Strategie rozwiązywania zadań nietypowych stosowane przez studentów pedagogiki

Barbara Nawolska

Abstract. Uncommon mathematical problems play an important role in childrens' education in mathematics. These exercises inspire creativity in children and help them develop a sense of divergent thinking. Pedagogics students, as future teachers, must not only recognize the value of such mathematical problems, but must also be able to solve them in a simple and understandable for younger pupils way. This article is a presentation of the skills of the students in this regard.

1 Wprowadzenie

Matematyki uczymy się poprzez rozwiązywanie zadań. Dobór zadań które dajemy do rozwiązania, zależy od celu, jaki chcemy osiągnąć. Do sprawdzenia umiejętności zastosowania typowych schematów postępowania lub do kształcenia określonych sprawności, dobieramy zadania typowe, takie, które nie wymagają zbytniej pomysłowości. Jeżeli jednak chcemy uczyć rozumienia tekstu, matematyzowania sytuacji realnych, kodowania i dekodowania informacji, stosowania strategii heurystycznych, racjonalnego podejmowania decyzji i różnorodnych aktywności matematycznych takich jak dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, schematyzowanie, uogólnianie, algorytmizowanie itp., to musimy wykorzystać do realizacji tego celu zadania nietypowe, otwarte, posiadające wiele rozwiązań, i nie mające gotowego schematu rozwiązania. Rozwiązywanie takich zadań może wykreować człowieka twórczego będącego w stanie podjąć wyzwania współczesnego świata.

2 Badania

Nauczyciel powinien stwarzać uczniom jak najwięcej okazji do rozwiązywania problemów otwartych i zadań nietypowych. Zanim nauczyciel podejmie decyzję, jakie zadanie dać uczniom, musi najpierw sam umieć je rozwiązać. Jeżeli ma trudności z rozwiązaniem zadania, to z pewnością nie poleci go swoim uczniom. Od wiedzy i umiejętności pedagogicznych nauczyciela zależy więc sukces ucznia.

Artykuł prezentuje wyniki badania kompetencji nauczycieli pedagogiki wczesnoszkolnej w zakresie rozwiązywania nietypowych zadań. Badania zostały przeprowadzone w styczniu 2007 roku, wśród 163 nauczycieli, którzy po ukończeniu (w różnych ośrodkach) studiów licencjackich z pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej, podjęli studia uzupełniające magisterskie na kierunku pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna w Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

Każda z osób otrzymała do pisemnego rozwiązania następujące zadanie

Zadanie: Stolarz robi taborety o trzech lub czterech nogach. Ma w magazynie 30 nóg do taboretów. Ile i jakich taboretów może zrobić?

Matematycznym modelem tego zadania jest równanie diofantyczne $3x + 4y = 30$, gdzie x jest liczbą trójnożnych taboretów a y liczbą czteronożnych taboretów. Równanie to ma 3 rozwiązania: $(10; 0)$, $(6; 3)$ i $(2; 6)$.

Jeżeli uwzględnimy możliwość nie wykorzystania wszystkich nóg, to rozwiązań będzie więcej. W tej sytuacji matematycznym modelem zadania jest równanie $3x + 4y = n$, dla $n \leq 30$, które ma 48 rozwiązań.

Poniższa tabela prezentuje wszystkie rozwiązania dla $n > 25$. Rozwiązania te zostały ponumerowane (pierwszy wiersz) liczbami od 1 do 13, co zostanie wykorzystane w dalszej części artykułu.

Nr rozw.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	itd.
x	10	6	2	7	3	8	4	0	9	5	1	6	2	itd.
y	0	3	6	2	5	1	4	7	0	3	6	2	5	itd.
n	30			29		28			27			26		itd.

Analizując prace nauczycieli-studentów zwracałam uwagę na liczbę poprawnych rozwiązań, ale też i na to a) jak badani rozumieją treść zadania, b) co dla nich znaczy „rozwiązanie zadania”, c) jakie strategie stosują podczas rozwiązywania i d) jak prezentują uzyskane wyniki.

W tym artykule chcę skupić się tylko na jednym z tych zagadnień i zaprezentować różne strategie rozwiązywania omawianego zadania. Strategie te są ważne, z tego względu, że nauczyciele będą je preferować w pracy z dziećmi.

3 Strategie rozwiązywania

W pracach studentów można zauważyć różne strategie rozwiązywania zadania. Niektórzy posługują się działaniami arytmetycznymi, inni preferują rysunek. Są tacy, którzy najpierw dokonują symulacji rysunkowej, a następnie potwierdzają jej wiarygodność stosownymi obliczeniami bądź odwrotnie: najpierw znajdują rozwiązanie na drodze arytmetycznej a następnie ilustrują rozwiązanie rysunkiem.

a) arytmetyczny sposób

W jednej z prac autorka zaczyna od dzielenia:
$30 : 4 = 7$ r $2 \rightarrow 7$ *taboretów o* 4 *nogach i zostają* 2 *nogi,*
$30 : 3 = 10 \rightarrow 10$ *taboretów o* 3 *nogach.*

Następnie wykonuje serię obliczeń kolejno dla $y = 1, 2, 3, \ldots, 6$:
$1 \cdot 4 = 4$, $30 - 4 = 26$, $26 : 3 = 8$ r $2 \rightarrow 1$ *tab. o* 4 *nogach i* 8 *tab. o* 3 *nogach i* 2 *nogi,*
$2 \cdot 4 = 8$, $30 - 8 = 22$, $22 : 3 = 7$ r $1 \rightarrow 2$ *tab. o* 4 *nogach i* 7 *tab. o* 3 *nogach i* 1 *noga,*
$3 \cdot 4 = 12$, $30 - 12 = 18$, $18 : 3 = 6 \rightarrow 3$ *tab. o* 4 *nogach i* 6 *tab. o* 3 *nogach* [itd. aż do $y = 6$].

W ten sposób znajduje 8 rozwiązań o numerach od 1 do 8 (liczba nie wykorzystanych nóg jest nie większa niż 2).

Podobnie postępuje inna studentka. Również zaczyna od wykonania dzielenia 30 przez 3 i przez 4 i wyciąga z tych obliczeń wnioski co do liczby i rodzaju taboretów. Następnie wykonuje serię obliczeń dla $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$ zapisując:
1 *tab.* 3*-nożny, zostaje* 27 *nóg*, $27 : 4 = 6$ r $3 \rightarrow$ *z reszty jeszcze jeden* 3*-nożny i są* 2 *z* 3 *nogami i* 6 *z* 4 *nogami,*
2 *tab.* 3*-nożne, zostają* 24 *nogi*, $24 : 4 = 6 \rightarrow 2$ *z* 3 *nogami i* 6 *z* 4 *nogami (jak wyżej),*
3 *tab.* 3*-nożne, zostaje* 21 *nóg*, $21 : 4 = 5$ r $1 \rightarrow 3$ *z* 3 *nogami i* 5 *z* 4 *nogami i* 1 *noga*
$\ldots$.

Postępując tak, aż do $x = 9$ taboretów 3-nożnych, znajduje 8 rozwiązań o numerach od 1 do 8.

Kolejne analogiczne rozwiązania tym różnią się od poprzednich, że obliczenia prezentowane są w tabeli np.:

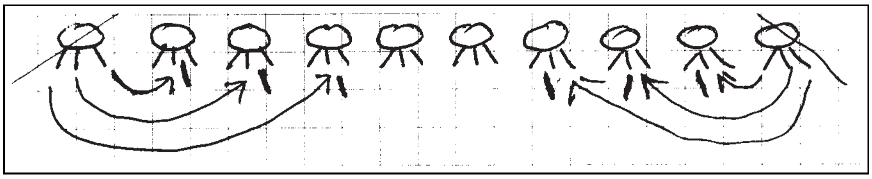
tab. 3-nogi	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
tab. 4-nogi	0	0	1	2	3	3	4	5	6	6	7
reszta	0	$3 \to 1$ z 3 nogami	2	1	0	$3 \to 1$ z 3 nogami	2	1	0	$3 \to 1$ z 3 nogami	2

Jeszcze inne strategie arytmetycznego rozwiązania polegają na wielokrotnym odejmowaniu od 30 liczby 3 (albo liczby 4) i analizowaniu podzielności uzyskanej różnicy przez drugą z liczb. Zdarzały się jednak błędy rachunkowe, co nie pozwalało na uzyskanie wszystkich rozwiązań nawet dla $n = 30$.

b) symulacja rysunkowa

Dobrą strategią w rozwiązywaniu zadania jest wykorzystywanie rysunku. Zdarzały się rysunki bardzo realistyczne. Najczęściej jednak rysowano 30 kresek lub kropek i grupowano je po 3 lub po 4.

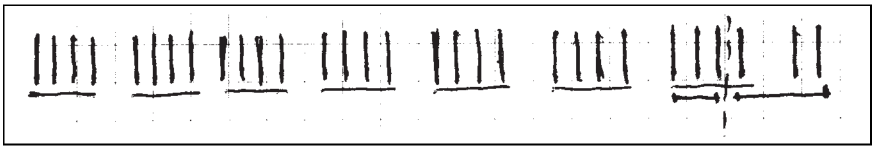
W jednej z prac autorka rysuje 10 taboretów o 3 nogach. To jest jedno rozwiązanie: $(10; 0)$. Następnie z jednego taboretu 3-nożnego zabiera wszystkie nogi i rozdaje po jednej nodze trzem innym taboretom tak, że powstają 3 taborety 4-nożne. Daje to rozwiązanie $(6; 3)$. W identyczny sposób rozmontowuje kolejny taboret 3-nożny i tworzy 3 nowe taborety 4-nożne. Łącznie z poprzednimi jest ich już 6. Jest to następne rozwiązanie $(2; 6)$ dla $n = 30$ (rys. 1.).



Rysunek 1.

Jest to bardzo ładny sposób wizualizacji zrozumiałej nawet dla małych dzieci. Szkoda, że autorka na tym poprzestaje, bo metodę postępowania da się przedłużyć dla pozostałych n. Dla $n = 29$ należy narysować 29 kresek, pogrupować po 3, zostaną 2, które należy przydzielić po jednej dwóm trójkom. Tak powstaną 2 czwórki i 7 trójek (7;2). Dalej wystarczy rozmontować trójkę i utworzyć 3 czwórki dodając po jednej kresce do istniejących trójek. Tak powstaną 3 nowe czwórki, co łącznie z wcześniejszymi daje ich 5 oraz 3 trójki $(3; 5)$. Są to wszystkie rozwiązania dla $n = 29$.

Idea rysowania, grupowania i przekładania kresek pojawia się w wielu pracach. Jedna ze studentek dokonuje słownego opisu tych czynności:
Jak rozdzielę 30 nóg po 4 nogi, to będzie 7 taboretów 4-nożnych i zostaną mi 2 nogi. Z jednego taboretu 4-nożnego zabiorę 1 nogę i dołożę do tych 2 nóg – otrzymam wtedy 2 taborety 3-nożne i 6 taboretów 4-nożnych (rys. 2.).



Rysunek 2.

Mamy więc rozwiązanie $(2; 6)$. Autorka kończy na tym swój wywód a przecież można to kontynuować. Stosując jej sposób można zrobić nowy taboret 3-nożny.

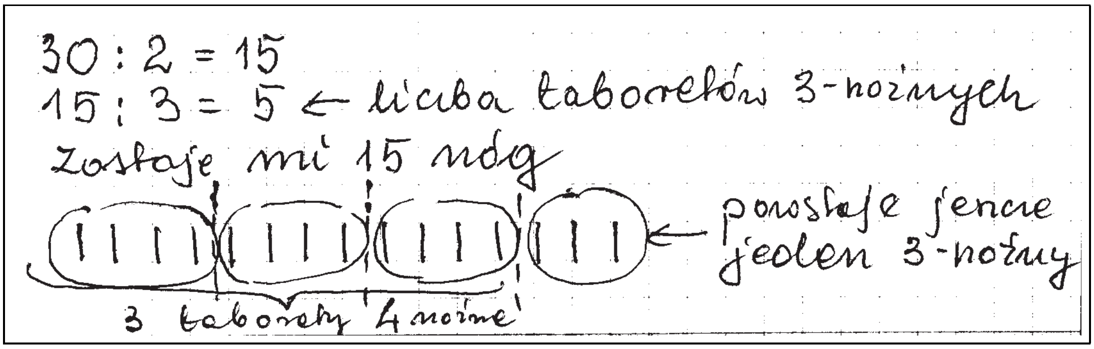
Trzeba tylko zabrać z trzech czteronożnych po jednej nodze, zamienią się one na 3-noże i będzie ich razem z tym nowym i dwoma poprzednimi 6 [mamy kolejne rozwiązanie $(6;3)$]. Rozmontowując w ten sam sposób kolejne 3 taborety 4-nożne powstaną same taborety o 3 nogach [rozwiązanie $(10;0)$].

Zaprezentowany pomysł można też wykorzystać do poszukiwań dalszych rozwiązań dla innych n niż 30.

c) sprawiedliwy podział nóg lub „symetrie”

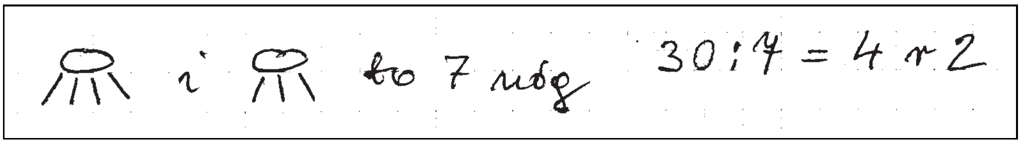
W wielu pracach można dostrzec tendencję do rozdzielania nóg „sprawiedliwie” między dwa rodzaje taboretów.

Dla jednych sprawiedliwie to podział 30 nóg na 2 równe części $(30 : 2 = 15)$. Z każdej takiej części (z 15 nóg) robi się taborety jednego rodzaju, uzyskując w ten sposób 5 taboretów trójnożnych $(15 : 3 = 5)$ i 3 taborety czteronożne $(15 : 4 = 3$ r $3)$. Z pozostałych 3 nóg „tworzy się” kolejny taboret trójnożny (rys. 3.), co daje rozwiązanie $(6,3)$. Taką strategię rozwiązania stosowano zarówno w rozwiązaniach arytmetycznych jak i rysunkowych.



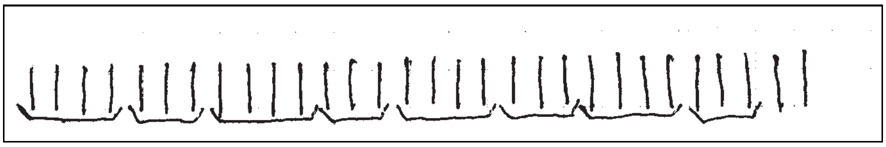
Rysunek 3.

Dla innych sprawiedliwie, to tyle samo taboretów czteronożnych, co trójnożnych.



Rysunek 4.

Np. na jeden taboret trójnożny i jeden czteronożny potrzeba 3+4 tj. 7 nóg, $30 : 7 = 4$ r. 2 Mamy w ten sposób rozwiązanie $(4,4)$ i 2 nogi zostają (rys. 4.). Takie rozwiązanie znajdowano też grupując wcześniej narysowane kreski na przemian po 3 i po 4 (rys. 5.).

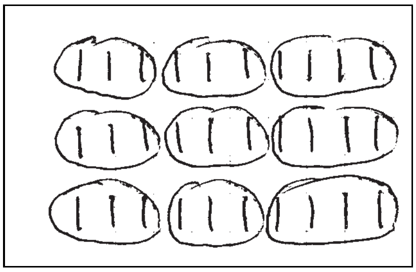


Rysunek 5.

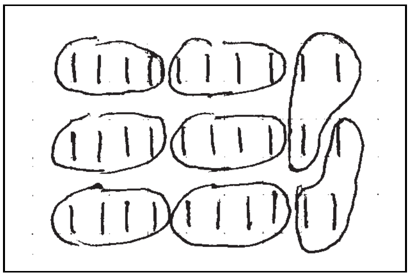
W jednej z prac studentka „produkując” komplety: po jednym taborecie z 3 nogami i jednym z 4, zapisała: $3 + 4 = 7$, $30 - 7 = 23$ (*1 tab. o 3 - i 1 o 4 nogach*), $23 - 7 = 16$ $(1 + 1)$ [chodzi o kolejną parę taboretów: 1 o 3 nogach i 1 o 4 nogach], $16 - 7 = 9$ $(1 + 1)$. Na tym poprzestała odejmować. Pewnie zauważyła, że gdyby dalej odejmowała, to zostałaby jej reszta, więc pozostałą liczbę 9 nóg rozdzieliła po 3 $(9 : 3 = 3)$ i uzyskała rozwiązanie $(6,3)$.

W jednej z prac „sprawiedliwie” to więcej nóg dla taboretów czteronożnych a mniej dla trójnożnych i to w stosunku 2 do 1 [nie wiem dlaczego taki stosunek]. Studentka rozdziela najpierw 30 nóg na 3 równe części ($30 : 3 = 10$) i jedną taką część (10 nóg) przeznacza na taborety trójnożne (ma 3 takie taborety i jedna noga zostaje) a dwie części ($2 \cdot 10$ tj. 20 nóg) na taborety czteronożne (5 taboretów). Jednak to rozwiązanie jej się nie podoba [zapewne dlatego, że zostaje jedna noga], przekreśla go i rozdziela wszystkie nogi na 2 równe części, a z każdej części (15 nóg) robi jeden rodzaj taboretów. Z nóg nie wykorzystanych dla taboretów 4-nożnych robi dodatkowo jeden taboret 3-nożny uzyskując rozwiązanie $(6, 3)$.

W wielu pracach można zauważyć (tak w rozwiązaniach arytmetycznych jak i rysunkowych), grupowanie nóg po 10 i „robienie” taboretów z tych 10 nóg. Najczęściej z każdej takiej 10 studenci robili dwie trójki i jedną czwórkę ($10 = 3 + 3 + 4$). A ponieważ są trzy takie zestawy to znajdowali rozwiązanie $(6, 3)$ (rys. 6.).

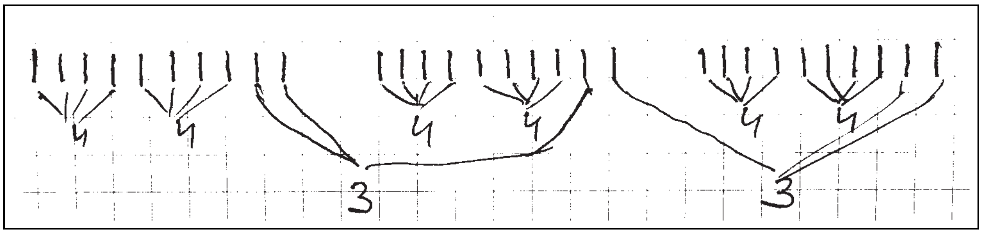


Rysunek 6.



Rysunek 7.

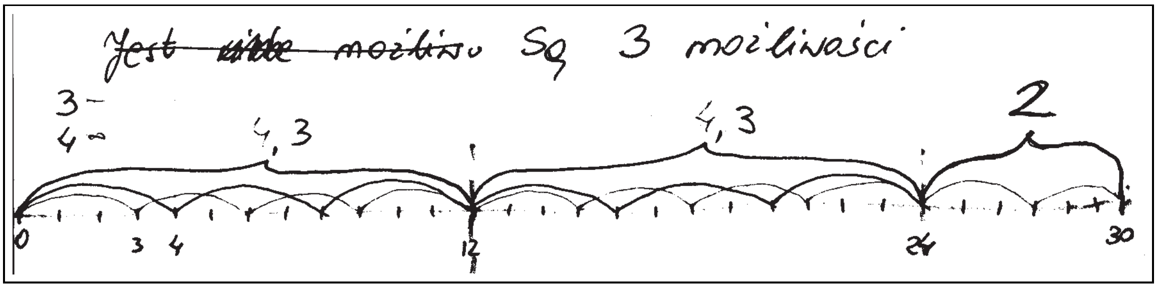
Były też inne sposoby wykorzystania 10 nóg. Np. z 10 nóg robiono dwie czwórki i zostawały 2 nogi. Zatem z trzech 10 zostawało 6 nóg ($3 \cdot 2 = 6$), z których robiono 2 taborety trójnożne ($6 : 3 = 2$) co prowadziło do rozwiązania $(2, 6)$. (rys. 7. i 8.).



Rysunek 8.

d) rozwiązanie na osi liczbowej

W paru rozwiązaniach została wykorzystana oś liczbowa, na której kolorami zaznaczono łuki: w jednym kolorze łuki po 3 jednostki (10 łuków od 0 do 30), a w drugim kolorze łuki po 4 jednostki (tylko 6 łuków od 0 do 24).



Rysunek 9.

Taka ilustracja na osi liczbowej pozwala zauważyć wspólne wielokrotności liczb

3 i 4 tj. 12 i 24 a ponadto, że z każdych 12 nóg (są dwie 12) można zrobić albo 3 taborety 4-nożne, albo 4 taborety 3-nożne. Z pozostałych sześciu nóg można tylko zrobić 2 taborety 3-nożne. Daje to następujące możliwości:

— robimy z każdych 12 nóg same „3", jest ich: $4+4+2=10$; rozwiązanie $(10;0)$;

— robimy z każdych 12 nóg same „4", jest ich $3+3=6$ i jeszcze dwie „3"; rozwiązanie $(2;6)$;

— z 12 nóg robimy „4" a z drugich 12 nóg robimy „3", mamy $4+2=6$ trójek i 3 czwórki; rozwiązanie $(6;3)$.

e) odgadnięcie lub metoda prób i błędów

Wśród prac znajdują się takie, które prezentują gotowe rozwiązania. Nie ma w nich śladu jakichkolwiek obliczeń lub rysunków. Nie jest wykluczone, że rozwiązania te zostały odgadnięte, lub znalezione metodą prób i błędów. Autorzy nie chcieli „chwalić" się swoimi metodami i nie przedstawili swoich poszukiwań, a jedynie ich efekt.

4 Podsumowanie

Badani studenci zaprezentowali różny poziom umiejętności radzenia sobie z rozwiązywaniem omawianego zadania. Na 163 osoby zaledwie 9 podało wszystkie rozwiązania dla $n = 28, 29, 30$. Nikt nie podał rozwiązań dla pozostałych n.

Niektórzy nie radzili sobie w poszukiwaniu rozwiązania. Ograniczali się jedynie do wykonania dzielenia. Albo do podania odgadniętego pomysłu.

Jednak wielu badanych w swych poszukiwaniach było pomysłowych i twórczych. Większość wykorzystywała symulację rysunkową (aż 118 osób). Swoje strategie rozwiązania stosowali w sposób racjonalny i mogliby te strategie wykorzystywać w poszukiwaniach dalszych rozwiązań. Ważne jest to, że strategie wykorzystywane przez studentów można wykorzystać w pracy z dziećmi.

Literatura

[1] Nawolska B., Żądło J. *Rôzne spôsoby riešenia netypickej slovnej úlohy devät' až desat'ročnými žiakmi,* Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 7. ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou, Ružomberok 2007, str. 210 – 215, ISBN 978-80-8084-187-4.

[2] Nawolska B., Żądło J., *Jakie monety ma w skarbonce Agatka? Czyli jak studenci pedagogiki rozwiązywali pewne zadanie* [w] . Vyučováni matematice z pohledu kompetenci žáka a učitele 1. stupně základniho vzdělávani – Srni 2007, sbornik z konference s mezinárodni účasti věnované počátečnimu vyučováni matematiky na 1. stupni základni školy, ZÁPADOČESKA UNIVERZITA V PLZNI, Srni 2007, str. 87–92, ISBN: 978-80-7043-548-9

[3] Nawolska B. *How many and what kind of stools can be built by a carpenter? – meaning how pedagogics students solved certain problems.* Referat wygłoszony na XIV PCSMS – Częstochowa –Hucisko, 31 maja-2 czerwca 2007.

Adresa autora:
Barbara Nawolska, dr
Akademia Pedagogiczna, Instytut PPiS
ul. Ingardena 4, 30-060 Kraków
e-mail: bnawol@vp.pl