sústredeniu pozornosti na vyučovanie geometrie, konkrétne na vyučovanie analytickej geometrie. Dôvodom je aj to, že si myslíme, že analytická geometria svojou logickou výstavbou a metódami práce predstavuje jedinečný nástroj rozvoja matematických kľúčových kompetencií žiakov na všetkých úrovniach a ponúka žiakom možnosť pochopiť charakter a štýl matematickej práce.

1. Kľúčové kompetencie a ich úrovne

Východiskom našej práce sú matematické kľúčové kompetencie. Pod pojmom *kompetencie* rozumieme zjednotenie všetkých vedomostí, zručností, schopností a postojov, ktoré jedinec nadobúda počas celého života. Jednotlivé kompetencie umožňujú ich nositeľovi konať adekvátne v konkrétnej situácii, v určitej oblasti ľudskej činnosti. Kľúčové kompetencie sú však tie kompetencie, ktoré sú využiteľné v rôznych oblastiach činnosti, predstavujú len časť nadobudnutých vedomostí, zručností, schopností a postojov. Z toho možno kľúčové kompetencie chápať ako multifunkčný súbor vedomostí, zručností, schopností a postojov,

chápať ich ako potenciál jedinca preukázať vedomosti, zručnosti, schopnosti a postoje v rôznych praktických činnostiach [3].

Na základe štúdia zahraničných pedagogických dokumentov, zahraničných aj domácich publikácií a výskumov, ktoré boli realizované v tejto oblasti sme vytvorili kompetenčný model, v ktorom uvádzame 12 kategórií matematických kľúčových kompetencií. Tento model bol vytvorený aj na základe konštruktívnych diskusií s učiteľmi a inými zainteresovanými na workshopoch. Stále je vo fáze overovania a je otvorený.

- Matematické myslenie a usudzovanie.
- Matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy.
- Použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania, relácií a operácií.
- Znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia.
- Položenie otázky, vymedzenie problému a jeho riešenia.
- Matematické modelovanie.
- Matematická argumentácia, dôkaz.
- Používanie pomôcok.
- Komunikácia.
- Kompetencie týkajúce sa práce s informáciami.
- Kompetencie týkajúce sa postojov a hodnotového systému.
- Personálne a interpersonálne kompetencie.

Kľúčové kompetencie kategorizujeme do troch úrovňových tried [4]:

1. kompetencie na reprodukčnej úrovni,
2. kompetencie na úrovni prepojenia,
3. kompetencie na úrovni reflexie.

Kompetencie na úrovni reprodukcie možno popísať týmito charakteristikami: reprodukcia naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr a riešenie rutinných problémov. V zmysle hierarchie možno túto triedu kompetencií považovať za najnižšiu, pretože sa kladú najjednoduchšie požiadavky na vedomosti, zručnosti, schopnosti a postoje.

Kompetencie na úrovni prepojenia umožňujú riešenie problémov, ktoré nie sú úplne rutinné, ale obsahujú známe alebo pomerne známe prvky. Možno ich charakterizovať týmito vlastnosťami: integrácia, prepojenie a nenáročné rozšírenie známeho materiálu, modelovanie, spojenie viacerých pre žiaka známych metód. Matematické problémy spojené s touto úrovňou kompetencií vyžadujú schopnosť prepojenia rôznych oblastí matematiky alebo prácu s viacerými navzájom rôznymi reprezentáciami daného problému.

Z hľadiska náročnosti požiadaviek na vedomosti, zručnosti, schopnosti a postoje považujeme triedu kompetencií na úrovni reflexie za najvyššiu. Ide o prenikanie do podstaty matematiky. Tieto kompetencie zahŕňajú uvažovanie o procesoch, ktoré sú potrebné k vyriešeniu problému. Majú vzťah k schopnostiam plánovať stratégie riešenia a uplatniť ich v úlohách obsahujúcich viacero súčastí. V porovnaní s úlohami zodpovedajúcimi predošlým úrovňam, môžu byť originálnejšie alebo menej zvyčajné. Kompetencie na tejto úrovni možno opísať týmito charakteristikami: rozvinuté uvažovanie, argumentácia, abstrakcia, zovšeobecnenie a modelovanie použité v nových, neznámych kontextoch, originálny matematický prístup, spojenie viacerých zložitejších metód, vzhľad do problému.

Jednotlivé úrovne sú založené na type kognitívnych nárokov potrebných na vyriešenie rôznych matematických problémov. Horeuvedené matematické kompetencie nemusia patriť iba do jednej triedy kompetencií. Triedy tvoria koncepčné kontinuum, od jednoduchej reprodukcie faktov a počtárskych zručností cez schopnosti previazať rôzne zdroje pri riešení úloh až k „matematizácii“ problémov skutočného sveta. Hierarchia sa chápe tak, že požiadavky (napr. vo forme matematickej úlohy, problému) vyžadujúce kompetencie triedy 3

sú obvykle náročnejšie ako požiadavky vyžadujúce kompetencie triedy 2, čo však neznamená, že kompetencie triedy 2 sú nutným predpokladom všetkých kompetencií triedy 3.

Samozrejme, že kľúčové kompetencie žiakov na jednotlivých úrovniach môžu byť rozvinuté v rôznej miere. Okrajovo sa tomu venuje v ďalších častiach.

2. Analytická geometria na gymnáziách

Žiaci sa s analytickou geometriou oboznámia až v treťom ročníku. V úvodných hodinách sa venuje pozornosť karteziánskej sústave súradníc na priamke, v rovine a v priestore, určovaniu súradníc bodov, súradníc stredu úsečky a vzdialenosti dvoch bodov. V nasledujúcich hodinách sa definuje vektor, pričom sa zdôrazňuje rozdiel medzi voľným a viazaným vektorom. Geometrická interpretácia súčtu a rozdielu vektorov, súčinu reálneho čísla a vektora a lineárnej kombinácie vektorov, ako i výpočet súradníc vektora a jeho veľkosti predstavujú akési východisko k zavedeniu pojmu skalárny a vektorový súčin vektorov. V gymnaziálnych tematických plánoch je tejto časti s názvom Vektorová algebra vymedzených 23 hodín.

V ďalšej časti s názvom Analytická geometria lineárnych útvarov s 31 hodinovou dotáciou sa žiaci učia určovať analytické vyjadrenie priamky v rovine a neskôr analytické vyjadrenie priamky a roviny v priestore. Pozornosť sa venuje aj základným metrickým a polohovým vlastnostiam lineárnych útvarov.

Záverečná časť analytickej geometrie je venovaná kvadratickým útvarom – kužeľosečkám. Do tejto časti patrí analytické vyjadrenie kružnice, guľovej plochy, gule, elipsy, hyperboly a paraboly, ako aj polohové vlastnosti kužeľosečky a priamky. Je jej venovaných 22 hodín.

Podstatou vyučovania analytickej geometrie je obohatenie kompetencií riešenia problémov žiaka, súčasťou ktorých sú kompetencie modelovania a argumentovania. Mnohé geometrické úlohy sa dajú veľmi ľahko riešiť metódami analytickej geometrie, čo si vyžaduje voľbu vhodnej sústavy súradníc, transformáciu geometrickej úlohy na aritmetický (algebrický) problém, riešenie takto preformulovaného problému a spätnú transformáciu výsledkov do geometrie. V tomto vidíme potenciál vyučovania analytickej geometrie pre rozvíjanie matematických kľúčových kompetencií žiaka až na úrovni reflexie. No skúsenosti učiteľov, a to nie len na gymnáziách, nie sú priaznivé. To nás motivovalo zrealizovať prieskum v tejto oblasti.

3. Prieskum

Prieskum sme zrealizovali v júni 2006. Do prieskumu sa zapojilo 186 žiakov tretieho ročníka gymnázia a 12 učiteľov matematiky.

Cieľom prieskumu bolo zistiť do akej miery rozvíja vyučovanie analytickej geometrie na gymnáziách vybrané matematické kľúčové kompetencie žiaka. Na základe tohto cieľa sme stanovili nasledujúcu hypotézu:

H₁: Vyučovanie analytickej geometrie na gymnáziách nerozvíja kľúčové kompetencie na adekvátnej úrovni. Kompetencie na úrovni reprodukcie rozvíja výrazne nadpriemerne, na úrovni prepojenia priemerne a na úrovni reflexie výrazne podpriemerne.

Na verifikáciu tejto hypotézy sme zvolili metódu pracovných listov a rozhovor s učiteľmi. Rozhovor sme použili ako doplnkovú metódu, ktorej všeobecným cieľom bolo konfrontovanie získaných výsledkov s názormi učiteľov.

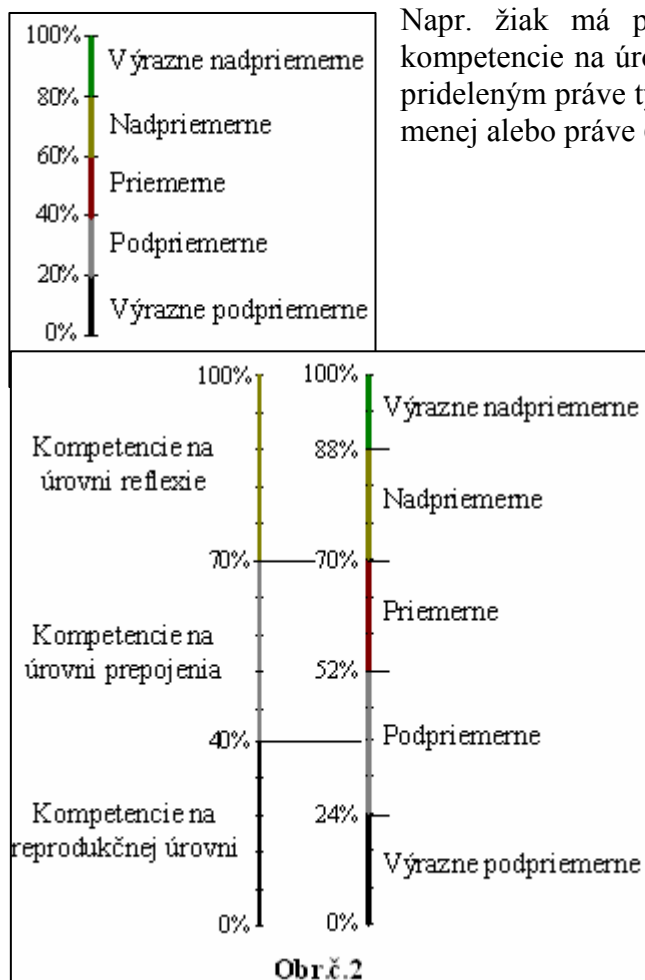
3.1. Pracovné listy

Na gymnázia sme distribuovali sadu 6 pracovných listov, pričom žiaci riešili 3 z nich. Jeden z vektorovej algebry, jeden z analytickej geometrie lineárnych útvarov a jeden, ktorý si mohli žiaci vybrať sami zo 4 rôznych, ale ekvivalentných pracovných listov z analytickej geometrie kvadratických útvarov. Na vyriešenie jedného pracovného listu bolo vymedzených 45 minút. Rysovacie pomôcky a kalkulačky žiaci mohli používať tak, ako boli zvyknutí počas vyučovacích hodín matematiky.

Úlohy v pracovných listoch boli viacerých typov: úlohy s výberom odpovedí, úlohy s krátkymi odpoveďami až po úlohy s voľnou tvorbou odpovede, ktoré od žiakov vyžadovali riešiť problémy a písať zdôvodnenia. Všetky úlohy boli v úplnom súlade s obsahom gymnaziálneho učiva matematiky.

Predmetom testovania boli **argumentačné kompetencie** (*argumentovať, dokazovať*), **kompetencie týkajúce sa práce s informáciami** (*pracovať s textom a obrázkami, hodnotiť informácie (ich užitočnosť), modifikovať informácie*), **kompetencie modelovania** (*znázorňovať a popisovať, schopnosť matematizácie a dematematizácie, vytvárať matematické modely*) a **kompetencie riešenia problémov** (*schopnosť vymedziť problém, nájsť primeranú stratégiu a aplikovať ju, znalosť pojmov a tvrdení, znalosť algoritmov a postupov a schopnosť používať ich*).

Na vyhodnotenie úspešnosti pracovných listov sme použili zložené skórovanie. Jednotlivé úlohy sme rozčlenili pomocou javovej analýzy na čiastkové javy, v ktorých sa uplatňujú kľúčové kompetencie na konkrétnej úrovni, a za každý samostatný jav v riešení úlohy sme prideliť body. 40% bodov z celkového počtu bodov bolo pridelených kompetenciám na reprodukčnej úrovni, 30% kompetenciám na úrovni prepojenia a 30% kompetenciám na úrovni reflexie. Testovaním sme tiež sledovali ako vyučovanie analytickej geometrie rozvíja kľúčové kompetencie na jednotlivých úrovniach. To sme vyhodnocovali nasledovne. Spočítali sme body, ktoré žiak získal za kompetencie na jednotlivých úrovniach a vyjadrili sme jeho úspešnosť v rámci danej úrovne. Z výsledku (pozri obr.č.1) sme potom sformulovali záver.



Napr. žiak má priemerne rozvinuté matematické kľúčové kompetencie na úrovni prepojenia ak z celkového počtu bodov prideleným práve týmto kompetenciám získal viac ako 40%, no menej alebo práve 60%.

Podobným spôsobom možno formulovať všeobecný záver o rozvíjaní matematických kľúčových kompetencií žiaka (pozri obr.č.2).

Napr. vyučovanie analytickej geometrie rozvíja u žiaka kľúčové kompetencie priemerne, ak jeho úspešnosť v testovaní je z intervalu $(52\%, 70\%)$. Teda žiak už disponuje matematickými kľúčovými kompetenciami na úrovni prepojenia,

ktoré má rozvinuté priemerne, nadpriemerne až výrazne nadpriemerne. Na základe tejto charakteristiky možno hodnoverne popísať vedomosti, zručnosti a schopnosti žiaka. Postoje sa týmto spôsobom nedajú zisťovať.

3.2. Rozhovor

Pre naše účely sme si zvolili neštruktúrovaný rozhovor, pretože pri takomto rozhovore nie sú výpovede respondenta ovplyvnené spôsobom myslenia výskumníka. Respondent používa pojmy a obrazy, ktoré autentickým spôsobom vyjadrujú jeho pohľad na skúmané skutočnosti. Našou hlavnou úlohou bolo zaistiť priestor pre spontánnosť a voľné asociácie, tzn. nepoužívali sme tzv. vodítka (neposkytovali sme učiteľom nami formulované závery na základe testovania, pretože nemuseli odpovedať skutočnosti).

Už pri rozhovore sme robili určitú selekciu (hoci je to riskantné, pretože často len dodatočná analýza ukáže, čo bolo dôležité), zapisovali sme len to, čo sme považovali za významné a potom na základe poznámok sme spracovali záznamy rozhovorov.

3.3. Analýza získaných výsledkov

V tabuľke č.1 uvádzame štatistické vyhodnotenie výsledkov získaných testovaním.

Kompetencie Úroveň	Modelovania	Riešenia problémov	Spolu
Reprodukčná	86%	82%	83,3%
Prepojenia	51%	43%	45,7%
Reflexie	21%	16%	17,7%
Celkom	56%	50,5%	52,34%

Tabuľka č.1 – Vyhodnotenie výsledkov získaných testovaním.

Výsledky uvedené v tabuľke č.1 potvrdili, že vyučovanie analytickej geometrie výrazne nadpriemerne rozvíja matematické kľúčové kompetencie na reprodukčnej úrovni, priemerne na úrovni prepojenia a výrazne podpriemerne na úrovni reflexie, čo sme aj predpokladali v stanovenej hypotéze. Z celkového pohľadu síce vyučovanie analytickej geometrie priemerne rozvíja kľúčové kompetencie žiaka, ale 52,34% je alarmujúci výsledok.

Z riešení pracovných listov vyplýva, že žiaci majú v presnosti a úplnosti osvojenia požadovaných poznatkov, faktov, pojmov, definícií a zákonitostí nepodstatné medzery. Požadované intelektuálne a motorické činnosti nevykonávajú však vždy presne. Osvojené vedomosti a zručnosti síce dokážu aplikovať pri riešení teoretických a praktických úloh, no s chybami. Dokážu nájsť jednoduchú stratégiu riešenia, pričom používajú matematické modely, tie často v detailoch neodpovedajú zadanej situácii. Teda sú schopní riešiť problémy s jedným dátovým zdrojom, ktorý obsahuje jasné, dobre definované informácie.

Myslenie žiakov je síce vcelku správne, no nie vždy tvorivé. S veľkými ťažkosťami riešia problémy s viaczdrojovými informáciami, problémy, ktoré vyžadujú rôzne druhy zdôvodnenia (induktívne, deduktívne, kombinatorické,...) a tvorivosť.

V písomnom prejave majú nedostatky v správnosti, presnosti a výstižnosti. Grafický prejav je menej estetický. Teda ich argumentačné kompetencie a kompetencie týkajúce sa práce s informáciami sú podpriemerné.

Samotní učitelia neboli pri zhodnocovaní vyučovania analytickej geometrie z hľadiska rozvíjania kľúčových kompetencií žiaka optimistickí. Podľa väčšiny učiteľov je vyučovanie analytickej geometrie priemerné pri rozvíjaní kľúčových kompetencií žiaka, čo sa v podstate potvrdilo v testovaní pomocou pracovných listov. To však má podľa názorov učiteľov klesajúcu tendenciu. Príčiny tohto nepriaznivého stavu vidia ako v metodológii, tak aj v časovej dotácii. Niektoré časti z analytickej geometrie by preberali s počítačovou podporou, ale v tom sú obmedzení často krát možnosťami školy. Čo sa týka časovej dotácie učitelia dokážu rozvrhnúť čas výuky len na riešenie formálnych, rutinných úloh, možno úloh na úrovni prepojenia. Nedokážu si však vymedziť čas na riešenie aplikačných úloh, modelujúcich konkrétne problémy zo života, pričom si myslia, že výuka matematiky formou, ktorá uprednostňuje konkrétne riešenie reálnych problémov je správna tým, že ukazuje študentom načo im tá nezáživná matematika je.

Záver

V poslednom období učitelia pociťujú potrebu zmeniť spôsob vyučovania matematiky. Potrebu odvrátiť sa od teoretizovania a riešenia úloh, ktoré sú umelé a nemajú súvis so životnými skúsenosťami žiakov, od odovzdávania vedomostí a nacvičovania akýchsi zručností a orientovať sa na to, aby žiaci chápali matematiku ako nástroj riešenia rôznych praktických problémov, bez ktorého sa možno veľmi ťažko zorientovať a uplatniť v živote. Orientácia na kľúčové kompetencie žiaka je alternatíva a je len na nás, aby sme zvážili, či je to správna cesta.

Použitá literatúra:

- [1] MINISTERSTVO ŠKOLSTVA SLOVENSKEJ REPUBLIKY: *Učebné osnovy gymnázia - štvorročné štúdium: Matematika (povinný učebný predmet)*. [online] Publikované 1997. [citované 7.6.2007]. Dostupné z <http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/Gymnazia/4roc/Osnovy/UO_mat_4r_gym.pdf>
- [2] MINISTERSTVO ŠKOLSTVA SLOVENSKEJ REPUBLIKY: *Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre gymnázium - štvorročné štúdium*. [online] Publikované 2001. [citované 7.6.2007]. Dostupné z <http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/Gymnazia/4roc/standardy/VS_G4_Matematika.pdf>
- [3] SEKERÁK, J.: *Kľúčové kompetencie v matematickom vzdelávaní a možnosť ich monitorovania slovnými úlohami*. In: Zborník 7. ročníka konferencie Matematika v škole dnes a zajtra 2006, Ružomberok 2006, s. 292 – 299. ISBN 80-8084-066-0.
- [4] ŠPÚ: *PISA SK 2003, Matematická gramotnosť*. 1. vyd. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2004. ISBN 80-85756-89-9.

Adresa autora:

RNDr. Jozef Sekerák
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Prírodovedecká fakulta
Ústav matematických vied
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: jozef.sekerak@upjs.sk