Fibonacciho čísla na střední škole

Martina Jarošová

Abstract. *In this contribution we introduce some interesting facts about Fibonacci nunbers. We will prove some identities using different proof methods. Than we discuss the divisibility of Fibonacci numbers, recurrent formulas and the relation between Fibonacci numbers and the Pascal triangle.*

Fibonacci Numbers in Secondary School
Keywords: Fibonacci Numbers, Mathematical Proof, Mathematical Induction, Direct proof, Divisibility, Recurrence relation, Pascal's Triangle
MESC: E50

Fibonacci a jeho čísla

Leonardo Pisánský, Fibonacci nebo také Leonardo z Pisy je jedním z nejvýznamnějších matematiků středověké Evropy. Narodil se v Pise kolem roku 1170 a zemřel zřejmě roku 1250. Sepsal několik pro matematiku velmi významných spisů. Nejznámější je dílo *Liber abaci* (Kniha o abaku) z roku 1202.

Velmi známá je také *Fibonacciho posloupnost* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, která začíná hodnotami $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$ a splňuje rekurentní formuli

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{pro všechna } n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

Několik prvních členů Fibonacciho posloupnosti:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Jednotlivé členy Fibonacciho posloupnosti nazýváme *Fibonacciho čísla.* Tato čísla se poprvé objevila ve druhém rozšířeném vydání knihy *Liber abaci* z roku 1228, tedy proto nesou jeho jméno.

Studenti se s touto rekurentní formulí setkávají na střední škole při studiu posloupností. V mnohých středoškolských učebnicích je uvedena i známá úloha o králících. Proto se jí nyní nebudeme zabývat, ale ukážeme si jiné zajímavé skutečnosti.

Matematické důkazy a Fibonacciho čísla

Přímý důkaz

Úloha 1. Určete součet prvních n Fibonacciho čísel. Tedy dokažte, že platí

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{2}$$

Řešení. Užitím rekurentní formule (1) získáváme

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2, \\ F_2 &= F_4 - F_3, \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Součtem všech těchto rovností dostáváme

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

$\square$

Úloha 2. Dále ukažte, že součet prvních n Fibonacciho čísel s lichými indexy je roven

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{3}$$

Řešení. Opět použijeme rekurentní formuli (1).

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Požadovaný výsledek získáme opět součtem všech těchto rovností. $\square$

Úloha 3. Dokažte, že součet prvních n Fibonacciho čísel se sudými indexy je roven

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Řešení. Důkaz vychází z následujícího: Z (2) plyne

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1.$$

Odečtením (3) od této rovnosti obdržíme

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

jak bylo požadováno. $\square$

Matematická indukce

Úloha 4. Ukažte, že platí následující rovnost

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \tag{4}$$

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť

$$F_1^2 = 1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2.$$

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1, (n \geq 2)$. Indukčním předpokladem je tedy rovnost

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_{n-1}^2 = F_{n-1} F_n.$$

   Nyní dokažme platnost tvrzení pro n. K oběma stranám indukčního předpokladu přičtěme F_n^2:

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_{n-1}^2 + F_n^2 &= F_{n-1} F_n + F_n^2 \\ &= F_n (F_{n-1} + F_n) \\ &= F_n F_{n+1} \end{aligned}$$

   Užili jsme formuli (1) a dokázali, že tvrzení (4) platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

□

Úloha 5. Dokažte, že platí následující rovnost:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \text{pro } n \geq 1. \tag{5}$$

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť $\quad F_2F_0 - F_1^2 = -1^2 = -1 = (-1)^1.$

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$. Indukčním předpokladem je tedy rovnost:

$$\begin{aligned} F_{n-1}^2 &= F_{n-2}F_n - (-1)^{n-1} \\ F_{n-1}^2 &= F_{n-2}F_n + (-1)^{n-2} \end{aligned}$$

   Nyní dokažme platnost tvrzení pro n. K oběma stranám indukčního předpokladu přičtěme $F_{n-1}F_n$:

$$\begin{aligned} F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n &= F_{n-1}F_n + F_{n-2}F_n + (-1)^{n-2} \\ F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) &= F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) + (-1)^{n-2} \\ F_{n-1}F_{n+1} &= F_n^2 + (-1)^{n-2} \\ F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^{n-2} \\ F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n \end{aligned}$$

   V úpravách jsme opět použili rekurentní formuli (1) a tím dokázali, že tvrzení (5) platí pro každé přirozené číslo n.

□

Úloha 6. Nechť $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2, n \geq 1$. Dokažte, že platí

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}. \tag{6}$$

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí

1. Pro $n = 1$: $\quad F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1} + F_m = F_{m+1},$
   pro $n = 2$: $\quad F_{m-1}F_2 + F_mF_3 = F_{m-1} + 2F_m = F_{m+2}.$

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$; dokážeme jej pro n. Dle indukčního předpokladu tedy platí

$$F_{m+n-2} = F_{m-1}F_{n-2} + F_mF_{n-1}$$

$$F_{m+n-1} = F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n.$$

   Sečtením těchto dvou rovnic získáváme

$$F_{m+n-2} + F_{m+n-1} = F_{m-1}F_{n-2} + F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_{n-1} + F_mF_n$$

$$F_{m+n} = F_{m-1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_m(F_{n-1} + F_n) = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

   Čímž jsme tvrzení (6) dokázali.

□

Několik dalších rovností, jež lze snadno dokázat pomocí matematické indukce:

$$\begin{aligned}
F_1 - F_2 + F_3 - \cdots - F_{2n} + F_{2n+1} &= 1 + F_{2n} \\
F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} &= F_{2n}^2 \\
F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n &= F_{2n+1} \\
F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} &= (-1)^n \\
F_{n+1}^2 + F_n^2 &= F_{2n+1} \\
F_{n+1}^2 - F_n^2 &= F_{n-1}F_{n+2} \\
F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n &= F_{2n} \\
F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1} &= F_{m+n+1}
\end{aligned}$$

Fibonacciho čísla a dělitelnost

Definice 1. Nechť a, b jsou přirozená čísla. Jestliže existuje $z \in \mathbb{N}$ tak, že platí rovnost $b = a \cdot z$, pak říkáme, že a dělí b (označujeme $a \mid b$), přičemž číslo a nazýváme dělitel čísla b.

Věta 1. (Věta o dělení se zbytkem přirozených čísel). Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Pak existují $q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0$ splňující rovnost

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \le r < b,$$

přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a NSD ve třetím tvrzení označuje největšího společného dělitele daných čísel. Pak platí

1. $m \mid n \Rightarrow F_m \mid F_n$
2. Každá dvě sousední Fibonacciho čísla jsou nesoudělná.
3. $NSD(F_m, F_n) = F_{NSD(m,n)}$
   (např. $F_6 = 8, F_{15} = 610, NSD(8, 610) = 2 = F_{NSD(6,15)} = F_3$).

Uveďme důkaz druhého tvrzení. Budeme tedy dokazovat rovnost

$$NSD(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť

$$NSD(F_n, F_{n+1}) = d, \quad d > 1.$$

Pak platí

$$F_n = k \cdot d, \quad F_{n+1} = l \cdot d, \quad NSD(k, l) = 1.$$

Potom

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n \Rightarrow F_{n-1} = l \cdot d - k \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NSD(F_{n-1}, F_n) = d \;\Rightarrow \cdots \Rightarrow\; NSD(F_1, F_2) = d, \quad d > 1.$$

To je ovšem spor s tím, že $NSD(F_1, F_2) = NSD(1, 1) = 1$ (neboť dle předpokladu $d > 1$). Odtud tedy plyne tvrzení $NSD(F_n, F_{n+1}) = 1$. □

Toto tvrzení lze dokázat také následovně:

Důkaz. Nechť platí $NSD(F_n, F_{n+1}) = d, d > 1$.
Pro $n = 1$ dostaneme $d \mid F_1 = 1$, což je spor.
Pro $n > 1$

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$

Dle předpokladu $d \mid F_n, d \mid F_{n+1}$, tedy $d \mid F_{n-1}$.
Odtud obdobně získáme $d \mid F_{n-2}, \ldots, d \mid F_1$, což je spor. □

Fibonacciho čísla a rekurentní formule

Úloha 7. Nechť $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, n \in \mathbb{N}$. Nalezněte rekurentní formuli pro a_n.

Řešení. Užitím rekurentní formule (1) získáváme

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n} + 1 = \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} + 1 = \frac{1}{a_{n-1}} + 1,$$

tedy $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$. □

Úloha 8. Nechť $b_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, n \in \mathbb{N}$. Určete rekurentní formuli pro b_n^2.

Řešení. Opět užitím rekurentní formule (1) získáváme

$$b_n^2 = \frac{F_{n+1}^2}{F_n^2} = \frac{(F_{n-1} + F_n)^2}{F_n^2} = \frac{F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + F_n^2}{F_n^2} =$$

$$= \frac{F_{n-1}^2}{F_n^2} + 2\frac{F_{n-1}}{F_n} + 1 = \frac{1}{\frac{F_n^2}{F_{n-1}^2}} + 2\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} + 1 = \frac{1}{b_{n-1}^2} + \frac{2}{b_{n-1}} + 1,$$

tedy $b_n^2 = \frac{1}{b_{n-1}^2} + \frac{2}{b_{n-1}} + 1$. □

Nechť α a β jsou řešeními kvadratické rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, tedy

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Konstanty α a $\beta = -\frac{1}{\alpha}$ hrají důležitou úlohu při analýze Fibonacciho čísel. A to díky vztahu pro přímé určení n-tého Fibonacciho čísla:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \text{pro všechna } \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Tento vztah nazýváme *Binetova formule*[1]. Lze ji využít v mnoha dalších důkazech rovností s Fibonacciho čísly.

Úloha 9. Nechť je dán n-tý člen F_n posloupnosti Fibonacciho čísel (7), $n > 0$. Dokažte, že platí

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

Řešení. Vztah pro Fibonacciho čísla se zápornými indexy odvodíme pomocí Binetovy formule. Nechť je tedy dán n-tý člen F_n, pak platí

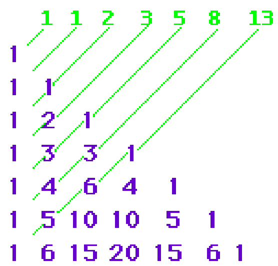
$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\alpha - \beta} = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha\beta)^n(\alpha - \beta)} = (-1)^{n+1}\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1} F_n.$$

□

[1]Tuto formuli publikoval již v roce 1765 Leonhard Euler (1707 – 1783). V roce 1843 ji znovu objevil francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856).

Fibonacciho čísla a Pascalův trojúhelník

Vedeme-li v Pascalově trojúhelníku zapsaném v pravoúhlém tvaru kombinačním číslem $\binom{n}{0}$ přímku svírající s jeho řádky úhel 45°, pak součet všech kombinačních čísel, která na této přímce leží, je roven Fibonacciho číslu F_n. Přičemž n je libovolné přirozené číslo.



Fibonacciho čísla a Pascalův trojúhelník

Literatura

[1] Bečvář, J.: *Leonardo Pisanský – Fibonacci*, Dějiny matematiky, svazek 19, (2001), 264–339.

[2] Calda, E.: *Fibonacciova čísla a Pascalův trojúhelník*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71, (1993/94), 15–19.

[3] Hoggatt, V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin Company, Boston, (1969).

[4] Horák P.: *Algebra a teoretická aritmetika 1*, Masarykova univerzita, Brno, (1991).

[5] Knott, R.: *Fibonacci Numbers and Nature*, [online]. c1996–2007, poslední revize 24.5.2007 [cit. 26.5.2007]. <`http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html`>.

[6] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (2001).

[7] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci Numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel, (2002).

Adresa autora:
Mgr. Martina Jarošová
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Ústav matematiky a statistiky
Janáčkovo nám. 2a, 602 00 Brno
Česká Republika
e-mail: mjarosov@math.muni.cz