Univerzálny model niektorých pojmov kombinatoriky.

Tatiana Evans
Ján Kuruc

Universal model for some terms in combinatorics.

Abstract
This article is concerned with sharing experiences of teaching the basic terms of combinatorics to students, over 12 years of age, using the constructivist approach.
Introduction - Story about the history of the fifth Euclidian axiom, which led to the start of new geometry.
Using the model of 'ball' geometry as the basis of the universal model for experimenting and experiencing basic skills for understanding combinatorics terms such as:
permutations, permutations with repetition, combinatorics number, factorial, Pascal's triangle, Fibonaccio's sequence and other properties of combinatorics numbers.

Keywords: Education, Constructivism, 'ball' geometry, Factorial, Permutation, Combinatorics number, Pascal's triangle.

Abstrakt.
Skúsenosti z konštruktivistického prístupu k vyučovaniu žiakov starších ako 12 rokov pri vyučovaní základných pojmov z kombinatoriky. Motivácia – rozprávanie o histórii príbehu piatej euklidovej axiómy, ktorá viedla ku vzniku dalších geometrií. Model guličkovej geometrie ako základ univerzálneho modelu pre ezperimentovanie a získavanie základných skúseností na zvnútorňovanie pojmov z kombinatoriky ako permutácie, permutácie s opakovaním, kombinačné číslo, faktoriál, Pascalova tabuľka, Fibonacciho postupnosť a rôzne ďalšie vlastnosti kombinačných čísel.

Kľúčové slová.
Vyučovanie. Konštruktivizmus. Guličková geometria. Faktoriál. Permutácie. Kombinačné číslo. Pascalov trojuholník.

MESS: K20

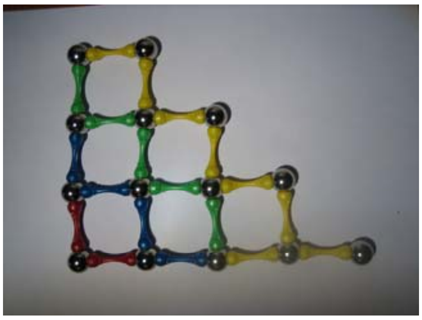
Úvod.

Kombinatorika nachádza čoraz väčšie uplatnenie v praxi. Súčasne narastá tlak na jej zavedenie do školského vyučovania už od najnižších ročníkov. Môžeme to chápať jednak tak, že je dobré mať poznatky z tejto vednej disciplíny a tiež , že svojou štruktúrou sa kombinatorika môže využívať na rozvoj myslenia žiakov. Bolo by ideálne spĺňať obidve požiadavky. Často sme však svedkami toho, že toto učivo je zaraďované chaoticky a bez dobrého metodického spracovania. Pokiaľ je to v úrovni transmisívneho vyučovania, učivo je často predkladané len v najvyššej abstrakčnej podobe vo forme vzorcov. Potom je u žiakov opreté len o pamäťové schopnosti a nie príčinné myslenie. Učivo je zvládnuté len formálne bez možnosti využitia jeho aplikácií.
V našom príspevku si nekladieme za cieľ urobiť komplexné metodické spracovanie tohto celku, ktoré je pomerne veľmi široké. Autori chcú ukázať na jednom z možných netradičných modelov konštruktivistický prístup na zvnútornenie niektorých pojmov z kombinatoriky.
Každý poznávací proces začína vhodnou motiváciou. Pri dvanásťročných a starších žiakoch sa nám osvedčilo rozprávanie príbehu o piatej euklidovej axióme, ktorý trval takmer dvetisíc rokov a vyvrcholil vznikom nových geometrií. (Príbeh uvádzame ako prílohu tohto článku.)

Na zvnútornenie a objavovanie je potrebné mať dostatok vhodných modelov, na ktorých žiaci experimentujú, hľadajú súvislosti niekedy zdanlivo nesúvisiacich javov, ktoré často majú spoločné len abstrakčné črty. Na plnohodnotné poznávanie, na to, aby prišlo k abstrakčnému zdvihu, k poznaniu u jednotlivca, môže byť počet jednotlivých modelov veľmi rôzny. Kým u niekoho stačí niekoľko konkrétnych a mnoho univerzálnych modelov, u iného to môže byť naopak.
Platí tu však zákon premeny kvantity na kvalitu. Množstvo, kedy kvantita sa mení na novú kvalitu môže posúdiť vyučujúci a on by mal rozhodnúť o ďalšom usmernení žiakov.
V tomto príspevku chceme ponúknuť jeden z mnohých vhodných modelov pre vyučovanie kombinatoriky, presnejšie, pre pochopenie niektorých jej základných pojmov.

Guličková geometria.

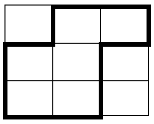
Je to netradičný geometrický model.
Pojem geometrie najčastejšie spájame s predstavou euklidovej geometrie. Náš model má s ňou spoločných len niekoľko základných pojmov, ale ich predstavy sú celkom odlišné.
Na reálnu predstavu sme použili detskú magnetickú stavebnicu. Obrázok č.1.



Obr.1.
Základným geometrickým pojmom je bod. V našej geometrii ho budeme chápať ako útvar konkrétny s určitou veľkosťou, ktorý je síce najmenší, no predsa reálny. Jeho predstavou je oceľová nemagnetická gulička. Pretože sa útvary budú skladať z takýchto bodov – guličiek, aj geometriu sme nazvali guličkovou geometriou.
Vzdialenosť medzi dvoma susednými guličkami na našom modeli bude vždy rovnaká a predstavovať ju budú malé tyčové magnetky spájajúce guličky. Veľkosť každej takejto vzdialenosti považujeme za najmenšiu jednotku vzdialenosti. Každú inú vzdialenosť môžeme vyjadrovať len v jej celočíselných násobkoch. Iné číselné vyjadrenia vzdialenosti nebudú prípustné.
V euklidovej geometrii môžeme medzi dva ľubovoľne blízke body vložiť nekonečne mnoho ďalších, ktoré budú ležať na ich najkratšej spojnici. Je to preto, že body chápeme ako geometrické útvary, ktoré nemajú žiadne rozmery. Tieto môžeme iba označovať, modelovať, či menovať. Iné to bude v našej geometrii. Medzi dva susedné body – guličky už nebudeme môcť vložiť žiadny iný bod – guličku.
Priamka je množina všetkých bodov, ktoré spĺňajú dve podmienky:
1./ vzdialenosť každého bodu od susedného je práve jednotková,
2./ každý bod priamky má od dvoch daných bodov neležiacich na priamke rovnakú vzdialenosť.
Priamky majú len dva možné smery. Jeden môže byť zvislý a druhý vodorovný.
Tento konkrétny model môžeme si zjednodušiť vyššou abstrakciou univerzálnym modelom na štvorcovej sieti. Na nej budú len mrežové body pospájané jednotkami vzdialenosti. Pohyb mimo bodov a jednotiek vzdialenosti nebude možný. Je to ako nejaké potrubie spájajúce uzly a my sa môžeme pohybovať len vo vnútri neho.

Vzdialenosť medzi dvoma rôznymi bodmi budeme volať polomer. Polomer danej veľkosti môže mať viac tvarov. Bude to závisieť od zloženia jednotiek vzdialeností.
Na obrázku číslo 2. sú zobrazené medzi bodmi A,B dva tvary jedného polomeru veľkosti 6.

B

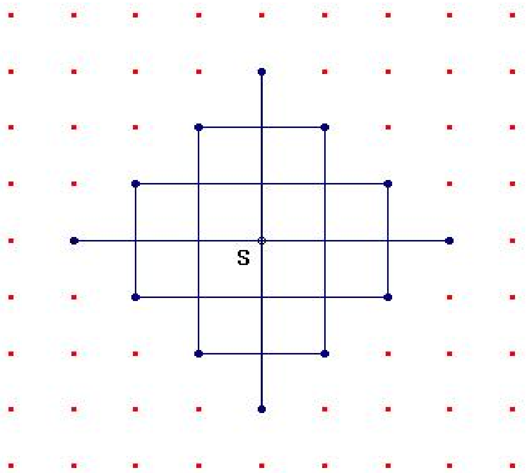


A
Obrázok č.2.

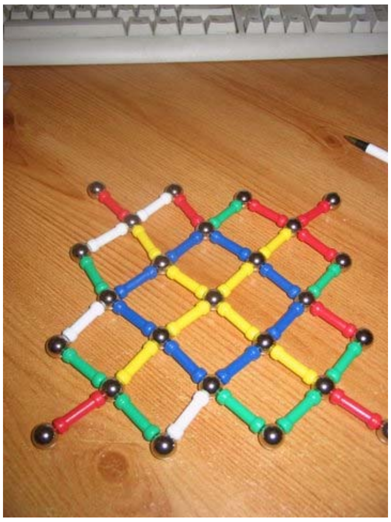
Postupovať budeme metódou experimentu a poznatky budeme získavať induktívnym zovšeobecňovaním.

Práca v dvojrozmernej rovine na pochopenie základných zavedených pojmov.

Dva rôzne susedné body - guličky, ktoré majú vzdialenosť jednej jednotky vzdialenosti (polomeru), môžu mať tento polomer v dvoch možných tvaroch. Môže to byť vodorovný alebo zvislý smer, ak mrežové priamky majú tento smer — | .
Body ležiace na tej istej priamke vytvárajú úsečky, ktoré sa skladajú z konečného počtu bodov. Dva rôzne body, ktoré neležia na tej istej mrežovej priamke, majú viac rovnakých najkratších vzdialeností, ktoré sa líšia len tvarom a voláme ich polomer.
Nasledujúcu úlohu je potrebné pochopiť, nakoľko budeme s pojmom kružnice pracovať v našom modeli.
Kružnica je množina bodov v rovine, ktorej každý bod má od stredu rovnakú vzdialenosť.
Príklad: Zostrojte kružnicu s polomerom 3 jednotky dĺžky.



Táto kružnica má 12 bodov.
Úloha: Narysujte kruh s polomerom 3. Určte počet jej bodov.
Úloha: Narysujte sústredné kružnice s polomerom 4 a 5.
Ako súvisí počet bodov kružnice a veľkosť jej polomeru?



Obrázok 3.

Na obrázku 3. je vymodelovaný kruh s polomerom 3.

Naša úloha bude všímať si tvarov polomerov jednotlivých guličiek - bodov. Niektoré polomery majú síce rovnakú veľkosť no majú viac rôznych tvarov. Tieto tvary môžeme získavať tak, že s počiatku prekladáme len jednotky vzdialenosti, ktorými sú tyčové magnetky, neskôr prejdeme na kreslenie zvislých a vodorovných čiarok hlavne vtedy, keď sme obmedzený počtom magnetiek.

Zavedenie súradníc.

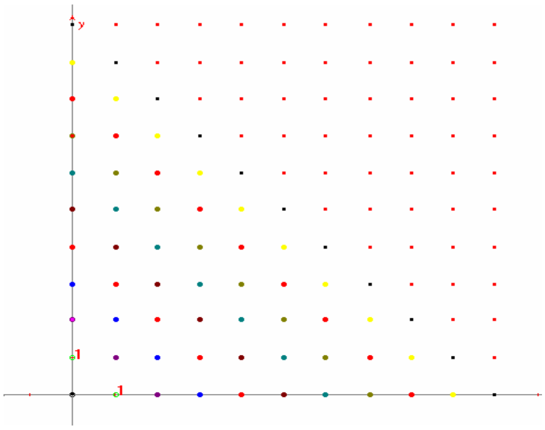
Práca v sektore kladných čísel – v prvom kvadrante a hľadanie súvislostí.

Našu prácu obmedzíme na sektor kladných čísel, ktorý sa síce podobá na prvý kvadrant, no odlišuje sa od neho. Vysvetlenie nechám na žiakoch. So zápornými číslami nebudeme pracovať.
Každej guličke pridelíme dvojicu čísel, súradníc.

:							
06	16	26	36	46	56	66	
05	15	25	35	45	55	65	
04	14	24	34	44	54	64	
03	13	23	33	43	53	63	
02	12	22	32	42	52	62	
01	11	21	31	41	51	61	
00	10	20	30	40	50	60	· ·

Sektor kladných čísel.

Body-guličky budeme volať podľa súradníc tak, ako sú napísané v sektore celých kladných čísel. Počiatok sektora bude gulička s názvom 00.
Tento bod bude stredom všetkých sústredných kružníc, presnejšie ich častí s danými polomermi. V tomto sektore to budú častí kružníc, ktoré majú o jeden bod viac ako štvrťkružnica.



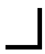
Na obrázku sú farebne zobrazené časti kružníc s príslušným polomerom-

a./ **Začneme časťou kružnice v sektore, ktorej polomer je 0.** Stredom tejto časti kružnice je samotný bod 00 a jemu pridelíme jeden polomer aj keď s veľkosťou takmer nulovou. Túto úvahu môžeme zaviesť neskôr. Nebudeme ju zatiaľ vysvetľovať.

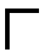
b./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 1**. Táto má dva body 10 a 01. Každý z nich má od počiatku vzdialenosť 1. Polomer prvého bodu 10 má jeden polomer tvaru — a bod 01 má tiež jeden polomer tvaru |. Celkove sú teda dva body a každý jeho polomer je iného tvaru.

c./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 2**. Má dva body 20 a 02 a jeden bod 11. Bod 20 má jeden polomer vodorovného smeru dĺžky 2, tvaru — —. Bod 02 má jeden polomer zvislého smeru tiež dĺžky dva ale zvislého tvaru | |.

Bod 11 má polomer dĺžky dva avšak každý iného tvaru. Prvý má tvar:



Druhý má tvar:



Celkove počet bodov časti kružnice v sektore čísel s polomerom 2 sú **tri** a majú spolu **4** rôzne tvary polomeru. Robíme pomocou magnetických tyčiek.

d./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 3.**

Budeme si pomáhať obrázkom, alebo magnetickými tyčkami.

1./ Body 30 a 03 môžeme skúmať naraz. Ich počet ľahko získame premiestnením čísel 3 a 0. Každý bod má práve jeden tvar polomeru. Jeden vodorovný a druhý zvislý. Stručný zápis:

30 ... P2 = 2 Počet premiestnení dvoch prvkov (čísel 3 a 0) je dva.

Každý bod má jeden tvar polomeru v ktorom sa jeden prvok skladá z troch prvkov a každý sa opakuje tri krát.

— — — alebo | | | .

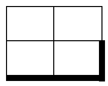
Zápis môžeme pre stručnosť doplniť

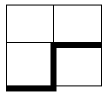
30 … P2 . $P_3(3)$ = 2.1 = 2

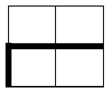
2./ Podobne ako v predchádzajúcom bode body 21 a 12 budeme skúmať naraz. Ich počet určíme premiestnením dvoch prvkov.

21 ... P2 = 2

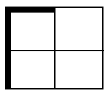
Každý z nich má tri tvary polomeru. Začneme s obrázkom bodu 21:

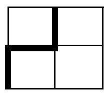


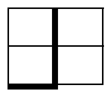




Podobne to bude s bodom 12:







Jednoduchšie pomocou obrázka určíme ich počet premiestnením vodorovných a zvislých magnetických tyčiek.
— — | , — | — , | — —   Počet je ten istý ak vymeníme vodorovné za zvislé: | | — , | — | , — | | .

Robíme vlastne premiestňovanie troch prvkov pričom sa jeden opakuje dva krát. Ten jeden môže zaujať tri rôzne pozície a preto počet premiestnení je tri. Neprezrádzame žiakom postup riešenia.

Stručný zápis:
21 ... $P2.P_2 3 = 2.3 = 6$
Čítame: Body so súradnicami 2, 1: počet bodov získame premiestnením dvoch čísel 2 a 1 krát počet polomerov: ich počet je premiestnenie troch prvkov, pričom dva z nich sa opakujú.

Celkove konštatujeme, že počet bodov časti kružnice s polomerom tri je **3** a počet všetkých tvarov ich polomeru je **8**.

e./ Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 4.
Túto časť kružnice tvoria body, ktorých súčet súradníc dáva číslo 4. Je to poznatok, na ktorý žiaci prídu veľmi rýchlo. Počet premiestnení čísel im nebude robiť problémy. Trochu horšie je to s počtom tvarov polomerov. Tam si pomáhajú obrázkom, alebo v inom prípade premiestňovaním magnetických tyčiek.
40 ... $P2 . P4 = 2 . 1 = 2$
31 ... $P2 . P_3 4 = 2 . 4 = 8$
22 ... $P_2 2 . P_{22} 4 = 1 . 6 = 6$ P_{22} 4 znamená, že budeme premiestňovať štyri prvky pričom dva a dva sa budú dvakrát
opakovať.

Premiestňovanie jednotiek vzdialeností môže vyzerať nasledovne:
— — | |
— | — |

— | | —
| | — —
| — | —
| — — |

(Môže to byť premiestnenie druhej vodorovnej tyčky na troch pozíciách a premiestnenie druhej zvislej tyčky tiež na troch pozíciách.)

Celkove počet bodov je **5** a počet tvarov polomeru je **16**.

f./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 5.**

Stručný zápis:

50 ... $P2 . P_{5}5 = 2 . 1 = 2$
41 ... $P2 . P_{4}5 = 2 . 5 = 10$
32 ... $P2 . P_{23}5 = 2 . 10 = 20$

Riešenie robíme pomocou premiestňovania. Postupov môže byť viac. Najlepší je ten, ktorý má už nejakú stratégiu.

Najčastejšie je to premiestňovaním vodorovných a zvislých čiarok. Niektorí prídu na to, že to súvisí s predchádzajúcim riešením.

Riešenie zapísané vyššie je potrebné robiť podľa obrázka a zapisovať premiestňovanie. Premiestňovanie čísel súradníc bodov nebude robiť problém.

Počet bodov **6**.

Počet tvarov polomeru **32**.

Ťažko na cvičisku, ľahko na bojisku. Žiaci zatiaľ ešte nevidia súvislosti a robia premiestňovaním čiarok.

g./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 6.**

60 ...	$P2 . P_{6}6 =$	$2 . 1 =$	2
51 ...	$P2 . P_{5}6 =$	$2 . 6 =$	12
42 ...	$P2 . P_{24}6 =$	$2 . 15 =$	30
33 ...	$P_{2}2 . P_{33}6 =$	$1 . 20 =$	20
Spolu bodov	**7**	tvarov r	**64**

Najlepšie riešenie je to, ktoré sa opiera o predchádzajúce riešenie.

h./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 7.**

70 ...	$P2 . P_{7}7 =$	$2 . 1 =$	2
61 ...	$P2 . P_{16}7 =$	$2. 7 =$	14
52 ...	$P2 . P_{25}7 =$	$2 . 21 =$	42
43 ...	$P2 . P_{34}7 =$	$2. 35 =$	70
Spolu bodov	**8**	tvarov r	**128**

i./ **Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 8.**

80 ...	$P2 . P_{8}8 =$	$2 . 1 =$	2
71 ...	$P2 . P_{17}8 =$	$2 . 8 =$	16
62 ...	$P2 . P_{26}8 =$	$2 . 28 =$	56
53 ...	$P2 . P_{35}8 =$	$2 . 56 =$	112
44 ...	$P_{2}2 . P_{44}8 =$	$1 . 70 =$	70
Spolu bodov	**9**	tvarov r	**256**

j./ Časť kružnice v sektore, ktorej polomer je 9.

90 ... $P2 . P_{9}9$ = 2 . 1 = 2
81 ... $P2 . P_{18}9$ = 2 . 9 = 18
72 ... $P2 . P_{27}9$ = 2 . 36 = 72
63 ... $P2 . P_{36}9$ = 2 . 84 = 168
54 ... $P2 . P_{45}9$ = 2 . 126 = 252

Spolu bodov **10** tvarov r **512**

Takto môžeme pokračovať. Dokedy, o tom rozhodne učiteľ na základe pozorovania žiakov. Až budú mať dostatočný počet skúseností, budeme pokračovať v trochu vyššej abstrakcii, aj keď ešte stále dosť názornej a bude to obrázok. On nám bude slúžiť na získanie trochu iných súvislostí a pohľadov na danú problematiku.
Obrázok zhotovíme tak, že na miesto súradníc budeme písať počty polomerov jednotlivých bodov. Začneme od počiatočného bodu.

1 5 15 35 70 126

1 4 10 20 35 56

1 3 6 10 15 21

1 2 3 4 5 6

1 1 1 1 1 1 ...

Obrázok im jasnejšie ukáže to čo tušili prečo je to tak. Prečo sa vlastne takto vytvára počet rôznych tvarov polomerov. Rozlišovať budeme medzi veľkosťou polomeru a jeho tvarom. Množstvo tvarov polomerov bude závisieť od veľkosti polomeru. Sami by mali prísť k poznatku, že množstvo tvarov polomeru určitej veľkosti závisí od počtu polomerov dvoch susedných bodov. V prípade, že na to neprídu, mali by sme nájsť spôsob, ako sa k tomu dopracovať a zistiť príčinu, prečo sa im to nepodarilo. Neskôr podobnú zákonitosť budeme potrebovať.

Po zvládnutí toho obrázka prejdeme ku zapisovaniu vzájomného vzťahu medzi počtom tvarov polomerov jednotlivých bodov a jednou súradnicou. Je to jedno ktorou, lebo obrázok je súmerný.
Z obrázka vidieť že bod - gulička s polomerom 0 má súradnice 00 a práve jeden polomer.
Body s polomerom 1 môžu mať x-ovú súradnicu 0 alebo 1. Každý má jeden tvar polomeru.
Body s polomerom 2 môžu mať x-ovú súradnicu 0, 1, 2. Tvary polomerov majú 1, 2, 1.
Tabuľku urobíme tak že do prvého riadku budeme zapisovať veľkosť polomeru čo je vzdialenosť bodu od počiatku. Do prvého stĺpca x-ovú súradnicu a do poľa tabuľky budeme vpisovať podľa obrázka počty tvarov polomerov.

Tabuľka počtu tvarov polomerov v závislosti od jeho veľkosti a jednej súradnice, pričom platí: r = x + y

x-ová

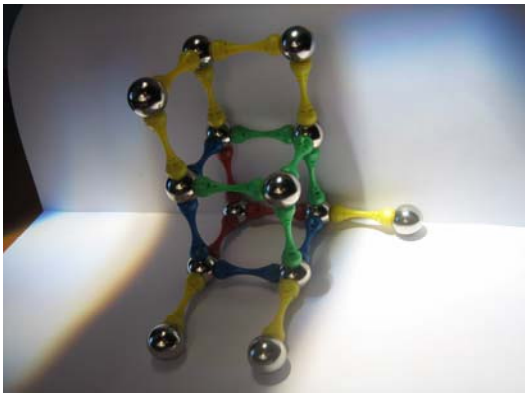
x \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			1	3	6	10	15	21	28	36
3				1	4	10	20	35	56	84
4					1	5	15	35	70	126
5						1	6	21	56	126
6							1	7	28	84

7								1	8	36
8									1	9
9										1

Táto tabuľka je Pascalov trojuholník
Všimneme si Fibonacciho postupnosť: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
Zatiaľ nehovoríme nič o kombinačných číslach.

Zavedenie trojrozmerného priestoru.

V našom bádaní budeme pokračovať v trojrozmernom priestore. Pre vytvorenie dobrej predstavy je potrebné dať žiakom nielen obrázok trojrozmerného priestoru ale aj konkrétne modely kocky. Najlepšie drôtené modely.
Obrázok 4.



Každý bod takéhoto priestoru pomenujeme pomocou troch súradníc x, y, z. Začneme s počiatočným bodom. Všetky body priestoru, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od počiatku vytvárajú guľovú plochu s určitým počtom bodov. Pre naše skúmanie nám bude stačiť priestorový sektor, ktorý sa podobá na prvý oktant, v ktorom všetky súradnice sú kladné. Pohyb od bodu k bodu bude možný len po jednotkách vzdialenosti, ktoré teraz sú možné tri. Vodorovný, zvislý a šikmý. V skutočnosti sú všetky navzájom kolmé. Označovať ich budeme | — / .
V prípade roviny bol pohyb od počiatku k susedným bodom možný len od dvoch susedných bodov. V prípade priestoru to bude ináč. Na vhodných konkrétnych príkladoch prídu na to žiaci.
Všímať si budeme bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od počiatku, čiže tvoria časť guľovej plochy v prvom oktante. Ich počet bude konečné číslo v prípade konečného polomeru. Budeme hľadať závislosť počtu tvarov polomerov od jeho veľkosti.
a./ Začneme bodom, ktorý je počiatkom súradnej sústavy a zároveň je stredom kružnice s polomerom 0. Pomenujeme ho bod 000. Tento bod je práve len jeden a jeho jeden polomer má veľkosť 0. Má aj tvar?
b./ **Body s polomerom jednej jednotky vzdialenosti** sú tri: 100, 010, 001. Každý má jeden polomer iného tvaru. Prvý je vodorovný —, druhý zvislý | a tretí je kolmý na obidva predchádzajúce a budeme ho označovať šikmou čiarkou /.
V prípade pomenovania bodov ich počet ľahko dostaneme pomocou premiestňovania čísel 1 a 0.
100 ... $P_{12}3 = 3$ Keďže každému prislúcha jedena tvarom iná vzdialenosť, potom už premiestňovanie nemusíme robiť
Celkove máme tri body a tri rôzne tvary polomerov.
c./ **Časť guľovej plochy v priestorovom sektore s polomerom dva.**
Časť guľovej plochy s polomerom dva v priestorovom sektore bude vyzerať nasledovne:

020

101 110

200 011 002

Ich počet môžeme jednoducho určiť ako súčet dvoch premiestňovaní

200 ... $P_{12}3 = 3$
110 ... $P_{12}3 = 3$

S premiestňovaním jednotiek vzdialeností si pomôžeme podľa predchádzajúcej kapitoly a doplníme zápis:

200 ... $P_{12}3 \,.\, P_2 2 = 3 \,.\, 1 = 3$
110 ... $P_{12}3 \,.\, P_{11}2 = 3 \,.\, 2 = 6$

—- —
6 9

V prípade nejasností použijeme predchádzajúce riešenie, alebo si situáciu vymodelujeme. je to na rozhodnutí alebo učiteľa, alebo na rozhodnutí žiaka, čo je lepší prípad.
Ukážka premiestňovania čiarok vzdialeností: | —, | /, — /, — |, / —, / | .

d./ **Časť guľovej plochy v priestorovom sektore s polomerom 3.**

030

120 021

210 111 012

300 201 102 003

Každý z týchto bodov má od počiatočného bodu vzdialenosť 3 jednotky vzdialeností (čiarok).
Počet bodov ako súčet premiestňovania čísel:

300 ... $P_2 3 = 3$
210 ... $P3 = 6$ (210, 201, 120, 102, 021, 012)
111 ... $P_3 3 = 1$

Každému bodu môžeme predeliť počet jeho tvarov polomerov. Tieto získame premiestňovaním čiarok
Zápis doplníme:

300 ... $P_2 3 \,.\, P_3 3 = 3 \,.\, 1 = 3$
210 ... $P3 \,.\, P_{12}3 = 6 \,.\, 3 = 18$
111 ... $P_3 3 \,.\, P3 = 1 \,.\, 6 = 6$

—-— ——
10 27

e./ **Časť guľovej plochy v priestorovom sektore s polomerom 4.**

040

130 031

220 121 022

310 211 112 013

400 301 202 103 004

Snažíme sa postupne odstraňovať názornosť. V prípade potreby ju však použijeme. Zvlášť v prípadoch, kde je to nie celkom jasné. Často si to necháme od žiakov vysvetliť, prečo práve tak postupovali.
Zápis:

$$\begin{array}{llllll}
400 & \ldots & P_{2}3 \,.\, P_{4}4 & = 3 \,.\, 1 & = & 3 \\
310 & \ldots & P3 \,.\, P_{13}4 & = 6 \,.\, 4 & = & 24 \\
220 & \ldots & P_{2}3 \,.\, P_{22}4 & = 3 \,.\, 6 & = & 18 \\
211 & \ldots & P_{2}3 \,.\, P_{112}4 & = 3 \,.\, 12 & = & 36 \\
\hline
 & & & \quad 15 & & 81
\end{array}$$

Ak robí problém nájsť počet tvarov polomerov niektorého bodu, tak potom tento počet môžeme vypočítať ako súčet tvarov polomerov susedných bodov a ten už máme urobený. Počet polomerov bodu p220 = p210 + p120, podobne p211 = p111 + p210 + p201.

f./ **Časť guľovej plochy v priestorovom sektore s polomerom 5.**
Skúsime pokračovať bez obrázka:

$$\begin{array}{llllll}
500 & \ldots & P_{2}3 \,.\, P_{5}5 & = 3 \,.\, 1 & = & 3 \\
410 & \ldots & P3 \,.\, P_{14}5 & = 6 \,.\, 5 & = & 30 \\
320 & \ldots & P3 \,.\, P_{23}5 & = 6 \,.\, 10 & = & 60 \\
311 & \ldots & P_{2}3 \,.\, P_{113}5 & = 3 \,.\, 20 & = & 60 \\
221 & \ldots & P_{2}3 \,.\, P_{112}5 & = 3 \,.\, 30 & = & 90 \\
\hline
 & & & \quad 21 & & 243
\end{array}$$

Ak tento zápis nerobí žiakom problém, nastáva čas na ďalšie zovšeobecňovanie. Pri premiestňovaní sa „pomýlime“ a povieme o permutácii.
Pascalova tabuľka je na stene pri tabuli. Čísla, ktoré dostávame pri určovaní počtu tvarov polomerov tam nájdeme v ich závislosti od veľkosti polomeru od čísla súradnej sústavy. Môžeme čítať napríklad päť nad troma. Tento zápis nám umožní väčšie zostručnenie. Môžeme použiť názov kombinačného čísla. Ešte aspoň na dvoch príkladoch to zautomatizujeme.

g./ **Časť guľovej plochy v priestorovom sektore s polomerom 6.**
Niektorí žiaci prídu s tým, že vedia koľko bude všetkých tvarov polomeru 6. Vyslovia konečné číslo. Presvedčia nás o tom? Zatiaľ je to dosť intuitívne. Niektorí prídu s číslom z pascalovej tabuľky. Zavedenie tohto čísla je rôzne.

$$\begin{array}{llllll}
600 & \ldots & P_{2}3 \,.\, \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{6}} & = 3 \,.\, 1 & = & 3 \\
510 & \ldots & P3 \,.\, \binom{6}{5} & = 6 \,.\, 6 & = & 36 \\
420 & \ldots & P3 \,.\, \binom{6}{4} & = 6 \,.\, 15 & = & 90 \\
411 & \ldots & P_{2}3 \,.\, \binom{6}{4} \,.\, \binom{2}{1} & = 3 \,.\, 15 \,.\, 2 & = & 90 \\
330 & \ldots & P_{2}3 \,.\, \binom{6}{3} & = 3 \,.\, 20 & = & 60 \\
321 & \ldots & P3 \,.\, \binom{6}{3} \,.\, \binom{3}{2} & = 6 \,.\, 20 \,.\, 3 & = & 360 \\
222 & \ldots & P_{3}3 \,.\, \binom{6}{2} \,.\, \binom{4}{2} & = 1 \,.\, 15 \,.\, 6 & = & 90 \\
\hline
 & & & \quad 28 & & 729
\end{array}$$

Zaujímajú sa o vlastnosti kombinačných čísel.

h./ **Časť guľovej plochy v priestorovom sektore s polomerom 7.**

700 ...	$P_2 3 \ . \ P_7 7$	$= 3 \cdot \binom{7}{7}$	$= 3 \ . \ 1$	=	3
610 ...	$P3 \ . \binom{7}{6}$	$= 6 \cdot \binom{7}{6}$	$= 6 \ . \ 7$	=	42
520 ...	$P3 \ . \binom{7}{5}$	$= 6 \cdot \binom{7}{5}$	$= 6 \ . \ 15$	=	90
511 ...	$P_2 3 \ . \binom{7}{5} . \binom{2}{1}$	$= 3 \cdot \binom{7}{5} . \binom{2}{1}$	$= 3 \ . \ 15 \ . \ 2$	=	90
430 ...	$P3 \ . \binom{7}{4}$	$= 6 \cdot \binom{7}{4}$	$= 6 \ . \ 20$	=	120
421 ...	$P3 \ . \binom{7}{4} . \binom{3}{2}$	$= 6 \cdot \binom{7}{4} . \binom{3}{2}$	$= 6 \ . \ 35 \ . \ 3$	=	630
331 ...	$P_2 3 \ . \binom{7}{3} . \binom{4}{3}$	$= 3 \cdot \binom{7}{3} . \binom{4}{3}$	$= 3 \ . \ 35 \ . \ 4$	=	420
322 ...	$P_2 3 \ . \binom{7}{3} . \binom{4}{2}$	$= 3. \binom{7}{3} . \binom{4}{2}$	$= 3 \ . \ 35 \ . \ 6$	=	630
		36			217

Žiaci zisťujú rôzne vlastnosti kombinačných čísel. $\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$.

Štvorrozmerný priestor.

Budeme sa zaoberať bodmi štvorrozmerného priestoru. Tu nám nepomôžu obrázky a preto sa budeme musieť spoliehať len na postupy, ktoré sme získali v predchádzajúcich prípadoch. Skúmať budeme body s rovnakou vzdialenosťou od počiatku a závislosť počtu tvarov polomeru od jeho veľkosti a jednej súradnice. Ďalej si budeme všímať počet bodov s rovnakou vzdialenosťou. Pomôcť si môžeme tak, že sa budeme opierať o predchádzajúci prípad.

a./ **Vzdialenosť 0**.

Jeden bod 0000. Jeden polomer. $\binom{0}{0} = 1$

b./ **Vzdialenosť 1**.

1000 ... $P_3 4 \cdot \binom{1}{1} = 4 \ . \ 1 = 4$

Štyri body a každý má jednu tvarom rôznu jednotku vzdialenosti.

c./ **Vzdialenosť 2**.

2000 ... $P_3 4 \cdot \binom{2}{2} = 4 \ . \ 1 = 4$

1100 ... $P_{22} 4 \cdot \binom{2}{1} = 6 \ . \ 2 = 12$

10 16

d./ **Vzdialenosť 3**.

$3000 \;\ldots\; P_{3}4 . \binom{3}{3} = 4 . 1 = 4$

$2100 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{3}{2} = 12 . 3 = 36$

$1110 \;\ldots\; P_{13}4 . \binom{3}{1} . \binom{2}{1} = 4 . 3 . 2 = 24$

20 64

e./ **Vzdialenosť 4**.

$4000 \;\ldots\; P_{13}4 . \binom{4}{4} = 4 . 1 = 4$

$3100 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{4}{3} = 12 . 4 = 48$

$2200 \;\ldots\; P_{22}4 . \binom{4}{2} = 6 . 6 = 36$

$2110 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{4}{2} . \binom{2}{1} = 12 . 6 . 2 = 144$

$1111 \;\ldots\; P4 . \binom{4}{1} . \binom{3}{1} . \binom{2}{1} = 1 . 4 . 3 . 2 = 24$

35 256

f./ **Vzdialenosť 5**.

$5000 \;\ldots\; P_{13}4 . \binom{5}{5} = 4 . 1 = 4$

$4100 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{5}{4} = 12 . 5 = 60$

$3200 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{5}{3} = 12 . 10 = 120$

$3110 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{5}{3} . \binom{2}{1} = 12 . 10 . 2 = 240$

$2210 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{5}{2} . \binom{3}{2} = 12 . 10 . 3 = 360$

$2111 \;\ldots\; P_{13}4 . \binom{5}{2} . \binom{3}{1} . \binom{2}{1} = 4 . 10 . 3 . 2 = 240$

56 1024

g./ **Vzdialenosť 6**.

$6000 \;\ldots\; P_{13}4 . \binom{6}{6} = 4 . 1 = 4$

$5100 \;\ldots\; P_{112}4 . \binom{6}{5} = 12 . 6 = 72$

$4200 \;...\; P_{112}4 \cdot \binom{6}{4} = 12 \cdot 15 = 180$

$4110 \;...\; P_{112}4 \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} = 12 \cdot 15 \cdot 2 = 360$

$3300 \;...\; P_{22}4 \cdot \binom{6}{3} = 6 \cdot 20 = 120$

$3210 \;...\; P4 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 24 \cdot 20 \cdot 3 = 1440$

$3111 \;...\; P_{13}4 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 2 = 480$

$2220 \;...\; P_{13}4 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 15 \cdot 6 = 360$

$2211 \;...\; P_{22}4 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 6 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 2 = 1080$

84 4096

Postupnosť bodov : 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...
Postupnosť počtu tvarov polomerov: 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, ...
$r = x+y+z+t$

Päťrozmerný priestor.

V päťrozmernom priestore bude každý bod pomenovaný a určený piatimi súradnicami.
a./ Počiatočný bod označíme 00000. Bude mať práve jeden polomer veľkosti 0 a teda aj jeden tvar.
b./ **Vzdialenosť 1.**

$10000 \;...\; P_{14}5 \cdot P_{1}1 = 5 \cdot 1 = 5$

c./ **Vzdialenosť 2.**

$20000 \;...\; P_{14}5 \cdot P_{2}2 = 5 \cdot \binom{2}{2} = 5 \cdot 1 = 5$

$11000 \;...\; P_{23}5 \cdot P_{1}2 = 10 \cdot \binom{2}{1} = 10 \cdot 2 = 20$

15 25

d./ **Vzdialenosť 3.**

$30000 \;...\; P_{14}5 \cdot P_{3}3 = 5 \cdot \binom{3}{3} = 5 \cdot 1 = 5$

$21000 \;...\; P_{113}5 \cdot P_{2}3 = 20 \cdot \binom{3}{2} = 20 \cdot 3 = 60$

$11100 \;...\; P_{23}5 \cdot P_{1}3 \cdot P_{1}2 = 10 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$

35 125

e./ **Vzdialenosť 4.**

$40000 \;...\; P_{14}5 \cdot P_{4}4 = 5 \cdot \binom{4}{4} = 5 \cdot 1 = 5$

$31000 \;...\; P_{113}5 \,.\, P_3 4 = 20 \,.\, \binom{4}{3} = 20 \,.\, 4 = 80$

$22000 \;...\; P_{23}5 \,.\, P_2 4 = 10 \,.\, \binom{4}{2} = 10 \,.\, 6 = 60$

$21100 \;...\; P_{22}5 \,.\, P_2 4 \,.\, P_1 2 = 30 \,.\, \binom{4}{2} \,.\, \binom{2}{1} = 30 \,.\, 6 \,.\, 2 = 360$

$11110 \;...\; P_{14}5 \,.\, P_1 4 \,.\, P_1 3 \,.\, P_1 2 = 5 \,.\, \binom{4}{1} \,.\, \binom{3}{1} \,.\, \binom{2}{1} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 120$

70 625

f./ **Vzdialenosť 5.**

$50000 \;...\; P_{14}5 \,.\, \binom{5}{5} = 5 \,.\, 1 = 5$

$41000 \;...\; P_{113}5 \,.\, \binom{5}{4} = 20 \,.\, 5 = 100$

$32000 \;...\; P_{113}5 \,.\, \binom{5}{3} = 20 \,.\, 10 = 200$

$31100 \;...\; P_{122}5 \,.\, \binom{5}{3} \,.\, \binom{2}{1} = 30 \,.\, 10 \,.\, 2 = 600$

$22100 \;...\; P_{122}5 \,.\, \binom{5}{2} \,.\, \binom{3}{2} = 30 \,.\, 10 \,.\, 3 = 900$

$21110 \;...\; P_{113}5 \,.\, \binom{5}{2} \,.\, \binom{3}{1} \,.\, \binom{2}{1} = 20 \,.\, 10 \,.\, 3 \,.\, 2 = 1200$

$11111 \;...\; P_5 5 \,.\, \binom{5}{1} \,.\, \binom{4}{1} \,.\, \binom{3}{1} \,.\, \binom{2}{1} \,.\, \binom{1}{1} = 1 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$ (Faktoriál)

126 3125

Záver

Pre niektorých žiakov je zaujímavé pracovať aj iných viacrozmerných priestoroch. Pre nás je smerodajné ako pochopili permutácie a to ako s opakovaním tak aj bez opakovania a kombinačné čísla. Zistia aj vzťah medzi kombináciami a permutáciami?

Naše skúsenosti hovoria v prospech takéhoto prijímania poznatkov, kde cieľ je postavený na rozvoj psychických schopností žiakov v oblasti tvorivosti, objavovania. Každý aj najmenší úspech sa stáva hnacím motorom poznávania.

Aj keď sa to zdá zdĺhavé, neskoršia akcelerácia poznatkov nahrádza tento nedostatok. Je to preto, že žiaci dobre rozumejú tomu čo robia.

Dodatok

V roku 323 pred Kristom zomrel Alexander Macedónsky, ktorý pri Stredozemnom mori vybudoval veľkú ríšu. Po jeho smrti bolo veľa dedičov. Dedilo sa podľa sily. Najsilnejšími boli jeho traja generáli, ktorí si ríšu rozdelili. Z nich bol najsilnejší generál Ptolemaios a tak mu pripadol vtedy

najlepší kúsok ríše, ktorým bol staroveký Egypt. Stal sa tam faraónom a založil na tristo rokov dynastiu, ktorá skončila samovraždou jeho priameho potomka známej Kleopatry. Skúsený bojovník, generál a vládca pochopil, že na dobrý rozvoj krajiny potrebuje múdrych a schopných spolupracovníkov. Založil preto chrám múz Muzeion, do ktorého povolal a platil z kráľovskej pokladnice výkvet vtedajšej učenosti. Medzi inými tu pracoval aj grék Euklides. Napísal tu obdivuhodné dielo. Stocheios – Základy. Bolo to trinásťzväzkové dielo – učebnica, ktoré po Biblii bolo najvydávanejším dielom. Jeho výnimočnosť spočíva hneď v niekoľkých veciach. Predovšetkým bolo napísané spôsobom myslenia, ktorý začali ako prvý používať starý grécki. Jeho objav sa datuje už u Tálesa, no jeho spôsob využitia je patrný až u Pytagorasa. Je to v podstate objav príčinnosti. Dnes by sme povedali implikácie. Euklides ju plne rozvinul do deduktívneho spôsobu myslenia. Na základe piatich axióm vybudoval deduktívnym spôsobom geometriu. Bola to vlastne prvá vedecká učebnica, ktorá ukazovala spôsob budovania vedy. Podľa jej vzoru vznikali mnohé vedné odbory. Sám Ptolemaios sa chcel pre túto príčinu naučiť geometriu, rýchlym kráľovským spôsobom. Euklides mu vraj odkázal, že tadiaľ nevedie kráľovská cesta. Samotný Platón si nad vchod svojej akadémie napísal: „Neznalý geometrie nevstupuj!“ Znalosť geometrie zabezpečovala dobrý spôsob myslenia. Dedukciu vyžadoval ako nevyhnutný nástroj uvažovania.
Výnimočnosť diela spočívala aj v tom, že mnoho jeho žiakov sa snažilo o jej vylepšenie a zdokonalenie. Ukázalo sa, že päť axióm nestačí. Zdokonaľovanie trvalo až do konca devätnásteho storočia, po Hilberta (1899), odkedy sa ukazuje, že geometria je dobre vybudovaná. Medzi mnohými vylepšeniami je zaujímavý aj poučný príbeh piatej axiómy. Jej dej trval takmer dvetisíc rokov a dal by sa charakterizovať ako napínavá detektívka, v ktorej síce nejde o vypátranie páchateľa, no má zaujímavé a prekvapivé rozuzlenie. Z dnešného pohľadu znejú prvé Euklidove axiómy nasledovne:

1. Každými dvoma rôznymi bodmi môžeme preložiť práve jednu priamku.
2. Každú časť priamky môžeme ľubovoľne predlžovať.
3. Všetky pravé uhly sú zhodné.
4. V danom bode s daným polomerom môžeme v rovine zostrojiť kružnicu.
5. Daným bodom neležiacim na priamke, môžeme zostrojiť práve jednu rovnobežku s danou priamkou.

Euklides v tom čase formuloval axiómy iným spôsobom. Boli to v podstate úlohy na vykonanie určitej činnosti, no mali už taký charakter, ako ich chápeme dnes.
Z viacerých dôvodov mnohí nasledovníci a žiaci Euklidesa považovali piatu axiómu za vetu, ktorá sa dá na základe prvých štyroch axióm dokázať. Teda, že je závislá od prvých štyroch. Pokým prvé uvádza Euklides na začiatku, tak piatu použil až v siedmej kapitole. Aj túto mohol veľmi jednoducho obísť nahradením inej jednoduchšej. Po vojne býva každý vojak generálom. Zdá sa, že samotný Euklides svojou voľbou niečo snáď predvídal alebo tušil.
Bolo mnoho takých, ktorí predložili dôkaz piatej axiómy na základe prvých štyroch. V každom z nich sa však skôr alebo neskôr našla nejaká chyba. Čím viac však bolo neúspešných, tým viac sa množil počet tých, ktorí sa pokúsili vyriešiť problém piatej axiómy. Za tie dlhé roky problém narástol do veľmi veľkých rozmerov.
Trochu iný pohľad na riešenie priniesol okolo roku 1700 talian Saccheri. Začal tým, že piatu axiómu považoval za zlú a negoval ju. Zmenil jej pravdivostnú hodnotu. Potom postupoval rovnako ako Euklides a bol presvedčený, že takto príde určite k nejakej nepravde a tým sa ukáže, že zlý predpoklad bol zlý a tým bude piata axióma dokázaná. Dnes by sme povedali, že to mal byť dôkaz sporom. Nielen on, ale aj mnoho ďalších takto podalo dôkaz piatej axiómy. V každom z nich sa však po nejakom čase našla chyba.
Problém odolával aj naďalej. Že naberal obludné rozmery, svedčí list maďarského matematika Farkaša Bolyaia svojmu synovi Jánošovi. Tento mu ho napísal, keď sa dozvedel, že Jánoš sa zaoberá dôkazom piatej axiómy. On sám tomuto problému venoval veľa času.
„Musíš si to práve tak sprotiviť ako roztopašný styk. Môže ťa to pripraviť o celý Tvoj čas, o Tvoj pokoj, o celé Tvoje životné šťastie. Táto priepastná temnota by mohla pohltiť aj tisíce geniálnych Newtonov a nikdy nebude svetlo na Zemi.“ (Z dopisu v roku 1820.)
Málokedy deti počúvnu rady svojich rodičov. Jánoš Bolyai tiež nepočúvol a problém rozriešil. Nebol však ani prvý a ani jediný. Na začiatku devätnásteho storočia sa rozhoreli hneď tri plamienky poznania.

Farkaš Bolyai bol spolužiakom slávneho nemeckého matematika Gaussa. Žiadal ho listom, aby vzal jeho nadaného syna Jánoša k sebe do učenia matematiky. Pozývací list sa pravdepodobne stratil a tak Jánoš zostal v podstate samoukom. Svoju prácu publikoval ako prílohu otcovej učebnice matematiky v roku 1833. Potom už musel Gauss zaujať jednoznačné stanovisko k jeho práci. Pochválil ho, no zároveň mu napísal, že riešenie už dávno pozná. Odoprenie prvenstva na Jánoša pôsobilo tak, že zanevrel na matematiku a stal sa armádnym dôstojníkom. Tento plamienok zhasol.
Je možné, že Gauss riešenie poznal. Nikdy ho však nepublikoval. Podľa niektorých zdrojov vraj preto, že ako člen slobodomurárskej lóže bol viazaný mlčanlivosťou. Pravdou sa javí skôr skutočnosť, že nevidel dosah svojho objavu. Nemal patričný nadhľad a bál sa, že ho môžu spochybniť a tak príde o svoju prestíž. Aj druhý plamienok zhasol.
Tretí plamienok sa rozhorel v ruskej Kazani. V roku 1830 Lobačevskij publikoval svoju prácu. Svoje riešenie predostrel súdnej stolici Akadémii vied v Petrohrade. Námahu s odpoveďou si dal sám jej akademik, ktorý prácu zmietol zo stola nielen z hľadiska matematiky, ale aj s výčitkou, že si autor mohol dať námahu a mať toľko úcty k Akadémii, aby svoju prácu napísal zrozumiteľne. Lobačevskému neostalo nič iné, len odísť do Nemecka. Tam jeho práca vyšla v roku 1846. Odozva však nebola žiadna. Aj tretí plamienok zhasínal.
Zdá sa paradoxné, že matematický svet, ktorý takmer dvetisíc rokov čakal na riešenie problému, neakceptoval tri aj keď rôzne , predsa len myšlienkovo rovnaké riešenia.
Vysvetlení sa núka hneď viac. Bola to predovšetkým vysoká abstrakcia. Taká vysoká, že sa jej takmer nedalo rozumieť. Matematické poznanie nebolo tak vyspelé, aby sa to dalo jednoducho pochopiť. Z dnešného pohľadu je riešenie geniálne jednoduché. Dá sa ukázať, že piatu axiómu netreba dokazovať. Presnejšie vyjadrenie by bolo, že sa dá dokázať, že piata axióma sa nedá dokázať.
Okrem euklidovej geometrie existujú ešte iné geometrie, v ktorých platia prvé štyri axiómy nie však piata. Táto teda nezávisí od prvých štyroch.
Ďalšou ešte vyššou prekážkou pre prijatie novej geometrie bola predsudková bariéra. Oponenti mali v rukách silný argument. Čo ak niekto v budúcnosti príde a nájde, tak ako vždy doteraz, v ich teórii nejakú chybu, nejaký nezmysel? Argument vecný tvrdý a nekompromisný. Až po smrti všetkých troch v roku 1868 prichádza talian Beltrami, ktorý abstraktnú, nezrozumiteľnú geometriu preložil do ľahšej ľudskejšej podoby. Urobil názorný model lobačevského geometrie, v ktorom každý problém jednej geometrie sa dá riešiť aj v druhej. Vymodeloval plochu, ktorá môže byť zakrivená. Až potom začal nevídaný rozvoj geometrií.
Tento záver má dve poučenia. Prvý pedagogický spočíva v tom, že by sme nemali v žiakoch budovať predsudkové bariéry. Veď napríklad zápis 2+2 = 10 nemusí byť nepravdivý.
Druhé poučenie je všeobecnejšie. Modelovanie bolo prijaté ako jeden zo základných princípov poznávania.

Literatúra:
Hejný, M.: Aj geometria naučila človeka myslieť SPN 1979 Bratislava

Hejný, M. A kol. : Teória vyučovania matematiky II SPN 1990 Bratislava

Knabe, P.: Projížďka taxíkem novou geometrií. Rozhledy matematicko-fyzikální. Ročník 66 1987/88

červen, č.10.str.398-402.

Struik, D.J.: Dějiny matematiky. Orbis. Praha. 1963

Vopěnka, P.: Trýznivé tajemství. Práh. Praha 2003

Ján Kuruc
nám. Š.N.Hýroša 21
Ružomberok
03401
kuruc@fedu.ku.sk
č.t. 044/4325373