Zajímavé typy zkoumání (vhodné i pro začátečníky)

Interesting Types of Investigations (avalable also for beginners)

Jan Kopka

Keywords: art of problem solving, investigation in school mathematics, search for pattern, iterating a certain procedure, exceptions and special cases, generalizing given problem

Abstrakt: Investigative work is a suitable introduction to the art of problem solving.
There are several types of investigations avalable for beginners (but not only for beginners): search for patterns, iterating a certain procedure, looking for exceptions and generalizing given problem. Every type is demonstrated with the help of a simple example.

Pokud žáci a studenti zkoumají např. vlastnosti čísel nebo geometrických obrazců, mohou objevit mnohé zákonitosti pro ně zcela nové a mohou tak dospět k zajímavým problémům. Zkoumání je určitě nejen dobrým úvodem k **umění řešit problémy**, ale také mnohdy účinný způsob, jak problémy vyřešit. V tomto článku chceme ukázat příklady na několik typů zkoumání, které jsou velmi vhodné i pro žáky druhého nebo studenty na začátku třetího stupně. Jsou to např. tyto typy:

1. hledání zákonitosti a její popis formulí,
2. opakování určitého postupu a analyzování výsledku,
3. hledání výjimek a speciálních případů,
4. zobecnění daného problému.

Na každý tento typ uvedeme jeden charakteristický a přitom jednoduchý příklad (poslední bude trochu složitější, ale o to zajímavější).

Pro příklad na **hledání zákonitosti** použijeme trojúhelníková čísla.

Trojúhelníková čísla jsou čísla 1, 3, 6, 10, 15, ... (viz obr. 1).

.	**1**
. .	2 **3**
. . .	4 5 **6**
. . . .	7 8 9 **10**

Obr.1

Dohodněme se, že k označování trojúhelníkových čísel budeme používat písmeno T a to takto:

$$T_1 = 1,\ \ T_2 = 3,\ \ T_3 = 6,\ \ T_4 = 10,\ \ \text{atd..}$$

Pro *n*-té trojúhelníkové číslo platí: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Problém 1: Zkoumejte součty dvou sousedních trojúhelníkových čísel. Např. 6 + 10 = 16 .

Řešení:

Experimentování (systematické):

1 + 3 = **4**	6 + 10 = **16**
3 + 6 = **9**	10 + 15 = **25**

Prohlédneme-li si čísla 4, 9, 16, 25 vidíme, že jsou to čísla čtvercová. Zobecněním (indukční úvahou) dostaneme:

Hypotéza 1: Sečtením dvou sousedních trojúhelníkových čísel dostaneme nějaké číslo čtvercové.

Uvedenou hypotézu můžeme ještě vylepšit. Budeme **znovu experimentovat**.

$T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

$T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2$

$T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$

$T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25 = 5^2$

Výsledky těchto experimentů můžeme opět zobecnit. Dostaneme tak vylepšenou hypotézu a zapíšeme ji již symbolicky (C_n značí n-té čtvercové číslo):

Hypotéza 2: $(\forall n \in N)\ T_n + T_{n+1} = C_{n+1}$

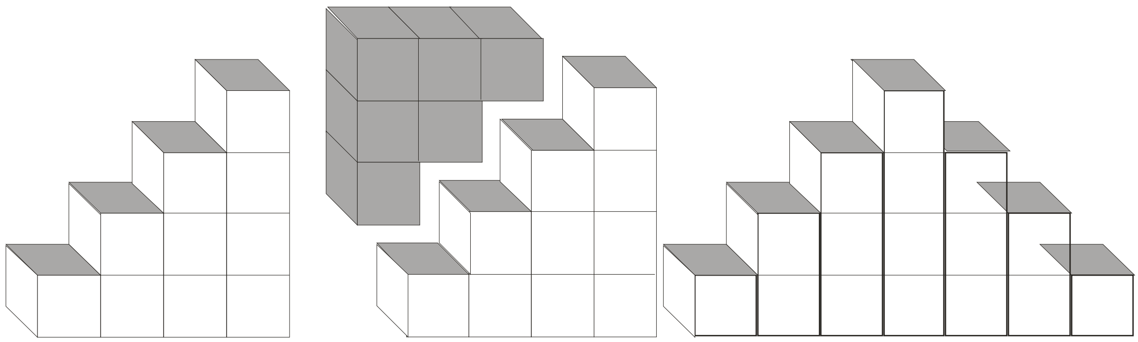
Tuto hypotézu můžeme **ověřit** pro další n, např. $n = 5, 6, 7$. Tím jsme se ještě více utvrdili v přesvědčení, že naše hypotéza je pravdivá. Proto přišel čas tuto hypotézu dokázat.

Důkaz (výpočtem)**:** Nechť n je libovolné přirozené číslo. Pak

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = C_{n+1}$$

Po tomto důkaze můžeme uvedenou hypotézu přejmenovat na **matematickou větu**.

Právě jsme ukázali typický příklad zkoumání matematické situace. Pokud bychom chtěli hypotézu objevit s mladšími žáky, lze k tomu k tomu využít kostičky, pomocí nichž bychom stavěli schodiště. Počty použitých kostiček odpovídají trojúhelníkovým číslům (viz obr. 2 a)). Námi výše objevená vlastnost je znázorněna na obr. 2 b) a c)?.



a) b) c)

Obr. 2

Čtenář může zkusit ještě jiné jednoduché zkoumání trojúhelníkových čísel.

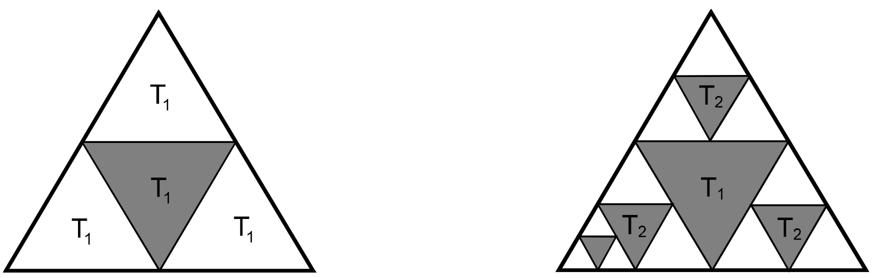
Problém 1a: První dvě trojúhelníková čísla jsou lichá, další dvě jsou sudá. **Zkoumejte** výskyt sudých a lichých čísel mezi trojúhelníkovými čísly.

Nyní se budeme zabývat **opakováním určitého postupu**. Opakování nějakého postupu znamená provedení tohoto postupu na nějaký matematický objekt (například číslo nebo obrazec) několikrát za sebou. Přesněji řečeno: Na nějaký objekt provedeme určitý postup. Na objekt, který takto dostaneme, opět provedeme tento postup, atd. Analyzovat výsledek znamená zjistit, co se stalo.

Problém 2: Nechť T_0 je rovnostranný trojúhelník jednotkového obsahu. Rozdělíme tento trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky T_1 spojením středů jeho stran a odstraníme střední trojúhelník (viz obr. 3 a)). Ze zbylými třemi trojúhelníky budeme zacházet stejně. Opět je rozložíme na čtyři shodné trojúhelníky T_2 a prostřední odstraníme[1] (viz obr. 3 b)). Uvedený postup zopakujeme n-krát. Zjistěte:

a) Jaký je součet obsahů S_n odstraněných trojúhelníků po n krocích?

b) Co se stane se součtem S_n, když se n blíží k nekonečnu?



a) b)

[1]Někdo by mohl namitnout, jak můžeme hledat střed úsečky, kterou jsme před tím odstranili. To je však poplatnost teorii množin, která v současné době ovládá matematiku. Geometři jsou na takovéto situace zvyklí a nikterak je netrápí..

Obr. 3

Řešení: Opakování výše popsaného postupu vede k těmto výsledkům:

1. krok ..... 1 odstraněný trojúhelník T_1 o obsahu $\frac{1}{4}$

2. krok..... 3 odstraněné trojúhelníky T_2 o obsahu $(\frac{1}{4})^2$

3. krok..... 3^2 odstraněných trojúhelníků T_3 o obsahu $(\frac{1}{4})^3$

a v *n*-tém kroku

3^{n-1} odstraněných trojúhelníků T_n o obsahu $(\frac{1}{4})^n$.

a) Po *n*-tém kroku je obsah S_n všech odstraněných trojúhelníků následující:

$$S_n = 1\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + 3^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Poznamenejme, že výše jsme počítali částečný součet S_n geometrické posloupnosti, pro kterou platí: $a_1 = \frac{1}{4}$ a $q = \frac{3}{4}$. Dostali jsme tedy, že

$$S_n = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

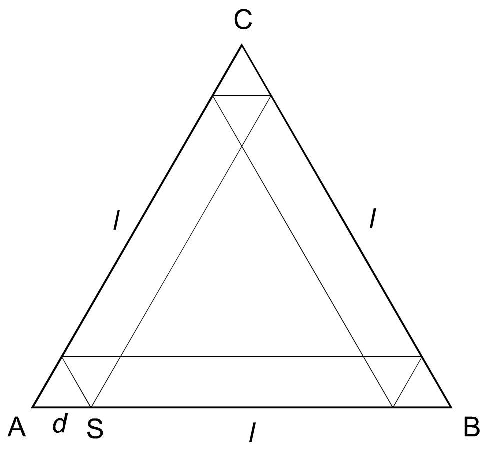
b) Jestliže se n blíží k nekonečnu, pak se $(\frac{3}{4})^n$ blíží k nule a S_n se blíží k 1. Odstraněný útvar má tak obsah 1.

Poznamenejme, že úvahy, které jsme dělali v části b) jsou dobrou přípravou na pozdější probírání limit posloupností a funkcí.

Hledání výjimek a speciálních případů je důležité z mnoha důvodů. Uveďme zde alespoň dva.

- V reálné situaci často představuje výjimka nejlepší řešení (např. nejkratší cestu mezi dvěma místy).
- Pokud při řešení problému přehlédneme výjimky či speciální případy, může to vést k chybám

Problém 3: Obrázek 4 ukazuje tři zrcadla délky l tvořící rovnostranný trojúhelník ABC. Na straně AB ve vzdálenosti d od bodu A je bod S. V bodě S je umístěn zdroj světla. Světelný paprsek vycházející z bodu S svírá se stranou AB úhel 60° a odráží se od stran trojúhelníka ABC, dokud se nevrátí do bodu S. Určete délku dráhy paprsku pomocí délky l.



Obr. 4

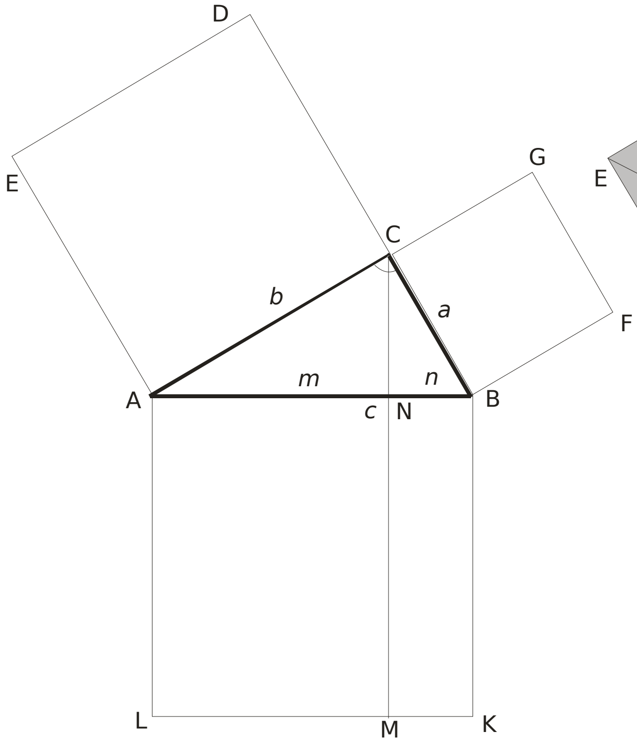
Řešení: Není těžké ukázat, že délka dráhy světelného paprsku je 3*l*. V tomto vyjádření se *d* nevyskytuje. Zdá se proto, že délka dráhy světelného paprsku je stejná pro všechny pozice bodu S na straně AB, tzn., že tato délka vůbec nezávisí na *d*. Ale **pozor**! Je zde jedna **výjimka**. Jestliže je bod S ve středu strany AB, pak délka dráhy paprsku je pouze 3/2**.***l*.

Nyní se budeme zabývat **zobecněním**. Ukážeme, jak obecnější problém může mít jednodušší řešení než problém původní. Naše ukázka se týká Pythagorovy věty a jednoho jejího možného zobecnění. Začneme proto samotnou Pythagorovou větou.

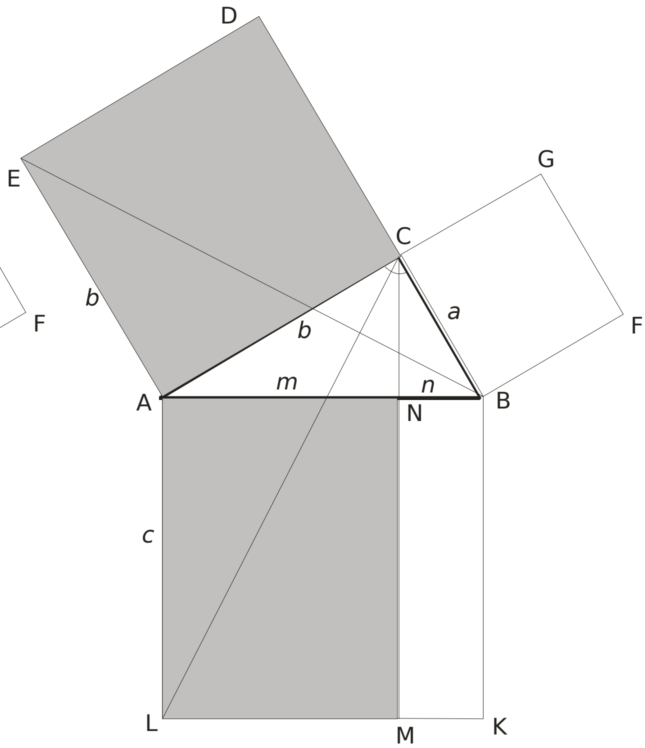
Věta Pythagorova: Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.
To znamená, že v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou *c* a odvěsnami *a*, *b* platí:

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Existuje mnoho důkazů této věty, my zde však vypišme **důkaz**, jak ho ve třetím století před Kristem dělal Euklides.



a)



b)

Obr. 5

Nechť ABC je libovolný pravoúhlý trojúhelník s přeponou c (viz obr. 5 a)). Nad stranami tohoto trojúhelníka sestrojíme čtverce. Z vrcholu C spustíme kolmici na stranu AB a její patu označíme N. Bod N dělí úsečku AB na dvě úsečky mající délky m a n. Přímka CN rozdělí obrázek 5a) na dvě části. Budeme se zabývat situací v levé části tohoto obrázku. Dokážeme, že obsah obdélníka ALMN je stejný jako obsah čtverce nad stranou AC, tj. čtverce ACDE. Tento dílčí důkaz zprostředkují trojúhelníky ABE a ALC (viz obr. 5b)). Tyto trojúhelníky jsou shodné, protože mají oba stranu b, stranu c a shodný i úhel, který tyto strany svírají. Proto mají uvažované trojúhelníky i stejný obsah. Trojúhelník ABE má obsah $b^2/2$ (výška na stranu AE má délku b) a trojúhelník ALC má obsah $c.m/2$ (výška na stranu AL má délku m). Protože $b^2/2 = c.m/2$, platí i

$$b^2 = c.m\ .$$

Tím jsme dokázali (jako pomocnou) větu, které se dnes říká Euklidova věta o odvěsně.
Zcela analogicky se dokáže, že $a^2 = c.n$.
Protože $cm + cn = c^2$, je vztah (1) dokázán.

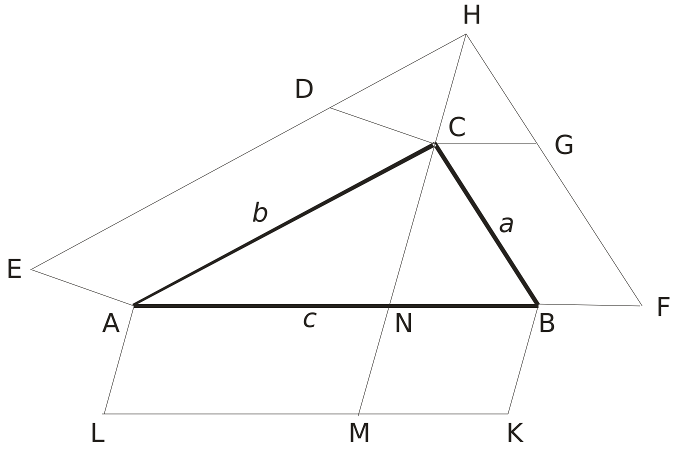
□

Nyní vyslovíme větu, kterou uvedl Pappus ve své sbírce 600 let po Euklidovi.

Věta Pappova: Nechť ABC je libovolný trojúhelník a nechť ACDE a CBFG jsou libovolné rovnoběžníky nad stranami AC a CB (viz obr. 6). Přímky ED a FG se protínají v bodě H. Jestliže nad stranou AB sestrojíme rovnoběžník ALKB tak, že strany AL a BK jsou shodné a rovnoběžné s úsečkou HC, pak platí

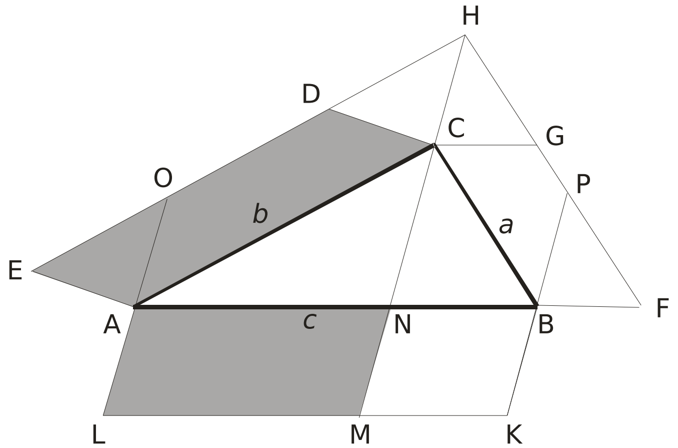
obsah ACDE + obsah BFGC = obsah ALKB .

Dokažte.



Obr. 6

Důkaz bude jednodušší než asi v tuto chvíli očekáváte. Pappus jistě znal Euklidův důkaz Pythagorovy věty, který jsme ideově výše ukázali. Zřejmě toho využil a elegantně analogicky dokázal její právě vyslovené zobecnění.



Obr. 7

Důkaz: Nechť ABC je libovolný trojúhelník a nechť ACDE a CBFG jsou libovolné rovnoběžníky nad stranami AC a CB (viz obr. 6). Přímky ED a FG se protínají v bodě H. Na přímce EH sestrojíme bod O tak, že úsečka AO je rovnoběžná s CH. Obdobně na přímce FH sestrojíme bod P tak, že úsečka BP je rovnoběžná s CH (viz obr. 7). Přímka CH rozdělí obrázek na dvě části. Budeme se zabývat situací v levé části tohoto obrázku. Dokážeme, že rovnoběžník ACDE má stejný obsah jako rovnoběžník ALMN. Zprostředkovatelem k tomuto částečnému důkazu bude rovnoběžník ACHO.

Rovnoběžník ACDE má stejný obsah jako rovnoběžník ACHO (stejná základna AC a stejně dlouhá výška na tuto základnu).

Rovnoběžník ACHO má stejný obsah jako rovnoběžník ALMN (stejně dlouhé základny |MN| = |CH| a stejně dlouhá výška na tyto základny).

Proto je i obsah rovnoběžníka ACDE stejný jako obsah rovnoběžníka ALMN. Nyní jsme vlastně dokázali zobecnění Euklidovy věty o odvěsně. Vyslovte tuto zobecněnou větu.

Analogicky má stejný obsah rovnoběžník CBFG a rovnoběžník NMKB. Zprostředkovatelem k tomuto zdůvodnění je rovnoběžník CBPH.

Z uvedeného proto vyplývá, že obsah rovnoběžníka ALKB je roven součtu obsahů rovnoběžníků ACDE a CBFG. Tím je věta dokázána. ☐

Speciálním případem Pappovy věty je skutečně věta Pythagorova. Pokud vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníka a nad jeho odvěsnami sestrojíme čtverce, pak uvedená konstrukce vede ke čtverci nad přeponou.Vyzkoušejte si to. Co by se stalo, kdybyste sestrojovali nejprve čtverce nad přeponou a jednou odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka?

Zopakujme, co je pro Euklidův a Pappův důkaz společné či přesněji analogické: Každý tento důkaz je rozdělen pomocí vhodné přímky (**strategie pomocného prvku**) na dvě části, přičemž úvahy týkající se těchto částí jsou analogické. Důkaz, že obsahy obou uvažovaných obrazců v každé části jsou stejné se provádí vždy přes nějaký zprostředkující obrazec či obrazce. Z uvedeného je tak dobře vidět, jak plodnou strategií je **analogie**. Navíc je vidět, že důkaz věty Pappovy, která je, jak jsme ukázali, zobecněním věty Pythagorovy, je dokonce snazší a průhlednější, něž podaný důkaz věty Pythagorovy. To zase ukazuje, že i **zobecnění** je v některých případech velmi vhodná strategie při řešení problémů. Další strategií, kterou jsme užili a na kterou nesmíme zapomenout, je **strategie geometrického znázornění**.

Zopakujme na **závěr**, že všechny typy zkoumání, které jsme výše uvedli, jsou vhodné nejen pro začátečníky, ale i pro ty, kteří jsou v této oblasti již pokročilí. Vždyť zkoumání těchto typů běžně provádějí i tvůrčí matematici.

Literatura:

Cofman, J.: What to Solve? New York, Oxford Univerzity Press, 1990.
Kopka, J.: Hrozny problémů ve školské matematice. Ústí nad Labem, UJEP, 1999.
Kopka, J.: Zkoumaní ve školské matematice. Ružomberok, Katolická univerzita, 2006.
Vopěnka, P.: Rozpravy s geometrií. Praha, Panorama, 1989.

Adresa autora:

Prof. RNDr. Jan Kopka CSc.
PrF UJEP
České mládeže 8
40096 Ústí nad Labem
Česká Republika