

ZNAMENIA ZVEROKRUHU V STOCHASTIKE PRE UČITEĽOV

ADAM PŁOCKI

ABSTRAKT. We deal with mathematical activities related to teaching probability calculus classes. The activities are inspired by observations, creating of mathematical models, calculation, and interpretations.

MESC: K50

1. ÚVOD

Proces vyučovania školskej matematiky spočíva v posune od žiackeho skúmania reálnych objektov k tvorbe abstraktných útvarov – myšlienok (pozri [7]). Objavovanie dôležitých vlastností geometrických útvarov (ako objektov sveta matematiky) sa uskutočňuje empirickým spôsobom, cestou skúmania reálnych modelov týchto útvarov.

Uhlopriečky kosoštvorca sa pretínajú pod pravým uhlom. Ide o vlastnosť kosoštvorca ako matematického objektu. V rámci vyučovania matematiky objavuje žiak túto vlastnosť prostredníctvom narábania s papierovým modelom kosoštvorca (práve on je reálnym ekvivalentom – obdobou – kosoštvorca, ktorým sa zaoberá geometria). Žiak spoznáva vlastnosti abstraktných geometrických pojmov (útvary, kružnica opísaná štvoruholníku) alebo geometrických zobrazení (osová symetria, translácia) cez konštrukcie pomocou kružidla a pravítka. Ide síce o konkrétne činnosti, ale práve tie realizujú spomínané abstraktné (myšlienkové) procesy, ktoré sú predmetom matematiky. Konkrétne manipulácia s reálnymi objektmi (ohýbanie, otáčanie, obracanie, presúvanie) môže byť podnetom pre dôkaz mnohých geometrických skutočností na hodinách matematiky. Geometriu nie je možné vyučovať bez odvolávania sa na reálny svet, v ktorom žije žiak. Nasledujúci text sa zaoberá analogickou úlohou reálnych objektov a konkrétnych činností v procese zavádzania pojmu pravdepodobnosti udalosti v školskej matematike.

2. STOCHASTICKÝ MODEL NÁHODNÉHO POKUSU AKO PRAVDEPODOBNOSTNÝ PRIESTOR

Predmetom počtu pravdepodobnosti je konštruovanie a skúmanie tzv. pravdepodobnostných priestorov. Pravdepodobnostný priestor (ako objekt matematického sveta) sa môže stať počas hodín matematiky modelom náhodného pokusu, ktorý sa objavuje v pozadí situácie spojennej s hrou (hod kockou, hod mincou, losovanie zo skupiny s osôb pomocou zápaliek).

Náhodným pokusom nazývame každý taký (reálny alebo myšlienkový) pokus δ , o ktorého priebehu a výsledku rozhoduje náhoda, pričom

- množina Ω_δ výsledkov tohto pokusu je konečná;
- pre každý výsledok možno *a priori* určiť pravdepodobnosť, s akou sa pokus δ skončí týmto výsledkom (pozri [1], s. 16 – 17 a [5], s. 13).

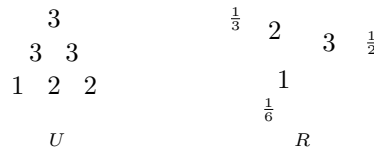
Ak $\Omega_\delta = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ a p_δ je funkcia, ktorá každému výsledku pokusu δ priraduje jeho pravdepodobnosť, tak dvojicu $(\Omega_\delta, p_\delta)$ nazývame *stochastickým modelom náhodného pokusu δ* alebo kratšie *modelom pokusu δ* .

Funkcia p_δ je nezáporná, pričom spĺňa podmienku

$$p_\delta(\omega_1) + p_\delta(\omega_2) + p_\delta(\omega_3) + \dots + p_\delta(\omega_s) = 1.$$

Model náhodného pokusu δ , teda dvojice $(\Omega_\delta, p_\delta)$, je zároveň diskretným pravdepodobnostným priestorom (por. [6], s. 28 a s. 141 – 142).

Ak $\Omega_\delta = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ a $p_\delta(\omega_1) = p_\delta(\omega_2) = \dots = p_\delta(\omega_s) = \frac{1}{s}$, tak dvojicu $(\Omega_\delta, p_\delta)$ nazývame *klasickým pravdepodobnostným priestorom*. Modelom náhodného pokusu δ je klasický pravdepodobnostný priestor práve vtedy, keď všetky jeho výsledky sú rovnako pravdepodobné.



Obr. 1. Urna U a ruletku R ako losovacie nástroje

■ Nech $\Omega = \{1, 2, 3\}$ a $p(1) = \frac{1}{6}$, $p(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Dvojica (Ω, p) je modelom:

- losovania gule z urny U na obrázku 1;
- losovania sektora ruletky R , ktorej terč je na obrázku 1.

Nech $(\Omega_\delta, p_\delta)$ je modelom náhodného pokusu δ . Každú udalosť spojenú s týmto pokusom možno reprezentovať prostredníctvom množiny výsledkov pokusu δ , ktoré sú priaznivé udalosti A , a teda ako podmnožinu množiny Ω_δ (pozri [6], s. 93 – 94).

Predmetom ďalších úvah budú náhodné pokusy, ktorých modelmi sú klasické pravdepodobnostné priestory.

Pokiaľ sú všetky výsledky náhodného pokusu δ rovnako pravdepodobné (modelom pokusu δ je klasický pravdepodobnostný priestor) a A je udalosť spojená s týmto pokusom, tak

$$P(A) = \frac{\text{počet výsledkov priaznivých udalosti } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu } \delta}.$$

Vyplýva to z *vety o klasickej pravdepodobnosti* (pozri [6], s. 108).

Pojem pravdepodobnosti udalosti je syntézou rôznych aspektov. Ide o:

- *klasický aspekt* (pravdepodobnosť udalosti ako podiel počtu výsledkov priaznivých udalosti a počtu všetkých rovnako možných výsledkov);
- *štatistický aspekt* (početnosť udalosti ako odhad jej pravdepodobnosti);
- *geometrický aspekt* (pravdepodobnosť udalosti ako istá miera, napr. pri losovaní pomocou ruletky R z obrázka 1).

S geometrickým aspektom sa možno stretnúť povedzme pri ohodnotení pravdepodobnosti, že šoférovi prichádzajúcemu ku križovatke bude svietiť na semafore zelené svetlo (táto pravdepodobnosť je pomerom či podielom doby, počas ktorej je rozsvietené zelené svetlo a celkovej doby, počas ktorej sú rozsvietené všetky svetlá).

Tento článok sa zaoberá *klasickým a štatistickým aspektom* pojmu pravdepodobnosti (por. [5], s. 122).

Dvanásťnásobné losovanie gule s návratom z urny $U_{1 \rightarrow 12}$, v ktorej je 12 gúľ očíslovaných číslami od 1 do 12, je náhodný pokus δ_{12U} . Ukážeme, ako je možné

na hodinách pravdepodobnosti (stochastiky) – analogicky k postupu pri objavovaní vlastností kosoštvorca ako matematickeho pojmu na hodinách geometrie – odhaľovať niektoré z vlastností stochastického modelu pokusu δ_{12U} pomocou štatistických (a teda empirických) údajov.

Nech $S = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Nech dvojica (Ω_{12U}, p_{12U}) je modelom pokusu δ_{12U} . Výsledkom pokusu δ_{12U} je dvanásťčlenná variácia množiny S , čiže platí $\Omega_{12U} = \{1, 2, \dots, 12\}^{12}$. Všetkých možných výsledkov je 12^{12} , pričom všetky sú rovnako pravdepodobné, a teda

$$p_{12U}(\omega) = \frac{1}{12^{12}} \quad \text{pre každé } \omega \in \Omega_{12U}.$$

Stochastický model pokusu δ_{12U} je už objektom zo sveta matematiky. Je súčasne modelom náhodného stretnutia 12 osôb v situácii, keď nás zaujíma znamenie zverokruhu, v ktorom sa narodila každá z týchto osôb.

V kontexte losovania δ_{12U} sa stretávame z *klasickým aspektom pravdepodobnosti*.

G. Choquet zdôrazňuje, že v každom matematickom myslení sa vyskytujú štyri fázy: pozorovanie, matematizácia, dedukcia a aplikácia (por. [3]). V ďalšom texte poukážeme na všetky tieto položky matematického myslenia inšpirovaného výsledkami pozorovania (empirické údaje ako štádium matematického myslenia).

3. LOSOVANIE ČÍSLA Z KONEČNEJ MNOŽINY

Nech $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Nech $K_{1 \rightarrow 12}$ označuje kocku v tvare pravidelného dvanásťstenu s číslami od 1 do 12 umiestnenými na stenách tak, že súčet čísel na každých dvoch protiľahlých stenách je rovný 13.

Hod kockou $K_{1 \rightarrow 12}$ je náhodným pokusom s 12 rovnako pravdepodobnými výsledkami (výsledkom hodu je padnuté číslo). Kocka $K_{1 \rightarrow 12}$ slúži na losovanie čísla z množiny S . Vylosovanie každého čísla z množiny S je rovnako pravdepodobné. Hovoríme, že ide o *spravodlivé losovanie*. Losovanie čísla z množiny $\{1, 2, 3\}$ pomocou urny U z obrázka 1 spravodlivé nie je.

Na spravodlivé losovanie čísla z množiny S možno tiež použiť:

- urnu $U_{1 \rightarrow 12}$, v ktorej je 12 gúľ očíslovaných od 1 do 12;
- ruletku $R_{1 \rightarrow 12}$, ktorej terč je rozdelený na 12 rovnakých sektorov označených číslami od 1 do 12 (pozri obrázok 2).

Z 13 pikových kariet vytiahneme kráľa. Predpokladajme, že eso má hodnotu 1, dolník 11 a dáma 12. Hodnota karty vyloženej na stôl po zamiešaní všetkých 12 kariet, je vylosovaným číslom z množiny S . Je to spravodlivé losovanie.



Obr. 2. Terče ruletky $R_{1 \rightarrow 12}$ a víriaceho vlka $V_{1 \rightarrow 12}$

Víriaci vlk sa ako losovací nástroj (pozri [6], s. 79) skladá z terča v tvare pravidelného mnohouholníka a voči nemu kolmej osi. Strany mnohouholníka sú očíslované. Víriaci vlk sa uvedie do rotačného pohybu. Po čase sa zastaví na jednej zo strán svojho terča. Číslo na tejto strane je vylosovaným číslom. Na obrázku 2 je terč dvanásťuholníkového vlka $V_{1 \rightarrow 12}$.

- Losovacími nástrojmi na spravodlivé losovanie čísla z množiny S sú teda aj:
- súbor $T_{A \rightarrow Q}$ dvanástich pikových kariet s hodnotami od esa po dámu;
- víriaci vlk $V_{1 \rightarrow 12}$.

4. UDALOSTI PRAKTICKY NEMOŽNÉ A PRAKTICKY ISTÉ

Hlavnú rolu v stochastických úvahách hrajú udalosti prakticky nemožné a udalosti prakticky isté. Udalosť sa nazýva *prakticky nemožná*, ak je jej pravdepodobnosť menšia ako číslo 0,05. Udalosť sa nazýva *prakticky istá*, ak je jej pravdepodobnosť väčšia ako 0,95. Číslo $\alpha = 0,05$ sa nazýva *hladinou významnosti* (por. [6], s. 153).

Úsudky týkajúce sa procesu rozhodovania a overovania istých hypotéz sa opierajú o *pravidlo praktickej istoty*:

Ak je udalosť prakticky nemožná, môžeme si byť prakticky istí, že nenastane. Nemôžeme si byť tým istí, ale môžeme si byť prakticky istí.

■ S dvanásťčlenným losovaním gule s návratom z urny $U_{1 \rightarrow 12}$, čiže s náhodným pokusom δ_{12U} , spojíme udalosti:

$A_{12U} = \{ \text{v každom losovaní bude vylosovaná iná guľka} \},$

$B_{12U} = \{ \text{aspoň dvakrát bude vylosovaná rovnaká guľka} \}.$

Výsledkom losovania δ_{12U} je dvanásťčlenná variácia množiny S . Všetkých výsledkov je 12^{12} a všetky sú rovnako pravdepodobné. Udalosti A_{12U} sú priaznivé tie variácie, ktorých členy sú rôzne. Takých variácií je $12!$, a teda

$$P(A_{12U}) = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,000\,053\,7 \quad \text{a} \quad P(B_{12U}) = 1 - P_{12U}(A_{12U}) \approx 0,999\,946\,2.$$

Práve v tomto príklade sa prejavuje klasický aspekt pravdepodobnosti. Udalosť A_{12U} je prakticky nemožná, udalosť B_{12U} je prakticky istá. V ďalšom texte sa budeme zaoberať objavovaním takýchto stochastických vlastností udalostí A_{12U} , B_{12U} *a posteriori*, a rovnako aj ich interpretáciou v kontexte niektorých nematematických (reálnych) situácií.

5. EMPIRICKÝ FAKT AKO ŠTÁDIUM MATEMATICKÉHO MYSLENIA

Uvažujme o nasledujúcej úlohe:

2. Náhodne sa stretlo 12 ľudí. Nepoznáš ich. Stavil si sa s kamarátom, že každý z týchto ľudí sa narodil v inom znamení zverokruhu. Ide o rozumnú stávkou? Aká je pravdepodobnosť udalosti, na ktorú si stavil?

Práve takouto problémovou situáciou (aj stávkou) začínam svoju prednášku pre študentov. Skupinu študentov rozdelím na skupiny obsahujúce dvanásť osôb. Potom spolu zisťujeme, že v každej skupine sú aspoň dve osoby, ktoré sa narodili v rovnakom znamení zverokruhu. Ide o prekvapujúci empirický fakt, ktorý podnecuje otázku:

– Prečo je to tak? Ako je možné túto skutočnosť vysvetliť pomocou matematiky? Bolo možné to skôr predvídať?

Táto *reflexia a posteriori* je osobitnou matematickou aktivitou. Ide o sformulovanie a riešenie matematickej úlohy:

3. Vypočítaj pravdepodobnosť udalostí A_{12Z} a B_{12Z} , spojených s náhodným stretnutím dvanástich osôb, a opísaných slovami takto:

$A_{12Z} = \{ \text{každá z 12 osôb sa narodila v inom znamení zverokruhu} \},$

$B_{12Z} = \{ \text{aspoň dve osoby sa narodili v rovnakom znamení zverokruhu} \}.$

Pravdepodobnosť udalosti sa vyčísľuje vždy v určenom pravdepodobnostnom priestore. V tomto prípade ide o stochastický model znamení zverokruhu dvanásť náhodne sa stretnutých osôb.

6. ZNAMENIE ZVEROKRUHU ÚČASTNÍKA NÁHODNÉHO STRETNUTIA – MATEMATIZÁCIA

Podľa H. Freudenthala je jednou z najdôležitejších úloh výučby matematiky učiť matematizovať realitu (por. [2]). Freudenthal chápe *matematizáciu* ako popisovanie (usporiadanie) reality pomocou pojmov a jazyka matematiky. Výsledkom procesu matematizácie je mapa železničnej siete na Slovensku, stavebný plán domu vypracovaný architektom, značka, upozorňujúca na obchádzku kvôli oprave cesty atď.

„Matematizovať“ fragment reality znamená sledovať (pozerať sa na) túto realitu cez „matematické okuliare“. Cez takéto „okuliare“ vidieť len najdôležitejšie fakty a zároveň sa prestávajú zjavovať tie druhoradé. Cez takéto „matematické okuliare“ sa krabička zápaličiek javí ako pravouhlý rovnobežnosten, ktorý je predmetom záujmu geometrie, či železničné spojenie medzi Žilinou a Čadcou ako úsečka priamky.

Očíslujme znamenia zverokruhu číslami od 1 do 12. Ak nás zaujíma len znamenie zverokruhu, v ktorom sa človek narodil, tak (z hľadiska matematiky) je guľkou vylosovanou z urny $U_{1 \rightarrow 12}$.

Je možné predpokladať, že pre každú osobu a každé znamenie zverokruhu je pravdepodobnosť toho, že osoba sa narodila v tomto znamení zverokruhu, rovná $\frac{1}{12}$. Skupina n osôb (stojacich na autobusovej zastávke) je (z hľadiska stochastiky!) výsledkom n -násobného losovania gule s návratom z urny $U_{1 \rightarrow 12}$ (číslo na vylosovanej guľke v j -tom ťahu je znamení zverokruhu, v ktorom sa narodila j -ta osoba z tejto skupiny). Tento popis nematematickej situácie, vyjadrený v pojmoch počtu pravdepodobnosti, je fázou matematizácie.

Všimnime si, že účastník náhodného stretnutia (pokiaľ nás zaujíma iba jeho znamenie zverokruhu) je tiež

- číslom padnutým v hode kockou $K_{1 \rightarrow 12}$;
- vyloženou kartou po premiešaní dvanástich pikových kariet (bez kráľa);
- číslom sektora, na ktorý po zastavení otáčania ruletky $R_{1 \rightarrow 12}$ ukáže šípka;
- číslom strany, na ktorú padne víriaci vlk $V_{1 \rightarrow 12}$.

Uvádzame teda rôzne simulačné schémy určenia znamenia zverokruhu človeka pri náhodnom stretnutí.

Miesto čísel možno na stranách víriaceho vlka i do sektorov ruletky umiestniť obrázky znamení zverokruhu.

Ak nás zaujíma znamenie zverokruhu osoby pri náhodnom stretnutí, tak stochastický model dvanásťnásobného losovania gule s návratom z urny $U_{1 \rightarrow 12}$ sa stáva súčasne modelom náhodného stretnutia 12 osôb.

7. POZOROVANIE ANALOGICKÉHO FAKTU – STOCHASTICKÁ SIMULÁCIA

Prakticky v každej skupine dvanástich osôb sa aspoň dve narodili v rovnakom znamení zverokruhu. Tento empirický fakt sa stáva inšpiráciou matematického premýšľania. Vzniká otázka:

- Ako inak organizovať pozorovanie? Ako inak zbierať štatistické údaje?

■ Náhodným pokusom (ktorý možno jednoducho zrealizovať v triede) je súčasný hod dvanástimi kockami $K_{1 \rightarrow 12}$. S týmto náhodným pokusom δ_{12K} spojme dve

udalosti:

$$A_{12K} = \{\text{padnú všetky čísla z množiny } \{1, 2, \dots, 12\}\},$$

$$B_{12K} = \{\text{aspoň na dvoch kockách padne rovnaké číslo}\}.$$

Udalosti A_{12K} a B_{12K} sú opačné. Na hodine cestou *a posteriori* objavíme, že A_{12K} je udalosť prakticky nemožná a udalosť B_{12K} je prakticky istá.

Každý zo žiakov má na hodine 12 rovnakých kociek $K_{1 \rightarrow 12}$. Každý hádže svojimi kockami a rozhoduje, ktorej z udalostí A_{12K} alebo B_{12K} je priaznivý získaný výsledok hodu kockami (a teda, ktorá udalosť nastala). Tí, ktorí dostali výsledok priaznivý udalosti A_{12K} , zdvihnú ruku. Túto procedúru opakujeme 10-krát. Pokiaľ je v triede 30 žiakov, tak veľmi rýchlo získame výsledky tristo opakovaní pokusu δ_{12K} . Takto nadobudnuté štatistické údaje predstavujú seriózne východisko pre vyslovenie vierohodných úsudkov o pravdepodobnosti predmetnej udalosti. V priebehu experimentovania nik nezdvihol ruku. Objavili sme teda, že

- udalosť A_{12K} prakticky nikdy nenastáva (udalosť A_{12K} nastáva veľmi zriedka);
- prakticky vždy nastáva udalosť B_{12K} (táto udalosť nastáva veľmi často).

Ide o prekvapujúci empirický fakt, na ktorý prišiel každý zo žiakov.

Udalosť A_{12K} nie je nemožná. Z faktu, že nastáva len veľmi zriedka, vyplýva, že je odôvodnené považovať nastatie tejto udalosti (keď o chvíľu budeme znova hádzať kockami) za prakticky nemožné. Môžeme si byť prakticky istí, že udalosť A_{12K} nenastane. Nesmieme si však byť „stopercentne“ istí, iba prakticky istí.

Udalosť B_{12K} nie je istá. Prakticky sa každý hod kockami skončil nastaním udalosti B_{12K} . Udalosť B_{12K} nastávala mimoriadne často. Môžeme si byť prakticky istí, že táto udalosť nastane, pokiaľ o chvíľu budeme opäť hádzať kockami. Nastanie udalosti B_{12K} je prakticky isté.

Teda udalosť A_{12K} je prakticky nemožná, B_{12K} zase prakticky istá. Tieto stochastické vlastnosti udalostí A_{12K} a B_{12K} sme objavili prostredníctvom štatistiky.

Ide o dôležité (vo výučbe počtu pravdepodobnosti) úsudky *a posteriori*, ktoré poukazujú na *štatistický aspekt pravdepodobnosti* (por. [5], s. 122). Predmetom je kvalitatívne (nie kvantitatívne) ohodnotenie pravdepodobnosti udalosti na základe jej početnosti v mnohonásobnom opakovaní náhodného pokusu, s ktorým sa táto udalosť spája.

Vráťme sa k udalostiam A_{12U} a B_{12U} , ktoré sú spojené s dvanásťnásobným losovaním gule s návratom z urny $U_{1 \rightarrow 12}$. Ľahko je si všimnúť, že udalosti A_{12K} a A_{12U} sú rovnako pravdepodobné, a že rovnako pravdepodobné sú tiež udalosti B_{12K} a B_{12U} .

Pri zbere štatistických údajov vyvstane ďalšia otázka:

- Ako simulovať pokus δ_{12K} , keď má žiak len jednu kocku $K_{1 \rightarrow 12}$?

■ Vráťme sa k hodu s dvanástimi kockami $K_{1 \rightarrow 12}$. Pri úvahe pomocou analógie využime objavené fakty, že A_{12K} je udalosť prakticky nemožná, B_{12K} zase udalosť prakticky istá.

Výsledok hodu kockou $K_{1 \rightarrow 12}$ môžeme interpretovať ako znamenie zverokruhu účastníka náhodného stretnutia. Uvažujme o skupine 12 osôb (napr. stojacich na autobusovej zastávke či cestujúcich električkou) a zaoberajme sa pravdepodobnosťami udalostí A_{12Z} a B_{12Z} .

Z niektorých (stochastických) analógií vyplýva, že:

- udalosť A_{12Z} je rovnako málo pravdepodobná ako udalosť A_{12K} ;
- udalosť B_{12Z} je rovnako veľa pravdepodobná ako udalosť B_{12K} ;
- A_{12Z} je udalosť prakticky nemožná, B_{12Z} je udalosť prakticky istá.

Podstatou týchto analógií je fakt, že (v situácii, keď nás zaujíma znamenie zverokruhu účastníka stretnutia) hod dvanástimi kockami $K_{1 \rightarrow 12}^{13}$ simuluje toto náhodné stretnutie.

Na zber štatistických údajov spojených so znameniami zverokruhu dvanástich stretnutých sa osôb možno použiť kocky vzniknuté z pravidelných dvanáststenov, na ktorých stenách sú rozmiestnené obrázky znamení zverokruhu. Takéto (nie príliš veľké) kocky môže vytvárať žiak sám.

Náhodné stretnutie 12 osôb môžeme na vyučovacej hodine simulovať pomocou kariet. Každý z 12 žiakov má 12 pikových kariet (súbor $T_{A \rightarrow Q}$), každý z balíčka svojich premiešaných kariet vykladá na stôl práve jednu. Zaujímajú nás hodnoty vyložených kariet. S týmto náhodným pokusom δ_{12T} spojme udalosti:

$A_{12T} = \{\text{hodnoty všetkých vyložených kariet sú rôzne}\},$

$B_{12T} = \{\text{aspoň dve vyložené karty majú rovnaké hodnoty}\}.$

Nie je náročné zistiť, že

$$P(A_{12T}) = \frac{12!}{12^{12}} < 0,05 \quad \text{a} \quad P(B_{12T}) = 1 - P(A_{12T}) = 1 - \frac{12!}{12^{12}} > 0,95.$$

Udalosti A_{12Z} a A_{12T} sú rovnako málo pravdepodobné. Obe sú prakticky nemožné. Udalosť B_{12Z} je rovnako veľa pravdepodobná ako udalosť B_{12T} . Obe sú prakticky isté.

z m

b c

Obr. 3. Šípky ako výsledky dvojnásobného losovania gule bez návratu z urny $U_{b-c-z-m}$

■ Na simuláciu znamenia zverokruhu účastníka náhodného stretnutia možno tiež použiť urnu $U_{b-c-z-m}$, v ktorej sú štyri guľky: biela (b), červená (c), zelená (z) a modrá (m). Je 12 rovnako pravdepodobných výsledkov dvojnásobného losovania gule bez návratu z urny $U_{b-c-z-m}$. Na obrázku 3 predstavuje každý z výsledkov šípka. Na jej začiatku je guľka vylosovaná pri prvom losovaní, na konci guľka pri druhom losovaní. Tento výsledok je dvojčlennou postupnosťou (j -ty člen označuje farbu gule vylosovanej v j -tej etape). Aby bolo možné s urnou $U_{b-c-z-m}$ losovať číslo z množiny S stačí:

1. určiť bijekciu g množiny Ω_U výsledkov tohto losovania na množinu S ;
2. vylosovať dvakrát guľku bez návratu z urny $U_{b-c-z-m}$;
3. ak sa losovanie skončí výsledkom ω , tak bolo vylosované číslo $g(\omega)$.

Bijekciou množiny Ω_U na množinu S je napríklad funkcia g :

$\omega \in \Omega_U$:	bc	bz	bm	cb	cz	cn	zb	zc	zm	mb	mc	mz
$g(\omega)$:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Táto bijekcia g je „prekladovým slovníkom“ výsledku dvanásťnásobného losovania gule bez návratu z urny $U_{b-c-z-m}$ na výsledok losovania čísla z množiny S . Ak je pri prvom losovaní vylosovaná zelená guľka a pri druhom biela, znamená to, že bolo vylosované číslo 7.

■ Losovanie čísla z množiny S (a tiež jedného zo znamení zverokruhu) možno simulovať aj pomocou tradičnej kocky a mince. Kódujme výsledky hodu mincou číslicami: padne líce – 0, padne rub – 6. Výsledok hodu kockou kódujme počtom padnutých bodiek. Výsledok súčasného hodu mincou a kockou je dvojica (x, y) ,

pričom x je výsledkom hodu mincou, y počtom padnutých bodiek. Dvojici (x, y) priradíme súčet $x + y$. Toto zobrazenie (pozri obrázok 4) je bijekciou množiny výsledkov hodu mincou a kockou na množinu $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Táto bijekcia je zároveň prekladovým slovníkom spomínanej simulácie.

	•	••	•••	••••	•••••	••••••
0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12

Obr. 4. Prekladový slovník simulácie losovania čísla z množiny S pomocou mince a kocky

8. HAZARD – ORGANIZÁCIA FÁZY INTERPRETÁCIE

■ Fakt, že A_{12K} je prakticky nemožnou udalosťou je možné využiť pri organizovaní tomboly, v ktorej je možné vyhrať drahý predmet za 1 euro. Účastník tomboly (hráč) platí 1 euro za účasť v hre a potom hádže s dvanástimi kockami $K_{1 \rightarrow 12}^{13}$. Hráč vyhráva výhru, ak nastane udalosť A_{12K} . Takéto pravidlá hry znamenajú pre prevádzkovateľa tomboly (bankéra) praktickú istotu, že cenný predmet bude zarábať peniaze pre organizátorov tomboly, pretože riziko jeho straty je mimoriadne malé.

■ Na autobusovej zastávke stojí skupina 12 osôb. Zaoberajme sa znamením zverokruhu každej z týchto osôb. V ruke držím 12 eurových mincí a ponúkam tejto skupine ľudí nasledujúcu stávk:

– Pokiaľ sa každý z vás narodil v inom znamení zverokruhu, tak každému z vás dám 1 euro. Ak sú medzi vami aspoň dve osoby, ktoré sa narodili v rovnakom znamení zverokruhu, tak každý z vás mi dá 1 euro.

Zdá se, že existuje dosť veľké *riziko* straty (prehry) 12 eur. Moje šance na výhru 12 eur sa zdajú veľmi malé. Je to výsledok intuitívnej úvahy. Ide o správny úsudok?

Zo zistených skutočností vyplýva, že si môžem byť prakticky istý tým, že v takejto stávke vyhrám (a nie prehrám) 12 eur.

Text tohto článku sa zaoberá výsledkami reálnych činností (hod kockami, pozorovanie znamení zverokruhu účastníkov náhodného stretnutia), ktorými sú empirické údaje. Tie možno použiť ako východisko pre objavovanie niektorých vlastností pravdepodobnostných priestorov ako stochastických modelov (por. [6], s. 37):

- dvanásťnásobného losovania gule s návratom z urny $U_{1 \rightarrow 12}$;
- hodu dvanástimi kockami $K_{1 \rightarrow 12}$;
- náhodného stretnutia dvanástich osôb (so zreteľom na znamenia zverokruhu).

Empirické údaje slúžia pri ohodnotení pravdepodobnosti dvoch zvláštnych udalostí spojených s týmito pokusmi. Veľkosť pravdepodobnosti týchto udalostí je určitou vlastnosťou pravdepodobnostného priestoru ako objektu matematického sveta. Tieto charakteristiky sme objavili práve prostredníctvom skúmania empirických modelov týchto objektov.

Matematik nemôže spochybniť fakt, že vo vyššie popísanom výskume jedinečne poslúžili konkrétne kocky, reálne ruletky či skupina ľudí. Uvedené postupy z didaktiky stochastiky pripomínajú (asociujú) geometrické konštrukcie pomocou kružidla a pravítka alebo prekladanie papierového modelu trojuholníka pozdĺž výšky či jeho strihanie pri objavovaní vlastností trojuholníka ako objektu sveta matematiky.

LITERATÚRA

- [1] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1987.
- [2] Freudenthal H., *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht 1973.

- [3] Choquet G., *Analiza i Bourbaki*, Wiadomości Matematyczne, VII, 1963.
- [4] Krygowska Z., *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6 (1986).
- [5] Płocki A., *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.
- [6] Płocki A., *Pravdepodobnosť okolo nás. Stochastika v úlohách a problémoch*, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok 2004.
- [7] Treliński G., *Matematyzacja w nauczaniu*, WOM, Kielce 1996.

INSTYTUT MATEMATYKI AKADEMIA PEDAGOGICZNA, UL. PODCHORĄŻYCH 2, 30-084 KRAKÓW,
POLAND

E-mail address: `adplocki@ap.krakow.pl`