Stručná správa o harmónii

DUŠAN JEDINÁK

ABSTRACT. Brief note about harmony. Didactic muse above definition of harmony in school mathematics.

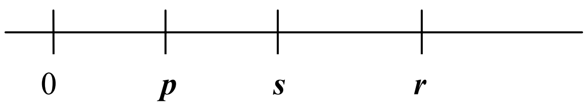
MESC: A30

V hlbinách histórie

Už *Archytas z Tarentu* (asi 428-365 pred n. l.) uvádzal niekoľko typov stredných veličín – priemerov a medzi nimi aj aritmetický, geometrický a **harmonický priemer**. Ak bola daná trojica kladných čísiel $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$, tak harmonický priemer bol daný ako $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$; z toho vyplýva, že $b = \frac{2.a.c}{a+c}$ (čo je aj dnes **harmonický priemer** čísiel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$). Podobné údaje uvádzal aj *Nikomachos z Gerasy* (prvá polovica 2.storočia n. l.) a *Boethius* (asi 480-524/5). *Izidor zo Sevily* (asi 570-636) tvrdil, že *podľa hudby hľadáš stred takto: Akým pomerom prostredné prevyšuje prvé, takým pomerom je prostredné prevýšené posledným.* V jeho *Etymológii* je o harmonickom priemere uvedené: *Harmonický priemer získaš nasledujúcim spôsobom: Ak sa vezmú krajnosti, napríklad 6 a 12, vidíš, o koľko jednotiek je 6 prevýšené dvanástimi, teda o 6 jednotiek. Potom to umocníš: šesťkrát 6 dáva 36. Potom sčítaš tie prvé krajnosti, 6 a 12, dávajú dohromady 18. Vydelíš 36 osemnástimi a dostaneš výsledok 2. Ten pričítaš k menšej krajnosti (to znamená k 6) a výsledok je 8, čo je* ***harmonický stred*** *medzi 6 a 12. Ako 8 prevyšuje 6 o dve jednotky, to znamená o tretinu zo 6, tak aj 8 je prevyšované dvanástimi o štyri jednotky, teda tiež o tretinu z 12. Je teda prevyšované tým istým pomerom, ktorým prevyšuje.*

V dnešnom zápise to môžeme chápať a vysvetliť takto:

Ak prvé je **p**, posledné **r**, tak pre prostredné **s** (s uvedenou vlastnosťou) bude platiť (pozri obr.1)



obr. 1

$$\frac{s-p}{p} = \frac{r-s}{r},$$

teda $s{\cdot}r - p{\cdot}r = p{\cdot}r - p{\cdot}s$

$$s{\cdot}(r+p) = 2{\cdot}p{\cdot}r$$

$$\boldsymbol{s} = \frac{2 \cdot p \cdot r}{p+r}$$

a to je náš ***harmonický priemer čísel p, r***.

K pojmu harmónia

Harmónia znamená (z gréčtiny) súlad, súzvuk, súhra, vyrovnanosť, súmernosť časti a celku, proporcionalita. Výraz zákonitosti a miery vo svete.

V matematike je zadefinované:

Nech sú dané na priamke dva rôzne body A, B a bod X ≠ B.
Pomer usporiadanej trojice bodov A, B, X je číslo λ(ABX) = ± |AX| / |BX| . Ak je X vonkajším bodom úsečky AB, alebo X = A, platí + ; ak X je vnútorným bodom úsečky AB platí - .

Nech sú dané na priamke dva rôzne body A, B a bod X, X ≠ B a bod Y, Y ≠ B.
Dvojpomer usporiadanej štvorice bodov A, B, X, Y je číslo δ(ABXY) = λ (ABX)/ λ (ABY).

Usporiadanú štvoricu bodov, ktorých dvojpomer sa rovná –1 nazývame ***harmonická štvorica bodov*** (body X, Y sú *harmonicky združené* vzhľadom na body A, B).

Ak pre harmonickú štvoricu bodov ABXO označíme OA = a, OB = b, OX = x, tak dostaneme:

$$-1 = \delta(ABXO) = \frac{\lambda(ABX)}{\lambda(ABO)}$$

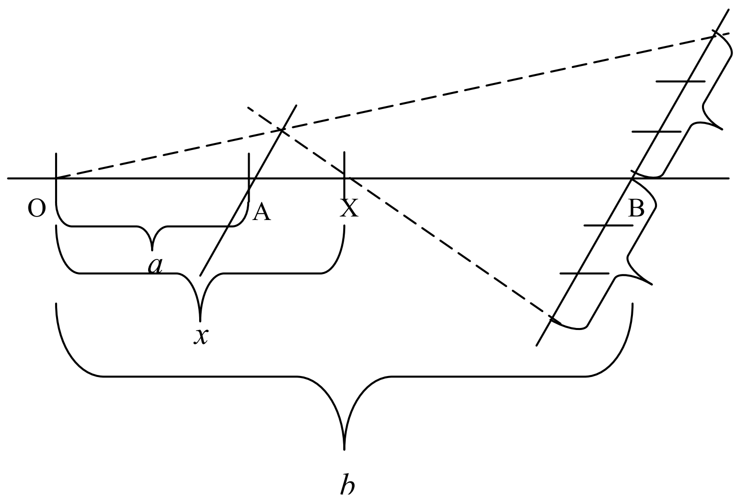
$$-1 = \frac{-\frac{|AX|}{|BX|}}{+\frac{|AO|}{|BO|}} = \frac{-\frac{(x-a)}{(b-x)}}{\frac{a}{b}}$$

$$-1 = -\frac{b(x-a)}{a(b-x)}$$

$$ab - ax = bx - ab$$

$$2ab = ax + bx$$

$$x = \frac{2ab}{a+b};$$



ale aj $x = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$

Pre nenulové čísla a, b budeme výraz $x = (2.a.b) / (a + b)$ t.j. aj $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ nazývať

harmonický priemer čísiel a, b (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).

Všeobecnejšie: **harmonický priemer** kladných čísiel $x_1, x_2, ..., x_n$ je $x_{harm.} = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$.

Harmonický rad je nekonečný rad, v ktorom každý jeho člen (okrem prvého) je harmonickým priemerom oboch svojich susedných členov, napr. rad, ktorého n -tý člen $a_n = \frac{1}{n}$, t.j.

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ tento rad je divergentný, jeho súčet je $+\infty$, lebo

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+...........+\frac{1}{16}\right)}+...$$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$ $\qquad >\frac{1}{2}$ $\qquad \ldots$

Ale $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0{,}5772156649\ldots$ (*Eulerova konštanta*, o ktorej sa nevie, či je číslom racionálnym alebo iracionálnym).

Rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}.\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ nazývame ***anharmonický rad***, konverguje a má súčet ln 2.

Priemerná rýchlosť je harmonickým priemerom

Úloha: Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.

Riešenie: Priemer dvoch čísel *m*, *n* počítame ako $\frac{m+n}{2}$.

$\frac{m+n}{2}$ nazývame *aritmetický priemer* čísel *m*, *n*.

Ak sa vám však zdá, že priemerná rýchlosť z danej úlohy je 50 km/h, tak sa mýlite.

Priemerná rýchlosť vo fyzike je podiel celkovej dráhy ku spotrebovanému času.

Teda:

tam...........*dráha* s ....*rýchlosť* v_1= 60 km/h ....*čas* t_1

späť..........*dráha* s ....*rýchlosť* v_2 = 40 km/h. ....*čas* t_2

celková dráha 2.s ....*rýchlosť* v ....*čas* t_1+t_2

priemerná rýchlosť: $\bar{v}=\frac{2s}{t_1+t_2}$

po úprave: $\bar{v}=\frac{2s}{\frac{s}{60}+\frac{s}{40}}=\frac{2s}{\frac{5s}{120}}=\frac{240s}{5s}=$ 48 km/h

V matematike máme zavedený aj harmonický priemer *a*, *b* ($a, b\in R^+$) ako

$\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).

Potom vidíme, že priemerná rýchlosť pohybu po tej istej trase dvomi rôznymi rýchlosťami je **harmonickým priemerom** oboch rýchlostí $\bar{v}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$.

Harmónia aj s faktoriálom

Úloha: Ukážte, že ak **n!** (pre každé $n \in N$) postupne vydelíme číslami 1, 2, 3, ..., n-1, n dostaneme **harmonickú postupnosť**.

Riešenie: Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ je **harmonická**, ak pre každé $k \in \{2, ..., n\text{-}1\}$ platí:

$$a_k = \frac{2.a_{k-1}.a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}$$ (k – tý člen je harmonickým priemerom svojich susedov).

Pre náš prípad je $a_k = \frac{n!}{k}$, $k \in \{1, 2, ..,.n\text{-}1, n\}$; ukážeme,

že $\frac{n!}{k} = \frac{2.\frac{n!}{k-1}\cdot\frac{n!}{k+1}}{\frac{n!}{k-1}+\frac{n!}{k+1}}$, pre každé $k \in \{2, ...\ n\text{-}1\}$.

Upravujeme pravú stranu:

$$\frac{2\cdot\frac{n!}{k-1}\cdot\frac{n!}{k+1}}{\frac{n!}{k-1}+\frac{n!}{k+1}} = \frac{2\cdot\frac{n!\cdot n!}{(k-1)\cdot(k+1)}}{\frac{n!\cdot(k+1+k-1)}{(k-1)\cdot(k+1)}} = \frac{2\cdot n!\cdot n!}{n!\cdot(2k)} = \frac{n!}{k}$$

Napríklad pre n = 6 platí: 6!/1, 6!/2, 6!/3, 6!/4, 6!/5, 6!/6, t.j. 720, 360, 240, 180, 144, 120.

Táto postupnosť spĺňa definíciu harmonickej postupnosti.

Ukázali sme, že každý člen spomínanej postupnosti (okrem prvého a posledného) je harmonickým priemerom svojich susedov a to znamená, že spomínaná **postupnosť je harmonická**.

Záver

Dôslednejšie pochopenie tu spomínanej harmónie, nám naznačuje nielen hlbšie historické korene matematických pojmov, ale aj ich zdôvodnenejšie vysvetľovanie v školskej matematike a prípadné používanie v aplikovaných matematických odboroch. Vnímanie harmónie nie je len estetickým alebo hudobným cítením, ale možno aj pomerne exaktným zdôvodnením matematicky zavedených užitočných základných pojmov. Prajem vám slovami „vychovávateľa Západu“ A.M. Boethia: *Fidem, si poteris, rationemgue coniuge.* Európska kultúra sa na dlhú dobu stala filozofickým myslením vyjadrujúcim spojenie židovsko-kresťanskej náboženskej viery a prírodovedného rozumového poznania.

Literatúra

[1] BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě.* Praha: Prometheus, 2001.
[2] JUŠKEVIČ, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977.
[3] KOLMAN, A.: *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha: Academia, 1968.
[4] NĚČAS, J. a kol.: *Aplikovaná matematika I.- II*. Praha: SNTL, 1977.
[5] ZNÁM, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986.

Adresa:

Trnavská univerzita - Pedagogická fakulta
Priemyselná 4, 918 43 TRNAVA
e-mail: djedinak@truni.sk