Skúmanie vlastností pantografu v prostredí programu Cabri geometria

Investigation of the properties of pantograph in the environment of program Cabri geometry

RADOVAN ENGEL

ABSTRACT. *The paper deals with the investigation of pantograph in a microworld created in Cabri geometry. Some aspects related to usage of this program in geometry lessons including creating of microworlds and the modification of program's environment are discussed here. Short information about history of pantograph and explanation of its principle are included in this paper, too. Finally, an experiment aimed on comparison of efficiency of mentioned microworld with classical approach is presented in this article.*

Kľúčové slová:
Investigation, problem solving, dynamic geometry system Cabri geometry, pedagogical experiment

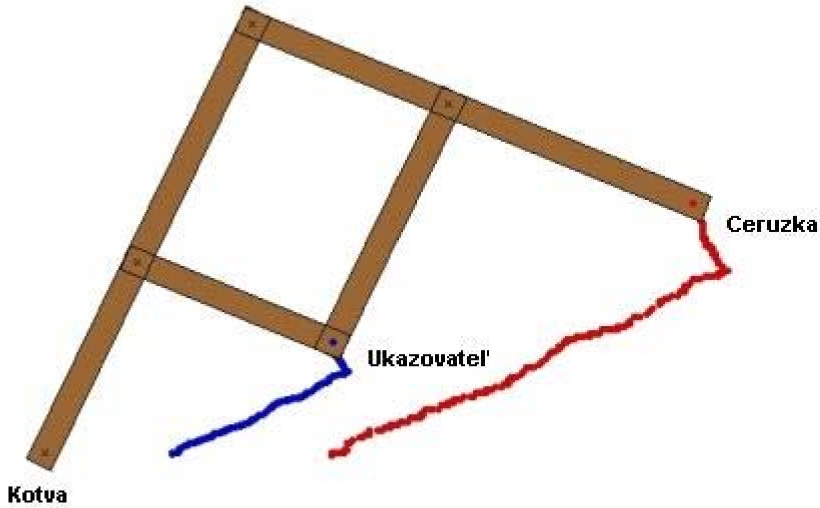
MESC: U54, D54, B14

O programe Cabri geometria

Program Cabri geometria, ktorý bol vyvinutý na Univerzite Josepha Fouriera v Grenobli, nazvali jeho autori interaktívnym zošitom z geometrie. Zvyčajne sa však Cabri a jemu podobné programy označujú pojmom dynamické geometrické systémy. Podľa [6] sa pojmy dynamická a interaktívna geometria v odbornej literatúre používajú voľne, často sa zamieňajú. Interaktívna geometria je taká, v ktorej prostredie spolupracuje s užívateľom (pri konštrukcii sa pýta, komentuje situáciu, vytvorené objekty nie sú definitívne, ale sa dajú interakciou s užívateľom meniť). Dynamická geometria dokáže pohybom vniesť nový pohľad, ktorý situáciu objasní práve pohybom objektov. Svojím spôsobom je teda Cabri geometria dynamickým a čiastočne aj interaktívnym systémom. Tento typ programov vnáša do vyučovacieho procesu niektoré nové prvky, ktoré podľa viacerých odborníkov môžu viesť k jeho skvalitneniu. Napríklad Barry McCrae podľa [3] tvrdí, že tieto aplikácie môžu dramaticky zmeniť výučbu geometrie. Umožňujú totiž konštruovať geometrické útvary s veľkou presnosťou, transformovať ich rôznym spôsobom a zmenou ich atribútov objavovať a zovšeobecňovať vzťahy medzi objektmi. Možno ich využiť aj pri vyšetrovaní geometrických modelov reálnych situácií, v ktorých je možné zmenou parametrov riešiť optimalizačné úlohy. Ďalej tento autor uvádza, že ich veľkými prednosťami je možnosť aktívneho získavania poznatkov založená na experimentovaní a výskumníckej činnosti, a tiež skutočnosť, že modelovaním situácií z reálneho života umožňujú rozvíjať predstavivosť a schopnosť samostatne riešiť problémy. Odborníkom, ktorý sa týmto geometrickým programovým systémom zaoberá už dlhšie, je Jiří Vaníček. V [5] okrem iného uvádza, že program Cabri umožňuje vytvárať tzv. mikrosvety, teda jednoduché geometrické svety, ktorým učiaci sa ľahšie porozumejú a podrobia sa ich pravidlám. V takomto prostredí sú lepšie motivovaní na prácu a učenie sa a sú schopní riešiť modelové problémy a reálne situácie okolo seba. Tieto skutočnosti boli pre nás podnetom pri vytváraní mikrosveta, v ktorom mali študenti skúmať vlastnosti pantografu.

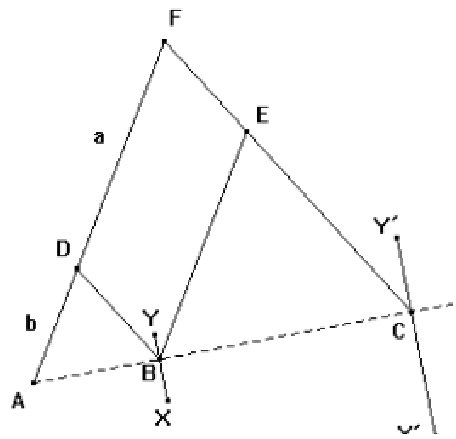
O pantografe

Pantograf údajne vynašiel nemecký jezuitský páter Christoph Scheiner z Ingolstadtu v roku 1603 počas svojej návštevy mesta Dillingen. Tu sa vraj stretol s maliarom, ktorý tvrdil, že má prístroj, pomocou ktorého dokáže ľubovoľný obraz nielen presne skopírovať, ale aj zväčšiť alebo zmenšiť. Pretože mu maliar odmietal ukázať tento prístroj, Scheiner to vyriešil sám a vynašiel tak pantograf. Prístroj v ďalších rokoch rozvíjal a v roku 1631 o ňom v Ríme vydal knihu s názvom *Pantographice seu ars delineandi* [2]. Slovo pantograf pritom pochádza z gréčtiny a jeho doslovný preklad je „všetkokreslič“.



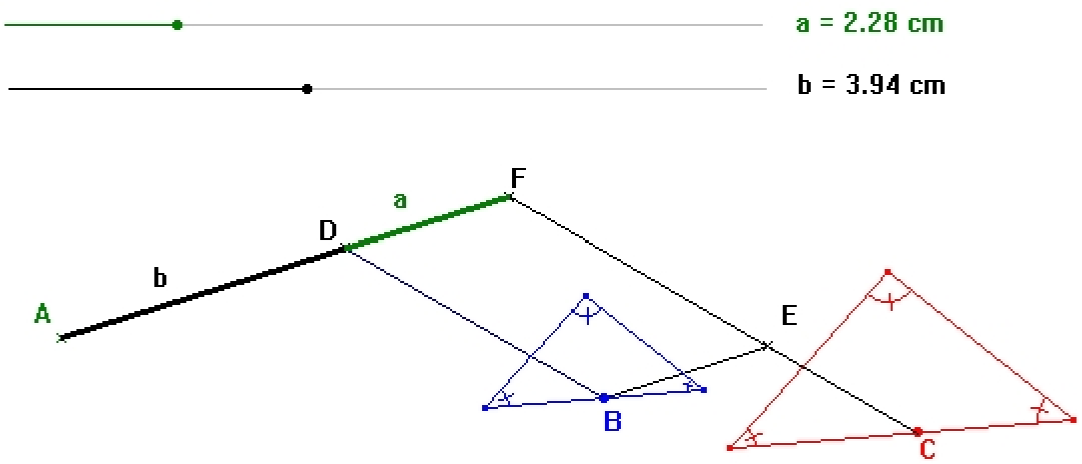
obr. 1

Ešte v 60-tych a 70-tych rokoch minulého storočia sa pantograf využíval v praxi, hlavne v kartografii a geodézii na zmenšovanie a zväčšovanie máp a plánov. V archeológii, či architektúre nachádza uplatnenie dodnes. Pantograf predstavuje konverziu rovnoľahlosti do podoby kĺbového mechanizmu. Skladá sa zo štyroch kĺbmi spojených tyčiek, kotvy, ukazovateľa a ceruzky, tak ako je to znázornené na obrázku (obr. 1). Schematicky ho možno zredukovať na náčrt (obr. 2), v ktorom pantograf predstavujú súvislé čiary. Bod A je pevne umiestnený a slúži ako kotva, bod B predstavuje pohyblivý ukazovateľ, ktorým sa sledujú línie originálneho obrázku a bod C reprezentuje ceruzku, ktorá sa pohybuje prostredníctvom kĺbového mechanizmu a vykresľuje obraz odvodený z originálu. Písmenom a je označená dĺžka úsečky DF a písmenom b dĺžka úsečky AD. V pantografe je štvoruholník BEFD rovnobežníkom, a keďže body A, B a C ležia na jednej priamke, je úsečka CF obrazom úsečky BD v rovnoľahlosti so stredom v bode A a koeficientom (a+b)/b. Zobrazenie jedného bodu neposkytuje postačujúcu vizuálnu informáciu na vytvorenie si dostatočnej predstavy o spôsobe fungovania pantografu. Aby študenti videli fungovanie kĺbového mechanizmu, je potrebné zobraziť aspoň úsečku. Ak sa bod B pohybuje po nejakej úsečke XY, tak sa bod C pohybuje po úsečke X´Y´. Tieto úsečky si odpovedajú v tej istej rovnoľahlosti, a preto je pomer |X´Y´|:|XY| rovný (a+b)/b (obr. 2). Ak body D, F nie sú totožné, potom je tento pomer vždy väčší než 1 a takýto pantograf bude ľubovoľný rovinný útvar zväčšovať. Zámenou funkcií bodov B a C by sa koeficient rovnoľahlosti prevrátil a namiesto zväčšovania by dochádzalo k zmenšovaniu. V najjednoduchšom, základnom tvare pantografu, na ktorý sa obmedzíme, sú úsečky AF a CF rovnako dlhé. Dĺžky a, b sa v tomto prípade vyskytujú v pantografe viackrát, v podstate sa tam nachádzajú iba tieto dĺžky. Platí totiž, že a je dĺžka nielen úsečky DF, ale aj BE a CE. Podobne je b okrem dĺžky AD i dĺžkou úsečiek BD a EF. Sú to preto práve dĺžky a, b, ktoré určujú nielen podobu, ale aj koeficient rovnoľahlosti pantografu, teda matematickú podstatu jeho fungovania. Princíp fungovania pantografu je stručne vysvetlený už v učebnici pre 9.



obr. 2

ročník ZŠ [7] v rámci rozširujúceho učiva venovaného rovnoľahlosti a podobným zobrazeniam. Vysvetlenie princípu fungovania pantografu je ale možné aj bez spomenutia pojmu rovnoľahlosť, a dá sa preto uskutočniť pred preberaním tohto pojmu. Stačí vychádzať z toho, že štvoruholník BEFD je rovnobežník a všimnúť si podobnosť trojuholníkov ACF, ABD a BCE. V zmysle vyššie uvedených skutočností sme vytvorili mikrosvet, ktorý prostredníctvom posúvačov umožňujúcich modifikovať dĺžky a, b prináša učiacemu sa mnoho rôznych prípadov pantografov. Dĺžky a, b môžu pritom s presnosťou na dve desatinné miesta nadobúdať hodnoty od 0 po 10 cm. Bod B pantografu v tomto mikrosvete je navyše viazaný na modifikovateľný trojuholník a bod C sa pohybuje po jeho zväčšenom obraze (obr. 3). Po výpočte pomeru strán zväčšeného trojuholníka a jeho vzoru, teda po určení koeficientu rovnoľahlosti, s ktorým pantograf pracuje, je možné zmenou dĺžok a, b sledovať bezprostredný vplyv týchto zmien na vypočítaný koeficient rovnoľahlosti pantografu.



obr. 3

O experimente

Zaujímalo nás, ako sa v porovnaní s klasickým prístupom prejavia špecifiká prezentovaného mikrosveta vytvoreného v programe Cabri. Na takéto porovnanie bolo samozrejme potrebné vytvoriť dve skupiny študentov. Experimentálnu skupinu, v ktorej sa bude pracovať s programom Cabri a kontrolnú skupinu, v ktorej prebehne klasická výučba. Z praktických dôvodov sa takéto porovnanie dalo uskutočniť len počas krátkeho časového úseku. Hoci je práca v prostredí Cabri jednoduchá a intuitívna, vyznačuje sa v porovnaní s klasickým rysovaním určitými špecifikami. Aby bola skutočne efektívna je najskôr potrebné dostatočne zvládnuť ovládanie programu. Vyučovanie podporované programom Cabri by však samozrejme nemalo byť o ovládaní tohto programu, ale predovšetkým o geometrii. Autori programu mysleli aj na tento problém a zabudovali do Cabri možnosť zjednodušenia prostredia programu. Problém zvládnutia ovládania programu v krátkom čase sme sa preto rozhodli riešiť maximálne možným zjednodušením prostredia programu Cabri. Upravili sme panel s nástrojmi tak, aby obsahoval len štyri tlačidlá (obr. 4). Konkrétne sa jedná o tieto tlačidlá: *Ukazovateľ*, ktorý slúži na pohybovanie s voľnými prvkami konštrukcie, ďalej meracie nástroje *Veľkosť uhla*, *Vzdialenosť a dĺžka* a napokon *Kalkulačka*. Táto kalkulačka je zviazaná s nákresňou. Čísla z nákresne totiž možno prenášať do kalkulačky a naopak, väzba sa pritom zachová aj po vypnutí kalkulačky.

obr. 4

Pri príprave experimentu sme sa snažili, aby sa rozdiely vo výučbe v experimentálnej a kontrolnej skupine týkali výlučne prostredia, v ktorom študenti skúmajú vlastnosti pantografu. Študenti oboch skupín preto informácie o sebe, spolu s riešeniami parciálnych úloh zapisovali do pracovného hárku. Úvod výučby v experimentálnej skupine bol venovaný základom práce v upravenom prostredí programu Cabri. Ďalej prebiehalo vyučovanie v experimentálnej i kontrolnej skupine v nasledovných fázach. Počas motivačnej fázy pracovali študenti oboch skupín s CabriJava apletom pantografu (obr. 1). Do pracovného hárku potom zapísali svoj názor na účel pantografu a otázky súvisiace s pantografom, ktoré ich najviac zaujímali. Počas opakovania podobnosti študenti samostatne riešili jednoduché úlohy na podobnosť, ktorých cieľom bolo zistiť, či intuitívne ovládajú pojem podobnosť. Frontálne sa tiež zopakovala definícia podobnosti a viet o podobnosti trojuholníka. Najdôležitejšiu fázou vyučovania predstavovalo samozrejme samotné skúmanie vlastností pantografu. Najprv mali študenti pre štyri rôzne pantografy doplniť do tabuľky na pracovnom hárku dĺžky úsečiek a, b a jeho zväčšenie k. Študenti kontrolnej skupiny pritom samostatne pracovali s papiermi obsahujúcimi štyri dvojice podobných trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán spolu s príslušnými pantografmi umiestnenými v jednej polohe. Využívali pritom klasické rysovacie potreby. Študenti experimentálnej skupiny zase samostatne pracovali v popísanom mikrosvete s programom Cabri geometria s upraveným panelom nástrojov. Pomocou posúvačov menili s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžky a, b, určovali s rovnakou presnosťou odpovedajúce zväčšenie a zapisovali svoje výsledky do spomínanej tabuľky. Ďalej mali študenti určiť parametre pantografu, ktoré determinujú dve konkrétne zväčšenia. Jedná sa o divergentnú úlohu, lebo existuje nekonečne veľa dvojíc dĺžok a, b, pomocou ktorých možno vytvoriť to isté zväčšenie. Napokon sa mali pokúsiť určiť presný vzťah, pomocou ktorého možno z dĺžok a, b vypočítať zväčšenie pantografu k. Až po tomto experimentovaní sa študenti dozvedeli správny vzťah, ku ktorému sa mali dopracovať, a tiež teoretické zdôvodnenie tohto výsledku. Bol teda zvolený induktívny postup. Na získanie spätnej väzby poslúžili v oboch skupinách anonymné dotazníky. Výučba v oboch skupinách mala dĺžku dvoch vyučovacích hodín.

Experiment sa realizoval na dvoch školách. Prvý experiment sa uskutočnil v triede 2C na Gymnáziu Šrobárová 1 v Košiciach. Košickí študenti sa pritom už počas prvého ročníka na strednej škole stretli s rovnoľahlosťou. Druhý experiment sa uskutočnil v triede Kvinta na Gymnáziu v Gelnici, gelnickí študenti sa pritom o rovnoľahlosti ešte neučili. Spolu sa experimentu zúčastnilo 51 študentov, 26 v kontrolných a 25 v experimentálnych skupinách.

Pokiaľ ide o najdôležitejšie závery vyplývajúce z kvalitatívnej analýzy realizovanej výučby, tak sa pozitívny účinok apletu s pantografom potvrdil u všetkých študentov, ktorí sa zúčastnili vyučovania. Ukázalo sa, že možnosť praktickej práce s objektom ďalšieho skúmania, aj keď len vo forme počítačového modelu, pôsobí motivujúco. Z otázok, ktorými študenti chceli doplniť svoju predstavu o pantografe vyplynulo, že ich zaujímali jednak rôzne historické aspekty tohto prístroja, ale aj jeho praktické uplatnenie a princíp fungovania. Gelnickí študenti pritom o princíp fungovania pantografu prejavili oveľa menší záujem než študenti z košického gymnázia. V oboch experimentálnych skupinách sa ukázalo, že dynamický geometrický systém predstavuje kvôli jednoduchému, rýchlo osvojiteľnému a presnému meraniu vhodné prostredie pre tieto rutinné geometrické činnosti. Tieto prednosti ocenili viacerí študenti i v dotazníku. Prispôsobenie prostredia programu Cabri sa teda osvedčilo. Na druhej strane sa niektorí študenti oboch kontrolných skupín dopustili pri meraní veľkostí uhlov drobných nepresností a omylov. Jednalo sa o chyby spôsobené skôr nepozornosťou než neznalosťou. Kľúčovú fázu experimentu predstavovali úlohy, v ktorých sa mali študenti cez postupnosť troch úloh dopracovať ku všeobecnému vzťahu pre zväčšenie pantografu. Študenti kontrolných skupín museli uvažovať nad hodnotami v tabuľke, ktoré získali meraním a snažiť sa objaviť hľadaný vzťah. Bez jeho určenia však nemali šancu zvládnuť ani predchádzajúcu úlohu, v ktorej mali stanoviť parametre pantografu pre dané konkrétne zväčšenia. Študenti experimentálnej skupiny mali tú výhodu, že po správnom určení koeficientu zväčšenia získali prístup k množstvu hodnôt využiteľných pri hľadaní vzťahu pre koeficient zväčšenia. Záverečný výsledok však nedostali. Ten museli zistiť sami a to tiež vyžadovalo premyslený postup. Prvé dve zo spomínaných úloh bolo síce možné pomerne jednoducho zvládnuť pomocou dynamickej konštrukcie nastavením „ľubovoľných“ hodnôt. Riziko, že študenti sa nad skúmaným problémom hlbšie nezamyslia a v mikrosvete len niečo formálne nastavia tu teda zdanlivo existuje. Aby však dokázali zvládnuť aj poslednú úlohu, potrebovali študenti aj „čitateľnejšie“ hodnoty. Museli teda zvládnuť problém, ktorý pre kontrolnú skupiny výberom vhodných pantografov a trojuholníkov vyriešil učiteľ. To od nich vyžadovalo pomerne hlboké pochopenie problematiky. Pretože dynamický geometrický systém tu slúžil hlavne ako prostredie na riešenie problémov a súvisiace experimentovanie, neskĺzlo určovanie všeobecného vzťahu pre zväčšenie pantografu v prostredí Cabri do formálnej a povrchnej roviny. Výsledky experimentálnej skupiny boli v tejto úlohe na oboch gymnáziách mierne lepšie než v kontrolnej skupine. Študenti kontrolnej aj experimentálnej skupiny z gelnického gymnázia pritom dopadli o niečo horšie, čo pravdepodobne súvisí s faktom, že títo študenti sa v rámci učiva strednej školy s podobnosťou ešte nestretli a samozrejme aj s ich vekom, a teda menšími matematickými skúsenosťami. V prípade zrealizovaných experimentov trvali jednotlivé etapy vyučovania v kontrolnej a experimentálnej skupine v oboch triedach približne rovnako dlho. Čas, ktorý sa u experimentálnych skupín v úvode vyučovania venoval základom práce v Cabri, v závere pri riešení úloh na poslednom liste pracovného hárku chýbal. Väčšina študentov oboch experimentálnych skupín bola presvedčená o tom, že by im tento program mohol pomôcť pri riešení problémov, ktoré majú v geometrii.

Záver

Geometria je medzi študentmi považovaná za náročnú a hlavne preto patrí medzi najmenej obľúbené oblasti matematiky. Príčinou problémov pri riešení rôznych druhov geometrických úloh je povrchné zvládnutie vlastností a vzťahov medzi prvkami danej geometrickej témy, prípadne neschopnosť ich praktického uplatnenia. V snahe predísť týmto negatívnym javom môže byť užitočné využiť vo vyučovacom procese dynamický geometrický systém, akým je napríklad na školách dostupná Cabri geometria. Príspevok stručne popisuje experiment s cieľom zistiť využiteľnosť mikrosveta vytvoreného v programe Cabri geometria pri výučbe konkrétnej geometrickej témy, a zároveň predstavuje námet na organizáciu vyučovacieho procesu s týmto programom, v ktorom sa kladie dôraz na aktívne učenie sa založené na skúmaní a riešení problémov.

Literatúra

[1] ENGEL R.: *E-learning vo vyučovaní matematiky*. Košice 2007. Písomná práca k dizertačnej skúške na Ústave matematických vied Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika. Školiteľ: Doc. RNDr. Dušan Šveda, CSc.

[2] HAUB R.: *Christoph Scheiner: Der Pantograph*. [online] Publikované 2000. Dostupné z <www.ingolstadt.de/stadtmuseum/scheuerer/ausstell/schein11.htm>.

[3] LUKÁČ S.: *Informačné technológie z hľadiska potrieb učiteľa matematiky*. Košice 2002. Dizertačná práca na Oddelení didaktiky matematiky a informatiky Katedry matematickej analýzy Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika. Školiteľ: Doc. RNDr. Dušan Šveda, CSc.

[4] LUKÁČ S. - ENGEL R.: *Skúmanie dynamických konštrukcií vo vyučovaní rovnoľahlosti.* In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 1/2007 (36), s. 15 – 28, ISSN 1335-4981.

[5] VANÍČEK J.: *Experience of the Preparation of Mathematics Teacher Students with CAL of Constructive Geometry*. [online] Publikované 1999. Dostupné z <www.pf.jcu.cz/cabri/temata/nitra99/Nitra99.htm>.
[6] VANÍČEK J.: *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*. [online] Publikované 2000. Dostupné z <www.pf.jcu.cz/cabri/metodika/index.html>.
[7] ŠEDIVÝ M. et al.: *Matematika pre 9. ročník ZŠ*, 1. časť. 2. vyd. Bratislava: SPN 2003. 120 s. ISBN 80-10-00126-0.

Adresa autora:
RNDr. Radovan Engel
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: radovan.engel@upjs.sk