O pewnym równaniu funkcyjnym charakteryzującym całkę nieoznaczoną

On some functional equation characterizing an indefinite integral

Antoni Chronowski, Zbigniew Powązka

Abstract. Let us denote by $C^{\infty}(\alpha,\beta)$ a family of all real-valued functions of the class C^{∞} defined on the interval $(\alpha,\beta)\subset IR$. Let $(C^{\infty}(\alpha,\beta), IR, +, \cdot)$ be a vector space of these functions and $(H, IR, +, \cdot)$ a subspace of constant functions defined on (α,β). Consider the operator $T: C^{\infty}(\alpha,\beta) \to C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ such that the following condition is satisfied:

$$T(f \cdot g') = f \cdot g - T(f' \cdot g),$$

for all $f, g \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$, where f' and g' are derivatives of the functions f and g, respectively.

In this paper we prove that for every function $f \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$ the function $T(f)$ is the integral of the function f. Moreover, the further properties of the operator T are proved.

Key words: Operator, functional equation, indefinite integral

MESC: I70, I50

1. Wstęp

C. Alsina w pracy [1] wyróżnił trzy zagadnienia istotne w nauczaniu o funkcjach, pojawiające się w teorii równań funkcyjnych. Są nimi:

a) opis obszernej klasy funkcji spełniających pewne warunki bazowe,
b) zrozumienie charakterystycznych własności konkretnych funkcji,
c) głębokie poznanie natury liczb i warunków regularnościowych.

Niniejsza praca wpisuje się w pierwszy nurt wspomnianych wyżej zagadnień, gdyż dotyczy charakteryzacji całki nieoznaczonej przy pomocy pewnego równania funkcyjnego.

2. Sformułowanie problemu

Niech IR oznacza zbiór liczb rzeczywistych i $(\alpha, \beta) \subseteq IR$ będzie przedziałem otwartym ograniczonym lub nieograniczonym. Oznaczamy przez $C^{\infty}(\alpha,\beta)$ zbiór funkcji rzeczywistych klasy C^{∞} określonych na przedziale (α,β). Zbiór ten jest niepusty, bo należy do niego np. funkcja $\theta:(\alpha,\beta) \to IR$ taka, że

(1) $$\theta(x) = 0 \qquad \text{dla } x \in (\alpha,\beta).$$

Zbiór $C^{\infty}(\alpha,\beta)$ jest zamknięty na dodawanie i mnożenie funkcji. Wiadomo, że struktura $(C^{\infty}(\alpha,\beta), IR, +, \cdot)$, gdzie $+: C^{\infty}(\alpha,\beta)\times C^{\infty}(\alpha,\beta) \to C^{\infty}(\alpha,\beta)$ oznacza dodawanie funkcji oraz $\cdot$: $IR \times C^{\infty}(\alpha,\beta) \to C^{\infty}(\alpha,\beta)$ mnożenie funkcji przez liczbę rzeczywistą, jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

Niech H będzie rodziną funkcji stałych określonych na przedziale (α,β), czyli

(2) $$f \in H \Leftrightarrow \exists_{c \in IR} \forall_{x\in(\alpha,\beta)}\ f(x) = c.$$

Oczywiście $(H, IR, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(C^{\infty}(\alpha,\beta), IR, +, \cdot)$.

Tworzymy przestrzeń ilorazową ($C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$, IR, +, $\cdot$) przestrzeni

($C^{\infty}(\alpha,\beta)$, IR, +, $\cdot$) przez podprzestrzeń (H, IR, +, $\cdot$). Wiemy, że $C^{\infty}(\alpha,\beta)/H=\{f+c : c\in H\}$. Ponieważ warstwy są klasami abstrakcji, więc będziemy stosować oznaczenie: $[f]=f+H$ dla $f\in C^{\infty}(\alpha,\beta)$. Wobec tego $[f]=\{f+c\}: c\in H$, czyli

(3) $$g\in[f]\Leftrightarrow f-g\in H\ .$$

Zatem w zbiorze $C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ działanie + dodawania warstw oraz działanie · mnożenia warstwy przez liczbę rzeczywistą określone są w następujący sposób:

(4) $$[f]+[g]=[f+g],$$

(5) $$a\cdot[f]=[a\cdot f]$$

dla $[f],[g]\in C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ i $a\in IR$.

W przestrzeni ilorazowej ($C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$, IR, +, $\cdot$) wektorem zerowym jest warstwa $[\theta]$, gdzie θ jest funkcją okresloną wzorem (1).

W zbiorze ilorazowym $C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ wprowadzamy działanie zewnętrzne określone wzorem

(6) $$f-[g]=[f-g],$$

dla $f\in C^{\infty}(\alpha,\beta)$ i $[g]\in C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$.

Udowodnimy najpierw następujące twierdzenie.

Lemat 1

Działanie zewnętrzne (6) jest dobrze określone w zbiorze $C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$.

Dowód. Bierzemy $g, g_1\in C^{\infty}(\alpha,\beta)$ takie, że

$$[g]=[g_1].$$

Wtedy wobec (3) mamy

(7) $$g_1-g\in H\ .$$

Z (6) dostajemy

$$f-[g]=[f-g] \quad \text{i} \quad f-[g_1]=[f-g_1].$$

Aby wykazać, że

$$[f-g]=[f-g_1].$$

należy stwierdzić, że różnica funkcji $f-g$ oraz $f-g_1$ należy do H. Fakt ten jest konsekwencją (7), gdyż

$$(f-g)-(f-g_1)=f-g-f+g_1=g_1-g\in H\ .$$

Niech $T : C^\infty(\alpha,\beta) \to C^\infty(\alpha,\beta)/H$ będzie odwzorowaniem spełniającym następujące równanie funkcyjne

(8) $$T(f \cdot g') = f \cdot g - T(f' \cdot g)$$

dla $f, g \in C^\infty(\alpha,\beta)$, przy czym f' i g' są funkcjami pochodnymi odpowiednio funkcji f i g.

Kładąc w (8) w miejsce odwzorawania T całkę nieoznaczoną otrzymujemy wzór na całkowanie przez części. Zachodzi pytanie, czy w zbiorze $C^\infty(\alpha,\beta)$ jest to jedyne rozwiazanie równania (8).

3. Rozwiązanie równania (8)

W tej części pracy udowodnimy, że przy założeniach z części 2, całka nieoznaczona jest jedynym rozwiązaniem równania (8). Zaczynamy od dowodu następującego lematu.

Lemat 2

Jeżeli odwzorowanie $T : C^\infty(\alpha,\beta) \to C^\infty(\alpha,\beta)/H$ *spełnia równanie (8), to*

(9) $$T(\theta) = [\theta],$$

gdzie θ *jest funkcją określoną wzorem (1).*

Dowód. Niech $f = g = \theta$, wtedy $f' = g' = \theta$. Podstawiając do (8) otrzymujemy

$$T(\theta \cdot \theta) = \theta \cdot \theta - T(\theta \cdot \theta).$$

Stąd dostajemy

$$T(\theta) = \theta - T(\theta).$$

Ponieważ odwzorowanie T przyjmuje wartości w przestrzeni ilorazowej $C^\infty(\alpha,\beta)$, więc istnieje taka funkcja $h \in C^\infty(\alpha,\beta)$, że

$$T(\theta) = [h],$$

czyli

$$[h] = \theta - [h].$$

Stąd i z (6) mamy dalej

$$[h] = [\theta - h],$$

a więc

$$[h] = [-h].$$

Zatem wobec (3

$$h - (-h) \in H,$$

czyli istnieje $c \in H$ takie, że

$$h - (-h) = c \,.$$

Stąd $h = \frac{c}{2} \in H$, a więc $[h] = [\theta]$, co dowodzi równości (9).

Wykażemy teraz, że odwzorowanie T spełniające równanie (8) jest całką nieoznaczoną.

Twierdzenie 1

Niech odwzorowanie T: $C^{\infty}(\alpha,\beta) \rightarrow C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ spełnia równanie (8). Jeżeli funkcja $f \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$ i f' jest pochodną funkcji f, to

(10) $$T(f') = [f].$$

Dowód. Niech T: $C^{\infty}(\alpha,\beta) \rightarrow C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ spełnia równanie (8) oraz $f, g \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$, przy czym

$$g(x) = 1 \text{ dla } x \in (\alpha,\beta).$$

Wtedy

$$g'(x) = 0 \text{ dla } x \in (\alpha,\beta).$$

Podstawiając te funkcje do równania (8) otrzymujemy

$$T(\theta) = f \cdot 1 - T(f' \cdot 1).$$

Stąd i z (9) mamy

(11) $$[\theta] = f - T(f').$$

Ponieważ wartości odwzorowania T są warstwami, więc istnieje funkcja $h \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$ taka, że

(12) $$T(f') = [h].$$

Z (11) i (12) i lematu 2 dostajemy

$$[\theta] = f - [h],$$

skąd wobec (6) mamy

$$[\theta] = [f - h].$$

Z (3) wynika, że istnieje funkcja stała $c \in H$ taka, że

$$c = f - h\,,$$

skąd

$$h = f - c\,,$$

czyli

$$[h] = [f - c] = [f].$$

Zatem

$$T(f') = [f].$$

Z (10) wynika, że wartość odwzorowania T spełniającego równanie (8) dla funkcji $f \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$ jest całką nieoznaczoną tej funkcji na przedziale (α,β).

Podamy obecnie pewną ciekawą i wygodną w zastosowaniach własność odwzorowania T.

Twierdzenie 2

Jeżeli odwzorowanie T: $C^{\infty}(\alpha,\beta) \to C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ spełnia równanie (8) i f' jest pierwszą pochodną, a f'' drugą pochodną funkcji $f \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$, to

$$T\left(f \cdot f'' + (f')^2\right) = [f \cdot f']. \tag{13}$$

Dowód. Z twierdzenia 1 wynika, że odwzorowanie T spełniające (8) jest całką nieoznaczoną, a zatem jest odwzorowaniem liniowym. Z addytywności tego odwzorowania mamy

$$T\left(f \cdot f'' + (f')^2\right) = T(f \cdot f'') + T\left((f')^2\right). \tag{14}$$

Ponieważ T spełnia (8), więc

$$T(f \cdot f'') = f \cdot f' - T\left((f')^2\right). \tag{15}$$

Z (14) i (15) wynika równość

$$T\left(f \cdot f'' + (f')^2\right) = \left(f \cdot f' - T\left((f')^2\right)\right) + T\left((f')^2\right). \tag{16}$$

Ponieważ $T\left((f')^2\right) \in C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$, więc istnieje taka funkcja $h \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$, że

$$T\left((f')^2\right) = [h].$$

Podstawiając tę równość do (16) otrzymujemy

$$T\left(f \cdot f'' + (f')^2\right) = (f \cdot f' - [h]) + [h].$$

Korzystając z (6) otrzymujemy

$$T\left(f \cdot f'' + (f')^2\right) = [f \cdot f' - h] + [h].$$

Stąd i z (4) mamy

$$T\left(f \cdot f'' + (f')^2\right) = [f \cdot f'].$$

Uogólnieniem twierdzenia 2 jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3

Jeżeli odwzorowanie T: $C^{\infty}(\alpha,\beta) \to C^{\infty}(\alpha,\beta)/H$ spełnia równanie (8) i $f^{(n)}$ jest pochodną rzędu n, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, funkcji $f \in C^{\infty}(\alpha,\beta)$, to

(17) $$T\left(f^{(n)}\cdot f^{(n+2)}+\left(f^{(n+1)}\right)^2\right)=\left[f^{(n)}\cdot f^{(n+1)}\right].$$

Dowód. Niech $T\colon C^\infty(\alpha,\beta)\to C^\infty(\alpha,\beta)/H$ spełnia równanie (8) i $f\in C^\infty(\alpha,\beta)$. Przyjmijmy następujące oznaczenie

(18) $$g(x)=f^{(n)}(x) \text{ dla } x\in(\alpha,\beta).$$

Wtedy

(19) $$g'(x)=f^{(n+1)}(x) \text{ dla } x\in(\alpha,\beta),$$

oraz

(20) $$g''(x)=f^{(n+2)}(x) \text{ dla } x\in(\alpha,\beta).$$

Z twierdzenia 2 wynika, że funkcja g spełnia równość (13), tzn.

$$T\left(g\cdot g''+(g')^2\right)=[g\cdot g'].$$

Stąd z (18), (19) i (20) wynika (17).

Na zakończenie podamy przykład zastosownia twierdzenia 3.

Przykład.

Obliczymy wartość odwzorowania T dla funkcji $g:(0,+\infty)\to IR$ danej wzorem

$$g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ponieważ T jest odwzorowaniem addytywnym, więc

$$T\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=T\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)=T\left(\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right).$$

Zauważamy, że dla funkcji $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$, zachodzi: $f'(x)=\frac{1}{x}$ oraz $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$. Korzystając z (13) otrzymujemy

$$T\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=\left[\ln x\cdot\frac{1}{x}\right],$$

czyli

$$T\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=\left[\frac{\ln x}{x}\right].$$

Na mocy twierdzenia 1 otrzymany rezultat możemy zapisać w postaci

$$\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln x}{x} + c ,$$

gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Bibliografia

[1] Mathematical Modelling by means of functional equations: the missing link in the learning of functions. A: *Modelling and Mathematics Education*. Horwood Publishing; J.F. Matos, W. Blum, S.K. Houston and S.P. Carreira Eds., 2001, p. 90-98.

Dr Antoni Chronowski
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30 - 084 Kraków
e-mail: chron@ap.krakow.pl

Dr Zbigniew Powązka
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30 – 084 Kraków
e-mail: powazka@ap.krakow.pl