

Magické štvorce vo vyučovaní matematiky

Magic squares in education of mathematics

Anna Medvecká

Abstract

Magic squares belong to the oldest mathematical amusements. A magic square is a square array of integers in which the numbers in rows, columns and diagonals have the same sums respectively. Magic squares have played various roles in the mathematics classroom: as a motivational device, as a problem – solving venture. The purpose of this paper is to present 4 problems that allow students to investigate magic squares, formulate their own conjectures about these mathematical objects, look for arguments and finally establish and prove mathematical assertions. Each problem is completed with student commentary and experience from classrooms.

MESC: D 40

Kľúčové slová (Keywords): magic square, magic number, classroom activity, investigation, mathematical assertion.

Úvod

V súčasnosti panuje názor, že matematika je izolovaná veda, ktorá s vecami okolo nás nesúvisí alebo ak áno, tak len okrajovo. Matematika pre mnohých predstavuje iba náročné a otravné výpočty, ktoré môže pochopiť a zvládnuť len skupina vyvolených géniov.

Takýto názor je možné zmeniť vhodným poukázaním na prepojenie matematiky s historickým a kultúrnym rozvojom ľudstva, a tiež aj na aplikácie v reálnom živote. Veľmi dôležité je aj vhodné budovanie matematických poznatkov a nie uprednostňovať prezentáciu vhodných matematických výsledkov a záverov.

Vhodnou témou na poukázanie takéhoto prepojenia môžu byť magické štvorce, téma, ktorú je možné prezentovať na rôznych úrovniach. Úlohy súvisiace s magickým štvorcem sa nachádzajú v učebniciach matematiky už od 1. ročníka základnej školy. Žiaci sa s magickým štvorcem môžu stretnúť aj v rôznych časopisoch na voľné chvíle a v literatúre, v ktorej sa zábavnou formou popularizuje matematika.

Vyučovaniu matematických dôkazov na hodinách matematiky by mohli predchádzať úlohy matematického skúmania s využitím magických štvorcov. Takéto úlohy sú otvorené a nepredkladajú žiakovi smer a ani metódu riešenia.

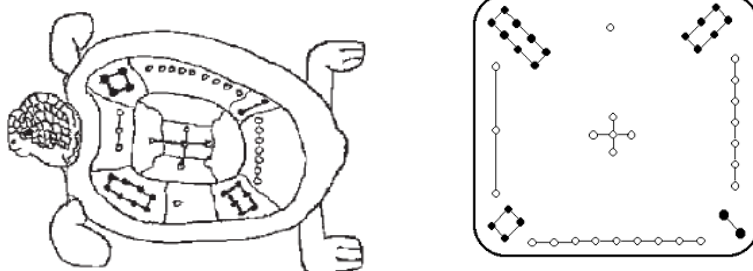
V tejto práci predkladáme štyri úlohy týkajúce sa magických štvorcov ako predmetu matematického skúmania spolu s komentárom k žiackym riešeniam jednotlivých úloh. Úlohy riešili trinásť žiaci 3. ročníka gymnázia na matematickom krúžku. Myslíme si, že úlohy sú vhodné aj pre žiakov 1. a 2. ročníka.

Motivácia

Matematika a mágia boli stáročia partnermi. V časoch Pytagora boli čísla spojené s mysticizmom a ľudia verili, že niektoré čísla majú magickú silu.

Jeden z najvýznamnejších predstaviteľov renesančnej mystiky Cornelius Agrippa vo svojej knihe Okultná filozofia (1510) pripisoval magickú silu magickým štvorcem.

Magické štvorce ľudí fascinujú už dlhé stáročia. Pred viac ako 4000 rokmi v Číne vznikla legenda o rieke Lo a korytnačke, ktorá sa zachovala v knihe *Lo Shu* (Kniha o rieke Lo). V antickej Číne nastala povodeň, ktorú pripisovali božiemu hnevu. Aby upokojili boží hnev a zažehnali povodeň, ľudia prinášali bôžikovi obetné dary. Keď však priniesli obetné dary nič mimoriadne sa nestalo iba to, že z rieky vyšla korytnačka, ktorá obišla obeť a vrátila sa späť do rieky. Bôžik obeť neprijal. Zvedavé dieťa si však všimlo podivné znaky na pancieri korytnačky. Ľudia si kresbu pozorne prezreli a uvedomili si koľko obetí majú priniesť.



Obr. 1: Nadprirodzená korytnačka

Úloha pre žiakov: Pozorne si prezrite nadprirodzenú korytnačku na obrázku 1. Viete koľko obetí mali ľudia doniesť?

Nájsť odpoveď na túto otázku žiakom pomôže riešenie nasledovných úloh.

Úloha1: Do prázdnych políčok tabuliek doplňte čísla. (vid'. obr. 2.) Kritéria, ktoré použijete na dopĺňanie čísel do prázdnych políčok si zvolte sami.

	2	3	
5	11	10	8
9	7	6	12
	14	15	

Obr. 2: tabuľka a)

	16	9	22	
20		21		2
7	25	13	1	19
24		5		6
	4	17	10	

tabuľka b)

Žiaci neboli oboznámení o aké tabuľky sa jedná, aké vlastnosti sú pre ne charakteristické a aké čísla môžu dopĺňať do prázdnych políčok tabuliek. Tabuľky riešili postupne, najprv tabuľku a), potom tabuľku b).

Komentár k riešeniu žiakov:

Žiaci najprv pracovali samostatne a potom nasledovala diskusia, kde každý obhajoval svoje riešenie.

Riešenie prvej tabuľky: Riešenie tejto úlohy možno rozdeliť do troch skupín.

Jedna časť žiakov doplnila čísla nasledujúcim spôsobom. Do prvého stĺpca čísla 1 a 13 (pretože rozdiel $9 - 5 = 4$ a teda každé číslo v 1. stĺpci je o 4 väčšie). Do druhého stĺpca čísla 4 a 16 (rozdiel $12 - 8$ je tiež rovný 4). Niektorí žiaci, ktorí dostali takéto isté riešenie ale odlišným postupom. Čísla do prvého a posledného riadku tabuľky dosadili na základe postupnosti čísel 1, 2, 3, 4 a 13, 14, 15, 16.

1	2	3	4
5	11	10	8
9	7	6	12
13	14	15	16

Druhá skupina žiakov si uvedomila, že súčet čísel v 2. a 3. riadku a v 2. a 3. stĺpci je rovnaký a to 34. Snažili sa do zvyšných políčok dosadiť čísla tak, aby súčet 34 v riadkoch prípadne stĺpcoch bol zachovaný. Avšak do tabuľky dosadili aj čísla väčšie ako 16. Svoje riešenie odôvodňovali tým, že si myslia, že také číslo tam môžu dosadiť a nevidia dôvod prečo nie.

19	2	3	10
5	11	10	8
9	7	6	12
1	14	15	4

Tretia skupina žiakov si pri dosadzovaní čísel všimla aj súčet na diagonále. Do tabuľky dosadzovali čísla od 1 po 16, tak aby sa neopakovali a aby súčet v každom riadku, stĺpci a na diagonálach sa rovnal 34. Títo žiaci už v súvislosti s riešením tejto úlohy vyslovili slovné spojenie magický štvorec.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Riešenie druhej tabuľky bolo pre žiakov, ktorí riešili prvú tabuľku 1. spôsobom náročné a nevedeli doplniť čísla. Ostatní žiaci, ktorí už pri riešení prvej tabuľky zachovávali súčet v riadkoch, stĺpcoch a na diagonálach po nejakom čase doplnili voľné políčka tabuľky.

Po vyriešení tejto úlohy bola žiakom zadaná ďalšia úloha. Definícia magického štvorca ale zatiaľ ešte nebola vyslovená.

Úloha 2: Zostrojte magický štvorec 3

2	7	6
9	5	1
4	3	8

$\times 3$.

Komentár k riešeniu žiakov:

Žiaci opäť aj túto úlohu riešili najprv samostatne. Potom sme na tabuľku napísali niekoľko žiackych riešení tejto úlohy a nasledovala diskusia o správnosti jednotlivých riešení. Niektoré riešenia sú uvedené na obr. 3.

1	4	1
2	2	2
3	0	3

Obr. 3. a)

3	8	7
10	5	3
6	4	8

b)

c)

4	9	8
11	7	3
6	5	10

d)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

e)

Všetci žiaci sa pri riešení tejto úlohy snažili splniť podmienku rovnakého súčtu v riadkoch a stĺpcoch tabuľky. Riešenia sa však odlišujú číslami, ktoré dosadili do tabuľky. Niektorí dosadzovali aj čísla väčšie ako 9 (viď. obr. b., d.) alebo sa čísla v tabuľke opakovali (viď. obr. a., b.). Väčšina žiakov však pri riešení tejto úlohy nesledovala zachovanie rovnakého súčtu na diagonálach.

Z uvedených riešení žiaci potom spoločne vybrali správne riešenie úlohy, teda magický štvorec. Niektorí žiaci už vedeli, že magický štvorec 3 x 3 musí obsahovať čísla od 1 po 9 a že súčet čísel v riadkoch, stĺpcoch a na diagonálach musí byť rovnaký. Za správne riešenia tejto úlohy považovali riešenia c) a e). Pri týchto riešeniach si všimli, že číslo 5 je v strede tabuľky.

Po vyriešení tejto úlohy sme si spoločne definovali pojem magického štvorca.

Definícia: *Magický štvorec rádu n* je štvorcová tabuľka, ktorá sa skladá z n^2 políčok, v ktorých sú umiestnené čísla 1, 2, ..., n^2 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký.

Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva *magické číslo*.

Úloha 3: *Kolko je magických štvorcov rádu 3?*

Riešenie žiakov:

Riešenie tejto úlohy nie je náročné, napriek tomu sa nepodarilo všetkým žiakom nájsť všetkých 8 možností. Väčšina žiakov hneď na úvod zistila, že súčet čísel v riadku, stĺpci a na diagonálach musí byť 15. (Súčet $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ a $45 : 3 = 15$.) Potom úlohu riešili len vypisovaním jednotlivých magických štvorcov a nie hľadaním súvislostí. Iba dvom žiakom sa podarilo nájsť všetkých 8 možností. Pri riešení si uvedomili, že číslo 5 musí byť v strede štvorca a na krajoch diagonál čísla 2, 4, 6, 8.

Úloha 4: *Môžu mať dva rôzne magické štvorce rovnakého rádu rôzne magické čísla?*

Riešenie žiakov:

Reakcie žiakov boli rôzne. Jedna skupina žiakov tvrdila, že môžu mať rôzne magické čísla, druhá skupina tvrdila, že musia mať rovnaké (hlavne to boli tí, ktorí si dobre uvedomili, pri riešení úlohy magické číslo je 15.). Preto sme žiakom predložili niekoľko magických štvorcov rádu 4 (viď. obr. 4). Magické číslo pre tieto štvorce určil každý žiak samostatne. Po vyriešení tohto medzi kroku sformulovali hypotézu, ktorú mali dokázať.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Obr. 4. a)

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

b) Diabolský magický štvorec

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	14	15	1

c) Dürerov magický štvorec

Pozn.: Diabolský magický štvorec bol objavený v Indii okolo roku 1 000.

Dürerov magický štvorec sa nachádza na drevoryte „Melancholia I“, ktorý vytvoril v roku 1514 známy nemecký maliar Albrecht Dürer

Hypotéza: **Tvrdenie** - *Ak magický štvorec M_1 a magický štvorec M_2 sú rovnakého rádu, tak majú rovnaké magické číslo. - je pravdivé.*

S overením pravdivosti tejto hypotézy mali žiaci problémy. Niektorí overovali pravdivosť pre magický štvorec rádu 3, vychádzajúc z riešenia úlohy 3. Ostatní nevedeli odôvodniť pravdivosť tejto hypotézy.

Preto sme sa snažili na tabuli ukázať dôkaz tvrdenia pre magický štvorec rádu n , nadväzujúc na riešenie žiakov pre magický štvorec rádu 3.

Predpokladajme, že existujú dva rôzne magické štvorce rádu n , ktoré majú rôzne magické čísla m_1 , a m_2 . Teda súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na diagonálach v prvom štvorci je m_1 a v druhom m_2 . Pre súčet čísel v jednotlivých magických štvorcov platí:

pre prvý magický štvorec: $1 + 2 + 3 + \dots + (n^2 - 2) + (n^2 - 1) + n^2 = n \cdot m_1$,

pre druhý magický štvorec: $1 + 2 + 3 + \dots + (n^2 - 2) + (n^2 - 1) + n^2 = n \cdot m_2$.

Keďže ľavé strany sa rovnajú z toho vyplýva $n \cdot m_1 = n \cdot m_2$, čo ale znamená že $m_1 = m_2$. Dospeli sme teda k sporu s predpokladom a k potvrdeniu hypotézy. Tvrdenie T je pravdivé a rôzne magické štvorce rovnakého rádu majú rovnaké magické čísla.

Po vyriešení týchto úloh sme sa vrátili k nadprirodzenej korytnačke zo starej čínskej legendy. Žiaci si opäť prezreli obrázok panciera korytnačky a objavili tam magický štvorec rádu 3 s magickým číslom 15. Toto číslo vyjadruje počet obetí, ktoré mali starí Číňania priniesť riečnemu bôžikovi na uzmiernenie.

Záver

Na záver práce konštatujeme, že v argumentačnom myslení žiakov absentuje úroveň lokálneho dôkazu a veľmi náročné je pre nich urobiť axiomatický dôkaz. Žiaci často odôvodnenie svojej argumentácie vykonávajú pomocou konkrétnych príkladov alebo predmetným reprezentantom. Veľmi ťažko u nich dochádza k zdvihu argumentačného myslenia.

Použitá literatúra:

[1] PAVLÍKOVÁ, K.: *Magické štvorce a kocky v škole*. Diplomová práca, PF UPJŠ, Košice 2001 (<http://magic.webpark.sk>)

[2] SEMANIŠINOVÁ, I.; TRENKLER, M.: *O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách (On a divine turtle, magic squares and cubes)*. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 4/2000(29), 21-34

[3] SEMANIŠINOVÁ, I.; TRENKLER, M.: *Magické štvorce ako predmet matematického skúmania*. *MIF Košice*, 26(december 2005), 14.ročník, 119-125

[4] TRENKLER, M.: *Magické štvorce a kocky - zdroj námetov na vyučovanie matematiky*. *Disputationes Scientifcae Universitatis Catholicae* 2(2002), č.1, 88-94

Adresa autora:

PaedDr. Anna Medvecká
Gymnázium sv. T. Akvinského
Zbrojničná 3
040 01 Košice
e-mail: anna.medveck@gmail.com