O dotýkajúcich sa kružniciach

Martin Billich

Abstract. *Apollonius' problem asks to construct the circle which is tangent to any three objects. The case when all three objects are circles is the most complicated case since up to eight solution circles are possible depending on the arrangement of the given circles. In addition degenerate cases of the problem of Apollonius are discussed in this report.*

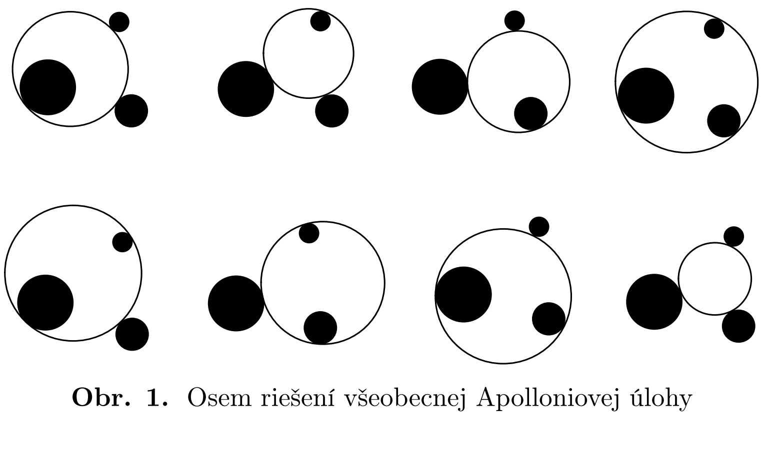
Úvod

Grécky matematik, fyzik a astronóm Apollonios z Pergy (262 – 190 pred n. l.) je známy nielen štúdiom kužeľosečiek, ale predovšetkým svojim dielom *O dotykoch*, kde sa zaoberal konštrukciami kružníc dotýkajúcich sa daných troch útvarov (bodov, priamok, kružníc). Spis sa nezachoval, takže nemôžeme s istotou povedať ako túto úlohu riešil tento veľký geometer. Zmienil sa o ňom *Pappos* okolo roku 320, podľa ktorého Apollonios vyriešil všetky úlohy s výnimkou prípadu troch kružníc. Apollonios uvažoval konštrukcie iba pomocou pravítka a kružidla, pričom poznal rovnoľahlosť ako aj inverziu vzhľadom na kružnicu.

V pôvodnej Apolloniovej úlohe sú dané tri podmienky dotyku s danými kružnicami. Ak označíme jednu takú podmienku symbolom (k), môžeme túto úlohu označiť *kkk.* Ak nahradíme niektoré z daných kružníc bodmi, podmienka (B), priamkami, podmienka (p), dostaneme týchto desať úloh (tzv. Apolloniove úlohy): *BBB, BBp, Bpp, ppp, BBk, Bpk, Bkk, ppk, pkk, kkk.* K týmto úlohám môžeme pripojiť úlohy, v ktorých daný bod je dotykovým bodom na danej kružnici, resp. priamke – dostaneme šesticu známych *Pappových úloh.* Namiesto podmienky dotyku môžeme ďalej zaviesť niektoré ďalšie špecifické podmienky, aby hľadaná kružnica mala daný polomer r, pretínala danú kružnicu ortogonálne, diametrálne, pod daným uhlom α, resp. pretínala danú priamku ortogonálne alebo pod daným uhlom α.

Riešiteľnosť Apolloniovej úlohy

Podľa toho, či sa výsledná kružnica dotýka troch daných kružníc zvonka alebo zvnútra, má všeobecná Apolloniova úloha najviac osem riešení (*obr. 1*).



Obr. 1. Osem riešení všeobecnej Apolloniovej úlohy

Pri riešení Apolloniových úloh sa používajú najmä konštrukcie *metódou množín bodov daných vlastností* a konštrukcie *metódou geometrických zobrazení.* Používanie *algebricko-geometrickej metódy* nie je príliš časté. Podrobnejšie sa metódam riešenia Apolloniových úloh venuje Z. Sklenáriková v práci [4].

Úlohu s tromi kružnicami riešil ako prvý F. Viète (1540 – 1603) v spise *Apollonius Gallus* (r. 1600) pomocou stredov rovnoľahlosti troch kružníc. V roku 1873 V. Stoll vo svojej práci [6] analyzuje riešiteľnosť všeobecnej Apolloniovej úlohy metódami analytickej geometrie. Podrobne (algebricky) rozoberá celkom 125 možností vzájomných pôloh danej trojice kružníc. Treba však poznamenať, že mnohé z nich sú navzájom identické alebo dokonca geometricky neuskutočniteľné. Okrem toho, jeho riešenia v sebe zahŕňaju aj niektoré degenerované prípady - bod ako kružnicu s nulovým polomerom, resp. priamku ako kružnicu s nekonečne veľkým polomerom. Výsledkom je, že pôvodnej Apolloniovej úlohe s tromi kružnicami vyhovuje $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ alebo 8 kružníc požadovaných vlastností. D. Pedoe (1910 – 1998) v [3] predkladá elegantný dôkaz neexistencie siedmej kružnice vyhovujúcej zadaniu všeobecnej úlohy s tromi kružnicami. V tomto dôkaze je jednoducho a účelne použitá metóda kružnicovej inverzie. Práve toto nelineárne geometrické zobrazenie bude v ďalšej časti východiskom pre charakterizáciu riešení Apolloniovej úlohy pre rôzne vzájomné polohy daných troch kružníc.

Metóda inverzie vzhľadom na kružnicu

V tejto časti budeme venovať väčšiu pozornosť metóde inverzie [5] vzhľadom na kružnicu v rovine, ktorá vznikne doplnením euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ o jeden tzv. nevlastný bod P_∞, ktorý je prvkom každej priamky a súčasne je vonkajším bodom každej z kružníc v rovine $\mathbb{E}_2$. Množina $\mathbb{M}_2 = \mathbb{E}_2 \cup \{P_\infty\}$ sa nazýva **Möbiova rovina**.

Definícia 1. Nech $k_o(O; r)$ je kružnica so stredom v bode O a polomerom r. Uvažujme bodové zobrazenie f v Möbiovej rovine $\mathbb{M}_2$, ktoré je určené nasledujúcim predpisom:

(a) Obrazom bodu O $[P_\infty]$ je bod P_∞ $[O]$;

(b) Každému bodu $X \in \mathbb{M}_2 \cap \mathbb{E}_2$, $X \neq S$ je priradený bod X' polpriamky SX, pre ktorý platí $|OX'|.|OX| = r^2$.

Zobrazenie f nazývame **kružnicová inverzia** (resp. inverzia vzhľadom na kružnicu). Kružnica k_o sa nazýva určujúca (základná) kružnica inverzie, bod O nazývame stredom a reálne číslo r^2 je koeficient (mocnosť) kružnicovej inverzie f.

Priamym dôsledkom definície sú nasledujúce vlastnosti kružnicovej inverzie:

- f je bijektívnym involutórnym zobrazením roviny $\mathbb{M}_2$ na seba.
- Invariantnými bodmi inverzie sú práve všetky body určujúcej kružnice.
- Priamka incidentná so stredom inverzie je invariantnou priamkou zobrazenia.
- Obrazom priamky neprechádzajúcej stredom kružnicovej inverzie je kružnica prechádzajúca stredom inverzie. Obrazom kružnice neprechádzajúcej stredom kružnicovej inverzie je kružnica týmto bodom neprechádzajúca.
- V inverzii f je invariantná každá kružnica ortogonálna s určujúcou kružnicou.
- Inverzia vzhľadom na kružnicu je konformným zobrazením. Teda obrazom dvoch navzájom dotýkajúcich sa kružníc sú navzájom sa dotýkajúce geometrické útvary z útvarov kružnica a priamka alebo dvojica navzájom rovnobežných priamok.

Kružnicovú inverziu aplikujeme na tie typy úloh, kde možno pôvodnú úlohu pretransformovať na úlohu jednoduchšiu, tzv. *vnútornú úlohu.* Túto úlohu vyriešime (napr. metódou množín bodov daných vlastností alebo rovnoľahlosťou) a jej výsledok prevedieme pomocou tej istej inverzie na výsledok pôvodnej úlohy.

Úloha *kkk*

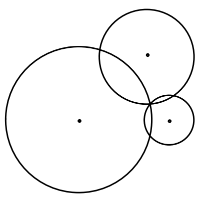
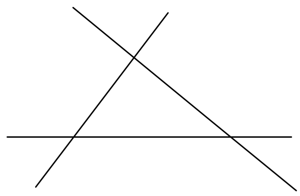
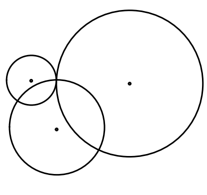
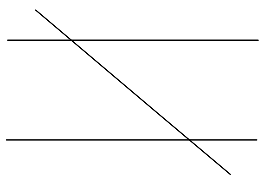
Zostrojte kružnicu k, ktorá sa dotáka kružníc $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, $k_3(S_3; r_3)$.

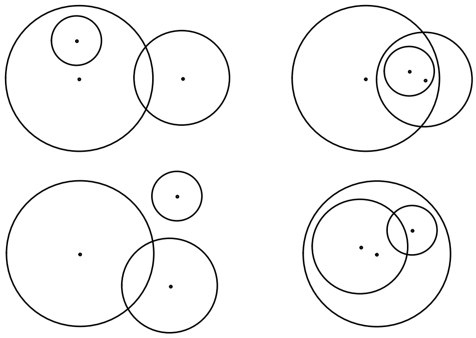
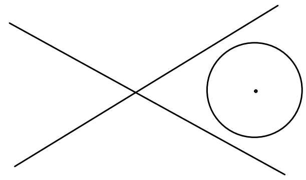
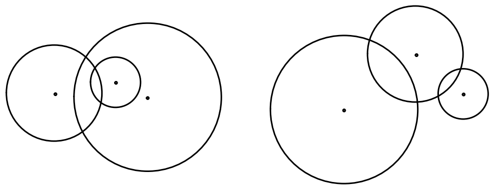
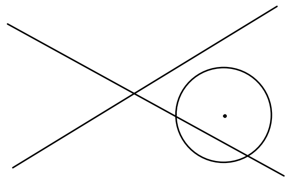
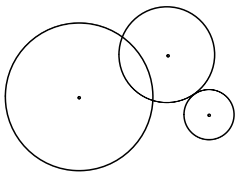
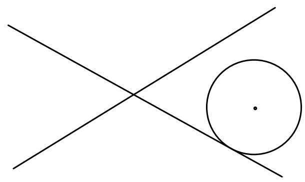
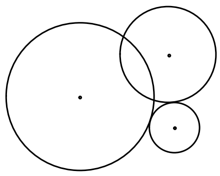
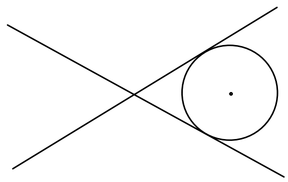
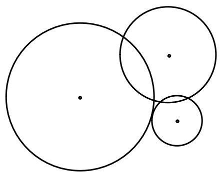
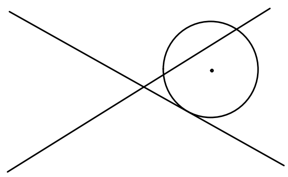
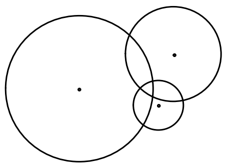
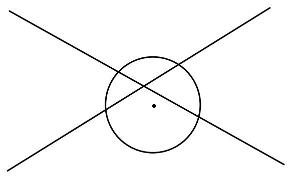
V závislosti od vzájomnej polohy daných troch kružníc sú dve možnosti: buď žiadne dve z daných kružníc nemajú spoločný bod alebo sa niektoré dve z nich pretínajú, či dotýkajú. Okrem toho, jediným ďalším kritériom triedenia bude možnosť, keď medzi danými kružnicami existuje dvojica sústredných kružníc, pričom uvedieme také konfigurácie kružníc, pre ktoré je množina riešení úlohy neprázdna.

V prípade, že kružnice k_1, k_2 sú sústredné ($r_1 > r_2$), úloha sa rieši metódou množín bodov daných vlastností. Pretože hľadaná kružnica k sa má dotýkať týchto sústredných kružníc, bude jej stred ležať na kružnici l sústrednej s k_1, k_2, ktorej polomer je rovný $\frac{r_1 \pm r_2}{2}$. Ak sa kružnica k požadovaných vlastností súčasne dotýka tretej kružnice k_3, tak jej stred je bodom kružnice $m(S_3; r_3 \pm \frac{r_1 \pm r_2}{2})$.

V prípade, že dané tri kružnice sú nesústredné a žiadne dve z daných kružníc nemajú spoločný bod, zvolíme určujúcu kružnicu inverzie tak, aby sa v príslušnej kružnicovej inverzii zobrazili kružnice k_1, k_2 na dvojicu sústredných kružníc k_1', k_2' a kružnica k_3 na kružnicu k_3'. Ak existuje kružnica k dotýkajúca sa kružníc k_i ($i = 1, 2, 3$), tak $f(k) = k'$ je kružnica dotýkajúca sa sústredných kružníc k_1', k_2' a kružnice k_3'. Riešenie tejto vnútornej úlohy, ako aj konštrukcia hľadanej kružnice $k = f^{-1}(k')$ sú triviálne.

Ak majú niektoré dve z daných kružníc spoločný bod, voľbou kružnicovej inverzie so stredom v tomto bode, úlohu typu *kkk* prevedieme na úlohu typu *ppk*, resp. *ppp* (podľa počtu spoločných bodov). Prehľad vzájomných polôh takto danej trojice kružníc ako aj im zodpovedajúce pretransformované (vnútorné) úlohy s počtom možných riešení sú uvedené v nasledujúcich tabuľkách.

Vzájomná poloha kružníc	**Vnútorná úloha**	**Počet riešení**
$k_1 \cap k_2 \cap k_3 = \{O\}$		
		4 riešenia
		2 riešenia

Vzájomná poloha kružníc	Vnútorná úloha	Počet riešení
$k_1 \cap k_2 = \{O, P\}$		
		4 riešenia
		4 riešenia
		4 riešenia
		4 riešenia
		6 riešení
		8 riešení

Záver

Riešenie pôvodnej Apolloniovej úlohy metódou kružnicovej inverzie je veľmi náročné ako samotnou konštrukciou, tak aj tvorbou geometrických predstáv, ktoré sú nevyhnutné pre správne pochopenie tejto problematiky. Napriek tomu, Apolloniove úlohy patria k najatraktívnejším konštrukčným úlohám elementárnej geometrie. Okrem zvýšenia záujmu o matematiku sú vhodným príspevkom k výchove logického myslenia, presnosti a trpezlivosti.

Literatúra

[1] BILLICH, M.: *Špeciálne prípady Apolloniových úloh*, In: Matematika v škole dnes a zajtra. Zborník konferencie, Ružomberok, PF KU 2005, s. 23 – 27.

[2] HOLUBÁŘ, J.: *O metodách rovinných konstrukcí*, JČMF Praha, 1949.

[3] PEDOE, D.: *The Missing Seventh Circle*, Elemente der Mathematik 25, 1970, s. 14 – 15.

[4] SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *K metódam riešenia Apolloniovej úlohy*, In: Matematika v proměnách věku III, Edícia Dějiny matematiky, Praha, 2004, s. 45 – 55.

[5] SKLENÁRIKOVÁ, Z. – ČIŽMÁR, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*, FMFI UK Bratislava, 2002.

[6] STOLL, V.: *Zum Problem des Apollonius*, Math. Ann. 6, 1873, s. 613 – 632.

Adresa autora:
RNDr. Martin Billich, PhD.
Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita v Ružomberku
Nám. A. Hlinku 1652/1
034 01 Ružomberok
e-mail: billich@fedu.ku.sk