Štatistika v školskej matematike.

Abstract:
This paper deals with school statistics. The way of teaching this concept on secondary school from the year 1945 up to present days is presented here. Several interesting tasks with the purpose to enrich school lesson are included in this article.

Nielen žiaci, ale aj učitelia matematiky majú obľúbené a povedzme menej obľúbené témy, či matematické celky. Ktovie prečo si práve Štatistika zasluhuje jedno z popredných miest práve v neobľúbenosti matematických tém. Možno táto neobľúbenosť je spojená s odlišným spôsobom myslenia na aký sú žiaci v súvislosti s riešením matematických úloh zvyknutí. V gymnaziálnom, ale už aj v učive základných škôl, sa stretávame len s popisnou štatistikou, ktorej cieľom je zozbierať a spracovať štatistické údaje.

Slovenské gymnázia v súčastnosti používajú učebnice od dvoch autorov T. Hechta [2] a B. Riečana [6]. V niektorých starších školách sa nájdu aj učebnice staršieho dáta [3], [4]. Podľa učebných osnov pre 4. ročník gymnázia (schválené Ministerstvom školstva Slovenskej republiky 24. februára 1997 pod číslom 1252/96-15 s platnosťou od 1. septembra 1997) by žiaci mali ovládať nasledujúce pojmy: Súbor, znak, rozsah súboru, absolútna a relatívna početnosť, priemerná hodnota, aritmetický, geometrický, harmonický a vážený priemer, modus, medián, rozptyl, smerodajná odchýlka, variačný koeficient, lineárna korelácia, koeficient korelácie a jeho štatistická interpretácia. Tabuľka rozdelenia početnosti, histogram. Zaujímalo nás ako sú jednotlivé pojmy žiakom priblížené dnes a ako boli v minulosti. Podarilo sa nám nájsť učebnice pre stredné odborné školy a gymnázia z rôznych rokov. No ďalej sme sa už zamerali len na tie, v ktorých vystupuje štatistika ako samostatný celok. A keďže vystupuje ako samostatný celok niekedy je zaradená pred pravdepodobnosť [3], [6] v iných učebniciach až po prebratí pravdepodobnosti [4], [2]. V nasledujúcich riadkoch sa pokúsime venovať pozornosť jednotlivým štatistickým pojmom a pozrieť sa na definície a príklady, ktoré daný pojem vysvetľujú. Ponúkneme rôzne pohľady na spomínané pojmy.

V súčasnej učebnici [2] predchádza definícii štatistického súboru pojem základný súbor. „Základným súborom sa nazýva konečná množina M relatívne homogénnych prvkov. Počet prvkov N sa nazýva rozsah základného súboru. Ak z toho súbor vyberieme n prvkov, tak tieto prvky vytvárajú výberový súbor s rozsahom n. Výberový súbor sa nazýva aj štatistický súbor.“ V učebnici [3] je definovaný štatistický súbor, po definovaní štatistickej jednotky:„Jednotlivé prípady, na ktorých pozorujeme skúmané javy,nazývame štatistickými jednotkami a nimi utvorený súbor nazývame štatistickým súborom.“ V učebnici [6], ale aj v [4] pod pojmom štatistický súbor rozumieme danú konečnú, neprázdnu množinu M.

Ešte predtým než sa žiaci stretnú so štatistikou ako tematickým celkom, aktívne pracujú s pojmom aritmetický priemer prakticky už od piateho ročníka základnej školy. Zaujímalo nás, ako sa postupne tieto definície vyvíjali. „Aritmetickým priemerom $\bar{x}$ hodnôt uvažovaného znaku v základnom súbore je číslo: $\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i N_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m}(N_i)}\imath$ [2].
V starších učebniciach je priemer definovaný cez ďalší pojem a to úhrn [3], [4]. Prvé riadky prvej kapitoly brožovanej učebnice [6] sa venujú stručnému pripomenutiu, čo to aritmetický priemer vlastne je. Hneď prvý príklad sa venuje známej štatistickej si-

tuácii: Aritmetický priemer počtu novorodencov na 1000 obyvateľov je 19,18. Autor sa podrobne venuje ozrejmeniu čísel za desatinnou čiarkou.

Samostatná kapitola v [3] je venovaná váženému priemeru. Po priblížení nového pojmu nasleduje príklad: str. 290/ Pr. 6.
„Zmes obsahuje 7 kg kávy v cene 80 Kčs za 1kg a 3 kg v cene 100 Kčs za 1 kg. Za koľko korún bude 1 kg zmesi?"
Takýto príklad by mohol žiakom so slabým vhľadom do problematiky utvrdiť v názore, že vážený priemer je nový pojem nesúvisiaci s priemerom definovaným predtým. Tiež, že vážený priemer musí byť nutne spojený s nejakou hmotnosťou. Podobný príklad sme našli v [6]. Definícii váženého priemeru predchádza príklad 3/str. 9. Kde v tabuľke je uvedený počet vyprodukovaného mäsa za 1 rok v prepočte na 1 obyvateľa v piatich Európskych krajinách. Po stručnom vhľade do príkladu autor dáva k dispozícii aj tabuľku počtu obyvateľov v jednotlivých krajinách. Úlohou žiakov je vypočítať koľko mäsa pripadá priemerne na jedného obyvateľa uvedených krajín a porovnať ho s údajmi zo Slovenska. Podobne ako v predchádzajúcej literatúre aj tu je príklad, ktorý je veľmi spätý s hmotnosťou.

Pojmy ako modus a medián sa vyskytujú iba v učebnici [2] a v [6]. V oboch týchto učebniciach sú tieto pojmy definované podobným spôsobom. „Modus je najčastejšie sa vyskytujúca hodnota sledovaného znaku vo výberovom súbore spomedzi hodnôt $x_1, x_2, ..., x_m$. Označujeme ho mod(x)."
„Medián je prostredná hodnota znaku vo výberovom súbore. Označuje sa obvykle med(x)."

Definície pojmov ako rozsah súboru, absolútna a relatívna početnosť majú k sebe najbližšie učebnice [3] a [4]. „Rozsahom súboru nazývame počet všetkých jednotiek v ňom obsiahnutých. Početnosťou alebo tiež absolútnou početnosťou javu nazývame počet všetkých jednotiek, pri ktorých bol tento jav zistený."[3] „Podiel početnosti javu a rozsah súboru nazývame relatívnou početnosťou."[4] Čísla $n_1, n_2, ...n_3$ zo vzorca $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(n_j \cdot x_j)$ sa nazývajú absolútne početnosti hodnôt znaku x. Číslo $\frac{n_j}{n}$ sa nazýva relatívna početnosť hodnoty x_j [6].

Ďalšie pojmy popisnej štatistiky ako smerodajná odchylka a disperzia sa vyskytujú iba v učebniciach [2] a v [6]. Rozptyl, teda druhá odmocnina zo smerodajnej odchylky ($s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$), poukazuje, nakoľko sa odchyľujú jednotlivé čísla od priemeru [2]. V [6] Čím je číslo s menšie, tým sú rozdiely $(x_j - \bar{x})^2$ menšie, tým bližšie sú čísla rozmiestnené okolo priemeru.

Posledná kapitola v oboch učebniciach je venovaná štatistickej závislosti znakov a koeficientu korelácie. Za vhodný príklad z praxe považujeme príklad na str. 32/ Pr.2 v [2], v ktorom na základe počtu výrobkov, ktoré pracovníci vyrobili za smenu, a počtu bodov , ktoré získali v teste, treba vyjadriť mieru závislosti medzi ich zručnosťou a pracovnou výkonnosťou. Vzhľadom na záujem žiakov by mohol byť celkom zaujímavý príklad na str. 25/1.17 v [6], v ktorom treba zistiť mieru korelácie medzi známkou z matematiky a zo slovenského jazyka. Podobná úloha je aj na str.29 /3.C tej istej učebnice.

V učebnici [3] je pojem histogram spomenutý v súvislosti s rozdelením početnosti v súbore s nameranou výškou chlapcov jednej triedy. V učebnici [4] iba ukazujú dva spôsoby grafického znázornenia získaných výsledkov (bez akéhokoľvek zavádzania nových pojmov.) Kladie sa dôraz na formuláciu ďalších úloh, kde by sa dala využiť tabuľka s nameranými údajmi.

Niekoľko zaujímavých úloh.

Súčasťou tohto príspevku je aj výber niekoľkých úloh, ktorými by snáď bolo možné priblížiť definované štatistické pojmy, či precvičiť získané zručnosti.

1. Rozšifrujte tento text:

   Na čítanie vám predkladáme zaujímavý a veselý článok od Jaroslava Haška:

   NZUZBPZCNIAPR CLVNYK.M MAVZAEVIKBASZAE AK EDZALKLO NLSTYACHOBUYTAUBDASVLBATZOZSNLBAED TNLSTY,CYANŹCYM APLDLUNIM.N BCYOAJSZMASZAOH TASAT KLVLBADRELSTY,EZ AJSZMAS MASZUZANZKLOYKR TAPRZOH O.CHV ST MASZAVZCM

   Aby sme článok rozlúštili, musíme porovnať pomerné početnosti písmen zašifrovaného textu s pomernými početnosťami písmen v nejakom normálnom texte. Keď porovnáme jednotlivé početnosti písmen, zistíme , ktoré písmeno odpovedá ktorému a text môžeme dešifrovať. Pravidlom pri takom to šifrovaní je: medzeru medzi slovami považujeme za písmeno, nerozlišujeme medzi písmenami s dĺžňom a bez, ani s mäkčeňom a bez mäkčeňa. Bodky, čiarky,... si nevšímame a písmeno CH považujeme za dve písmená. Takáto úloha je vhodná na precvičovanie pojmov početnosť a modus.

2. Vlaky často meškajú a výskumníci sa rozhodli,že meškanie zaznamenajú a potom zistia, na ktorý rýchlik je najväčšie spoľahnutie: Vihorlat (68, 185, 6, 12, 56, 20, 51, 0, 0, 63, 80, 75), Laborec (2, 38, 5, 3, 62, 4, 0, 69, 13), Hornád (55, 62, 43, 37, 34, 76, 28, 37, 28, 63), Hron (10, 22, 43, 7, 42, 22, 28, 34, 5, 31, 12, 10). Na ktorý rýchlik je najväčšie spoľahnutie?

   Práve na základe riešenia tejto úlohy sa dá tvrdiť, že rozptyl môže niekedy byť dôležitejším ukazovateľom ako priemer.(Priemer meškaní Laborca a Hrona sú rovnaké, tak ako sa rozhodnúť?)

3. Moja žena pečie výborné čokoládové sušienky. Bohužiaľ v poslednej dobe sa počet čokoládových kúskov v sušienkach zmenšil, takže mi už tak nechutili. Každá sušienka by mala obsahovať aspoň tri čokoládové kúsky, aby bola dobrá. Vašou úlohou bude zistiť koľko čokoládových kúskov musíme dať do cesta na šesť sušeniek, aby sme zaistili, že v každej sušienke budú aspoň tri. Použite hraciu kocku k simulácii situácie.

   Výhodou riešenia takejto úlohy si žiaci vytvoria vlastné štatistické pozorovanie. Môžu pracovať so vzniknutým štatistickým súborom. Vypočítať aritmetický priemer, modus alebo medián. Nasledujúce dve úlohy sú vybraté z matematickej olympiády pre ôsmy ročník ZŠ. Na prvý pohľad možno vyzerajú zložito, no k ich vyriešeniu stačí jednoduchá úvaha.

4. Ignác a Igor sú dvojčatá a obaja chodia na akvaristický krúžok. Priemerný vek detí, ktoré chodia na akvaristický krúžok je presne 14,8 roka. Bez nich (Ignáca a Igora) je priemerný vek detí už presne 15,4 roka. Koľko detí chodí na akvaristický krúžok?

5. Priemerný vek žiakov v triede bol 13,8 rokov, priemerný vek žiakov a pána učiteľa bol 14,5 rokov. Koľko bolo žiakov v triede a koľko rokov mal pán učiteľ? (Vek človeka počítame v celých číslach a v triede bolo viac ako 20 a menej ako 40 žiakov). Koľko žiakov bolo 13 ročných a koľko 14 ročných, ak každý z nich bol 13 ročný alebo 14 ročný. [5]

Referencie

[1] Divíšek, J., Šedivý, J., Liebl, P. a kol., *Matematicko - fyzikálne praktiká pre 7. ročník ZŠ*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo,(1982), 28-49.

[2] Hecht, T., Kalas, J., *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOČ, Pravdepodobnosť a Štatistika*, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,ISBN 80-7158-314-6,(2001), 25-34.

[3] Kraemer, E., Hájek, J., Veselý, F. a kol., *Matematika pre 3. ročník SVŠ vetva prírodovedná*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, (1977), 272-294.

[4] Lukátšová, J., Odvárko, O., Riečan, B., a kol., *Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, (1976), 272-294.

[5] Mihalíková, B., Ondevčíková, D., Semanišinová, I., *Úlohy matematickej olympiády základnej školy*, Košice, Univerzita P.J. Šafárika, (2004), 51.

[6] Riečan, B., *Matematika pre 3. ročník gymnázií. Pravdepodobnosť a štatistika*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, (1994), 7-29.

[7] *http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/Gymnazia /4roc/Osnovy/UO_mat_4r_gym.pdf*

[8] *http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/Gymnazia /4roc/standardy/VS_G4_Matematika.pdf*