

Prístup žiakov 2. a 4. ročníka ZŠ k difúznej úlohe

IVANA KOVÁROVÁ

Abstract. *This paper deals with mathematical examples for pupils in the primary school.*

Difúzne úlohy sú novým nástrojom pre učiteľov vo vyučovaní matematiky. Keďže sa doteraz špeciálne nimi didaktici nezaoberali, skúmali sme ich z rôznych hľadísk. Postojmi učiteľov a žiakov druhého stupňa ZŠ k difúznym úlohám sme sa už v minulosti zaoberali [4]. V tomto príspevku sa zaoberáme postojmi žiakov prvého stupňa ZŠ k difúznym úlohám, pretože matematické myslenie detí sa formuje už i v tomto veku.

Podnety, ktoré sú v našom okolí, nie sú vždy jednoznačné, rovnako ako zadania niektorých matematických (difúzných) úloh. Najvýstižnejšie čitateľovi priblížime difúznu úlohu na konkrétnom príklade. Zadanie je pôvodne z učebnice matematiky pre 4. ročník ZŠ, pracujú s ním aj M. Hejný a F. Kuřina [2].

„Spočítajte všetky párne čísla, ktoré sú medzi číslami 5 a 21.“

Slovenčina umožňuje pre slovo „spočítajte“ dva odlišné výklady, jedným je „vypočítať súčet“ čísel (privedie k riešeniu 104) a druhým je „zistiť počet“ čísel (privedie k riešeniu 8).

V texte používame pojem *difúzna úloha* pre označenie matematickej úlohy formulovanej slovne, ktorej zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi. Je možné difúznu úlohu definovať i pomocou slovnej úlohy, nie však presne v zmysle definície slovnej úlohy vymedzenej M. Hejným [3]: „Matematickú úlohu formulovanú pomocou slov, ktorej riešenie vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životných skúseností nazveme *slovná úloha*.“ Je to prípustné len v prípade, ak by skúsenosti riešiteľa, ktoré ovplyvnili pochopenie textu boli tiež životnými skúsenosťami. V poslednej dobe sa spomínanými úlohami zaoberá M. Hejný, ktorý ich využíva ku skúmaniu edukačnej stratégie učiteľa [1].

Formulácia problému a stanovenie hypotéz

Je samozrejmé, že pohľad malého dieťaťa na svet okolo seba je odlišný od pohľadu dospelého človeka. Zúžené na matematiku a problém, ktorému sa venujeme, riešenia žiakov prvého stupňa ZŠ nám dávajú pohľad na úlohy z úplne inej stránky. Vzhľadom na moje skúsenosti s malými deťmi a pedagogické vzdelanie potrebné k práci s nimi, stanovenie hypotéz je značne teoretické.

Cieľom tejto štúdie je popísať rôzne prístupy žiakov k difúznej úlohe a na týchto prístupoch sledovať vývoj matematickej vyspelosti v závislosti od veku.

Predpokladáme, že žiaci nižších ročníkov ešte nie sú zviazaní didaktickým kontraktom: „nepoviem to, čo ja pokladám za správne, ale to, čo asi považuje učiteľ za správnu odpoveď“.

Metódy výskumu

Vo výskume sa snažíme porozumieť a pochopiť reakcie žiakov na difúziu úlohu. Pre splnenie stanovených cieľov sme považovali kvalitatívnu metódu výskumu za vhodnejšiu. V stručnosti spomenieme základné črty tejto metodológie.

Hlavným cieľom kvalitatívneho výskumu je porozumieť konkrétnemu človeku, pochopiť jeho vlastné hľadisko. Výskumník sa zaoberá konkrétnym prípadom, jedným alebo malou skupinou žiakov. Snaží sa o zblíženie so skúmanými osobami, pretože len tak im môže porozumieť.

Zistené výsledky sa uvádzajú v slovnej podobe, nie je možné ich matematicky spracovať rovnako ako nie je možné ich zovšeobecňovať. Prenikajú však do hĺbky skúmaného prípadu, objavujú nové súvislosti, ktoré sa hromadným výskumom objaviť nedajú a z nich vytvára nové hypotézy. Výsledkom je aj podrobný popis a analýza zvoleného prípadu.

Organizačná stránka a priebeh výskumu

Experiment bol realizovaný v apríli 2007 v druhom ročníku a v máji 2007 vo štvrtom ročníku jednej pražskej základnej školy. Bol v rozsahu 34 a 52 minút. V druhom ročníku prebiehal počas matematického krúžku a vo štvrtom počas vyučovacej hodiny. Po konzultácii s vyučujúcimi učiteľkami sme z každej triedy zvolili troch žiakov. Na začiatku prebehol úvodný rozhovor, kde sme sa predstavili a zoznámili so žiakmi. Oboznámili sme ich s organizáciou celého experimentu. Následne dvaja žiaci odišli do triedy. Prvému sme dali na lístku napísané zadanie úlohy, túto mal vyriešiť a neskôr prerozprávať privolanému druhému žiakovi. Ten mal úlohu riešiť a podobne i tretí žiak. Keď posledný úlohu doriešil, všetci postupne dostali na lístku napísané štyri preformulované zadanie pôvodnej úlohy, ktoré samostatne riešili.

Žiaci boli v úvodnom rozhovore vyzvaní, aby nevstupovali do riešenia spolužiakov. Štvrtáci boli disciplinovaní v priebehu celého experimentu a nezasahovali do riešenia ostatných. V druhom ročníku sa nepodarilo splniť uvedenú požiadavku, pretože reakcie detí boli ovplyvnené ich emóciami.

Celý experiment sme rozdelili do piatich častí:

1. Úvodný rozhovor
2. Samostatné riešenie prvého žiaka
3. Samostatné riešenie druhého žiaka
4. Samostatné riešenie tretieho žiaka
5. Spoločné riešenie dodatočných formulácií

Ako nástroj sme použili difúznú úlohu o 12-tich kockách, ktorá bola využitá i vo výskume na druhom stupni ZŠ [4]:

„Koľko kvádrov vieš poskladať z dvanástich rovnakých kociek?“

Túto úlohu sme zvolili preto, že ju mohli po malých úpravách riešiť i žiaci prvého stupňa. Voľbu tejto úlohy podporila i možnosť porovnať prístupy k nej žiakov prvého a druhého stupňa ZŠ. Samozrejme, bola nutná malá úprava, pretože žiaci druhého ročníka ešte presne neovládajú pojem „kváder“. Pre štvrtákov sme mohli už použiť pôvodné zadanie.

Zadanie uvádzame v českom jazyku, v takej podobe v akej si ho prečítali žiaci zúčastnení experimentu v druhom (štvrtom) ročníku.

„Kolik paneláků (kvádrů) umíš poskládat ze 12 kostek?“

Slovo kváder sme nahradili panelákom, pretože sme nechceli žiakom pred riešením definovať nový pojem. V úvodnom rozhovore sme sa o panelákoch rozprávali a zjednotili predstavy (panelák = kváder).

Ako sme už spomínali, táto úloha bola už prv predložená žiakom od 6. ročníka ZŠ ako i študentom po 3. ročník gymnázia. Na základe ich riešení sme preformulovali pôvodné zadanie a vznikli štyri rôzne interpretácie. Tieto sme v závere experimentu predložili i žiakom prvého stupňa ZŠ, čím sme sa snažili zistiť úroveň ich schopnosti čítať a rozumieť matematický text.

Nasledovné formulácie boli predkladané žiakom v takomto poradí:

1. *„Kolik umíš poskládat různých paneláků (kvádrů) z 12 kostek, abys použil všechny kostky při stavbě každého paneláku (kvádru)?“*
2. *„Kolik nejvíce stejných paneláků (kvádrů) umíš poskládat ze 12 kostek, abys použil při stavbě všechny kostky?“*
3. *„Při stavbě jsi použil všech 12 kostek a postavil jsi několik stejných paneláků (kvádrů). Jaké paneláky (kvádry) jsi mohl postavit?“*
4. *„Kolik paneláků (kvádrů) umíš poskládat ze 12 kostek, když nemusíš při stavbě použít všechny kostky a pokaždé skládáš jiný panelák (kvádr)?“*

Keďže sme od žiakov druhého ročníka nemohli očakávať, že vedia zapísať riešenie podobnej geometrickej úlohy, mali k dispozícii rovnako veľké stavebné kocky a svoje riešenie poskladali. Je dôležité ujasniť, že v češtine slovo „kostka“ neznačí vždy vyslovene „kocku“ v slovenčine, ale napríklad súčasť stavebnice. V našom konkrétnom prípade to však neovplyvnilo žiacke riešenia, pretože časti použitej stavebnice mali iba tvar kocky.

Zároveň sme sa snažili, aby sa podmienky riešenia v oboch ročníkoch nelíšili, preto i žiaci štvrtého ročníka mali k dispozícii kocky. Experiment sme nahrávali kamerou a z tohto záznamu sme vytvorili protokol. Následne sme celý záznam analyzovali. Snažili sme sa popísať všetky javy, ktoré sa odohrali. Javy sme delili na tri hlavné skupiny: sociálne, emocionálne a kognitívne a dodatočne i podľa aktéra javu. Napriek tomu, že i sociálne a emocionálne javy majú nesmiernu výpovednú hodnotu, sústredíme pozornosť hlavne na kognitívne javy. Tieto sa zameriavajú na chápanie žiakov, čo je pôvodným objektom výskumu.

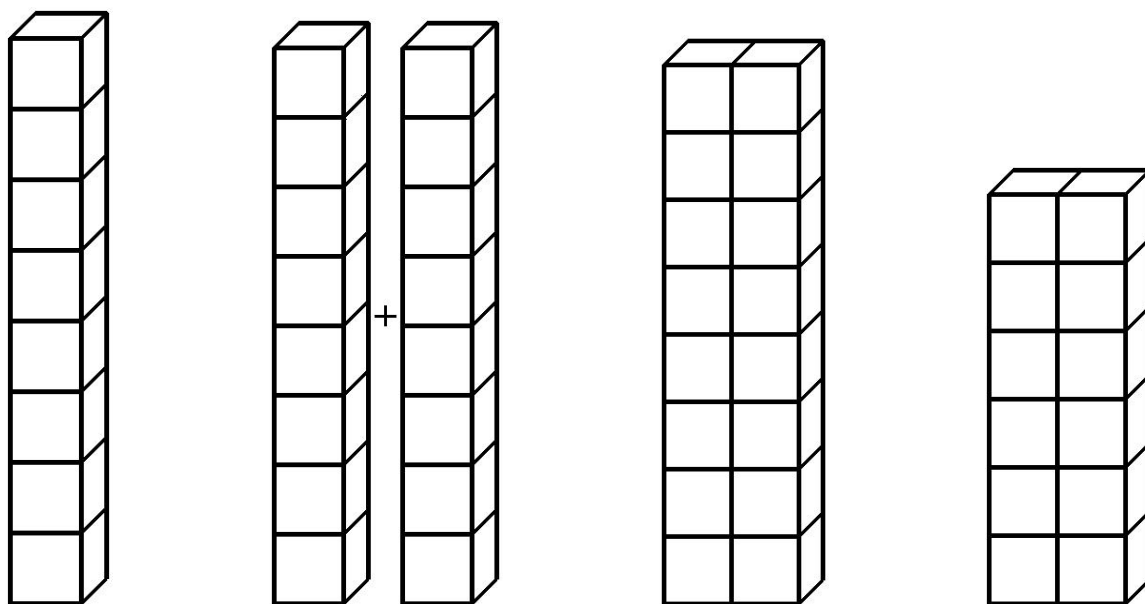
Výsledky výskumu

Analýza uvedeného experimentu je značne náročná nielen na potrebný čas ale i objem výstupných materiálov. Čitateľa nebudeme zaťažovať protokolom a analýzou získaných materiálov, oboznámime ho len s celkovými výsledkami týkajúcimi sa chápania difúznej úlohy žiakmi, ich matematickej vyspelosti a jej vývoja (teda kognitívnymi javmi).

Je prirodzené, že riešitelia napríklad interpretácie 1 nepostavili všetky štyri kvádre, ktoré sú jej riešením. Od takých malých žiakov by sme kompletne riešenie ani nemohli očakávať, pretože ešte nie sú natoľko matematicky vyspelí. Už i podľa jedného postaveného paneláka a podľa ich celkového prejavu sme mohli odhadnúť, v ktorej interpretácii riešia úlohu. Pre názornosť ďalšieho textu prikladáme obrázky znázorňujúce ich priestorové riešenie.

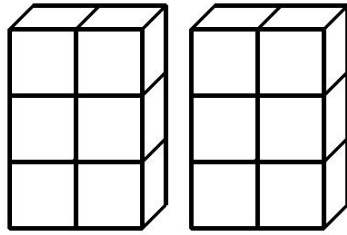
Pochopenia úlohy žiakmi druhého ročníka (číslovanie interpretácií je uvedené vyššie):

Prvá žiačka poskladala kváder $1 \times 1 \times 8$, snažila sa však pridať i ďalšiu kocku. K nemu (po otázke: „Vedela by si postaviť ešte nejaký panelák?“) postavila ešte jeden taký istý. Tieto sa jej zrútili, preto postavila kváder $2 \times 1 \times 8$ so slovami: „Já to postavím radši u sebe.“ a po jeho zrútení postavila kváder $2 \times 1 \times 6$ s vyjadrením: „Širší panelák.“

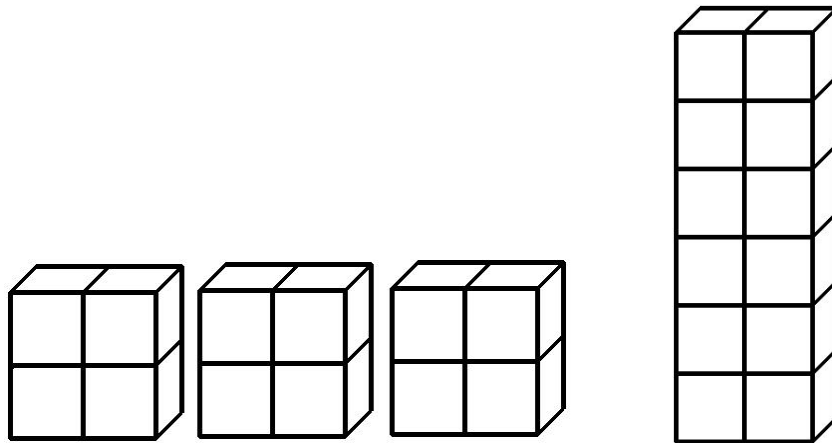


Zo sledu stavaných kvádrov je zrejмый postupný vývoj riešiteľkinho uvažovania. Najskôr sa snažila postaviť „čo najvyššiu vežu“, kôli stabilite veže spája k sebe a až na záver si uvedomí, že môže postaviť aj „Širší panelák“. Jej riešenie by sme zaradili k interpretácií 1.

Druhá žiačka bez dlhšieho váhania postavila dva kvádre $2 \times 1 \times 3$ a oznámila výsledok: „Dva.“. Svoje riešenie slovné nekomentovala a ďalšie stavby postaviť už nevedela. Úlohu teda riešila v interpretácii 3.



Tretí žiak po vypočítaní zadania postavil bez dlhšieho uvažovania tri kvádre 2x1x2. Jeho spolužiačka, hoci bola vopred upozornená že nemá reagovať, sa mu zasmiala a zavrtela nesúhlasne hlavou. Chlapec stavbu zrútil a neskôr postavil kváder 2x1x6.

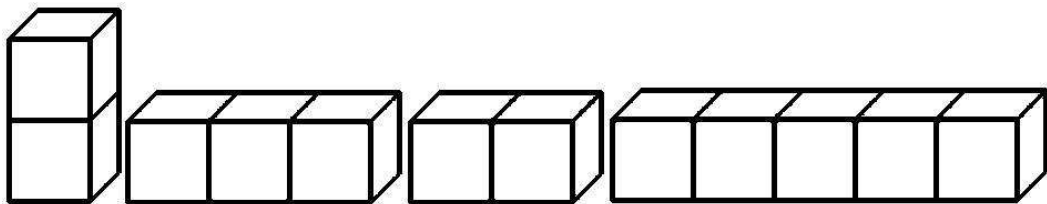


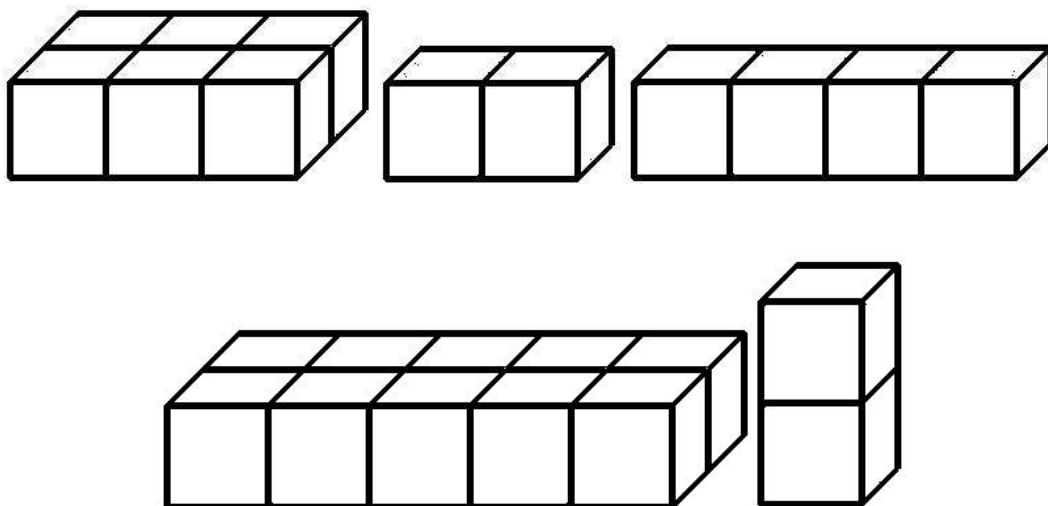
Riešenie tretieho žiaka bolo zaujímavé tým, že bez problémov vedel pohotovo zareagovať a zmeniť použitú interpretáciu, z pôvodnej interpretácie 3 na interpretáciu 1. V poslednej časti experimentu v tejto skupine vznikol mierny chaos, pretože zúčastnení žiaci už boli nesústredení. V dodatočne predložených štyroch interpretáciách nepostrehli žiadne rozdiely.

Pochopenia úlohy žiakmi štvrtého ročníka:

Prvý štvrták nás svojím riešením prekvapil. V riešeniach žiakov druhého stupňa ZŠ v predchádzajúcom výskume sa podobné riešenie nenašlo, preto nebolo ani v ponúknutých interpretáciách štvrtákom. Doplníme príslušnú interpretáciu:

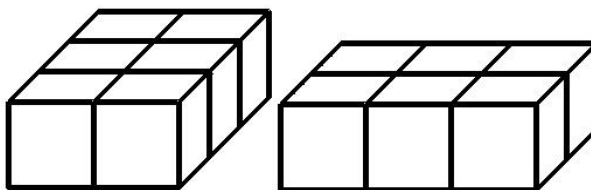
5. „Koľko existuje rôznych skupín kvádrov, ktoré obsahujú práve 12 rovnakých kociek?“



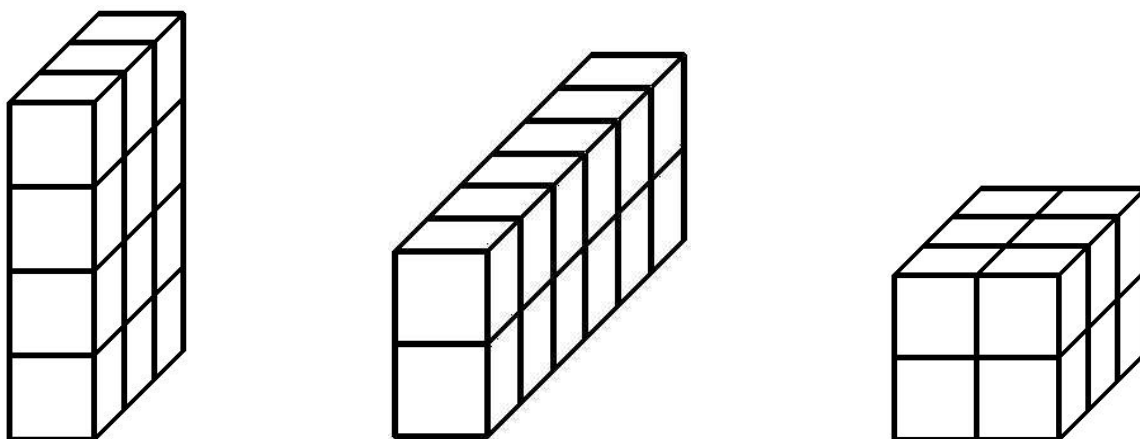


Podobných skupín postavil ešte sedem.

Druhá žiačka postavila ako prvé kvádre $2 \times 3 \times 1$ a $3 \times 2 \times 1$, teda riešila úlohu najskôr v interpretácii 3.



Plynulo bez slovného vysvetlenia prešla k interpretácii 1 (postavila kvádre $1 \times 3 \times 4$, $1 \times 6 \times 2$ a $2 \times 3 \times 2$).



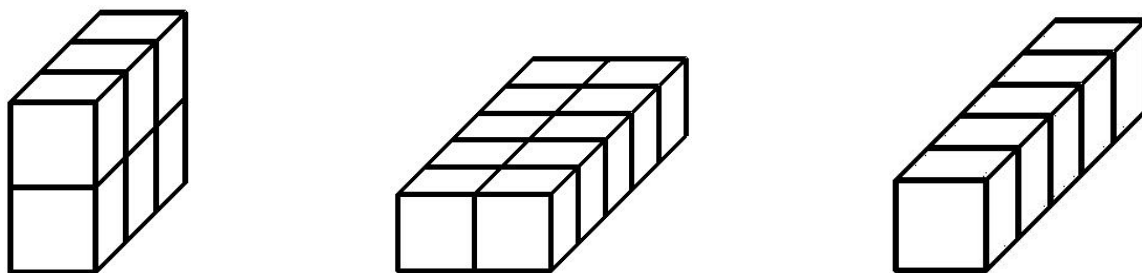
„13 kvádrů vím postavit. ...jeden, pak zbořit a pak druhý.“ Podobných kvádrov poskladala viac ako 13 a potom sa začala pýtať:

„A musí bejt 12 těch kostek?“

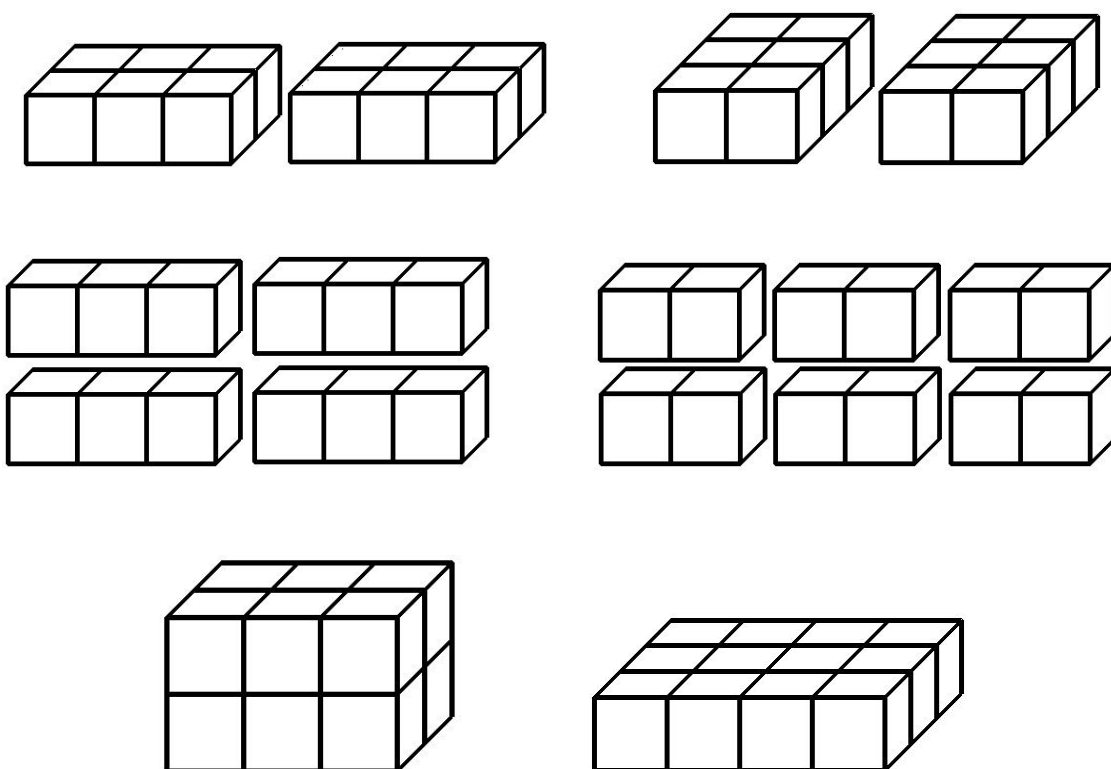
„A koľko by si chcela použiť?“

„Míň, například 6.“

Po tomto krátkom rozhovore začala skladať kvádre $1 \times 3 \times 2$, $2 \times 5 \times 1$, $1 \times 5 \times 1$, ...teda riešila v interpretácii 4.



Posledný štvrták riešil zadanie v interpretácii 3 a postavil dva kvádre $3 \times 2 \times 1$, dva kvádre $2 \times 3 \times 1$, štyri kvádre $3 \times 1 \times 1$, šesť kvádrov $2 \times 1 \times 1$ a kvádre $3 \times 2 \times 2$ a $4 \times 3 \times 1$.



Posledná časť experimentu u štvrtákov sa podstatne líšila od situácie u druhákov. Neskôr predložené štyri interpretácie pokladali za rozdielne s pôvodným zadáním, každá bola pre nich novou úlohou, ktorú vyriešili.

Je zaujímavé si všimnúť, že až u troch žiakov zo šiestich bolo možné postrehnúť ich reinterpretáciu počas samostatného riešenia. Vidíme v tom jednu z predností kvalitatívneho výskumu. Umožňuje nám sledovať prípadné zmeny stratégie či interpretácie u jednotlivých riešiteľov. Druháci nevideli žiaden rozdiel v ponúknutých interpretáciách, no štvrtáci už čítali matematický text s uvedením a postrehli všetky odlišnosti. Aj toto svedčí o tom, že štvrtáci sú matematicky vyspelejší ako druháci.

Rozšírením uvádzaného výskumu by bol podobný experiment v každom ročníku ZŠ. Pripúšťame, že žiaci nájdu aj ďalšie interpretácie pôvodnej úlohy a predpokladáme, že by sa bližšie postrehol vývoj matematickej vyspelosti žiakov.

Literatúra

- [1] HEJNÝ, M.: Rozmanitosť riešení žiakov ako diagnostický nástroj edukačného štýlu. In: *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2005, zborník príspevkov*, Kováčová pri Zvolene, s. 19 - 31, ISBN 80-969414-3-7.
- [2] HEJNÝ, M.; KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*, Praha, Portál, 2001, ISBN 80-7178-581-4.
- [3] HEJNÝ, M.: Anatomia slovnej úlohy o veku. In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, zborník príspevkov, Ružomberok: PF KU, 2003.
- [4] KOVÁROVÁ, I.: Analýza žiackych interpretácií a riešení difúznej úlohy o kockách. In: *Zborník príspevkov konferencie Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok, 2006, s.158 - 164, ISBN 978-80-8084-187-4.

Adresa autorky:

Mgr. Ivana Kovárová
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta
Univerzity Pavla Jozefa Šafárika
Jesenná 5
041 54 Košice
e-mail: ivana.kovarova@upjs.sk