Pojęcie bazy przestrzenia wektorowej w wybranych podręcznikach do algebry liniowej - analiza formalna i konsekwencje dydaktyczne.

The didactic propositions of introducing the idea of basis of linear space and their didactic consequences

Beata Bugajska – Jaszczołt, Danuta Drygała

Abstract:
In this article we present different textbooks conceptions of introducing the concept of basis of linear space. We compare the academic handbooks of Linear Algebra for mathematics' students. We present the handbooks` analysis in five segments. We show the didactic consequences of choosing one of them.

Key words:
conception of mathematical object, concept of basis of linear space, didactic consequences, linear independents of vectors, spaces generated by vectors

MESC: Q60

1. Pojęcie bazy przestrzeni wektorowej w standardach, programach nauczania i podręcznikach akademickich

Abstrakcyjność pojęć algebry liniowej powoduje z jednej strony problemy ze zrozumieniem ich przez studentów, z drugiej zaś podejmowanie przez nauczycieli tego przedmiotu różnorodnych zabiegów mających prowadzić do eliminowania pojawiających się w trakcie nauczania trudności. Jednym z nich jest polecenie studentom podręcznika, w którym interesujący nas fragment teorii przedstawiony jest w sposób najbardziej czytelny, logiczny, kompleksowy, jasny i dający studentom możliwość pełnego zrozumienia tematu. W praktyce nauczania podręcznik oraz obowiązujące standardy kształcenia na danym kierunku często stanowi jedyną podstawę opracowania autorskich propozycji dydaktycznych wprowadzania i kształtowania pojęć algebry liniowej.

Obowiązujące standardy dla kierunku matematyka (Rozporządzenie, 2002), owszem, informują o sylwetce absolwenta, wskazują treści, lecz nie precyzują w jakim chronologicznym ciągu powinny pojawiać się definicje, twierdzenia, przykłady i zadania, jak mają być wprowadzane i realizowane, jakie mają być postulowane osiągnięcia studenta. Stanowią one jedynie wstępną podstawę opracowania autorskich programów nauczania.

Zwykle ich struktura obejmuje informacje dotyczące celów nauczania, doboru treści do ich realizacji, wymagań stawianych studentom w zakresie ich opanowania oraz formy sprawdzania tej wiedzy i umiejętności. Podstawą ich konstrukcji w praktyce okazują się dostępne podręczniki do algebry liniowej. Przeprowadzenie dokładnej ich analizy w zakresie interesującego nas pojęcia bazy przestrzeni wektorowej stało się punktem wyjścia do prowadzonych przez nas badań.

Teoretycznie we wstępnej fazie nauczania akcent może być położony na elementy formalne, bądź intuicje, skojarzenia, modele poglądowe, czy też narzędzia wykonawcze – algorytmy, procedury postępowania lub zastosowania w innych teoriach. W szczególności mają znaczenie stosowane w podręcznikach zabiegi kształtowania pojęć, m.in. edytorskie, język przekazu, aspekty merytoryczne i metodyczne badania pojęć.

Wybór jednego z podejść może być punktem wyjścia dla odmiennych koncepcji dydaktycznych, doboru elementów formalnych, sformułowania definicji, twierdzeń, a także innych zabiegów metodycznych prowadzących do wytworzenia się w umyśle odmiennych obrazów pojęć[1]. Analizę dostępnych koncepcji podręcznikowych wprowadzania i rozwijania pojęcia bazy przestrzeni wektorowej przeprowadzimy w czterech segmentach[2]: wprowadzającym, definicyjnym, rozwijającym oraz zastosowań.

Zaprezentujemy segmentację tekstu wybranych podręczników do algebry liniowej przeznaczonych dla studentów kierunku matematyka. Zwrócimy szczególną uwagę na stosowane przez autorów podręczników zabiegi mogące ułatwić lekturę ich tekstu, a następnie podamy charakterystykę poszczególnych segmentów w warstwie merytorycznej, językowej i zadaniowej.

2. O pewnych badaniach dotyczących podręcznikowych koncepcji wprowadzania pojęcia bazy przestrzeni wektorowej

Różnorodność koncepcji dydaktycznych dotyczących wprowadzania i rozwijania pojęć algebry liniowej, w szczególności pojęcia bazy, rodzi następujące pytania:

---

[1] Na koncepcję pojęcia matematycznego składają się następujące elementy: baza intuicyjno – skojarzeniowa, elementy formalne, aparat komunikowania, związki i zależności z innymi pojęciami teorii, algorytmy i sposoby postępowania - narzędzia wykonawcze, a także sytuacje, w których pojęcie jest używane, które stanowią fundamentalną dla niego płaszczyznę odniesienia (zob. B. Bugajska – Jaszczołt, 2002)

[2] Przez segment tekstu rozumieć będziemy wyodrębniony (explicite lub niejawnie) fragment, który może być traktowany, jako zamknięta jednostka przekazu określonej informacji. Segmentacji tekstu poświęcona jest publikacja (B. Bugajska – Jaszczołt, 2006).

Jaki jest cel wprowadzenia pojęcia bazy przestrzeni wektorowej; czy traktujemy ją jako fundamentalne pojęcie służące opisowi teorii przestrzeni wektorowej, czy jako pojęcie pomocnicze do wyjaśnienia i zrozumienia innych pojęć? Jakie konsekwencje dydaktyczne wynikają z wyboru jednej z określonych wyżej opcji?

Postawione pytanie kieruje naszą uwagę na bardziej szczegółowe kwestie:

- ♦ Jakie pojęcia wstępne potrzebne są do zrozumienia sensu definiowanego obiektu?
- ♦ Elementy języków jakich teorii dominują w opisie pojęcia bazy?
- ♦ Czy autorzy zamieszczają modelowe rozwiązania zadań i problemów? Do jakich elementów wiedzy – formalnych, czy intuicyjnych odwołują się najczęściej?
- ♦ Czy autorzy ujawniają związki pojęcia bazy przestrzeni wektorowej z innymi pojęciami? Jeśli tak - jaki mają one charakter?
- ♦ Jakie modelowe rozwiązania zadań i problemów proponują, jakie rozumowania w nich akcentują? Czy w rozwiązaniach tych odwołują się do podanej definicji?

Nasze badania miały charakter teoretyczny i były prowadzone w oparciu o studium dostępnych podręczników do algebry liniowej. Analizie poddałyśmy 11 podręczników, których pełen wykaz umieszczony został w bibliografii.

3. Koncepcje podręcznikowe pojęcia bazy przestrzeni wektorowej

Przeprowadzona analiza pozwoliła, ze względu na kontekst w jakim pojawia się pojęcie bazy, wyodrębnić dwie grupy podręczników. Pierwsza grupa (w której jako reprezentanta wybrałyśmy podręcznik B. Gleichgewichta) – w której pojęcie bazy pojawia się przed wprowadzeniem teorii macierzy oraz druga (reprezentant - podręcznik T. Świrszcza), w której dla rozumienia bazy istotną rolę odgrywają elementy teorii macierzy. Oprócz wskazanego wyżej układu treści obie grupy różnią także:

- kształt definicji, sformułowania twierdzeń, własności,
- struktury sytuacji zadaniowych, modelu, interpretacji, prowokowanych elementów nieformalnych – „ukrytych", które świadomie (lub nie) kształtujemy tym wyborem.

Pierwszą z tych grup nazwiemy bezmacierzową, zaś drugą - macierzową (nazwę determinuje użycie(lub nie) w opisie bazy przestrzeni wektorowej pojęć teorii macierzy).

.

Oczywiście nie można arbitralnie ustalić, która z propozycji metodycznych zademonstrowana w tych dwóch grupach jest bardziej efektywna, dlatego też mają sens wszelkie próby badania, jakie są konsekwencje stosowanych koncepcji dydaktycznych dla tworzonych w umysłach uczących się obrazów pojęć (zagadnienia te są celem dalszych naszych badań).

3.1 Pojęcie bazy przestrzeni wektorowej w podręcznikach grupy bezmacierzowej.

Pojęcie bazy przestrzeni wektorowej w tej grupie podręczników pojawia się w następującym układzie treści: przestrzenie wektorowe – tu generowanie przestrzeni, wektory liniowo niezależne i baza przestrzeni, dalej macierze i wyznaczniki oraz układy równań liniowych. Układ treści nie tylko generuje kolejność wprowadzanych pojęć, reguły posługiwania się nimi, określone interakcje i zależności, wyznacza obszary ich zastosowań ale także w dużej mierze ustala język.

Egzemplifikację zaproponowanej w poprzednim paragrafie analizy tekstu w odniesieniu do pojęcia bazy przedstawia Tabela 1a (przegląd stosowanych zabiegów edytorskich) oraz Tabela 1b (charakterystyka segmentów tekstu).

Tabela 1a. Egzemplifikacja segmentacji tekstu

Segment	*Sygnał*	*B. Gleichgewicht*
Wprowadzający	**Graf. – edytorski**	
	Językowe	
Definicyjne	**Graficzno – edytorski**	Słowo Definicja zapisana wielkimi literami, a słowo baza kursywą.
	Językowe	Tytuł rozdziału: Baza i wymiar przestrzeni liniowej.
Rozwijający	**Graficzno – edytorski**	Treść twierdzeń zapisane kursywą.
	Językowe	
Zastosowań	**Graficzno – edytorskie**	
	Językowe	

Tabela 1b. Charakterystyka segmentów tekstu w płaszczyźnie merytorycznej, językowej i zadaniowej

Segment	*Płaszczyzna charakterystyki*	*B. Gleichgewicht*
Wprowadzający	**Merytoryczna**	
	Językowa	
	Zadaniowa	
Definicyjny	**Merytoryczna**	Baza przestrzeni wektorowej zdefiniowana jest jako „układ generatorów M przestrzeni liniowej V(K) taki, którego każdy skończony podukład układu M jest liniowo niezależny”; stąd pojęcia wstępne: przestrzeń liniowa, układ wektorów, układ generatorów, skończony podukład, układ liniowo niezależny. Oto definicje niektórych z nich, zamieszczone we wcześniejszych paragrafach podręcznika. **Definicja 1.** Mówimy, że układ $(x_i)^r{}_1$ wektorów przestrzeni liniowej V(K) jest liniowo zależny (lub, że wektory $x_1,x_2,...,x_r$ są liniowo zależne), jeśli istnieje nietrywialna kombinacja liniowa wektorów tego układu równa 0. Układ wektorów $(x_i)^r{}_1$ nazywa się liniowo niezależny (wektory $x_1,x_2,...,x_r$ nazywają się liniowo niezależne), jeśli nie jest on liniowo zależny, tzn. gdy każda jego kombinacja liniowa równa 0 jest trywialna. **Definicja 2.** Niech V(K) będzie przestrzenią liniową i M niepustym układem elementów zbioru V. Przez L(M) będziemy oznaczali zbiór wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych podukładów układu M, a więc $L(M)=\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k:\quad a_1,a_2,...,a_k \in K,\quad x_1,x_2,...,x_k \in M;\ k=1,2,...\}$. O układzie M mówimy, ze generuje podprzestrzeń L(M) (lub że rozpina przestrzeń L(M)), odpowiednio o podprzestrzeni L(M) mówimy, ze jest generowana przez układ M (lub że jest rozpięta na układzie M). Układ M nazywamy układem generatorów podprzestrzeni L(M). **Definicja 3.** Układ generatorów M przestrzeni liniowej V(K) nazywa się jej bazą, jeśli każdy skończony podukład układu M jest liniowo niezależny.
	Językowa	Elementy języka przestrzeni liniowych, np.: wektor, układ wektorów, przestrzeń liniowa, generator przestrzeni liniowej.
	Zadaniowa	
Rozwijający	**Merytoryczna**	Twierdzenia wkw na bazę jako maksymalny liniowo niezależny układ wektorów Dotyczące liczby elementów bazy danej przestrzeni wektorowej, gdy wiadomo ile elementów liczy choćby jedna jej baza Przestrzenie nie mające skończonej bazy. Twierdzenia dotyczące związków pomiędzy liniową niezależnością układu wektorów, a bazą. Współrzędne wektora w bazie.
	Językowa	Język przedmiotowy teorii przestrzeni wektorowej. Brak komentarzy odautorskich.
	Zdaniowa	Przykłady baz w przestrzeniach: $K^n(K)$, C(R),

Zastosowań	**Merytoryczna**	Brak jawnych obszarów zastosowania nowopoznanej teorii. Zadania do samodzielnej analizy: znaleźć kilka różnych baz w przestrzeniach $Z^3{}_2, Z^3{}_3$. Czy jest bazą układ $\{e_1, e_1+e_2, \ldots, e_1+e_2+\ldots+e_n\}$ jeśli wiadomo, że $(e_i)_1{}^n$ jest baza przestrzeni V(K)?
	Język	Słownik charakterystyczny dla teorii przestrzeni wektorowych.
	Zadaniowa	

3.2. Pojęcie bazy przestrzeni wektorowej w podręcznikach grupy macierzowej.

W tej grupie podręczników wykład prowadzony jest w następującej kolejności: macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych oraz przestrzenie wektorowe - tu pojawia się pojęcie bazy przestrzeni liniowej. Stosowanie w tej grupie podręczników sygnałów językowych i pozawerbalnych odpowiedzialnych za „podział" tekstu prezentuje Tabela 2a, zaś szczegółowy opis warstw: merytorycznej, językowej i zadaniowej wyróżnionych segmentów Tabela 2b.

Tabela 2a. Egzemplifikacja segmentacji tekstu

Segment	***Sygnał***	***T.Świrszcz***
Wprowadzający	**Graf. – edytorski**	
	Językowe	
Definicyjne	**Graficzno – edytorski**	Słowo DEFINICJA zapisana wielkimi literami, a słowo baza jest wytłuszczone
	Językowe	Tytuł rozdziału: Baza i wymiar przestrzeni wektorowej.
Rozwijający	**Graficzno – edytorski**	Treści twierdzeń zapisywane głównie symbolami matematycznymi
	Językowe	
Zastosowań	**Graficzno – edytorskie**	
	Językowe	

Tabela 2b. Charakterystyka segmentów tekstu w płaszczyźnie merytorycznej, językowej i zadaniowej

Segment	***Płaszczyzna charakterystyki***	***T. Świrszcz***
Wprowadzający	**Merytoryczna**	
	Językowa	
	Zadaniowa	
efinicyjny	**Merytoryczna**	Baza przestrzeni wektorowej zdefiniowana jest jako „układ wektorów przestrzeni wektorowej liniowo niezależny i generujący tę przestrzeń”; stąd pojęcia wstępne: przestrzeń liniowa, układ wektorów, układ generatorów, skończony podukład, układ liniowo niezależny. Oto definicje niektórych z nich, zamieszczone we wcześniejszych paragrafach podręcznika. **Definicja 1.** Niech **V** będzie przestrzenią wektorową nad K i niech A= ($v_1,v_2,...,v_r$) będzie układem wektorów w przestrzeni **V**. Mówimy, że układ A jest liniowo niezależny (lub, że wektory $v_1,v_2,...,v_r$ są liniowo niezależne), jeśli z równości $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_rv_r = \mathbf{0}$ wynika, że $a_1 = a_2 = ... = a_r = 0$. Jeśli układ A nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest **liniowo zależny** (lub że wektory $v_1,v_2,...,v_r$ są liniowo zależne). Przyjmujemy dodatkowo, że układ pusty jest liniowo niezależny. **Definicja 2.** Niech **V** będzie przestrzenią wektorową nad K i niech A= ($v_1,v_2,...,v_r$) będzie układem wektorów w przestrzeni **V**. Każde wyrażenie postaci (1) $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_rv_r$, gdzie $a_{1,}\, a_{2,\,\ldots\,,}\, a_r$ będziemy nazywali **kombinacją liniową układu** A lub **kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v_1,v_2,...,v_r}$.** Skalary $a_{1,}\, a_{2,\,\ldots\,,}\, a_r$ nazywają się współczynnikami kombinacji liniowej (1). Zbiór wszystkich wektorów z przestrzeni **V,** które dają się przedstawić w postaci (1), będziemy oznaczali L(A). **Definicja 3.** Jeśli A=($\mathbf{v_1,v_2,...,v_r}$.) jest układem generatorów z przestrzeni wektorowej **V** nad K, to podprzestrzeń L(A) przestrzeni **V** nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez układ A**, a układ A nazywamy **układem generatorów** podprzestrzeni L(A).
	Językowa	Elementy języka przestrzeni liniowych, np.: wektor, układ wektorów, przestrzeń liniowa, generator przestrzeni liniowej, a także elementy języka macierzy, np. iloczyn układu przez macierz, rząd macierzy, macierz trapezowa, wierszowe operacje elementarne, macierze wierszowo równoważne, itp.
	Zadaniowa	
Rozwijający	**Merytoryczna**	Twierdzenie określające bazę przestrzeni wektorowej przy pomocy rzędu macierzy. Twierdzenia dotyczące jednoznaczności przedstawienia dowolnego wektora przestrzeni w postaci liniowej kombinacji wektorów bazy, o równoliczności zbiorów wektorów stanowiących bazę. Przestrzenie nie mające skończonej bazy. Twierdzenia dotyczące związków pomiędzy liniową niezależnością układu wektorów, generowaniem przestrzeni a bazą wyrażone w teorii macierzy. Współrzędne wektora w bazie.
	Językowa	Język teorii przestrzeni wektorowej oraz teorii macierzy. Brak komentarzy odautorskich.
	Zadaniowa	Przykłady bazy kanonicznej w przestrzeniach: $K^n(K)$ oraz w przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej n-tego.
Zastosowań	**Merytoryczna**	Brak jawnych obszarów zastosowania nowo poznanej teorii.
	Język	Język teorii przestrzeni wektorowych oraz macierzy.
	Zadaniowa	Brak zadań do samodzielnego rozwiązania.

3.3 Analiza porównawcza obu grup podręczników.

W obu grupach podręczników rozważania dotyczące pojęcia bazy koncentrują się głównie wokół przestrzeni skończeniewymiarowych. Autorzy nie stosują żadnych zbiegów dydaktycznych, których celem byłoby przybliżenie sensu pojęcia bazy przestrzeni wektorowej (patrz Tabela 1a oraz Tabela 2a). W segmencie definicyjnym, brak jest wstępnych rozważań przygotowujących do wprowadzenia definicji bazy. Po zdefiniowaniu pojęcia bazy następują twierdzenia dotyczące bazy wraz z dowodami oraz niewielka ilość przykładów. Analiza definicji bazy przestrzeni wektorowej wymaga znajomości i rozumienia wielu pojęć pomocniczych, m.in.: układu generatorów, kombinacji liniowej wektorów, kombinacji trywialnej, układu liniowo niezależnego, podukładu danego układu wektorów (patrz Tabela 1b oraz 2b). W obu grupach podręczników twierdzenia następujące po definicji są przydatne jedynie do sprawdzenia, czy podany układ wektorów stanowi bazę danej przestrzeni wektorowej. Nie dają efektywnych metod konstrukcji bazy w konkretnie zadanej przestrzeni liniowej. Teoria jest mocno sformalizowana, tekst zawiera głównie symbole, brak jest specjalnych zabiegów edytorskich mających ułatwić studentowi lekturę tekstu podręcznika, a prowadzone rozumowania oparte są na logicznych regułach wnioskowania. Dużo uwagi poświęca się dowodom twierdzeń. Język w warstwach werbalnych i symbolicznych ma głównie charakter przedmiotowy, jest mało operatywny – kładzie akcent na pojęcia jako obiekty, a nie jako procesy, rzadko występują operacje metajęzykowe, objaśnienia i komentarze.

Istotne różnice w konstrukcji koncepcji obu grup podręczników występują w segmencie rozwijającym we wszystkich trzech wyróżnionych przez nas warstwach: merytorycznej, językowej i zadaniowej.

Warstwa	Grupa bezmacierzowa	Grupa macierzowa
Merytoryczna	Twierdzenia skonstruowane są przy pomocy tych samych pojęć, które występują w definicji bazy przestrzeni wektorowej, a czynności w myśl tych twierdzeń sprowadzają się do wyznaczenia minimalnego układu generatorów, bądź maksymalnego układu liniowo niezależnego.	Twierdzenia, które następują po definicji pozwalają prowadzić rozważania dotyczące bazy przestrzeni wektorowej w języku teorii macierzy i metodami jej przynależnymi. Wyznaczenie bazy przestrzeni sprowadza się wówczas do obliczenia rzędu danej macierzy, natomiast uzupełnienie zadanego układu wektorów do bazy rozważanej przestrzeni przeprowadza się sprowadzając macierz blokową poszerzoną o macierz jednostkową do postaci trapezowej.
Językowa	Występują jedynie terminy języka teorii przestrzeni wektorowej: układ wektorów, układ generatorów, układ liniowo niezależny.	Dominują elementy języka teorii macierzy, m.in.; rząd macierzy, kolumna, wiersz macierzy, macierze równoważne, postać trapezowa macierzy.
Zadaniowa	Zadania i przykłady mają charakter jednostronny, celem jest uzasadnienie w oparciu o twierdzenie, będące odpowiednikiem definicji T. Świerszcza, że wskazany układ wektorów przestrzeni $K^n(K)$, czy $C(R)$ jest układem generatorów liniowo niezależnym.	Demonstrowane rozwiązania przykładów opierają się na definicji bazy przestrzeni wektorowej podanej przez B. Gleichgewichta i wykorzystują przekształcenia wierszowe specjalnie skonstruowanej macierzy blokowej.

4. Wnioski

We wszystkich analizowanych przez nas podręcznikach autorzy nie wykorzystują podanych przez siebie definicji. W podręczniku B. Gleichgewichta w sposób istotny wykorzystywane jest twierdzenie, będące odpowiednikiem definicji podanej w podręczniku T. Świerszcza. Natomiast w przypadku podręcznika T. Świrszcza rachunek macierzowy (rząd macierzy) stosowany jest w kontekście rozważań dotyczących maksymalnego liniowo niezależnego podukładu danego układu - stanowiącego treść definicji bazy przestrzeni wektorowej w podręczniku B. Gleichgewichta.

W pierwszej grupie podręczników baza jest fundamentalnym pojęciem do zrozumienia teorii przestrzeni wektorowych. Jest punktem wyjścia do opisu przestrzeni wektorowej oraz wszelkich jej własności.

W przypadku drugiej grupy podręczników baza daje jedynie możliwość określenia wymiaru przestrzeni i cała praca w przestrzeniach wektorowych sprowadza się do stosowania podanych algorytmów umożliwiających sprawdzenie, czy dany układ wektorów jest bazą danej przestrzeni. Przestrzeń wektorowa w dalszym ciągu pozostaje abstrakcyjnym pojęciem teorii. W konsekwencji w obu przypadkach kształtujemy inny obraz teorii przestrzeni wektorowych, a co za tym idzie inne merytorycznie i metodologicznie umiejętności studentów.

Bibliografia

1. Arodź H., Krzysztof Rościszowski K.: 2003„ *Algebra liniowa*, Warszawa
2. Banaszak G., Gajda W.: 2003, *Elementy algebry liniowej*, WNT Warszawa
3. Białynicki – Birula A. :1967, *Algebra liniowa z geometrią,* PWN, Warszawa.
4. B. Bugajska – Jaszczołt.: 2002, *Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej* (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), CD-ROM, XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki
5. B. Bugajska – Jaszczołt.: 2006, *O prawidłowościach tworzenia pojęć matematycznych na przykładzie pojęcia wyznacznika macierzy* w Efektywność procesu nauczania w szkołach wyższych, Łódź.
7. Gancarzewicz J.: 1991, *Algebra liniowa z elementami geometrii,* UJ, Kraków.
8. Gleichgewicht B.: 2002, *Algebra,* Oficyna Wydawnicza G i S, Wrocław.
9. Grysa K.: 1996, *Zastosowania matematyki w zarządzaniu i ekonomii, cz. 1 Elementy algebry,* Politechnika Świętokrzyska, Kielce.
10. Jurewicz T., Skoczylas Z.: 2003, Algebra liniowa, Wydawnictwo Gis, Wrocław
11. Kolupa M.: 1973, *Elementarny wykład algebry liniowej dla ekonomistów,* PWN, Warszawa.Łomnicki A., Magdoń M., Żurek - Etgens M.: 1998, *Podstawy algebry liniowej w zadaniach,* Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.
12. Mostowski A., Stark M.1968, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa
13. Rozporządzenie Ministra Edukacji i Sportu z dnia 18 kwietnia 2002 w sprawie określenia standardów nauczania dla poszczególnych kierunków studiów i poziomów kształcenia.
14. Romanowski A.:, 2003, Algebra liniowa, Wydawnictwo PG
15. Świrszcz T.: 2004, *Algebra liniowa z geometrią analityczną*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

Adresa autora:
Beata Bugajska – Jaszczołt
Danuta Drygała
Instytut Matematyki
Akademii Świetokrzyskiej w Kielcach