Wybrane przykłady zastosowania TI w kształtowaniu koncepcji pojęć matematycznych

Some examples using ICT to create the concept image of mathematical object

Beata Bugajska- Jaszczołt, Monika Czajkowska

Abstract:
In this article we are discussing the complex nature of mathematical objects and specificity of construction of the mathematical knowledge. It is being demonstrated how possible it is to deepen the understanding of mathematical objects by means of using IT and also to ponder the problems that are inaccessible while using the traditional methods and demonstrative means.

Key words:
conception of mathematical object, definition, mathematical education with ICT using

MESC: Q 60

1. Wprowadzenie

W nauczaniu matematyki, jak mówił już trzydzieści lat temu R. Thom[1] – laureat medalu Fieldsa – poważnym problemem jest rozwój „znaczenia", rozumienia obiektów matematycznych, tworzenia koncepcji – obrazu abstrakcyjnego pojęcia, właściwej relacji między konkretem, intuicją a abstraktem. TI oferuje nam w tym zakresie nowe możliwości prezentacji, docierania do faktów, które nie są dostępne przy zastosowaniu klasycznych środków dydaktycznych (zob. B. Siemieniecki, 1999). Myślimy tu w szczególności o rozumieniu miejsca i roli definicji matematycznej, a także kształtowaniu intuicji zgodnych z sensem nadawanym pojęciu przez jego definicję oraz tworzeniu operatywnych narzędzi posługiwania się nim w rozmaitych kontekstach sytuacyjnych.

W tym artykule pokażemy, że zastosowanie TI na lekcji matematyki może służyć zarówno docieraniu do sensu matematycznego pojęcia, tworzeniu dotyczących go wyobrażeń, intuicji, skojarzeń, jak również odkrywaniu i akceptowaniu roli definicji matematycznej. Omówimy jak wykorzystać narzędzia TI (komputer i kalkulator graficzny) do pogłębienia rozumienia pojęć matematycznych, których sens nadany przez definicje związany jest z tzw. przejściami granicznymi, trudnymi do wizualizacji, słowem tych pojęć, które trudno kształtować tradycyjnymi metodami.

---

[1] Zob. R.Thom *Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?*, Wiadomości Matematyczne 18, 1974, s. 113 – 129

2. Specyfika kreowania pojęć matematycznych

Pojęcia matematyczne mają zwykle złożoną naturę i są kształtowane systematycznie w nauczaniu szkolnym, w toku uprzednio zaplanowanego procesu dydaktycznego. Zgodnie z teoriami J. Piageta, J. Brunera i L. Wygotskiego mechanizmy rządzące powstawaniem pojęć matematycznych sprawiają, że uczący się tworzy sobie w umyśle pewną strukturę poznawczą[2], która umożliwia mu posługiwanie się pojęciem i dalsze rozwijanie jego rozumienia (zob. J. Bruner, 1978[3]). W procesie zdobywania nowych informacji struktury poznawcze ulegają wielokrotnym przekształceniom i modyfikacjom. Nowa wiedza nie zastępuje dawnej, lecz zostaje z nią zintegrowana w toku procesów asymilacji i akomodacji. Charakterystyczne na tej drodze jest pojawianie się konfliktów poznawczych, sprzeczności i prób ich usuwania. Uczeń posiada jednocześnie dwa elementy poznawcze, które są niezgodne ze sobą, co powoduje, że odczuwa on niepewność, obawę, powątpiewanie w posiadane wiadomości. Ten stan nieprzyjemnego napięcia psychicznego i emocje natury negatywnej, w warunkach sprzyjających procesowi poznawczemu, wywołują napięcie motywacyjne, tym silniejsze, im bardziej wyrazista jest niezgodność między elementami poznawczymi. To powoduje, że uczeń podejmuje działania mające na celu zredukowanie lub złagodzenie napięcia (zob. M. Czajkowska 1994, 2005).

Jeśli dany schemat postępowania sprawdza się w nowych sytuacjach, to staje się on „wiedzą", „czymś bardzo osobistym, wręcz intymnym i stale nadbudowywanym" (*Materiały…*, 2000, s.54). Procesy tworzenia się wiedzy są na ogół nieporównywalne u poszczególnych uczących się, m.in. dlatego, że nowa wiedza każdego ucznia jest budowana na całej jego dotychczasowej wiedzy, w tym na „prawiedzy" związanej z pojęciem, na intuicjach oraz wiedzy pozaszkolnej. Końcowy produkt tego procesu nazywany bywa w literaturze dydaktycznej obrazem (zob. A. Sierpińska, 1989), portretem (zob. M. Hejny, 1997), czy też koncepcją pojęcia.

Istotnymi elementami koncepcji pojęcia (zob. B. Bugajska – Jaszczołt, 2003) są:

- **Baza intuicyjno – skojarzeniowa**, którą tworzą wyobrażenia myślowe, skojarzenia oraz intuicje dotyczące pojęcia.
- **Fakty**, przyjęte jako efekt logicznej analizy pojęcia lub zaakceptowane jako obowiązujące, choć niekoniecznie zgodne z intuicjami.

---

[2] W znaczeniu nadanym temu terminowi przez J. Piageta (1981).

[3] „Gdy człowiek aktywnie buduje swoją wiedzę, czyni to poprzez odnoszenie napływających informacji do jakiegoś uprzednio utworzonego psychologicznego układu odniesienia. Ów układ odniesienia bywa rozmaicie nazywany: strukturą poznawcza, teorią, kategorialnym systemem kodującym, modelem wewnętrznym oraz systemem reprezentacji" (J. Bruner, 1978, s. 657)

- **Narzędzia wykonawcze**: algorytmy rozwiązywania zadań, procedury postępowania, strategie heurystyczne, które uczący się wykorzystuje lub które umożliwiają mu organizowanie działań podczas rozwiązywania zadań.
- **Elementy systemowe:** zależności i związki z innymi pojęciami.
- **Aparat komunikowania**, tworzą go elementy języków:
    - naturalnego, związanego z sytuacjami i przykładami,
    - formalnego, „słownik” terminologiczny oraz specyficzne segmenty syntaktyczne pełniące funkcje ekspresyjne i komunikacyjne.
- **Konteksty sytuacyjne,** jako obrazy konkretnych modeli (sytuacji, zadań) rzutujące na związki pojęcia z innymi.

3. Pojęcie brzegu i pola figury geometrycznej w teorii i matematyce szkolnej

Istotny wpływ na nauczanie i uczenie się ma wprowadzanie wiedzy na takim poziomie ogólności i formalizacji, za pomocą takich środków upoglądowiania i motywowania, by możliwe było jej operatywne i głębokie przyswojenie. Od nauczyciela zależy między innymi to czy, kiedy (tzn. w jakim momencie lekcji) i w jakim celu wykorzysta dydaktyczny program komputerowy. Materiał dydaktyczny jakim jest oprogramowanie komputerowe pozwala, w określonych warunkach, na głębsze rozumienie pojęć matematycznych, a także na modelowanie i symulowanie przebiegu wielu zjawisk, czy procesów, z aktywnym udziałem uczniów. Umiejętny ich dobór i właściwe wykorzystanie mogą zadecydować o tym, czy rozważane zagadnienia wzbudzą zainteresowanie uczniów i czy proces poznania będzie przebiegał prawidłowo, czyli sprzyjał tworzeniu koncepcji pojęcia.

Pojęcia: brzegu i pola figury geometrycznej są tymi pojęciami matematyki szkolnej, których rozumienie w jakimś sensie ustala język potoczny. Brzeg w materialnym świecie wyznacza granica dwóch jakościowo różnych bytów, np. brzeg morza, brzeg ławki (rant) itp. Termin „pole” używany jest języku codziennym w znaczeniu obszaru, terenu, czy też zakresie bądź dziedzinie działania. Znaczenie słów „brzeg” oraz „pole” w języku naturalnym tylko częściowo odpowiada sensowi tych pojęć ustalonym w matematyce przez ich definicje. Gdy pominiemy tzw. skrajne przypadki można w nauczaniu bazować na tych intuicjach. Nie umożliwiają one jednak wytworzenia się ich idei głębokiej (por. Z. Semadeni, 2003), obejmującej i te sytuacje, które nie są zgodne z intuicjami.

Proces poznawczy, w wyniku którego powstaje nowa wiedza ucznia, zaczyna się, jak mówi M. Hejny (1997) od zainteresowania, prowadzi poprzez zdobywanie doświadczeń w różnorodnych sytuacjach do powstania nowego fragmentu wiedzy. Prawidłowości rozwoju pojęć matematycznych opisane przez M. Hejnego były dla nas inspiracją przy opracowywaniu propozycji wprowadzania i rozwijania rozumienia pojęcia brzegu i pola figury geometrycznej z wykorzystaniem TI, które prezentujemy w dalszej części artykułu.

3.1 Propozycja dydaktyczna wprowadzania pojęcia brzegu figury geometrycznej z wykorzystaniem TI

Wprowadzanie pojęcia brzegu figury może przebiegać według następujących etapów.

Etap zainteresowania

Rozpoczynamy od rozmowy z uczniami na temat intuicyjnego rozumienia brzegu i spontanicznych skojarzeń tego pojęcia z sytuacjami realnymi. W trakcie dialogu kierujemy ich uwagę na „części" należące i nie należące do obiektu, o brzeg którego pytamy.

Etap modeli

Uczniowie obserwują na monitorze komputera różne figury, m.in.: reprezentacje ikoniczne obiektów rzeczywistych i abstrakcyjnych oraz ich brzegi. Wynikiem obserwacji i działań powinno być wprowadzenie terminów kluczowych dla pojęcia brzegu figury – punktu i otoczenia kołowego.

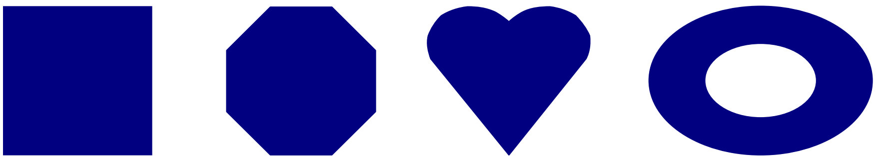
Etap krystalizacji

Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela wyróżniają cechy konstytutywne pojęcia brzegu figury geometrycznej. Następnie formułują, poprzez kolejne aproksymacje, definicję punktu brzegowego i brzegu figury:

Punktem brzegowym figury geometrycznej F jest każdy punkt przestrzeni, którego wszystkie otoczenia kołowe zawierają jednocześnie punkty należące do figury F i punkty do niej nie należące. Zbiór wszystkich punktów brzegowych figury F nazywa się brzegiem figury geometrycznej F.

Etap zastosowań

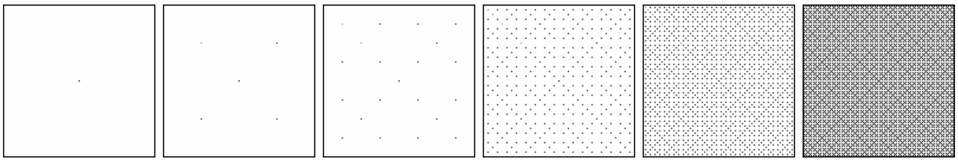
Sytuacje typowe



Uczniowie badają różne figury geometryczne i zaznaczają kolorem brzeg każdej z figur przedstawionych na powyższych rysunkach. Na ogół nie sprawia im to trudności. Niepewność zaczyna się w momencie, gdy z kwadratu „wyrzucamy" np. punkt przecięcia się przekątnych. Tu zgodnie z przyjętymi definicjami łatwiej z pomocą komputera przekonać się, że poza uprzednio rozpoznanym brzegiem, jeszcze w dowolnym otoczeniu kołowym wyrzuconego punktu są zarówno punkty kwadratu, jak i ten jeden do niego nie należący. To skłania ucznia, w naturalny sposób, do włączenia do ustalonego brzegu jeszcze dodatkowego punktu.

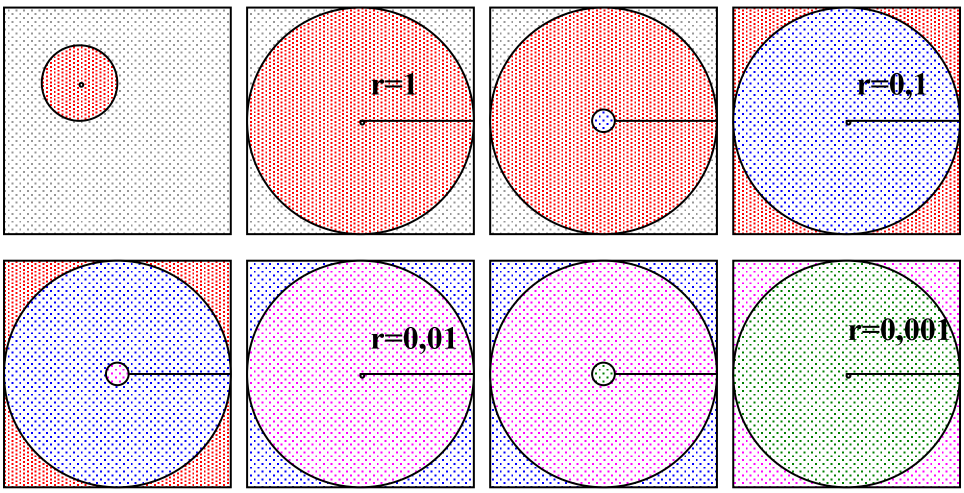
Sytuacje nietypowe

Konieczność odwołania się do definicji pojęcia brzegu figury i przyjęcie wszystkich konsekwencji z niej wynikających pojawia się w trakcie poszukiwania rozwiązania problemu: Czy istnieje taka figura płaska, której brzegiem jest kwadrat? Dotychczasowe doświadczenia podpowiadają im, że brzegiem jakiejkolwiek figury może być jedynie krzywa, bądź łamana zamknięta. Mając do dyspozycji komputer z odpowiednim oprogramowaniem uczniowie mogą przekonać się, że kwadrat – sito jest poprawną odpowiedzią. Zasada tworzenia kwadratu – sita przedstawiona jest na rysunkach:



Z danego kwadratu eliminujemy punkt przecięcia się przekątnych. Następnie dzielimy go na 4 mniejsze kwadraty. Z każdego nowopowstałego kwadratu usuwamy punkt przecięcia się przekątnych. Znowu każdy kwadrat dzielimy na 4 mniejsze i usuwamy punkty przecięcia się ich przekątnych, itd.

Obserwując obraz na ekranie monitora i odwołując się do definicji, uczniowie upewnią się, że brzegiem kwadratu – sita jest kwadrat. Wybierając **dowolny** punkt kwadratu i stosując kolejne powiększenia fragmentu obrazu zawierającego ten punkt zauważą, że **w każdym** otoczeniu kołowym tego punktu znajdują się zarówno punkty należące do kwadratu – sita jak i punkty, które do niego nie należą. Co więcej z każdym powiększeniem fragmentu obrazu, zmniejsza się promień otoczenia kołowego wybranego punktu.



Zatem zgodnie z przyjętą definicją kwadrat jest brzegiem kwadratu – sita.

3.2 Propozycja dydaktyczna rozwijania rozumienia pojęcia pola figury geometrycznej z wykorzystaniem TI. Figury niemierzalne i figury o polu równym zero.

Zagadnienia związane z kształtowaniem pojęcia pola figury płaskiej poruszane są na wszystkich poziomach edukacji matematycznej. Praktyka pokazuje, że w nauczaniu szkolnym akcent położony jest na rozwój umiejętności stosowania wzorów na obliczanie pól wybranych figur geometrycznych. Warstwa pojęciowa ma w tym kontekście marginalne znaczenie[4]. Większość uczniów na pytania: Czy każda figura ma pole? Czy są figury o polu równym zero? odpowiada najczęściej błędnie. Intuicja podpowiada im, że każda figura ma pole, co najwyżej jego obliczenie może być niekiedy kłopotliwe. Zwykle dzieje się tak, gdyż pole figury utożsamiane jest intuicyjnie z powierzchnią. Powierzchnia jest częścią płaszczyzny, a nie liczbą, stąd konflikt pomiędzy wiedzą intuicyjną i formalną, pozostający najczęściej w ukryciu. Dopiero postawienie ucznia w sytuacji konfliktowej pozwala na ujawnienie owej sprzeczności i jej usuniecie. W warunkach sprzyjających uczeniu się, taki zabieg może wzbudzić procesy motywacyjne i zaangażowanie emocjonalne ucznia w uczenie się (zob. M. Czajkowska 2005). Warto więc sprowokować sytuację, która wymagać będzie od ucznia głębokiego rozumienia i umiejętności metodologicznych – stosowania definicji w sytuacjach, w których nie jest możliwe znalezienie rozwiązania na innej drodze.

Stawiamy przed uczniami pytanie[5]: Jak obliczyć pole koła bez korzystania z gotowych wzorów? Pracę rozpoczynamy od wprowadzenia pojęć: sieć kwadratowa, ciąg sieci, segment sieci zawarty w figurze oraz segment sieci pokrywający figurę[6]. Uczniowie, wykorzystując odpowiedni program na kalkulator graficzny[7], obserwują na monitorze jak koło zostaje pokryte siecią kwadratową, a następnie badają segment sieci zawarty w figurze (oznaczony znakiem „+”) i segment sieci pokrywający figurę (oznaczony znakami „+” i „-”). Tworzony ciąg sieci i kolejno wyznaczane miary wewnętrzne i zewnętrzne pozwalają na coraz dokładniejsze szacowanie pola koła o zadanym z góry promieniu.

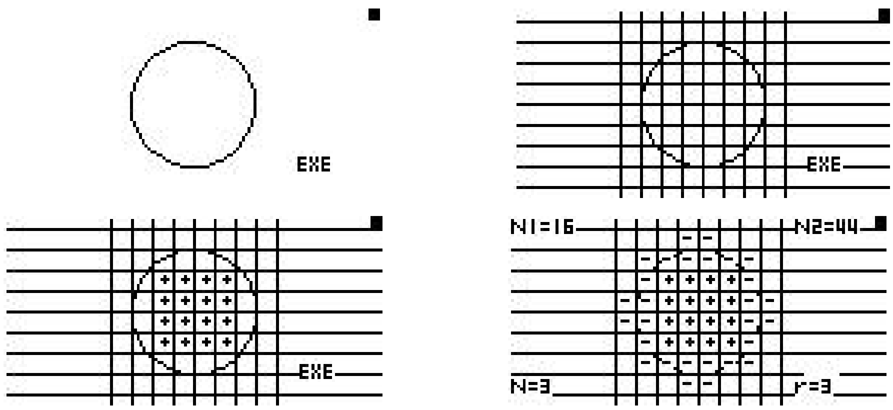
---

[4] Świadczą o tym m.in. wyniki badań prowadzonych w ramach zajęć z dydaktyki matematyki i pracowni magisterskiej w Instytucie Matematyki Akademii Świętokrzyskiej w Kielcach

[5] Naturalnym momentem jego pojawienia się na lekcji matematyki może być ten, gdy uczeń nie zna jeszcze stosownego, „gotowego” wzoru na obliczenie pola koła, natomiast pola różnych figur określał za pomocą wymierzania kwadratami jednostkowymi i definicja miary, w zakresie intuicyjnym, jest mu znana.

[6] „Ciągiem sieci utworzonym z sieci jednostkowej przez k – krotne zagęszczanie nazywamy ciąg sieci, którego n –tym wyrazem jest sieć powstająca z sieci jednostkowej przez podział każdego z jej kwadratów na k^{2n} przystających kwadratów (n=0,1,2,…). (…) Segmentem sieci (z danego ciągu sieci) zawartym w ograniczonej figurze f nazywamy figurę złożoną z wszystkich kwadratów tej sieci, które zawierają się w f.” (zob. S. Serafin, G. Treliński, 1976, s.129).

[7] Autorem programu, który jest ilustracją do tego artykułu jest Adam Orczyk. Program został napisany na kalkulator CASIO CFX 9850 GB PLUS i jest przeznaczony dla uczniów gimnazjum.



W wyniku podejmowanych działań uczniowie wyznaczają pole koła, bez korzystania z gotowych wzorów, ale odwołując się do definicji pola figury.

Następnie stawiamy przed nimi pytanie o pole kwadratu – sita o boku jednostkowym, którego konstrukcja została powyżej opisana. Wykorzystując TI (a dokładniej program komputerowy, pozwalający uzyskiwać dowolnie duże przybliżenia) uczniowie mogą przekonać się, że miara wewnętrzna jest równa zero. Nie ma takiego segmentu sieci (z danego ciągu sieci), który byłby zawarty w badanej figurze. Łatwo również ustalić, że miara zewnętrzna jest różna od zera. Co więcej, stosując kolejne „zagęszczenia” sieci segmentów, można zauważyć, że miara zewnętrzna w tym przypadku wynosi 1. Uzyskane wyniki obserwacji i badań wskazują na to, że kwadrat – sito jest figurą niemierzalną.

Postępując podobnie uczniowie mogą badać istnienie pól innych figur płaskich.

TI może być również pomocna w uzasadnianiu faktu, że np. punkt, odcinek, okrąg mają pole równe zero, zaś „wyrzucenie jednej średnicy” z koła nie zmieni jego pola.

4. Wnioski

Zauważmy, że wykorzystując komputer uczniowie rozwiązują problemy niedostępne przy użyciu tradycyjnych metod i środków, głęboko (a nie powierzchownie) rozumieją definicję pojęcia i samo pojęcie. Włączają, do posiadanej wiedzy na temat brzegu figury i jej pola, nowe sytuacje, w których pojęcia te występują i w których wiedza formalna dominuje nad intuicjami. Komputer umożliwia również wytworzenie połączeń pomiędzy wiedzą algorytmiczną i pojęciową. Świadomość powiązań tychże elementów pozwala uczniowi elastycznie dostosowywać się do różnych sytuacji.

Program komputerowy, jak wskazują opracowane przez nas propozycje, prowadzi ucznia od wyobrażeń powstałych przez postrzeganie jednostkowych przykładów i sytuacji (nawet tych wziętych z realnego świata) do ogólnego pojęcia brzegu lub pola figury.

Stopniowo w trakcie badania szczególnych sytuacji materiał dydaktyczny w postaci oprogramowania komputerowego może pobudzać ucznia do działania i myślenia, do wysuwania hipotez i ich weryfikowania. Kolejne powiększania obrazów na ekranie monitora pozwalają zyskać pewność odnośnie swoich przypuszczeń, a sam sposób rozumowania - żądania coraz to lepszych przybliżeń - można uznać za poprawne wnioskowanie matematyczne (zob. Z.Krygowska, 1977).

Samo sformułowanie definicji, czy też opracowanie odpowiedniego algorytmu postępowania w szczególnych sytuacjach, jak pokazałyśmy, nie kończy pracy nad pojęciem, ale dopiero ją rozpoczyna. Pozwala głębiej zrozumieć sens występujących w określeniu słów, które w różnorodnych kontekstach nabierają nowego znaczenia. W zaprezentowanej sytuacji program komputerowy ułatwia zrozumienie pojęć powstałych na drodze formalnej - określonych przez definicję.

Uczniowie uczą się również, że przyjęcie określonej definicji narzuca konieczność uznania wszystkich konsekwencji z niej płynących, nawet jeśli pozostają one w sprzeczności z intuicją i doświadczeniem. TI może służyć kształtowaniu świadomości metodologicznej ucznia. Połączenie różnych „dróg" tworzenia abstrakcyjnej wiedzy – tradycyjnego słowa, z nowoczesnym dynamicznym obrazem - nie tylko wpływa pozytywnie na sferę emocjonalno – motywacyjną, ale rozszerza możliwości poznawcze uczącego się.

W sytuacji, jak ta przedstawiona w artykule, uczeń samodzielnie odkrywa rolę definicji w konstrukcji wiedzy matematycznej. Kształtuje własną świadomość posiadania tej wiedzy. Definicja staje się podstawą rozumienia, a nie tylko dodatkiem do posiadanych przez uczącego się intuicji, czy skojarzeń. Co więcej, definicja przedłuża intuicje, czyni je bardziej wyrafinowanymi, pozwala zaakceptować informacje do nich nie pasujące. Język ucznia stopniowo i naturalnie zostaje wzbogacony o elementy słownika związanego z rozważanymi pojęciami m.in.: punktu, otoczenia, nieskończoności.

Zaprezentowane przykłady pokazują również, iż włączenie komputera do procesu wprowadzania i rozwijania rozumienia pojęć matematycznych musi mieć szczególne uzasadnienie. Niewątpliwie, bezkrytyczne zastosowanie technologii informacyjnej na lekcjach matematyki, nie służące jakimś specjalnym celom, może w przyszłości spełniać podobną rolę jak tradycyjny sposób tworzenia wiedzy oparty na przekazie.

Bibliografia

1. **J. Bruner**, 1978.: *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznania,* Warszawa
2. **B. Bugajska – Jaszczołt**, 2003.: *Koncepcje pojęcia kresu zbioru ograniczonego kształtowane w procesie nauczania – uczenia się matematyki*, rozprawa doktorska (msp), Kraków
3. **M. Czajkowska,** 1994, *Motywacja w nauczaniu i uczeniu się matematyki,* Rozmaitości metodyczne, zeszyt 4, Wydawnictwo WOM w Kielcach, Kielce.
4. **M. Czajkowska**, 2005.: *Wartości motywacyjne zadań matematycznych*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce
5. **M. Hejny,** 1997.: *Rozwój wiedzy matematycznej*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 19, s. 15 – 28.
6. **Z. Krygowska**, 1977.: *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1,2,3, WSiP, Warszawa.
7. *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki. Tom. IV Prace Prof. dr hab. Jana Koniora* (red. J. Żabowski), 2000, Płock
8. **J. Piaget**, 1981.: *Równoważenie struktur poznawczych, centralny problem rozwoju*, Warszawa
9. **Z. Semadeni**, 2003.: *Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 24, Kraków, s. 41 – 91.
10. **S. Serafin, G.Treliński**, 1976.: *Geometria. Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, PWN, Warszawa.
11. **B. Siemieniecki**, 1999.: *Komputer w edukacji. Podstawowe problemy technologii informacyjnej*, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń.
12. **A. Sierpińska ,** 1985.: O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy na podstawie studium przypadku, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 4, 1985, s. 107 – 167**.**
13. **J. Tocki,** 2000.: *Struktura procesu kształcenia matematycznego,* 1 część, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie, Rzeszów.

Beata Bugajska – Jaszczołt

Monika Czajkowska

Akademia Świętokrzyska w Kielcach