OD SKÚSENOSTI K POZNANIU

Milan Hejný

Výskum bol podporený výskumným zámerom VZ MSM 002 162 0862

Abstract. *Proces postupnej premeny aritmetickej skúsenosti na poznatok u žiaka 1. stupňa ZŠ je popísaný ako zrod a budovanie schémy aditívnej triády. Podstatou budovania schémy je tvorba najprv izolovaných a potom generických modelov triády vloženej do rôznorodých kontextov. Štúdia, ktorá je volným pokračovaním autorovho príspevku na ružomberskej konferencii v roku 2006, je založená na nových výsledkoch výskumu realizovaného spoločne s D. Jirotkovou a J. Slezákovou. Proces premeny geometrickej skúsenosti na poznatok je krátko diskutovaný v poslednej kapitole.*

1. Úvod

Pripomenieme dva pojmy, ktoré boli rozvedené v článku Hejný (2007): schéma a aditívna triáda.

Schémou rozumieme ucelený súbor objektov a väzieb medzi týmito objektmi, prípadne úkonov a operácií, ktorý vo vedomí človeka vznikol v dôsledku rôznych opakujúcich sa zvedomovaných skúseností. Pritom myseľ človeka je schopná kedykoľvek vynoriť predstavu celku i ktorejkoľvek jeho časti.

Schémou je napríklad vaša znalosť rozmiestnenia tovaru v nákupnom centre do ktorého často chodíte, alebo vaša znalosť vášho obydlia. Počet dverí, ktoré máte v svojom dome/byte, neviete povedať ihneď. K číslu sa ale viete dopočítať, pretože schéma vášho obydlia máte vo svojej pamäti. Podobne počet stenových uhlopriečok kocky zistím tak, že si vybavím v predstave schému kocky; zistím, že má 6 stien a na každej stene 2 uhlopriečky – dovedna 12.

Dodajme, že schému sa do vedomia nedostáva nácvikom, ale frekventovaným kontaktom osoby s daným prostredím. Dobre poznané matematické schémy sú základom kvalitného matematického poznania. Koncepcia pojmu schéma blízka pojmu „hlboká idea“ Z. Semadeniho (2005), ktorý analyzuje aj stredoškolské matematické schémy.

Aditívnou triádou (trojicou), rozumieme trojicu čísel, pričom najväčšie z nich je súčtom dvoch menších. Prídavné meno „aditívna“ vypúšťame, lebo multiplikatívne triády skúmať nebudeme. Pojem triády zaviedli P. Černek a V. Repáš pod názvom sčítacia/odčítacia rodinka. (viz Repáš a kol. 1997). Výskum o didaktickom využití pojmu uskutočnila J. Slezáková (2006)

Napríklad triáda (3,5,8) poukazuje na vzťahy $5 + 3 = 8$, $3 + 5 = 8$, i $8 - 5 = 3$, $8 - 3 = 5$ a každý z týchto vzťahov poukazuje na trojicu (3,5,8). Všetky 4 uvedené vzťahy predstavujú tú istú matematickú skutočnosť, ale rozlične artikulovanú. Triáda má mnoho reprezentácií. Napríklad triáda (3,5,8) má popri 4 uvedených číselných reprezentáciách i veľa reprezentácií sémantických i štrukturálnych. Triáda je bázou aritmetického myslenia. Žiak, ktorý vie skvele a rýchlo počítať, ale má iba chudobnú zásobu rôznorodých reprezentácií triády, nemá aritmetické myslenie rozvinuté, pretože jeho schéma triády je chudobná. Slovné úlohy, zlomky, záporné čísla, percentá,... to všetko mu bude robiť v budúcnosti značné ťažkosti.

2. Dva mechanizmy poznávacieho procesu triády

Mechanizmom poznávacieho procesu rozumieme jeho etapizáciu. Celý proces je rozdelený do etáp a popísané sú nielen jednotlivé etapy, ale aj prechody medzi nimi. Treba zdôrazniť, že mechanizmus nie je chápaný ako realita sama, ale ako naše uchopenie reality, presnejšie ako nástroj, ktorým môžeme popisovať a analyzovať konkrétne poznávacie procesy. Jednotlivé mechanizmy sa odlišujú podľa toho, na ktorú zložku poznávacieho procesu zamerajú pozornosť.

Mechanizmus, ktorý nesie názov **procept,** popisuje vznik konceptu. Asi prvý, kto upozornil na to, že mnohé koncepty sú dôsledkom opakujúcich sa procesov, bol maďarský didaktik matematiky Zoltan Dienes (1960). Ukázal, že mnoho pojmov matematiky (konceptov) sa vyvinulo z matematických činností (procesov). V osemdesiatych rokoch sa transformáciou proces → koncept zapodievalo viacero bádateľov. Mentálny pohyb zmeny procesu na koncept bol skúmaný z viacerých strán a dostal niekoľko mien (entification, reinfication, encapsulation). Angličani D. Tall a E. Gray (1994) si všimli dôležitú úlohu, ktorý v opísanom procese hrá znak a zaviedli pojem procept:

...we consider the duality between process and concept in mathematics, in particular, using the same symbolism to represent both a process (such as addition of two numbers 3 + 2) and the product of that process (the sum 3 + 2). The ambiguity of notation allows the successful thinker the flexibility in thought to move between the process to carry out a mathematical task and the concept to be mentally manipulated as part of the wider mental schema. Symbolism that inherently represents the amalgam of process/concept ambiguity we call a „procept." ...(p. 116) We extend the definition as follows: A *procept* consists of a collection of elementary procepts that have the same object. (p. 121)

...uvažujeme o dualite medzi procesom a konceptom v matematike, osobitne o tej, v ktorej sa rovnaký znakový systém používa aj ako proces (akým je sčítanie dvoch čísel 3 + 2) aj ako produkt tohoto procesu (súčet 3 + 2). Dvojznačnosť zápisu umožňuje mysliacemu človeku pružne v myšlienkach prechádzať od procesu, ktorým niektorú úlohu rieši, ku konceptu, s ktorým pracuje ako s časťou širšej schémy. Znak, ktorý prirodzene reprezentuje amalgam dvojznačnosti proces/koncept, nazývame „procept".... (s. 116) Toto vymedzenie rozšírime takto: procept se skládá ze súboru elementárnych proceptovů, ktoré majú rovnaký objekt. (p. 121)

Teda elementárny procept je amalgam (zliatina) troch zložiek: procesu, objeku znaku. a Znaku reprezentuje aj proces aj objekt. Teda znak sám nie je ani procesom, ani konceptom, ale človeku, ktorý sa naň díva a ktorý ho pre seba intepretuje poukazuje aj na svoju procesuálnu zložku, aj na svoju konceptuálnu zložku. Keď vidím napísané číslo 5 vidím aj ///// aj postupnosť 1,2,3,4,5, aj väzby 1+4, 2+3, 10-5 a pod.

Podrobne je mechanizmus procept popísaný v Hejný (1999).

Druhý mechanizmus je popísaný v teorii generického modelu (Hejný, Kuřina 2001, s. 104-118). Jeho jadrom sú dva mentálne zdvihy: zobecnenie a abstrakcia. Poznávací proces je rozdelený do 5 etáp:

1. Motivácia (mentálna tenzia medzi existujúcim stavom – neviem a stavom želaným – chcem vedieť).

2. Tvorba izolovaných modelov, konkrétnych skúseností; tie prichádzajú do vedomia oddelene, ale postupom času začnú na seba poukazovať a zhlukovať sa do klastrov.

3. Z nich procesom zobecnenia vzniká generický model, ktorý má síce ešte stále ukotvenie v predmetnom myslení, ale je už schopný pokrývať nielen množstvo už skôr poznaných izolovaných modelov, ale i mnoho ďalších modelov, ktoré budú poznané až neskôr.

4. Procesom abstrakcie, ktorý je veľmi často sprevádzaný zmenou jazyka, sa generický model mení na abstraktný poznatok; ten už nepotrebuje predmetné ukotvenie.

5. Posledná etapa procesu je kryštalizácia – nový poznatok sa domestikuje v existujúcej poznatkovej štruktúre; niekedy taký poznatok spôsobí reštrukturalizáciu celej štruktúry (napríklad objev záporného čísla, alebo komplexného čísla mení žiakovo schéma pojmu „číslo" veľmi podstatne).

Celý poznávací proces je sprevádzaný jazykmi a ich zmenami. Napríklad pojem „tri" je vyjadrený najprv riekankou „jeden, dva, tri", potom samotným slovom „tri", ktoré sprevádza model troch prstov, alebo obrázok ///, ďalej je to číslica „3", potom zápis troch krokov pomocou šípok →→→, ďalej obrázok závodníka na treťom stupni (bromzová medaila),... Poznanie pestrej škály jazykov a najmä schopnosť žiaka samostatne také jazyky vytvárať patrí ku kľúčovým prvkom intelegtuálneho vývoja. Pri štúdiu tejto ontogenetickej problematiky sme využívali výsledky výzkumu fylogenézy L. Kvasza (2006).

3. Aplikácia oboch uvedených mechanizmov na pojem triáda

Dieťa, ktoré už pozná riekanku „jeden, dva, tri,..." nie nutne vie pomocou nej spočítať počet prvkov malého súboru. Pozrime na dva malé experimenty:

Experiment 1. Otec sa pýta syna, koľko je na stole tanierov. Paľko počíta „jeden, dva, tri, štyri" a pri počítaní sa každého tanieray dotkne. Otec otázku zopakuje a syn zopakuje počítanie. Neodpovie, že sú tu štyri taniere. O mesiac neskôr sa situácia zopakuje. Tentoraz chlapec, keď dokončí riekanku, povie zopakuje posledné slovo. Povie: „jeden, dva, tri, štyri, (pauza) štyri". Teraz už chlapec vie, že posledné slovo, ku ktorému sa dostal označuje počet počítaného súboru. Tak sa v jeho vedomí vytvoril most medzi procesom a výsledkom procesu, konceptom. O procepte ešte nemožno hovoriť, pretože tu chýba znak „4".

Analýza experimentu 1. V prvom prípade chápal Paľko otcovu výzvu iba ako pokyn k zopakovaniu riekanky na danom súbore tanierov. V druhom prípade už ale vedel, že riekanka mu umožní povedať počet počítaných predmetov: posledné slovo, ku ktorému v riekanke dôjde, označuje počet počítaného súboru. Tak sa v jeho vedomí vytvoril most medzi procesom a výsledkom procesu, konceptom. O procepte ešte nemožno hovoriť, pretože tu chýba znak „4".

Keď už dieťa pozná koncepty „jeden", „dva",..., „päť", tj. keď už vie z danej kopy gombíkov vybrať 5, začína sa učiť sčítať. Je to operácia nesená slovom „dohromady". Mnohokrát zistí, že dve veci a tri veci je päť vecí, ale každé toto poznanie je vo vedomí dieťaťa uchované ako izolovane. Potom nadíde okamžik, že dieťa uzrie, že všetky tieto zistenia majú čosi spoločné. Keď chce napríklad spočítať nedostupných holubov a použije k tomu prsty, zistí, že izolovaný model HOLOUBY môže byť zastúpený modelom PRSTY. Dieťa zistí, že na prstoch možno počítať nielen holubov, ale akékoľvek veci. Tak sa model PRSTY stane generickým modelom pre poznanie: dve veci a tri veci je päť vecí. Samozrejme sa to týka i iných podobných malých súčtov. Generický model PRSTY sa stane základom schémy operácie sčítania malých čísel. K tomuto generickému modelu, ktorý je typu S+S=S: STAV + STAV = STAV neskôr pribudnú ďalšie generické modely. Ide najmä o modely typu S+P=S: STAV + POROVNANIE = STAV (mám 2 jablĺčka a sestra má o 3 viac), S+Z=S: STAV + ZMENA = STAV (k mojím 2 korunám mi babka pridala 3) a A+Z=A: ADRESA + ZMENA = ADRESA (sme na druhom poschodí a vystúpime o 3 poschodia nahor), P+P=P (A je o 2 cm vyšší ako B a C je o 3 cm vyšší ako B), Z+Z (do prasiatka mi babak pridala 2 Sk a mama 3 Sk). Všetky tieto modely môže dieťa spoznať už v predškolskom veku, ale aj ak k tomu dôjde, jedná sa skoro vždy o modely izolované.

V škole sa žiak zoznámi s číslicami a tak je pripravený, aby jeho skúsenosti o zmene procesu na konceptu vstúpili na úroveň proceptu. K tomuto žiaľ dochádza zriedkavo. Vyučovanie je tradične smerované na budovanie sčítacích spojov, tj. na nácvik procesu sčítania (a odčítania). Len málo sa rozvíjaná skúsenosť žiaka s generickými modlemi typu S+Z, S+P, A+Z, P+P či Z+Z. V dôsledku toho je schéma operácie sčítania málo vyvinutá a žiak nevie použiť súčet ako procept. O tom je nasledujúca kapitola.

4. Diagnostika schémy „triáda"

O diagnostikovaní znalosti „triáda" sme písali už v článku Hejný (2007) a všetko, čo sme vtedy uviedli ostáva v platnosti. Od tej doby sa nám podarilo nájsť nový, veľmi účinný nástroj diagnostiky, ktorému sme dali pracovný názov Susedia. Nástroj teraz predstavíme pomocou série štyroch úloh. Čitateľovi doporučujeme, aby si najprv úlohy sám vyriešil a až potom čítal ďalej.

Úloha 1. Do troch prázdnych polí tabuľky 1 doplnte čísla tak, aby súčet každých troch susedných čísel bol 6.

	1		3	

Úloha 2. Do troch prázdnych polí tabuľky 2 doplnte čísla tak, aby súčet každých troch susedných čísel bol 7.

1				3

Úloha 3. Do troch prázdnych polí tabuľky 3 doplnte čísla tak, aby súčet každých troch susedných čísel bol 8.

	1			3

Úloha 4. Do šiestich prázdnych polí tabuľky 4 doplnte čísla tak, aby súčet každých troch susedných čísel bol 9.

Experiment 2. Poslucháčka Martina, budúca učiteľka 1. stupňa, sa dobrovolne podujala vyriešiť pre účely nášho výskumu 4vyššie uvedené úlohy.

Pri úlohe 1 si najprv ujasňovala čo znamená podmienka „súčet každých troch susedných čísel je 6". Akonáhle to porozumela, úlohu bez problémov vyriešila. Došla k výsledku : 3 | 1 | 2 | 3 | 1 . (Kurzívou sú písané čísla, ktoré Martina dopísala.)

Úlohu 2 riešila Martina metódou pokus omyl. Jej prvé dva pokusy boli neúspešné.

Prvý: 1 | 2 | 4 | 1 | 3 , druhý: 1 | 4 | 2 | 1 | 3 . Tretí pokus bol už úspešný:

1 | 3 | 3 | 1 | 3 . Potom sa Martina chvíľu pokúšala riešiť úlohu 3 a nakoniec povedala „je to zle zadané, lebo keď sem (ukázala dve polia medzi 1 a 3) dám také čísla, aby s číslom jedna dali osem, dá to s číslom 3 až desať". Inak povedané, Martina uviedla, že ak čísla x, y v poliach medzi číslami 1 a 3 zvolí tak, že $x + y + 1 = 8$,

1							5

bude potom $x + y + 3 = 10$. My sme s výrokom Martiny súhlasili. Povedali sme, že má pravdu, že tá úloha se nedá vyriešiť. Potom sme ju poprosili, aby ešte vyriešila i úlohu 4.
Videli sme, že sa Martine do úlohy nechce. Povedala „to je dlhé". Chvíľu na úlohu hľadela a potom začala do tabuľky vpisovať čísla: 1 | 2 | 6 | 1 | 2 | | | 5..

Po piatom čísle zastala a povedal „čísla sa opakujú a do päťky sa takto nedostanem. Neúspešný bol i jej druhý pokus: 1 | 3 | 5 | 1 | 3 | 5 | 1 | 5.. Už sa chcela pribrať do tretieho pokusu, ale zastala, a sústredene hľadela na svoj posledný pokus. Povedala „už to viem" a napísala správne riešenie:
1 | 5 | 3 | 1 | 5 | 3 | 1 | 5.. Potom dodala „stačilo tu (ukázala na druhý pokus) zameniť čísla tri a päť". Nakoniec sme sa Martiny opýtali, či by vedela vyriešiť i obdĺžnik, ktorý by mal uprostred 100 prázdnych polí a na koncoch čísla trebárs 1 a 2; súčet troch susedných by bol trebárs 20. Martina odvetila, že „by sa to dalo, ale bolo by treba asi veľa času".

Analýza experimentu 2. Pri prvej i druhej úlohe Martina nadobudla skúsenosti s prostredím Susedia. Kľúčová je úloha 3. Je neriešiteľná, čo Martina odhalila. Nezamyslela sa ale nad príčinou neriešiteľnosti. Neodhalila, že v každom obdĺžniku $a \mid b \mid c \mid d$, sú nutne krajné čísla a, d rovnaké. Vzťah $a = d$ je kľúčom k rýchlemu riešeniu týchto úloh. Z uvedeného vzťahu ihneď vyplýva, že v úlohe 4 môžeme vyplniť čísla do 4 prázdnych polí: 1 | 5 | | 1 | 5 | | 1 | 5...

Položme si otázku, prečo Martina pri tretej úlohe neodhalila kľúč k riešeniu úloh typu Susedia. Odpoveď je jednoduchá. Náš žiak (ale rovnako i žiak v mnohých ďaších zemiach) sa s operáciou sčítania stretáva ako s procesom a mnohonásobným opakovaným nácvikom riešenia úloh typu $5+6 =?$ $17-9 =?$ ... vo svojom vedomí utvrdzuje sčítanie ako proces. Nie je pripravený riešiť situácie, v ktorých sa pracuje so súčtom ako konceptom. Nemá súčet na úrovni proceptu, pretože nevie *pružne v myšlienkach prechádzať od procesu, ktorým niektorú úlohu rieši, ku konceptu, s ktorým pracuje ako s časťou širšej schémy* ako požadujú Gray a Tall v horeuvedenej citácii. Túto skutočnosť dokladujú mnohé ďalšie naše experimenty. Konečne podobné problémy máme aj my učitelia, pretože aj my sme boli na prvom stupni rovnako vedení. Odhalením kľúča k riešeniu úloh typu Susedia si žiak vytvára hodntný generický model náležiaci do schémy triády.

Sme presvedčení, že úroveň matematických znalostí našich žiakov je možné zvýšiť zmenou stratégie vyučovania operácií sčítania a odčítania. Utlmiť v súčasnosti veľmi frekventované nácviky sčítacích a odčítacích spojov a zvýrazniť sémantické i štrukturálne situácie, v ktorých sa súčet i rozdiel objavuje ako koncept, alebo dokonce ako procept (ako je tomu v úlohách typu Susedia). Ilustrácie takých úloh boli uvedené v článku Hejný (2007).

5. Proces prechodu od skúsenosti k poznatku v geometrii

Poznávanie geometrie prebieha odlišne od aritmetiky. Hoci svet aritmetiky má podstatne viacej obyvateľov ako svet geometrie je jeho štruktúra prehľadnejšia. Čísla, hoci ich je nekonečne veľa, majú rovnakú podstatu. Naproti tomu geometrické objekty sú rovinné, priestorové, oblé, hranaté, veľké, malé, ... a ich spoločenstvo zďaleka nie je tak dobre organizované ako je to vo svete čísel. Naviac – a to je z hľadiska proceptu rozhodujúce – v geometrii nemáme znaky akými sú číslice. Každý geometrický objekt treba popisovať zvlášť. Pripomína to adresovanie v starom Anglicku, kde veľa domov malo namiesto adresy iba meno. Poštár v tomto prostredí mal prácu náročnejšiu, ale na druhej strane poznal svoj rajón veľmi dobre.

Prvé geometrické poznanie, ku ktorému dieťa v predškolskom a rannom školskom veku dôjde, sa týka geometrických osobností (kocka, guľa, hranol, valec, štvorec, trojuholník, kruh,...) a ich javov sprievodných (vrchol, stena, stred, uhlopriečka,...) v zmysle P. Vopěnku (1989). Pozrime na príbeh malej Evičky, ktorý tu podávame ako experiment.

Experiment 3. Eva, žiačka prvej triedy vidí mamičku skladať obrúsky. Začne maminke pomáhať. Každý obrúsok preloží podľa jednej a potom i druhej uhlopriečky. Na prácu sa sústredí, snaží sa aby preloženie bolo veľmi presné. Mamička Evku pochváli a poďakuje jej za pomoc. Žiadne slovo o geometrii zatiaľ nepadlo.

V škole náhodou riešia rovnakú úlohu: preložiť papierový štvorec pozdĺž uhlopriečky. Pani učiteľka povie: „pozrite, tu mám štvorec a takto ho preložím“ a predvedie na veľkom štvorci preloženie; deti to opakujú. Evička sa pochváli, že ona už toto robila – pomáhala mamičke skladať obrúsky. Teraz poradí spolužiačke, ako to urobiť presne a sama má preloženie veľmi pekné. Pani učiteľka vezme jej prácu, štvorec rozbalí a chváli Evu, že to má pekné, lebo, „pozrite, deti, tento ohyb, táto priamka, ide presne z rohu do rohu“.

O niekoľko dní neskôr rieši trieda úlohu: nájdi stred papierového štvorca. Pani učiteľka na svojom veľkom lepenkovom štvorci ukazuje, kde asi ten štvorec leží a pripomenie, čo pred pár dňami so štvorcom robili. Eva preložila svoj štvorec najprv podľa jednej uhlopriečky, potom podľa druhej a ukázala pani učiteľke svoj stred. Tá ju pochválila a jej prácu ukázala triede: „pozrite, ako to Evka urobila; preložila štvorec, našla jednu uhlopriečku, preložila takto a našla druhú uhlopriečku a tu (ukazuje stred) kde sa tie uhlopriečky zbehli, našla stred.

Doma sa Evka chváli oteckovi, ako bola v škole úspešná. Chce svoju prácu otcovi ukázať. Zoberie list papieru a chce ho preložiť tak, že kladie vrchol na vrchol. Je prekvapená, že to nefunguje. Skúsi druhú dvojicu protiľahlých vrcholov a opäť je to neúspešné. Zoberie druhý list papieru a výsledok je rovnaký. Potom povie, že to musí byť štvorec a žiada otca o radu. Otec preloží obdĺžnikový list tak, že obe jeho dlhšie strany položí na seba. Opäť list rozloží a podá ho Eve. Tá zopakuje otcovo preloženie a s radosťou odhaľuje, že treba preložiť i v druhom smere – položiť krátke strany na seba. Keď list rozbalila, ukázala na stred. Mala z toho radosť.

Analýza experimentu 3. To čo sa vytvorilo vo vedomí Evy v priebehu popísaných akcií je zárodok schémy osobnosti štvorec (obdĺžnik) javov sprevádzajúcich uhlopriečka štvorca, stredná priečka obdĺžnika a vrchol či stred u oboch osobností.

Všimnime si, ako bola manuálna aktivita dievčaťa sprevádzaná slovami. V prvej etape, keď skladá obrúsky s maminkou, nie je geometrická situácia slovne komentovaná. Neskôr v škole, keď pani učiteľka úlohu formuluje, použije iba slovo štvorec, všetko ostatné je povedané pohybmi. Keď Eva pomáha spolužiačke, použije asi nejaké slová, ale sú to zrejme ukazovacie zámená a slovesá. Pani učiteľka prácu Evy komentuje slovami: ohyb, priamka, roh. Hoci použitie slova priamka je nenáležité a namiesto slova roh, má byť slovo vrchol, je toto prvé použitie slov už dôležitým prechodom od poznania v činnosti k poznaniu v slovách. Pri druhom slovnom komentári použije učiteľka už presnejšiu terminológiu. Slová uhlopriečka a stred sú použité náležite a sloveso „zbehnú sa“, hoci nepresné, je žiakom dobre zrozumiteľné.

Celý uvedený poznávací proces možno rozložiť na jednotlivé etapy, ktoré v oblasti geometrie popisujú cestu k poznatku. Etapizácia, ktorú popíšeme, pokrýva nielen situáciu experimentu 3, ale aj mnohé ďalšie prípady, vychádzajúce ako z manipulatívnej, tak i kinestetickej činnosti dieťaťa.

1. Percepcia tvaru – dieťa vidí rôzne tvary a ukladá si ich do pamäti; väčšina tvarov má trvalý a statický charakter, ale niektoré sú v pohybe a niektoré tvary majú aj citové konotácie (srdiečko, hviezdička,...).

2. Priama činnosť dieťaťa, vychádzajúca z jeho vlastnej fantázie, alebo inšpirácie prevzatej od kamaráta či dospelého je buď
   a) manipulatívna – dieťa sa s tvarom hrá, poprípade tvar tvorí (napríklad z piesku „pečie bábovku", stavia vežu z kociek, strihá či prekladá papier, kreslí na chodník panáka na skákanie...), alebo
   b) kinestetická – dieťa sa pohybuje v režime s geometrickými prvkami (skáče panáka, ide po kladine, kráča po ulici tak, aby nestúpilo na červenú dlaždicu,...).

3. Opakovanie, napodobovanie premyslenej manipulatívnej/kinestetickej činnosti iného človeka; zložitejšie pohyby ako bicyklovanie, plávanie, hra s loptou,... v sebe obsahujú mnoho geometrických prvkov.

4. Evidencia slov, ktoré v súvislosti s geometrickými javmi použije učiteľ, rodič, alebo iný človek; niektoré z týchto slov prichádzajú veľmi zavčasu – v priebehu prvej etapy (napríklad slová polohy ako pred, pod, nad, za,...); väčšina slov ale prichádza až v školskom veku a žiakove predstavy o ich význame bývajú spočiatku často zaťažené chybou (napríklad štvorec, ktorého uhlopriečky sú v horizontálnom a vertikálnom smere, nazve kosoštvorcom). , predstavou. tu sa potom upresňuje.

5. Dieťa samo používa geometrické slová, často ale nepresne až deformovane.

6. Ďalšou (školskou) aktivitou si žiak pojmy ujasňuje a upresňuje. Najmä obohacuje izolované a generické modely zložitejších pojmov akými sú štvoruholník, mnohouholník, obvod, obsah, objem, hranol, ihlan, ...

7. V poslednej etape dochádza k upresneniu pojmov pomocou definícií. K tomu dochádza väčšinou až na strednej škole. Niektoré pojmy sú tak náročné, že ich presné vymedzenie nepoznajú ani učitelia. Napríklad pojem mnohosten.

Jednotlivé etapy môžu, ale nemusia ísť v uvedenom poradí. Napríklad etapy 2 a 3 sa môžu vymeniť. Určite ale poznávací proces začína etapou 1. a do štádia schémy vstúpi až 5. etapou. Posledné dve etapy sú iba zmienené, pretože naša pozornosť je zameraná na žiaka prvého stupňa. Keby sme ich chceli analyzovať podrobnejšie, bolo by treba každú rozdeliť na viacero podetáp.

Okrem geometrických osobností, ktoré tvoria základ geometrického poznania žiaka 1. stupňa, sú dôležité i geometrické prostredia (napr. štvorčekovaný papier, origami, ...) a geometrické pravidelnosti či vzory. Hlbokú analýzu posledných, opretú o sériu dômyselných experimentov, nájdeme v monografii E. Swoboda (2006).

6. Záver

Uvedené výsledky prebiehajúceho výskumu nemožno brať ako finálne. V oblasti aritmetiky je naša pozornosť v súčasnosti zameraná na experimentálne overovanie viacerých prostredí, ktoré už boli teoreticky rozpracované a čiastočne niekoľkými sondami i odskúšané. V oblasti geometrie sa jedná o bližšie poznanie procesov, ktoré prebiehajú v etapách 3 až 6 vyššie uvedenej etapizácie.

Popri tejto teoretickej vrstve výskumu prebieha, či lepšie povedané začína prebiehať vrstva aplikačná. Jej hlavná otázka má dve časti:

Je súčasný náš učiteľ 1. stupňa ochotný zaviesť do svojej praxe niektoré z rozpracovaných prostredí? Ak nie, aké sú príčiny?

Aký servis máme poskytnúť učiteľovi, ktorý chce tieto prostredia do svojej praxe zaviesť?

V tejto vrstve nám cennú pomoc poskytlo viacero kolegov, ktorým chceme tu aspoň krátko poďakovať. Jedná sa o spolupracujúce učiteľky J. Michnovú, J. Svobodovú a P. Šípkovú. Výdatnú pomoc nachádzame na katedre matematiky Katolíckej univerzity v Ružomberku. Menovite mi dovoľte poďakovať sa kolegovi J. Kurucovi.

Literatura

[1] Dienes, Z., P. (1960): Building up mathematics. London: Hutchinson Educational.

[2] Gray, E. M.,- Tall, D.: (1994) Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, 1994 s. 116 – 141.

[3] Hejný, M.(1999): Procept, In: Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovnia matematiky (Grant VEGA 1/5197/98), KZaDM, Bratislava 1999, s.40-61

[4] Hejný, M.(2007). Prostredia napomáhajúce budovaniu aritmetických schém. . Zborník 7. ročníka konferencie s medzinárodnou účasťou, ESF, Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku, Ružomberok, 2007, str. 107-114,

[5] Hejný, M., Kuřina, F.(2001): Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování . Portál, Praha 2001, s. 187,

[6] Jirotková, D.(2006) Budování konceptuálních představ čísla u dítěte ve věku 5-8 let. In: (Eds.) M. Lávička, B. Bastl, A. Ausbergrová: 10. setkání učitelů mky všech typů a stupnů škol, JČFM, Pobočka Plzeň. s. 143-149

[7] Kvasz, L.(2006): The History of Algebra and the Development of the Form of its Language, (Philosophia Mathematica)

[8] Repáš V., Černek, P., Pytlová, Z. Vojtela, I (1997). Matematika pre 5. ročník základných škôl. Prirodzené čísla. Orbis Pictus Istropolitana, 1997.

[9] Semadeni, Z. (2005): Koncepcja sieci wzajemnych powiązań idei głębokich i powiązań ich modeli formalnych, Dydaktyka matematyki, č. 28, Kraków, 2005.

[10] Slezáková, J. (2006): Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5-8 let. In: (Eds.) M. Lávička, B. Bastl, A. Ausbergrová: 10. setkání učitelů mky všech typů a stupnů škol, JČFM, Pobočka Plzeň, s. 253-258.

[11] Swoboda, E. (2006): Przestreń, regularności geometriczna i kształty w uczeniu sie i nauczaniu dzieci. Rzeszów: Wydawnictwo Universytetu Rzeszowskiego, 2006

[12] Vopěnka, P. (1989): Rozpravy s geometrií, Panoráma, Praha.

Adresa autora:
Milan Hejný, Karlova Univerzita v Praze, Pedagogická fakulta