Błędy i trudności w nauczaniu geometrii na poziomie elementarnym

Zbigniew Nowak

Abstract. *Teaching geometry on the basic level faces difficulties that seem to be overmastering. Mathematicians, who are essentially competent, often can not relay their knowledge to little children. First classes educators, that are able to relay their knowledge to little children, make basic mistakes. The article is about some of the mistakes that are widely made by the teachers and the authors of the hand-books. Realizeing gaps in the teacher's knowledge can lead to leaving off wrong heritage of teaching geometry, otherwise next generations of the teachers and their pupils will make the same mistakes and that is why their career will become more difficult.*

MESC: G10

Nauczanie geometrii na poziomie elementarnym, podobnie jak i całej matematyki napotyka na nieprzezwyciężalne, jak się zdaje trudności. W największym skrócie chodzi o to, iż ci, którzy są do tego przygotowani merytorycznie nie potrafią zwykle swej kompetencji przełożyć na język i mentalne kategorie małych dzieci. Ci z kolei, którzy to potrafią, są kompletnymi ignorantami popełniającymi najcięższe i najbardziej elementarne błędy rzeczowe.

Wydaje się, że zagadnienie nauczania geometrii dzieci interesuje matematyków w niewielkim tylko stopniu, czego najdobitniejszym wyrazem jest skromny dorobek polskiej dydaktyki w tej dziedzinie, toteż w obliczu szklonej konieczności, istniejącą próżnię (*horror vacui)* wypełniają pełni zapewne dobrej woli - ignoranci. Poniżej przedstawione zostanie kilka (z konieczności) typowych błędów popełnianych w elementarnym nauczaniu geometrii.

Bariera oczywistości (nonszalancja)

Najważniejszym i, jak się wydaje najpowszechniejszym grzechem nauczycieli klas początkowych jest ich przekonanie o banalnej oczywistości zagadnień, których nauczają. Można to nazwać swoistą „barierą oczywistości”, która powoduje obniżenie lub całkowity zanik wrażliwości u nauczyciela na elementarne trudności uczniów [1]. W odróżnieniu jednak od bariery wynikającej z rzeczywistej wiedzy i kompetencji, tu poczucie rzekomego truizmu nauczanych kwestii nie pozwala im ani dostrzec trudności zawartych w meritum ani, co gorsza zakresu własnej niewiedzy i faktu posiadania fałszywych poglądów. Skutkuje to przekonaniem o rozporządzaniu wystarczającą wiedzą merytoryczną, która nawet znacznie przekracza konieczny wymiar, nie potrzebuje weryfikacji, a tym bardziej pogłębienia i modernizacji.

Niewiele niestety zmienia w tej kwestii nawet skrócony z konieczności kurs podstaw geometrii na studiach. Po zaliczeniu odpowiednich kolokwiów i zdaniu egzaminu, studenci wracają zazwyczaj do przesądów i przekłamań utrwalonych latami doświadczeń szkolnych. Tak więc fałszywa wiedza i pseudo definicje wyniesione ze szkoły trzymają się dobrze i są reprodukowane w następnych pokoleniach uczniów przez następne pokolenia nauczycieli [2].

Ponieważ podręczniki są pisane w większości przez pełnych dobrych intencji pedagogów, więc zawierają podobne błędy i przekłamania, a autorytet nazwisk i słowa drukowanego działa tu na nauczycieli i ich niewiedzę z zakresu geometrii dodatkowo uspokajająco i rozgrzeszająco. Zasadniczo niewielki wysiłek związany z przejrzeniem odpowiednich haseł w szkolnym słowniku matematycznym rozwiązałby problem. Ale by go rozwiązać najpierw trzeba mieć wątpliwości, trzeba sobie swoją niewiedzę uświadomić i przynajmniej przed samym sobą do niej się przyznać.

Błąd materializmu

Powszechnym błędem nauczycieli klas początkowych i adeptów tej profesji,

jest przekonanie, iż przedmiotem rozważań geometrii i jej szkolnego nauczania są obiekty, które mają charakter materialny. Fakt geometryzacji świata cywilizowanego, potoczny język i konkretność myślenia dzieci przekładają się w szkole na łatwe przekonanie, iż blaty stołów są prostokątami, a koła samochodów – kołami. Tak więc rysunki figur geometrycznych i ich wyobrażenia stają się dla dzieci tym, czym fotografie są dla przedmiotów. Zważywszy na idealizację rzeczywistych obiektów, która legła u podstaw geometrii (*ge* – ziemia*, metreo* – mierzę), być może jest to kłopot naturalny, powszechny i w jakiejś mierze nieuchronny, ale kto, jak nie nauczyciele mają o tej trudności wiedzieć i się z nią zmierzyć?

Obiektom geometrycznym, mimo iż są kategorią mentalną przypisywane są wielkości fizyczne (rozciągłość, obszar, objętość), co już samo z siebie może dziwić: *jak coś, co nie istnieje, może mieć mierzalne wymiary?* Jeżeli ma wymiary, to istnieje fizycznie. Jeżeli nie istnieje fizycznie, to i nie ma wymiarów. Co gorsza, akceptacja tezy, iż byty pomyślane mogą mieć fizyczne wymiary, zawiera kolejny kłopot. O ile bowiem świat fizyczny jest trójwymiarowy, o tyle obiekty geometryczne, wbrew zdrowemu rozsądkowi i doświadczeniu mogą mieć także jeden wymiar i dwa. Co gorsza, inne (punkt) mogą wymiarów w ogóle nie mieć. Bezwymiarowe punkty dają jednowymiarowe odcinki, dwuwymiarowe figury płaskie i trójwymiarowe bryły. Odcinki posiadające długość, mogą być fragmentami prostej, która wprawdzie posiada jeden wymiar, ale za to niemierzalny itd.

To wszystko wydaje się mieć dla większości ludzi postronnych charakter niezrozumiałej, sprzecznej ze zdrowym rozsądkiem gmatwaniny, którą jak każdą prawdę objawioną i nie rozumianą trzeba możliwie wiernie zapamiętać i odtwarzać. W przypadku konkretno-obrazowego myślenia dzieci quasi realistyczna część geometrii (koła, trójkąty prostokąty) jest prawdopodobnie najlepiej rozumiana. Niemniej przy braku innych doświadczeń odnoszących się do złożonej wieloaspektowej i relacyjnej natury obiektów geometrycznych, uczeń ma szansę nabycia wiedzy nie tyle nawet prostej, co prostackiej.

Nauczyciel świadom tego kłopotu, może podjąć z nim walkę, aczkolwiek trzeba sobie zdać sprawę, iż pierwotność doświadczeń dziecka, mięsista sugestywność świata materialnego wobec rachityczności geometrycznych abstraktów, stawia go, choćby ze względu na konkretność myślenia dzieci, na prawie straconej pozycji. Musi zdawać sobie sprawę z faktu, iż nie zawsze, gdy dwóch mówi to samo, to jest to samo. Dziecko używając tych samych pojęć, co nauczyciel na lekcji geometrii nadaje im całkowicie inny, życiowy sens, podczas gdy nauczyciel spontanicznie w szkole przechodzi od potocznego rozumienia pewnych pojęć, w tym także geometrycznych - do ściślejszego. Doświadczanie rzekomej materialności kwadratów i trójkątów ekstrapolowane jest na prostsze, ale równocześnie późniejsze obiekty takie jak: odcinek, prosta i punkt, gdzie stopień przybliżenia obiektów realnego świata jako modeli figur geometrycznych gwałtownie maleje.

Dwoistość języka i pojęć

Nauczaniu geometrii od początku towarzyszą nieporozumienia terminologiczne.

Jest to uwieńczenie pewnego procesu, który zaczyna się już we wczesnym dzieciństwie od nauki języka i nazywania zjawisk ze świata, gdzie pewne pojęcia stosowane potem w geometrii mają potoczny, często nader daleki od matematycznego sens i dziecko przychodząc do szkoły jest już zawsze w jakiejś mierze geometrycznie „zdeprawowane". Obejmuje to praktycznie wszystkie pojęcia pojawiające się na lekcjach geometrii: koło, trójkąt, kwadrat, prosty, krzywy, punkt, odcinek, linia, kąt, bok itd. [2]. Nauczyciel powinien więc w trakcie nauki geometrii tyle kształtować ich wiedzę pozytywną w tym względzie, tworząc intuicje odpowiednich figur, jak i dekonstruować przesądy wynikające z ekstrapolacji na geometrię potocznych poglądów i wyrażeń językowych. Mamy tu do czynienia z jedną z najkłopotliwszych dydaktycznie sytuacji, gdzie, by budować dobrą wiedzę najpierw trzeba wykorzenić istniejące, błędne poglądy i przekonania w jakiejś kwestii. Z tego punktu widzenia, o wiele korzystniej by było gdyby dzieci nie posiadały żadnych doświadczeń geometrycznych i skojarzeń językowych, co oczywiście w naszym *hic et nunc* nie jest w ogóle do pomyślenia.

Geometria rysunków

Najprawdopodobniej z powodu, który jest oczywisty dla każdego, kto chodził do szkoły i uczył się geometrii, więc rzeczywiście dla każdego, geometria kojarzy się z rysunkami figur ołówkiem w zeszycie lub kredą na tablicy. Jeżeli nawet od czasów Kartezjusza wiemy, iæ moæna je takæe wyraæać równaniami, to zapewne nielicznym z nas na wspomnienie koła przed oczyma stanie formuła $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, a nie wyobraæenie rysunku.

Ponieważ w szkole naukę geometrii zaczynamy od ukonkretnienia jej obiektów i od manipulacji. Od układania figur z patyczków, wyginania drucików, naciągania gumek na kołki geoplanu, itd., niespodziewanym i kłopotliwym efektem takiego uczenia się geometrii, gdzie w książkach i w zeszytach i na tablicy mamy do czynienia w istocie z zaznaczaniem jedynie brzegu figury i ziejącą pustką jej wnętrza, jest fakt, iż w umysłach dzieci powstaje nieodparta idea utożsamienia brzegu figury z nią samą w czym na dodatek dzielnie wspierają ich nauczyciele i podręczniki. Figura płaska staje się w istocie krzywą lub łamaną. Prowadzi to także do jeszcze jednego zadziwiającego zjawiska: ponieważ w rysunkach wielokątów na papierze i na tablicy widoczne są tylko czarne lub białe linie stanowiące boki rysowanych obiektów, pojawia się oczywista w tym kontekście tendencja do definiowania wielokątów przez boki. Jest to tyle zabawne, co kłopotliwe dydaktycznie. Figura, której nawet nazwa odwołuje się do posiadanych kątów i ich liczby (wielokąt), definiowana jest przez liczbę posiadanych boków, co często wymaga dodatkowych, karkołomnych uzupełnień. Klasycznym tego przykładem jest masowe posługiwanie się przez studentów i nauczycieli nauczania początkowego pseudodefinicją prostokąta wg której jest to figura: *posiadająca cztery boki w tym dwa dłuższe i dwa krótsze oraz wszystkie kąty proste.* Oczywiście w tak zdefiniowanych prostokątach nie ma miejsca dla kwadratów, które między innymi dlatego, są traktowane jako osobne figury.

W poleceniach wydawanych dzieciom przez nauczycieli i autorów podręczników nagminnie spotyka się np. polecenie wskazania, czy zamalowania prostokątów i kwadratów, a niewielu nauczycieli zdaje sobie sprawę z absurdalności polecenia, które w swej strukturze logicznej jest tożsame ze wskazywaniem psów i jamników, nie jako rasy psów, ale osobnego gatunku.

Kwestia jest dodatkowo przykra i z tego powodu, iż geometria szkolna jest bodaj najlepszym przykładem zastosowania klasycznego arystotelesowskiego sposobu definiowania przez podanie najbliższego rodzaju i różnicy gatunkowej (*definitio fit per genus proximum et differentiam specificam*) i intuicję takiego definiowania można tu z łatwością u dzieci kształtować.

Jak się wydaje pomocne w rozwiązaniu opisanego wyżej kłopotu byłoby częstsze odwoływanie się do nożyczek i origami niż do patyczków i ołówka. Kiedy wycinamy lub zginając kartkę tworzymy modele figur geometrycznych, tym co widzimy i to czym manipulujemy jest fragment płaszczyzny; widać figurę jako powierzchnię, widać kąty i wierzchołki a nie boki. Rysowanie figur, oczywista konwencja szkolna powinna być wprowadzana dopiero na bazie takich doświadczeń i zabaw z wielokształtnymi klockami, tak by uczniowie mieli świadomość podwójnej w istocie umowności rysunków. Rysunek jest tu po pierwsze wyobrażeniem prawdziwej figury, która ma charakter mentalny, a po drugie na zasadzie *pars pro toto* brzeg figury symbolizuje jej całość.

Kierunek prostych i odcinków

Tak jak poprzednio wszystkiemu winne jest rysowanie. Ponieważ odcinki i proste rysowane w zeszytach i na tablicach powstają zawsze stopniowo, w miarę przesuwania ołówka wzdłuż linijki, zazwyczaj z godnie z kierunkiem pisma – z lewej do prawej, powstaje u dzieci nieodparte wrażenie, iż odcinki mają początek i koniec. Jeżeli do tego dodamy jeszcze fakt, iż zwyczajowo oznaczamy ich końce kolejnymi literami alfabetu, także zachowując kierunek z lewa do prawa, wrażenie o ich skierowaniu jest nieuchronne. Tak też traktują odcinki nauczyciele i autorzy podręczników. W niepotrzebnych pseudodefinicjach mówią oni o: początku i końcu odcinka. Wskazywane jako modele odcinka szpilki czy zapałki mają początek i koniec. Z kolei drzewa, słupy telefoniczne, latarnie i tyczki jako modele odcinka maja tę wadę, że wskazują jednoznacznie kierunek wznosząc się z ziemi w górę.

Innym, nie mniej fatalnym w tym względzie sposobem jest przedstawianie odcinka jako drogi np. z domu do szkoły, więc w kategorii punkt wyjścia (początek) punkt dojścia (koniec), start, meta itd. Tę wadę posiadają także znakomite skądinąd ćwiczenia polegające na celowaniu, gdzie także oko dziecka jest w naturalny sposób początkiem odcinka, a obiekt, w który celujemy jego końcem. Jest psychologicznie nie do przyjęcia, by drzewo celowało do dziecka. Sytuacja zmienia się radykalnie, jeżeli na końcu linii celowania (oczywiście nie w sensie militarnym) znajdują się dzieci, robiące to równocześnie z dwóch równouprawnionych stron.

Innym ciekawym ćwiczeniem mogłoby być wykorzystanie starego sposobu malarzy pokojowych, którzy długie i proste linie na ścianach zaznaczają odbijając napięty i opruszony farbą sznurek. Taka linia odbija się równocześnie na całej długości, co czyni bezprzedmiotową dyskusję o kierunku jej powstawania.

Résumé

W szkolnym nauczaniu geometrii na poziomie elementarnym, największym problemem jest, jak się wydaje sam nauczyciel, jego nie uświadamiana zazwyczaj niekompetencja merytoryczna, która powoduje reprodukcję błędów i pseudo wiedzy .

Drugim kłopotem jest automatyczne przenoszenie wzorów nauczania geometrii z klas wyższych na poziom elementarny, bez wcześniejszego dostarczenia uczniom zgodnej z ich możliwościami mentalnymi masy apercepcyjnej różnorodnych obserwacji i doświadczeń, z których będą mieli szansę w przyszłości wyabstrahować to, co stanowi

istotę pojęć geometrycznych i samej geometrii. Przenosząc na grunt dydaktyki słynne prawo Haeckla chodziłoby o to, by dzieci w znacznie większym stopniu i dłużej powtarzały doświadczenia ludzkości z przeszłości, uczyły się praktycznie przez doświadczanie świata oraz działanie w nim i nie były zbyt wcześnie, a niepotrzebnie przenoszone w świat czystej abstrakcji.

Literatura

[1] Nowak, Z.: Bariera oczywistości w początkowym nauczaniu matematyki, W: *Matematika w škole dnes a zajtra. Zbornik 7. ročnika konferencie s medzinarodnou užast'ou.* Ružomberok 2007, s. 221-225.

[2] Kováčik, Š.: Detská literatúra pri tvorbe matematických predstáv, W: *Od činnosti k poznatku.* Sbornik z konference s mezinárodni účasti věnované počátečnimu vyučováni matematiky, Srni 2003, Západočeská Univerzita v Plzni, s. 152-155.

[3] Trelińska, U.- Treliński G.: *Kształtowanie pojęć geometrycznych na etapie przeddefinicyjnym.* Wyd. MAT & MET, Kielce 1996.

Adresa autora:
Zbigniew Nowak, dr
Akademia Pedagogiczna
Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
ul. Ingardena 4
30-060 Kraków
e-mail: amadeusz56@o2.pl