Odkrywanie regularności a myślenie algebraiczne

Discovering regularity and algebraical thinking

Marta Pytlak

Abstract: The ability to discover regularity is a starting point for a child to understand mathematics. Regularities stimulate the way of thinking that goes beyond particular cases (thinking about general regularities). In this paper I present my research concerning algebraical thinking during the process of discovering the regularity. I show analyses of work of two boys: in what way verbal language influent on to algebraical thinking during solving the task which concern discovering the regularity.

Key words: patterns, regularity, inner speach, algebraical thinking

MESC: C50, B10

Wprowadzenie

W ostatnich latach wiele miejsca poświęcono na dyskusję o nauczaniu algebry w szkole podstawowej. Mówi się o tzw. wczesnej algebrze i myśleniu algebraicznym (Mutschler, 2005). Bardzo trudno rozdzielić myślenie algebraiczne od myślenia arytmetycznego. Jedną z dróg rozwijania myślenia algebraicznego jest „nadbudowa" myślenia arytmetycznego. Dokonuje się tego na drodze uogólniania rozważań arytmetycznych poprzez uzmiennianie stałych. Służyć temu mogą zadania polegające na odkryciu zależności geometryczno-arytmetycznych, które należy uogólnić, zapisać symbolicznie. Przejście do zapisu symbolicznego jest dla ucznia szkoły podstawowej dość trudne. Uczeń najpierw wypowiada uogólnioną zależność słownie, a następnie próbuje ją zapisać przy użyciu symboli. Aby zrozumieć język algebraiczny, uczeń musi zacząć od zrozumienia jego najbardziej podstawowego składnika – litery (Turnau 1990).

Na kreatywność myślenia podczas rozwiązywania problemów matematycznych wpływ ma język naturalny (Consogno, 2005). Wypowiadając nasze myśli ubieramy je w słowa. Przechodzimy z mowy „wewnętrznej" (czyli „mowy dla siebie") do mowy „zewnętrznej" (czyli uzewnętrznienia naszych myśli, zaprezentowania ich innym). Następuje transformacja językowa, polegająca na wypowiadaniu myśli własnymi słowami (Wygotski 1989). Pozwala to na dostrzeżenie nowych możliwości rozwiązania problemu, na zrozumieniu jego istoty. Język werbalny odgrywa bardzo ważną rolę podczas analizy rozwiązania danego problemu. Powoduje on zmianę w odbiorze omawianego tekstu, stymuluje tworzenie nowych powiązań w istniejącym zbiorze wiadomości.

W jaki sposób zatem język werbalny będzie wpływał na myślenie algebraiczne uczniów podczas rozwiązywania zadania dotyczącego uogólniania? Aby odpowiedzieć na to pytanie przeprowadziłam badania wśród uczniów szkoły podstawowej.

Opis badania

Badania zostały przeprowadzone we wrześniu 2006 roku, wśród uczniów 4-6 klas szkoły podstawowej. W badaniach wzięło udział po 6 uczniów z klas 4, 5 i 6. Badanie polegało na rozwiązaniu dwóch zadań dotyczących uogólniania. Uczniowie mieli do rozwiązania dwa zadania (Littler, Benson, 2005). W obu chodziło o podanie liczby zapałek potrzebnej do zbudowania wzorku z trójkątów o boku długości jednej zapałki. W zadaniu pierwszym trójkąty były rozdzielne, a w zadaniu drugim dwa sąsiednie trójkąty miały wspólny bok Uczniowie otrzymali zapałki i mogli układać potrzebne im figury. Praca uczniów była nagrywana kamerą video. W trakcie rozwiązywania przez uczniów zadania nauczyciel rozmawiał z nimi o tym, co właśnie robią.

W klasie szóstej w badaniu wzięło udział 6 uczniów (11 lat)- 4 chłopców i 2 dziewczynki. Uczniowie otrzymali kartki z zadaniami i pudełko zapałek. Na początku wspólnie przeczytali zadanie, nauczyciel wyjaśnił, w jaki sposób buduje się trójkąty, o których jest mowa w zadaniu. Następnie uczniowie przystąpili do pracy.

Uczniowie pracowali bardzo podobnie. Podczas pracy nad pierwszym zadaniem wysypali zapałki z pudełka, ułożyli kilka trójkątów. Przeliczyli liczbę zapałek użytą do budowy konkretnej liczby trójkątów – było to raczej sprawdzenie wyniku już wpisanego w tabelę niż rzeczywiste obliczanie potrzebnej liczby zapałek. Bardzo szybko zauważali zależność pomiędzy liczbą trójkątów a liczbą zapałek. Najpierw odkrytą regułę zapisywali słownie, a następnie próbowali zapisać symbolicznie. Podczas pracy nad zadaniem drugim praca przebiegała podobnie. Tym razem jednak uczniowie najpierw układali trójkąty, a następnie wpisywali liczbę zapałek użytych do ich budowy. Już w trakcie budowy kolejnego trójkąta zauważali zależność pomiędzy liczbą trójkątów a liczbą zapałek. Udzielając odpowiedzi na pytanie drugie korzystali już jedynie z odkrytej zależności. W pytaniu trzecim podawali jedynie słowny zapis reguły.

Nieco inny sposób postępowania niż reszta uczniów zaprezentowali dwaj chłopcy, Mateusz i Kamil.

Praca Kamila i Mateusza

Chłopcy po otrzymaniu kartek z zadaniem bardzo szybko przystąpili do pracy. Odłożyli na bok zapałki, obaj pochylili się nad kartką i zaczęli wypełniać tabelkę. Widać wyraźnie współpracę obu chłopców, wspólnie podają półgłosem odpowiedzi, zaś Kamil zapisuje je w tabeli. Kiedy podchodzi do nich nauczyciel, chłopcy ustalają, że to Mateusz ma zreferować wynik wspólnej pracy. Mateusz bierze kartkę do ręki i przedstawia rozwiązanie zadania nauczycielowi:

M: Na jeden trójkąt potrzeba trzy zapałki [wskazuje palcem w tabelce], na dwa-sześć zapałek, na trzy –dziewięć ... [czyta kolejne liczby z tabelki]

N: Co ciekawego zauważyliście w tym zadaniu? Jako jedyna grupa nie układaliście trójkątów z zapałek, zatem ...

M: Myślimy regularnie, trzeba kombinować swoje, że by się nie namęczyć.

N: Słuszna uwaga. To jak wy kombinowaliście?

K: Normalnie, tak jak np. jest trójkąt, to wyobraziliśmy sobie trójkąt z trzech zapałek, to mnożyliśmy liczba trójkątów razy trzy, czyli jak jest 6 trójkątów [wskazuje w tabeli], to mnożyliśmy 6 razy 3.

N: I w ten sam sposób rozwiązaliście drugi podpunkt zadania?

M: Tak.

K: Dla 10 trójkątów będzie 3 razy 10 czyli 30 zapałek, dla 25 – 3 razy 25 czyli 75, a dla 161 – 483.

N: Udało się wam jakąś ogólną regułę odkryć?

M: No, że mnożę liczbę zapałek z jednego trójkąta przez liczbę trójkątów.

Chłopcy jako jedyny zespół zrezygnowali z układania trójkątów z zapałek. Od razu przystąpili do pracy. Jak sami powiedzieli, szukali najkrótszej drogi rozwiązania zadania. Zaczęli „kombinować” jak szybko i poprawnie rozwiązać zadanie. Odwołali się do wcześniejszej wiedzy i własnych doświadczeń związanych z trójkątem. To pozwoliło im pominąć układanie trójkątów. Wykorzystali znaną im własność, ze trójkąt ma trzy boki. Zauważyli występujące w zadaniu zależności – proporcje między liczbą trójkątów, a liczbą boków. Jeden trójkąt – trzy boki, dwa trójkąty – sześć boków. Liczba trójkątów wzrosła dwa razy, liczba boków również. Dostrzeżona zależność pozwoliła im na sformułowanie następującego wniosku: aby obliczyć liczbę zapałek potrzebną do zbudowania określonej liczby trójkątów, należy liczbę trójkątów pomnożyć przez trzy. Tę regułę próbowali zapisach symbolicznie.

Zapis symboliczny sprawiał uczniom nieco trudności. Najpierw zapisali skróconą wersję odpowiedzi słownej, próbując „uogólnić” liczbę boków trójkąta zapisując ją jako „a, b, c”. Ostatecznie zapisali „a razy 3”.

Przystępując do drugiej części zadania, chłopcy również nie posiłkowali się zapałkami. Za to wykorzystywali informacje uzyskane w części pierwszej. Palcem w powietrzu rysowali trójkątny wzorek. Bezbłędnie wypełnili dwa pierwsze podpunkty zadania. Tym razem również to Mateusz referował wspólną pracę nauczycielowi, jednak Kamil brał czynny udział w rozmowie.

M: Pierwszy trójkąt, żeby ułożyć pierwszy trójkąt potrzeba trzy zapałki, a do następnego to trzeba dwie dołożyć, to będzie 5. O jedną mniej, bo tak to byłoby 6, gdyby tak trzeba było ułożyć [patrzy na wcześniejsze rozwiązanie]. Na trzy trójkąty potrzeba 7 zapałek .... [czyta wyniki z tabelki]

N: No dobrze, a co z drugim zadaniem?

M: [czyta] Na 10 trójkątów potrzeba 21 zapałek, no bo trzeba odjąć, bo budując tak jak normalnie żeśmy budowali od lewej, to było 30, ale tu trzeba odjąć po jednym od każdej to będzie odjąć 9, to będzie 21 zapałek. Dla 25 trójkątów to będzie 25 odjąć, ile .... odjąć ... [patrzy na wynik na jednej i na drugiej kartce] aha, 51, bo jest 25 trójkątów, bo było 75 i tak to trzeba liczbę odjąć

N: A jaką liczbę odejmujecie?

M: [pyta Kamila] 24

N: A dlaczego taką?

M: Bo 24 trójkąty mają o jedną zapałkę mniej. No i 161, to będzie 325 zapałek, bo to było 483 odjąć 158. A trzeciego to nie wiemy.

N: Skąd wiecie ile tych zapałek trzeba odjąć? Bo tu mówiliście, że dla 10 trójkątów to odejmowaliście 9. Skąd wiedzieliście, że to trzeba 9 odjąć?

K: No bo to chyba tak: 10-1 to jest 9 zapałek pomnożyliśmy razy 2, to było 18 i wtedy ... no nie wiem

N: Co dalej trzeba zrobić, żeby z 18 uzyskać 21?

K: Aha, i jeszcze ten jeden trójkąt co ma trzy zapałki

N: Jeden trójkąt ma trzy zapałki

M: A reszta po 2.

N: To dla 25 jak liczyliście?

K: 24 razy 2 i dodać 3

W trakcie rozmowy z nauczycielem chłopcy podają dwie różne reguły dotyczące liczby potrzebnych zapałek. Pierwsza z nich opiera się na danych z zadnia poprzedniego. Chłopcy wykorzystują odkrytą tam zależność, że liczba zapałek jest wynikiem mnożenia liczby trójkątów przez 3. zauważają również, że teraz nie dla wszystkich trójkątów potrzebują trzech zapałek. Od posiadanego już wyniku odejmują „dublujące się” zapałki. Jest to zależność odkryta na drodze pewnych manipulacji wyobrażonymi trójkątami. Uczniowie korzystali tutaj z własnych doświadczeń zgromadzonych podczas pracy nad pierwszym zadaniem.

Zastosowany przez chłopców sposób pracy sprawdzał się tylko w przypadku, gdy znali konkretną liczbę trójkątów. Wtedy, korzystając z zadania 1 wiedzieli, ile potrzeba zapałek, gdyby budowali oddzielne trójkąty. Następnie od ogólnej liczby zapałek odejmowali liczbę dublujących się zapałek – była to liczba o jeden mniejsza od liczby trójkątów. Ten sposób utrudniał im jednak udzielenie odpowiedzi na pytanie z zadania trzeciego. W zadaniu tym jest prośba o podanie ogólnej reguły, którą można zastosować dla dowolnej liczby trójkątów. Chłopcy zaś wypracowali swoją metodę w oparciu o konkretną, daną liczbę trójkątów. Dlatego też w rozmowie z nauczycielem stwierdzają „A trzeciego to nie wiemy.".

Podczas rozmowy z nauczycielem chłopcy próbują podać jakąś regułę, która dotyczyła by liczby zapałek. W tym celu analizują uzyskane dane. Biorą pod uwagę sposób postępowania podczas rozwiązywania zadania oraz zauważone prawidłowości – pierwszy trójkąt ma trzy zapałki, pozostałe tylko po dwie. Teraz patrzą na zadanie z innej strony: ile rzeczywiście zapałek potrzebuję, gdy będę budować kolejno trójkąty. Podana przez nich nowa zależność odzwierciedla proces tworzenia tych trójkątów: najpierw trzy zapałki dla pierwszego trójkąta, a następnie po dwie zapałki dla pozostałych (czyli liczba trójkątów ogólnie minus jeden). Ta zależność jest inna niż poprzednia. Pierwsza opierała się na odejmowaniu „zbędnych" elementów, druga - na dodawaniu wszystkich wykorzystanych (użytych do budowy). Obie te zależności są równoważne. Gdyby je zapisać symbolicznie, wyglądałyby następująco: $3t-(t-1)$ w pierwszym przypadku i $2(t-1)+3$ w drugim.

Podsumowanie

Chłopcy bardzo dobrze poradzili sobie z zadaniem. Podczas rozmowy z nauczycielem odkryli nowe podejście do zadania. Zatem poprzez weryfikację słowną byli w stanie zmienić swoje spojrzenie na zadanie. Werbalizacja spowodowała zmianę ich działania.

Rozwiązując zadanie uczniowie korzystają ze zbioru wiadomości, jaki wcześniej udało im się zgromadzić. Wykorzystują informacje o trójkącie oraz o tym, jak ma wyglądać wzorek. Te dane pozwalają im na stworzenie ogólnego modelu – „generic model" (Hejný, Kratochvílová 2004) dotyczącego powstawania kolejnych elementów układanki. Potrafią odkrytą przez siebie zależność uogólnić i podać jej symboliczny zapis. Zatem potrafią oderwać się od konkretu i myśleć abstrakcyjnie.

Literatura

1. CONSOGNO, V.: *The semantic-transformational function of verbal language*, Proc. of CERME 4, Feb. 17-21, Sant Feliu de Guixols, Spain, http://cerme4.crm.es, 2005.
2. HEJNY, M., KRATOCHVILOVA, J.: *From experience through generic model to abstract knowledge*, Proc. of CERME 4, Feb. 17-21, Sant Feliu de Guixols, Spain, http://cerme4.crm.es 2005
3. LITTLER, G., BENSON, D.: *Patterns Leading to Algebra*, [w] IIATM - Implementation of Innovation Approaches to the Teaching of Mathematics, Comenius 2.1, 2005.
4. MUTSCHLER, B. J.: *Early algebra – processes ad concepts of fourth graders solving algebraic problem*, Procedind of CERME4, Feb. 17-21, Sant Feliu de Guixols, Spain, http://cerme4.crm.es, 2005.
5. TURNAU, S.: *O algebrze w szkole podstawowej*, [w]: *Wykłady o nauczaniu matematyki,* PWN, Warszawa, 1990.
6. WYGOTSKI, L. S.: *Myślenie i mowa*, PWN, Warszawa, 1989.

Mgr Marta Pytlak
Instytut Matematyki
Uniwersytet Rzeszowski
Ul. Rejtana 16A
35-959 Rzeszów
e-mail: mpytlak@univ.rzeszow.pl