Refleksje na temat zadań probabilistycznych formułowanych przez studentów III roku matematyki

Maciej Major

Abstract. *This paper presents some remarks on understanding of probability by III year students before their starting learn theory of probability.*

Od roku 1995 prowadzę badania nad wiedzą probabilistyczną osób studiujących na kierunku matematyka. Badania te prowdzone są na szerokiej populacji studentów (około 250 osób z pięciu roczników studiów z kilku uczelni pedagogicznych). Wyniki badań były wielokrotnie publikowane w różnych czasopismach naukowych.

W roku 2005 rozpocząłem nowy cykl badań dotyczących stanu wiedzy probabilistycznej studentów matematyki sekcji nauczycielskich. Badania prowadzone są wśród studentów III roku matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie przed rozpoczęciem kursu rachunku prawdopodobieństwa. Badaniu poddanych zostało 37 studentów, którzy otrzymali do wypełnienia kwestionariusz badań, w którym sformułowano 8 pytań i zadań. W pracach [2] oraz [3] zawarto wyniki uzyskane dla pierwszych siedmiu pytań kwestionariusza badań.

Dotychczasowe badania pokazały, że studenci III roku matematyki przed rozpoczęciem wykładu z rachunku prawdopodobienstwa posiadają ubogą wiedzę w zakresie tego przedmiotu. Związki z innymi pojęciami, jakie dostrzegają, ograniczają się w istocie do potocznego rozumienia pojęcia prawdopodobieństwa, gier losowych oraz pojęć kombinatorcznych.

Badania ujawniły również, że pojęcie prawdopodobieństwa postrzegane jest przez większość badanych studentów przez pryzmat zadań jakie rozwiązywali oni w trakcie nauki w szkole średniej, a które w przeważającej większości dotyczą prawdopodobieństwa klasycznego. Wielu studentów rozpoczynających kurs rachunku prawdopodobieństwa rozwiązywanie zadań wiąże nierozerwalnie z obliczaniem mocy zbioru Ω.

W tym artykule zaprezentuję i omówię odpowiedzi studentów odnoszące się do ostatniego, ósmego, pytania kwestionariusza badań, które brzmiało:

Podaj przykłady 3 zadań (problemów), w których występuje pojęcie prawdopodobieństwa oraz przedstaw schematyczny plan rozwiązania tych zadań.

Odpowiedzi na to pytanie pozwalają na stwierdzenie z jakimi zadaniami studenci spotykali się najczęściej w szkole oraz informują jak były one rozwiązywane, a także dopełniają informacje uzyskane w wyniku analizy odpowiedzi na pytania 1-7 kwestionariusza badań.

Wszyscy studenci podjęli próby odpowiedzi na to pytanie. Niestety, tylko kilka osób odpowiedziało na nie w sposób wyczerpujący, tzn. sformułowało trzy zadania (problemy) i podało szkic ich rozwiązania. Najczęściej studenci formułowali tylko dwa zadania. W sumie sformułowano 85 zadań i problemów. W prawie połowie przypadków zabrakło jakichkolwiek informacji na temat sposobu rozwiązania danego zadania. Zaproponowane zadania dają się podzielić na 6 grup.

I. Najwięcej zadań (33 zadania) dotyczyło obliczania prawdopdobieństw zdarzeń związanych z prostymi schematami urnowymi. Istotę tych zadań ilustrują następujące przykłady zaczerpnięte z kwestionariuszy.

– *W urnie znajdują się dwie kule. Jedna czarna i jedna biała. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.*

– *W urnie jest 5 kul białych i 4 czerwone. Losujemy dwie kule naraz. Jakie jest prawdopodobieństwo że obydwie kule będą czerwone?*

– *W urnie są 3 kule niebieskie, jedna zielona i jedna czerwona. Z tej urny losujemy jedną kulę, odkladamy na bok i losujemy kolejną. Oblicz prawdopodobienstwo, że wśród wylosowanych kul będzie kula czerwona.*

– *W urnie znajduje się 5 kul: 3 białe, jedna czarna i jedna niebieska. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwu kul białych jeśli losujemy po jednej kuli ze zwracaniem?*

Niestety nie wszystkie zadania były poprawnie sformułowane. Zawierały one tylko pewne hasła związane z pojęciami rachunku prawdopodobieństwa, w zadaniach nie formułowano pytań ani poleceń. Kilku studentów ograniczyło się tylko do stwierdzeń typu:

– *losowanie kul ze zwracaniem,*

– *losowanie kul bez zwracania.*

W niektórych sformułowaniach zadań nie jest jasne czy chodzi o losowanie ze zwracaniem, czy też bez zwracania. W kilku przypadkach trudno jest jednoznacznie zinterpretować co autor zadania chcial wyraziić, gdyż w treści zadań zawarto sprzeczność, bądź też treść pozbawiona jest logicznego sensu np:

– *W pojemniku jest 10 kul czarnych, 5 kul szarych i 22 kule białe. Losujemy tak długo aż nie wyciągniemy białej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy białą kulę?*

– *W trzech skrzyniach są białe i czarne kule (po 10 kul w każdej). W pierwszej 6 czarnych, w drugiej 4 czarne a w trzeciej 2 białe. Jakie jest prawdopodobienstwo wylosowania kuli białej jeśli osoba losuje tylko jeden raz.*

– *Jakie masz szanse, że wyciągając z szuflady, w której jest 5 kul czarnych i jedna biała, kolejno kule wyciągniesz kulę białą.*

W przypadku zadań, w których mowa jest o jednokrotnym losowaniu kuli z urny, jako metodę rozwiązania wskazywano wzór na prawdopodobieństwo klasyczne. W przypadku, gdy z urny losowane były dwie (trzy) kule jednocześnie proponowano poszukiwać rozwiązania zadania bądź za pomocą drzewa stochastycznego (w istocie zasytępując losowanie dwu kul dwukrotnym losowaniem kuli z urny), bądź za pomocą kombinatorycznych wzorów (wyznaczając liczby kombinacji, wariacji). Natomiast w przypadku doświadczeń wieloetapowych narzędziem znajdywania rozwiązania najczęściej było drzewo stochastyczne.

II. Tematyka drugiej grupy zadań (18 zadań) związana jest z rzutem kostką sześcienną do gry. Istotę tych zadań ilustrują poniższe przykłady zaczerpnięte z prac studentów.

– *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką do gry wypadnie szóstka?*

– *Rzucamy dwiema kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy w sumie 7 oczek?*

– *Rzucamy 2 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia pięciu oczek za każdym razem?*

– *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie trzema kostkami wypadną dwie szóstki?*

– *Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej trzech szóstek w dziewięciu rzutach kostką do gry?*

– *Rzucamy czterokrotnie kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie jedno oczko w ciągu tych rzutów.*

Tylko kilka osób zamieszcza skromne wskazówki jak rozwiązać proponowane zadania. Sprowadzają się one do stwierdzeń: „skonstuować tabelkę" (dla rzutu dwoma kostkami), „wykorzystać drzewo stochastyczne" (w przypadku dwukrotnego rzutu kostką). Kilka osób wskazuje jedynie część wyników jakie sprzyjają zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo należy obliczyć. Większoś studentów, którzy formułowali tego typu zadania, nie pisze nic na temat metody ich rozwiązania.

III. Tematyka trzeciej grupy zadań (16 zadań) związana jest z rzutem monetą. Poniższe przykłady, zaczerpnięte z prac studentów, ilustrują istotę tych zadań.

– *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie monetą wypadnie reszka?*

– *Rzucamy dwiema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch reszek?*

– *Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania 4 reszek w ośmiokrotnym rzucie monetą?*

– *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w 100 rzutach monetą wypadnie reszka?*

Niektóre sformułowania zadań dotyczących rzutu monetą nie są precyzyjne np:

– *Ile razy w 5 rzutach monetą otrzymamy reszkę?*

– *Ile razy w dwu rzutach monetą wypadnie orzeł?*

Podobnie, jak miało to miejsce w przypadku zadań dotczących rzutu kostką do gry, tylko kilka osób zamieszcza skromne wskazówki na temat metod rozwiązania zadań. Ograniczają się one bądź do uwagi, że można skonstruować drzewo stochastyczne, bądź do kostrukcji fragmentu drzewa stochastycznego prezentującego wyniki sprzyjające zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo należy obliczyć.

IV. Siedem zadań dotyczy losowania karty z talii kart. Poniższe przykłady ilustrują tematykę tych zadań.

– *Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia asa z talii kart?*

– *Z talii kart losujemy trzy karty. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dziewiątki karo?*

Dwie osoby nie podają żadnych wskazówek odnośnie rozwiązania zadania, a pozostali wskazują jako narzędzie rozwiązania drzewo stochastyczne (w przypadku losowania dwu, trzech kart), bądź twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym.

V. Sześć zadań dotyczy prawdopodobieństwa trafienia „szóstki" w Lotto. Trzy osoby proponują obliczyć szukane prawdopodobieństwo stosując wzór na liczbę kombinacji oraz twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym, trzy kolejne nie podają żadnych uwag na temat rozwiązania zadania.

VI. Pięciu studentów sformułowało zadania dotyczące loterii.

– *Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania nagrody, jeśli jest 5105 losów, w których 5 jest pustych a reszta z nagrodami, jeśli kupujesz jeden los?*

– *Na loterii jest 50 losów w tym 4 losy wygrywające. Jakie jest prawdopodobienstwo, że kupując jeeden los wygramy?*

– *W urnie jest 20 losów wygrywających i 30 przegrywających. Ciągniemy trzy losy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że conajmniej dwa z nich wygrywają?*

Osoby proponujące powyższe zadania jako metodę rozwiązania wskazywali drzewo stochastyczne jako środek służący znalezieniu odpowiedzi na sformułowane pytanie.

Przeprowadzone badania potwierdziły, że prawdopodobieństwo postrzegane jest przez studentów przez pryzmat zadań jakie rozwiązywali w trakcie nauki w szkole. Większość rozwiązywanych w szkole zadań dotyczy bowiem prawdopodobieństwa klasycznego. W rozwiązaniach tych zadań duży nacisk kładzie się na kombinatorykę. Obliczanie mocy zbiorów z zastosowaniem wzorów na liczbę permutacji, wariacji, kombinacji stanowi większą część rozwiązania zadania i jest główną trudnością w uzyskaniu poprawnego rozwiązania.

Wielu studentów zadania z rachunku prawdopodobieństwa wiąże nierozerwalnie z obliczaniem mocy zbioru Ω oraz z wyznaczaniem mocy pewnych zdarzeń.

Treść proponowanych zadań ma niewiele wspólnego z codziennym życiem. Zadania formułowane są w najczęściej w języku typowych prostych schematów urnowych, a więc w procesie ich rozwiązywania nie ma miejsca na fazę matematematyzacji (przekład pozamatematycznej sytuacji na język matematyki) oraz na fazę interpretacji.

Rozważane sytuacje są „czysto matematyczne", a praca nad rozwiązaniem tak sformułowanych problemów nie pogłębia wiedzy rozwiązującego o otaczającym go świecie.

Wśród proponowanych zadasń brak jest takich, których rozwiązywanie jest ilustracją procesu stosowania matematyki, nie wystąpują tu też zagadnienia związane z procesem podejmowania decyzji w sytuacjach niepewnoci i warunkach ryzyka.

Jednostronne postrzeganie poję stochastyki może być źródłem błędów i trudności na dalszym etapie kształcenia w zakresie rachunku prawdopodobieństwa.

Zaobserwowane prawidłowości mogą być wskazówką do konieczności wielostronnego kształtowania i ciągłego pogłębiania w trakcie nauki w szkole pojęć rachunku prawdopodobieństwa.

Literatura

[1] D. Brydak (red.), *Resortowy Program Badań Podstawowych RP. III.30. V1: Diagnoza skuteczności kształcenia nauczycieli matematyki (synteza badań za lata 1986-1990 oraz przykładowe opracowania pod redakcją Dobiesława Brydaka)*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej, Kraków, 1990.

[2] M. Major, *Uwagi na temat wiedzy studentów III roku matematyki w zakresie szkolnych treści rachunku prawdopodobieństwa*, w: Matematika v škole dnes a zajtra, Zborník 6. ročnika konferencie s medzianárodnou účast'ou, Ružomberok 2006, 176-180.

[3] M. Major, *Vedomosti študentov 3. ročníka matematiky v oblasti elementárnych školských úloh z počtu pravdepodobnosti*, w: Matematika v škole dnes a zajtra, Zborník 7. ročnika konferencie s medzianárodnou účast'ou, Ružomberok 2007, 201-205.

[4] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała, 1997.

Adresa autora:
Maciej Major, dr
Akademia Pedagogiczna
Instytut Matematyki
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: mmajor@ap.krakow.pl