Harmonický priemer a jeho praktická aplikácia

Harmonic mean and its application

LADISLAV KULČÁR

ABSTRACT. The paper deals with some properties of arithmetic and harmonic means and their mutual relations. Some examples of using them are presented to better understand this topic. It should help students and teachers of various levels of schools to use these mathematical and statistical terms properly in their practice.

Key words: means - arithmetic mean - harmonic mean - Paasche price index

MESC: M14, M15

1. Úvod

Dôvodom napísania tohto príspevku sú autorove viacročné skúsenosti s výučbou štatistiky študentov študujúcich na Ekonomickej fakulte UMB v Banskej Bystrici. Pochopenie samotného pojmu a zmyslu harmonického priemeru a jeho použitie je pre mnohých študentov niekedy vážnym problémom. Cieľom tohto príspevku je preto poukázať na vzájomnú spojitosť medzi harmonickým a aritmetickým priemerom, resp. uviesť iné spôsoby výpočtu takej strednej hodnoty, na určenie ktorej sa používa harmonický priemer. Na niekoľkých príkladoch je vysvetlená jeho praktická aplikácia.

2. Priemery všeobecne

Priemery patria medzi stredné hodnoty, ktoré sú najčastejšie používanými charakteristikami na vyjadrenie úrovne (polohy) štatistického znaku X v štatistickom súbore. Sú to také stredné hodnoty, ktoré závisia od všetkých hodnôt znaku v štatistickom súbore.

Všetky druhy priemerov je možné určiť pomocou **určujúcej funkcie priemerov**, ktorá má nasledovný tvar:

$$F(\bar{x}_k) = \sqrt[k]{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{m} x_i^k.n_i}\,, \tag{1}$$

kde k je celé číslo (parameter), ktoré určuje druh priemeru, n_i sú absolútne početnosti príslušných tried, do ktorých je štatistický súbor vytriedený na základe rôznych hodnôt štatistického znaku a nazývajú sa *váhy* tried. Hodnota m vyjadruje počet rôznych obmien hodnôt znaku, ktoré sa v danom súbore vyskytujú (počet tried), pričom platí: $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

Podľa hodnoty k rozoznávame:

- aritmetický priemer $\bar{x}$, ak $k = 1$,
- kvadratický priemer $\bar{x}_K$, ak $k = 2$,
- kubický priemer $\bar{x}_3$, ak $k = 3$,
- harmonický priemer $\bar{x}_H$, ak $k = -1$,
- harmonický kvadratický priemer $\bar{x}_{-2}$, ak $k = -2$,
- geometrický priemer $\bar{x}_G$, ak v limite $k \to 0$ a $x_i > 0$

a iné. V technickej a vedeckej praxi najčastejšie používanými priemermi sú *aritmetický priemer* ($\bar{x}$), *harmonický priemer* ($\bar{x}_H$), *geometrický priemer* ($\bar{x}_G$) a *kvadratický priemer* ($\bar{x}_K$).

Pre rôzne druhy priemerov $\bar{x}_k$ platí **majorantnosť priemerov**:

$$\ldots \le \bar{x}_{-2} \le \bar{x}_{-1} \le \bar{x}_0 \le \bar{x}_1 \le \bar{x}_2 \le \ldots \tag{2}$$

alebo pre často používané druhy priemerov: $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x} \leq \bar{x}_K$.
Znamienko rovnosti vo vzťahu (2) platí iba v prípade, ak sú všetky hodnoty znaku X rovnaké.

3. Aritmetický priemer

Pretože jedným z cieľom tohto príspevku je poukázať na vzájomnú spojitosť medzi harmonickým a aritmetickým priemerom, uvedieme aj základné vzťahy na určenie aritmetického priemeru, ktorý bude neskôr v príkladoch použitý.

Aritmetický priemer $\bar{x}$ štatistického znaku X, ktorý v štatistickom súbore o rozsahu n štatistických jednotiek nadobúda hodnoty $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, sa určí podľa vzťahu

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{3}$$

ktorý nazývame *jednoduchý tvar aritmetického priemeru*. Ak sa niektoré hodnoty v súbore vyskytujú viackrát ako raz, na jeho výpočet je výhodné použiť *vážený tvar aritmetického priemeru*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i.n_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i.n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}, \tag{4}$$

kde n_i sú absolútne početnosti (váhy) tried.

4. Harmonický priemer

Harmonický priemer $\bar{x}_H$ štatistického znaku X, ktorý v štatistickom súbore o rozsahu n štatistických jednotiek nadobúda hodnoty $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, pričom $x_i > 0$ pre $i = 1, 2, ..., n$, sa určí podľa vzťahu

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}, \tag{5}$$

ktorý nazývame *jednoduchý tvar harmonického priemeru*. V prípade, ak sa niektorá z hodnôt (napr. x_i) štatistického znaku X vyskytuje viac ako raz (napr. n_i-krát), potom je v praxi výhodné na určenie harmonického priemeru použiť jeho *vážený tvar*:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{x_i}}. \tag{6}$$

Vlastnosťou harmonického priemeru je stálosť jeho prevrátených hodnôt

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\bar{x}_H} + \frac{1}{\bar{x}_H} + \cdots + \frac{1}{\bar{x}_H}}_{n-\text{krát}},$$

z čoho bol odvodený vzťah (5).

Harmonický priemer sa používa na určenie stredu variability takého znaku, ktorý cez určitú konštantnú hodnotu je v nepriamom vzťahu s iným znakom. Súčet takýchto hodnôt znaku nedáva logický zmysel.

Vyššie uvedené okolnosti, za ktorých sa harmonický priemer používa, robí najväčšie problémy. Na lepšie ozrejmenie použitia harmonického priemeru uvedieme niekoľko typových príkladov. Budú sa týkať nasledovných oblastí použitia: spoločnej práce, úloh z percentuálneho počtu, určenia priemernej rýchlosti pohybu a indexnej analýzy v ekonómii.

5. Praktické použitie harmonického priemeru

Príklad 1 - spoločná práca

Zadanie príkladu: V dielni, v ktorej sa vyrábajú rovnaké výrobky, boli štyrom robotníkom namerané časy potrebné na zhotovenie jedného výrobku (v minútach), ktoré sú uvedené v tabuľke č. 1.

Tabuľka č. 1

Číslo robotníka	1	2	3	4
Čas (min/výrobok)	4	5	10	4

Úloha: a) Určte, koľko výrobkov spolu vyrobia všetci 4 robotníci za 8-hodinovú pracovnú zmenu.
b) Určte, ako dlho trvá vyrobenie 1 výrobku v priemere jednému robotníkovi.

Riešenie: Riešenie úlohy vykonáme viacerými spôsobmi:

1. spôsob (nazvime ho jednoduchá logická úvaha):

Prvému robotníkovi trvá výroba 1 výrobku 4 minúty, t.j. za 480 minút (pracovná zmena) vyrobí 480/4 = 120 výrobkov. Rovnaký počet výrobkov vyrobí za zmenu aj štvrtý pracovník. Druhý robotník vyrobí jeden výrobok za 5 minút, t.j. za 480 minút vyrobí 480/5 = 96 výrobkov, tretí robotník vyrobí za zmenu 480/10 = 48 výrobkov. Teda všetci 4 robotníci vyrobia za zmenu spolu 120 + 120 + 96 + 48 = 384 výrobkov. Tým je vyriešená úloha a) príkladu.

Na jedného robotníka pripadá potom priemerne 384/4 = 96 výrobkov. Tento počet výrobkov vyrobí v priemere jeden robotník za 480 minút (zmenu), teda výroba jedného výrobku mu priemerne trvá 480/96 = 5 minút. Tým je zodpovedaná úloha b) príkladu.

2. spôsob (výpočet pomocou „rýchlosti“ práce):

Pre každého robotníka určíme jeho výkonnosť, teda akúsi „rýchlosť“ práce v_i, vyjadrenú počtom vyrobených výrobkov za jednotku času (v našom prípade napr. za 1 minútu). Ak prvý pracovník vyrobí jeden výrobok za 4 minúty, tak jeho rýchlosť práce (výkonnosť) je v_1 = 1/4 výrobku/minútu. Rovnakou rýchlosťou pracuje aj 4. robotník, t.j. v_4 = 1/4 výrobku/minútu. Rýchlosti práce 2. a 3. robotníka sú nasledovné: v_2 = 1/5 a v_3 = 1/10 výrobku za minútu.

Množstvo vyrobených výrobkov za čas t určíme podľa analógie z fyziky: dráha (s) = rýchlosť pohybu (v) násobená časom pohybu (t): $s = v.t$. Preto množstvo výrobkov vyrobené i-tym robotníkom (vykonaná práca A_i) sa určí ako súčin jeho rýchlosti práce v_i a času trvania práce t: $A_i = v_i.t$. Celkové množstvo vyrobených výrobkov A všetkými 4 robotníkmi určíme ako súčet jednotlivých množstiev vyrobených výrobkov A_i. Teda dostávame:

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i = \sum_{i=1}^{4} v_i.t = t.\sum_{i=1}^{4} v_i = 480.\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right) = 384 \text{ výrobkov.}$$

Úlohu b) z príkladu určíme potom rovnako ako vo vyššie uvedenom 1. spôsobe výpočtu.

3. spôsob (použitím harmonického priemeru):

Na určenie priemernej doby potrebnej na vyrobenie jedného výrobku jedným „priemerným“ robotníkom použijeme vzťah (6) pre vážený tvar harmonického priemeru, pretože v súbore sú dve rovnaké hodnoty znaku, a síce x_1 = 4 a x_4 = 4:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{4}{\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = 5 \text{ min/výrobok.}$$

Priemerne trvá výroba jedného výrobku jednému robotníkovi 5 minút, čo je odpoveď na úlohu b).

Za 8-hodinovú zmenu (480 minút) vyrobí jeden robotník priemerne 480 min./5 min. = 96 výrobkov. Pretože rovnakou „rýchlosťou" pracujú priemerne všetci 4 robotníci, v celej dielni sa za 8 hodín vyrobí 96.4 = 384 výrobkov.

Vidíme, že výsledky získané rôznymi spôsobmi sú rovnaké.

5.2. Príklad 2 - percentuálny počet

Zadanie príkladu: Tri rozličné dielne autoservisu plnili plán v minulom mesiaci tak, ako je to uvedené v tabuľke č. 2.

Tabuľka č. 2

Dielňa	Tržby (v tis. Sk) (n_i)	Plnenie plánu (v %) (x_i)
- bežné opravy	735	105
- lakovňa	385	110
- umyváreň áut	125	125

Úloha: Na koľko percent sa plnil plán v celom autoservise v minulom mesiaci?

Riešenie: Uvedenú úlohu vyriešime opäť niekoľkými spôsobmi.

1. spôsob (použitie aritmetického priemeru):

Pretože aritmetický priemer sa dá použiť na určenie priemernej hodnoty iba vtedy, ak sa jedná o hodnoty, ktorých zhrňovanie dáva logický zmysel, označíme získané tržby jednotlivých dielní (tieto môžeme zhrňovať) uvedené v druhom stĺpci tabuľky a označené n_i ako súčin pôvodného plánu (q_i) a jeho plnenia (p_i) vyjadreného v percentách, teda $n_i = p_i.q_i$. Hodnoty q_i predstavujú analógiu váh n_i vo vzťahu (4) pre aritmetický priemer. Takto dostaneme tabuľku č. 3 doplnenú o 4. stĺpec, v ktorom sú určené jednotlivé váhy q_i.

Tabuľka č. 3

Dielňa	Tržby (Sk) ($n_i = q_i p_i$)	Plnenie plánu (%) ($p_i = x_i$)	$q_i = \frac{q_i p_i}{p_i}$		Plán (Sk)
- bežné opravy	735 000	105	7000		700 000
- lakovňa	385 000	110	3500		350 000
- umyváreň áut	125 000	125	1000		100 000
Spolu	1 245 000	-	11500		1 150 000

Teraz môžeme použiť vzťah (4) pre vážený aritmetický priemer na určenie priemernej hodnoty veličiny $\bar{p}$ s váhami q_i:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i q_i}{\sum_{i=1}^{m} q_i} = \frac{735000+385000+125000}{7000+3500+1000} = 108{,}26\,\%$$

2. spôsob (logicky s využitím percentuálneho počtu).

V tabuľke č. 3 v poslednom stĺpci je uvedený pôvodný plán pre jednotlivé dielne, ktorý sme určili zo zadania úlohy na základe 2. a 3. stĺpca tabuľky. Z posledného riadku tabuľky vidíme, že plán v celom autoservise bol 1 150 000 Sk, pričom skutočné tržby boli 1 245 000 Sk. Z týchto dvoch údajov jednoducho určíme plnenie plánu ako podiel skutočných tržieb a plánu, čo je 1 245 000/ 1 150 000 = 1,0826, t.j. 108,26 %.

3. spôsob (harmonický priemer):

Použijeme vzťah (6) pre vážený harmonický priemer, pričom hodnoty x_i predstavujú hodnoty plnenia plánu a tržby v jednotlivých dielňach vstupujú do výpočtu ako váhy n_i. Potom dostávame:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{735+385+125}{\frac{735}{105}+\frac{385}{110}+\frac{125}{125}} = 108{,}26\ \%$$

V celom autoservise sa plán v minulom mesiaci plnil v priemere na 108,26 %. Výsledky sú vo všetkých prípadoch rovnaké.

Treba upozorniť, že nie v každom prípade pri určení priemernej percentuálnej hodnoty je možné použiť harmonický priemer. Ak by v zadaní príkladu namiesto tržieb boli známe hodnoty plánu pre jednotlivé dielne autoservisu, na priemerné percentuálne plnenie plánu by sa použil vážený aritmetický priemer podľa vzťahu (4), pričom váhami by boli hodnoty plánu. Ak by boli v úlohe zadané iba hodnoty vyjadrujúce percentuálne plnenia plánu x_i, priemerné plnenie plánu by sa v tomto prípade nedalo určiť. Posledný prípad sa u študentov vyskytuje ako častá chyba, ktorej sa dopúšťajú.

5.3. Príklad 3 – priemerná rýchlosť rovnomerného pohybu

Zadanie príkladu: Automobil išiel z mesta A do B rýchlosťou 40 km/h, potom z B do C rýchlosťou 60 km/h a nakoniec z C do D rýchlosťou 50 km/h.

Úloha: Vypočítajte priemernú rýchlosť automobilu na celej trase z A do D, ak vzdialenosť z A do B tvorí 20 % z celkovej trasy a z B do C je to 30 % celkovej trasy.

Riešenie: 1. spôsob (nazvime ho fyzikálnym):

Z fyziky je známe, že priemerná rýchlosť $\bar{v}$ sa určí ako podiel celkovej dráhy s a celkového času t. Ak označíme celkovú dráhu z mesta A do D ako s, potom prvá časť trasy s_1 z A do B je 0,2s, druhá časť s_2 = 0,3s a tretia časť s_3 = 0,5s. Zo vzťahu pre čas $t_i = s_i/v_i$ potrebný na prekonanie jednotlivých úsekov trasy s_i, kde v_i sú rýchlosti v príslušných častiach trasy (i = 1, 2, 3), máme: $t_1 = 0{,}2s/40$, $t_2 = 0{,}3s/60$, $t_1 = 0{,}5s/50$. Potom pre priemernú rýchlosť dostaneme:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_i}{\sum_{i=1}^{3} t_i} = \frac{0{,}2s+0{,}3s+0{,}5s}{\frac{0{,}2s}{40}+\frac{0{,}3s}{60}+\frac{0{,}5s}{50}} = 50\ \text{km/h}.$$

2. spôsob (harmonický priemer):

Na určenie priemernej rýchlosti použijeme vzťah (6) pre vážený harmonický priemer, pričom váhy n_i predstavujú jednotlivé úseky s_i trasy vyjadrené v percentách. Takto dostaneme:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} n_i}{\sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{20+30+50}{\frac{20}{40}+\frac{30}{60}+\frac{50}{50}} = 50\ \text{km/h}.$$

Harmonický priemer na určenie priemernej rýchlosti sa dá použiť iba vtedy, ak sú s hodnotami rýchlostí v_i zadané príslušné úseky s_i celkovej dráhy s, či už vyjadrené v dĺžkovej miere (napr. v km) alebo podielom z celkovej dĺžky trasy (napr. percentuálne). V prípade, že máme k dispozícii údaje o rýchlostiach v_i a časoch t_i, za ktoré prekonalo teleso teleso jednotlivé úseky s_i, potom sa priemerná rýchlosť určí ako vážený aritmetický priemer jednotlivých rýchlostí v_i podľa vzťahu (4), pričom váhami sú jednotlivé časy t_i.

5.4 – Indexná analýza

Pri analýze ekonomicko-finančnej situácii vo firmách je jedným z hlavných nástrojov indexná analýza. Pomocou nej sa posudzuje dynamika finančno-ekonomických ukazovateľov. Základnou veličinou používanou v tejto analýze je index, ktorý je vyjadrený v najjednoduchšom tvare ako pomerné číslo dvoch extenzitných alebo intenzitných veličín. Na bližšie oboznámenie sa s indexnou analýzou odkazujeme čitateľa na bežne dostupnú literatúru z oblasti základov ekonómie.

V indexnej analýze sa porovnávajú extenzitné (ktorých súčet sa logicky dá interpretovať) alebo intenzitné (súčet sa z logických dôvodov nedá interpretovať) veličiny z bežného obdobia (indexované matematickým indexom „1") v porovnaní s veličinami rovnakého charakteru zo základného obdobia (indexované matematickým indexom „0"). V indexnej analýze sa používa veľké množstvo indexov, ktoré sa dajú vyjadriť buď aritmetickým alebo harmonickým priemerom v závislosti od toho, aký druh údajov máme k dispozícii.

Na nasledujúcom príklade ukážeme praktické použitie harmonického priemeru pri výpočte Paascheho cenového indexu. Cenový index podľa Paascheho je definovaný vzťahom:

$$I_{C,P} = \frac{\sum_i p_{1i} q_{1i}}{\sum_i p_{0i} q_{1i}}, \tag{7}$$

kde p je intenzitná veličina (obyčajne jednotková cena tovaru) , q je extenzitná veličina (obyčajne množstvo tovaru), pričom sumácia sa uskutočňuje cez všetky položky (produkty, tovary, služby a pod.). Ak sú k dispozícii individuálne cenové indexy jednotlivých položiek $\frac{p_{1i}}{p_{0i}}$, potom vzťah (7) sa dá napísať ako vážený harmonický priemer z hodnôt $\frac{p_{1i}}{p_{0i}}$ s váhami $p_{1i} q_{1i}$, teda ako

$$I_{C,P} = \frac{\sum_i p_{1i} q_{1i}}{\sum_i \frac{p_{1i} q_{1i}}{\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)}}. \tag{8}$$

Príklad 4 – Paascheho cenový index

Zadanie príkladu: Máme k dispozícii údaje o vývoji cien troch druhov tovaru medzi základným obdobím (január) a bežným obdobím (december) určitého roku. Poznáme tiež štruktúru tržieb v decembri (v %).

Tabuľka č. 4

Druh tovaru	Zmena cien (v %) v decembri vzhľadom k januáru	Štruktúra tržieb v decembri (v %)
A	24	62
B	15	23
C	20	15

Úloha: Určte Paascheho cenový index a výsledok interpretujte.

Riešenie: 1. spôsob (pomocou harmonického priemeru)
Hodnoty z tabuľky č. 4 vyjadríme vo vhodnejšom tvare a doplníme ju o posledné tri stĺpce tabuľky č. 5.

Tabuľka č. 5

Druh tovaru	$\frac{p_{1i}}{p_{0i}}$	$\frac{p_{1i}q_{1i}}{\sum_i p_{1i}q_{1i}} = f_i$	$\frac{f_i}{\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)}$	$p_{1i}q_{1i}$ (v Sk)	$p_{0i}q_{1i}$ (v Sk)
A	1,24	0,62	0,500	62	50
B	1,15	0,23	0,200	23	20
C	1,20	0,15	0,125	15	12,5
Spolu	×	1,00	0,825	100	82,5

Ak vzťah (8) vyjadríme relatívnymi početnosťami (váhami) f_i , pre Paascheho cenový index máme:

$$I_{C,P} = \frac{\sum_i p_{1i}q_{1i}}{\sum_i \frac{p_{1i}q_{1i}}{\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)}} = \frac{1}{\sum_i \frac{f_i}{\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)}} = \frac{1}{0,825} = 1,21$$

Interpretácia výsledku: Spotrebiteľské ceny danej tovarovej skupiny vzrástli od januára do decembra daného roku o 21 %.

2. spôsob (riešením sústavy rovníc):
Úlohu možno vyriešiť aj bez použitia harmonického priemeru, a to na základe riešenia sústavy rovníc. Štruktúra tržieb (tretí stĺpec tabuľky č. 5) predstavuje relatívne zastúpenie f_i tržieb jednotlivých tovarov na celkových tržbách. Na základe týchto hodnôt môžeme vyjadriť tržby jednotlivých druhov tovarov v absolútnych jednotkách (v Sk), tak ako je to vo 5. stĺpci, alebo v ich ľubovoľných násobkoch. Konkrétne hodnoty tržieb $p_{1i}q_{1i}$ nie sú dôležité; dôležité je zachovanie ich vzájomného pomeru. Hodnoty $p_{0i}q_{1i}$ (posledný stĺpec tabuľky), ktoré použijeme na určenie Paascheho cenového indexu podľa vzťahu (7), určíme riešením sústavy rovníc postupne pre jednotlivé druhy tovaru. Napr. pre druh tovaru A máme sústavu:

$$\frac{p_1}{p_0} = 1,24\,; \qquad p_1 q_1 = 62 \quad \Rightarrow \quad p_0 q_1 = 50$$

Potom pre Paascheho cenový index podľa (7) máme: $I_{C,P} = \frac{\sum_i p_{1i}q_{1i}}{\sum_i p_{0i}q_{1i}} = \frac{100}{82,5} = 1,21\,.$

Interpretácia výsledku je rovnaká ako vyššie.

Na prvých troch príkladoch sme ukázali, ako sa dá využiť harmonický priemer pri riešení rôznych úloh. Na štvrtom príklade sme ukázali, ako sa použitiu harmonického priemeru dá vyhnúť a namiesto neho použiť iný postup.

Adresa autora:
Doc. RNDr. Ladislav Kulčár, CSc.
Ekonomická fakulta UMB v Banskej Bystrici
Inštitút manažérskych systémov, detašované pracovisko Poprad
Nábr. Jána Pavla II č. 3, 058 01 Poprad
e-mail: ladislav.kulcar@umb.sk, kulcar@hotmail.com