Netradiční úlohy o reálných číslech

Jaroslav Beránek

Abstract. *This article is aimed to introducing of real numbers and solving of exercises related to real numbers. After the introductory notes there follow arithmetic and geometric models of real numbers complemented with ten solved exercises. These deal with various aspects of real number theory, eg. decimal expansion of real numbers, decomposition of rational and irrational numbers on number scale and surds. The article is concluded by a short historical note about algebraic and transcendental numbers.*

Úvod

V tomto příspěvku se budeme zabývat některými didaktickými aspekty zavádění reálných, zejména iracionálních čísel. Nejprve se v krátkosti obecně zmíníme o zavádění reálných čísel ve školské matematice, dále na řadě příkladů ukážeme možnosti, jak reálná čísla přiblížit studentům. Úlohy využívající vlastnosti racionálních a iracionálních čísel se poměrně často vyskytují v matematických soutěžích a studentům jejich řešení mnohdy činí značné obtíže. V závěru se dotkneme rovněž algebraických a transcendentních čísel. I když daná tématika přísluší již do osnov matematiky na středních školách, otázky týkající se iracionálních čísel nejsou zcela jasné ani mnoha studentům škol vysokých. To je problémem zejména u studentů učitelství matematiky, kteří budou své znalosti přenášet dále na své žáky. Také proto byl zařazen tento příspěvek.

Zavádění reálných čísel na školách, reálná čísla a jejich modely

Již na střední škole se setkají studenti s důkazem, že číslo $\sqrt{2}$ nelze vyjádřit ve tvaru zlomku, tzn. že kromě čísel racionálních existují ještě čísla iracionální, přičemž iracionálními čísly jsou téměř všechny odmocniny, hodnoty goniometrických funkcí, logaritmů atd. Studentům však většinou chybí názorná geometrická představa; velmi těžko odlišují pojmy mezera a skok na číselné ose. Tyto pojmy, známé již ze starověké matematiky, jsou přitom ke správnému pochopení reálných čísel nezbytné. Nyní uvedeme dva modely reálných čísel, aritmetický a geometrický. S oběma se setká již žák základní školy. Aritmetickým modelem je pro něj množina všech čísel, geometrickým modelem číselná osa. Izomorfismus obou modelů umožňuje nerozlišovat mezi číslem a jeho obrazem na číselné ose. Aritmetický model je častější, geometrický model je přitom názornější a pro zavádění reálných čísel na školách vhodnější (podrobnosti viz [2]).

Množina $\mathbf{R}$ je:

- *uspořádaná*, tj. pro každá dvě $x, y \in \mathbf{R}$ nastane právě jeden z případů $x < y$, $x = y$, $x > y$;
- *hustá*, tj. $\forall x, y \in \mathbf{R}, x < y, \exists z \in \mathbf{R} : x < z < y$;
- *archimédovská*, tj. $\forall x, y \in \mathbf{R}, 0 < x < y, \exists n \in \mathbf{N} : x(n-1) \leq y < xn$;
- *spojitá*, tj. každá neprázdná shora ohraničená množina $M \subset \mathbf{R}$ má supremum.

V geometrickém modelu lze předchozí čtyři tvrzení formulovat názorněji:

- Jsou-li X, Y dva body na ose o, nastává právě jeden z případů: $X = Y$, X leží vlevo od Y, Y leží vlevo od X.
- Mezi každými dvěma různými body existuje bod.
- Jestliže B je vnitřním bodem úsečky AX a jestliže na polopřímce AX sestrojíme posloupnost bodů $B_1 = B, B_2, B_3, \ldots$ tak, že postupně nanášíme úsečku AB (tedy úsečka AB_n je n-násobek úsečky AB), pak po jistém počtu kroků překročíme bod X (bod X bude prvkem jisté úsečky $B_{k-1}B_k$).
- Na číselné ose nejsou skoky (díry).

Aritmetický model množiny $\mathbf{R}$ je méně přehledný, lze v něm však uskutečňovat všechny aritmetické operace a dobře rozlišovat mezi racionálním a iracionálním číslem.

Netradiční úlohy o racionálních a iracionálních číslech

V této části nyní uvedeme několik úloh, které se ve školní výuce objevují zřídka, avšak pro pochopení vlastností reálných čísel jsou velmi užitečné. Podobné úlohy se vyskytují i v různých matematických soutěžích. Řešení všech úloh je uvedeno vzhledem k rozsahu příspěvku poměrně stručně, kromě úlohy využívající úpravy surdických čísel.

Úloha 1 [2]: Nalezněte dvojciferná přirozená čísla p, q tak, aby platilo

$$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2\right| < \varepsilon,$$

kde ε je je postupně rovno a) 0,1; b) 0,01; c) 0,001; dále určete p, q tak, aby $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.
Řešení (experimentem): Např. a) $p = 57$, $q = 40$; b) $p = 72$, $q = 51$; c) $p = 99$, $q = 70$. V poslední části úlohy je odpověď negativní, tj. taková čísla p, q neexistují. Poznamenejme, že při řešení je možno volit postupně sblížené zlomky konvergující k číslu $\sqrt{2}$. Na tuto teorii zde však není dost místa.

Úloha 2 [2]: Je dáno číslo 1,383838. Napište alespoň jednu možnost pokračování desetinného rozvoje tohoto čísla tak, aby toto číslo nebylo periodické.
Řešení: Např. 1,383838388388838888388888838888883...

Úloha 3 [2]: Na jednotkové kružnici je rozmístěno n bodů tak, že délka kruhového oblouku mezi každými dvěma sousedními body je stejná (tvoří tedy vrcholy pravidelného n-úhelníka). Jestliže se bude počet těchto bodů blížit nekonečnu, může se stát, že některé body splynou?
Řešení: Žádné dva body nemohou splynout, neboť π je číslo iracionální a velikost vnitřního úhlu, která se rovná $\frac{2\pi}{n}$, se sice s rostoucím n limitně blíží k nule, nikdy jí však nedosáhne.

Následující úloha je velmi vhodná jednak pro procvičení úpravy výrazů s odmocninami, jednak proto, aby si studenti uvědomili, že ne každý výraz obsahující odmocniny musí být číslem iracionálním.

Úloha 4 [2]: Určete, které z daných čísel je iracionální: a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, c) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, d) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$
Řešení: a), b), d) jsou iracionální, c) 2, e) 1

Řešení této úlohy vyžaduje krátký komentář. Surdické výrazy jsou reálná čísla tvaru $a+\sqrt{b}$, kde a, b jsou nezáporná racionální čísla, b není druhou mocninou žádného racionálního čísla. O těchto výrazech se studenti při výuce matematiky na školách nedozvědí prakticky nic; přitom se jedná o velmi starou problematiku – vzorce pro úpravu surdických výrazů znal již ve 12. století indický matematik Bháskara. Pro úpravu surdických výrazů platí následující vztahy: (předpokládáme, že $a>\sqrt{b}\geq 0$).

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)}$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Pomocí uvedených dvou vztahů se některé výrazy s odmocninami snadno upraví, např. v úloze 4 výraz $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Zde $a=3$, $b=8$, podle prvního ze vzorců je výsledek roven 2. Takto lze upravovat i odmocniny z vyšších čísel, např. $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}=\sqrt{51}-7$, $\sqrt{31+\sqrt{600}}=5+\sqrt{6}$, $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}+\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}=2\sqrt{x}$. Nyní se budeme věnovat úpravám výrazu

$$X=\sqrt[3]{\sqrt{a}+b}-\sqrt[3]{\sqrt{a}-b}\quad .$$

Pokud $\sqrt[3]{a-b^2}$ je racionální číslo, pak lze po umocnění výrazu X na třetí a úpravě psát $X^3=2b-3\cdot\sqrt[3]{a-b^2}\cdot X$, což je rovnice, ze které lze hodnota výrazu X určit. Např. v úloze 4 ve výrazu $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ je $a=5$, $b=2$. Rovnice je potom tvaru $X^3=4-3X$, odkud je jeden kořen $X=1$ ihned patrný včetně toho, že další reálná řešení tato rovnice nemá. Dodejme ještě, že obdobný rozbor lze provést i v případě, kdy ve výrazu X je mezi odmocninami znaménko plus (podrobnosti viz [3]).

Úloha 5 [2]: Rozhodněte o platnosti těchto tvrzení: (Množinu $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ označíme $\mathbf{I}$)
$\forall a,b\in\mathbf{I}:(a+b\in\mathbf{I})\wedge(a-b\in\mathbf{I})$
$\forall a,b\in\mathbf{I}:(a+b\in\mathbf{I})\vee(a-b\in\mathbf{I})$
$\forall a,b\in\mathbf{R}:ab\in\mathbf{Q}\wedge a+b\in\mathbf{Q}\Rightarrow a^2+b^2\in\mathbf{Q}\wedge a^3+b^3\in\mathbf{Q}\wedge a^4+b^4\in\mathbf{Q}$
Řešení: Hypotéza 1 neplatí, protipříkladem je např. $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$. Hypotéza 2 platí. Důkaz lze vést sporem. Připusťme, že existují dvě iracionální čísla a,b, jejichž součet i rozdíl je číslo racionální. Označme tento součet s, rozdíl pak r; podle předpokladu $s,r\in\mathbf{Q}, s=a+b, r=a-b$. Ze znalosti operací s racionálními čísly však platí, že také čísla $a=0{,}5\,(s+r)$, $b=0{,}5\,(s-r)$ jsou racionální, což je spor s předpokladem. Hypotéza 3 platí, stačí si uvědomit, že $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab\,(a+b)$, $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab\,(a+b)^2+2\,(ab)^2$.

Úloha 6 [6]: Rozhodněte, zda existuje kladné iracionální číslo α takové, že α^α je racionální.
Řešení: Využijeme znalostí z matematické analýzy. Uvažujme reálnou funkci $f(x)=x^x$. Tato funkce je spojitá na intervalu $\langle 1,2\rangle$. Protože $f(1)=1$, $f(2)=4$, existuje reálné číslo $\alpha\in(1,2)$ s vlastností $f(\alpha)=\alpha^\alpha=2$. Nyní stačí dokázat, že α je iracionální. Postupujeme sporem. Nechť $\alpha=\frac{p}{q}$ je racionální číslo. Potom platí

$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = 2$, tzn. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p} = 2^q$. Na pravé straně je celé číslo, proto také číslo $\left(\frac{p}{q}\right)^{p}$ musí být celé. Odtud plyne, že zlomek $\frac{p}{q}$ musí vyjadřovat celé číslo. V intervalu $(1,2)$ však žádné celé číslo neleží. Číslo α tedy musí být iracionální. Zajímavý je i jednodušší problém nalezení dvou různých iracionálních čísel α, β takových, že α^β je racionální. Zde stačí volit např. $\alpha = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{2}$. Potom $\alpha^\beta = 2$.

Úloha 7 [4]: Dokažte, že číslo $A = 0{,}12345678910111213\ldots$ (píšeme za sebou všechna přirozená čísla) je iracionální.
Řešení: Má-li racionální číslo nekonečný desetinný rozvoj, musí být tento rozvoj periodický. Předpokládejme, že rozvoj čísla A má periodu délky n. V čísle A však určitě existuje posloupnost alespoň n devítek za sebou, tzn. perioda je tvořena samými devítkami. Podobnou úvahu lze však provést pro osmičky, sedmičky atd., což je spor. Číslo A je tedy iracionální.

Úloha 8 [4]: Dokažte, že číslo $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ je iracionální.
Řešení: Postupujeme opět sporem. Nechť $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = r$, kde r je racionální číslo. Nyní tuto rovnici upravíme (dvojím umocněním). Po úpravě dostaneme $r^4 - 20r^2 - 24 = 8r\sqrt{30}$. Po vydělení poslední rovnice číslem 8r dostaneme s využitím předpokladu $r \in \mathbf{Q}$ spor, protože číslo $\sqrt{30}$ určitě není racionální.

Úloha 9 [5]: Rozhodněte, zda číslo $1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$ je racionální nebo iracionální.
Řešení: Zadanou nekonečnou řadu rozdělíme na nekonečně mnoho řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n}, \ldots$$

Tyto řady jsou geometrické a mají pouze kladné členy. Jejich součty jsou podle známého vzorce postupně $\frac{10}{9}$, $\frac{10}{90}$, $\frac{10}{900}$, $\ldots$ Rovněž všechny tyto součty tvoří geometrickou řadu se součtem $\frac{100}{81}$. Zadané číslo je tedy racionální.

Poznamenejme, že otázka této úlohy je zajímavá tím, že sčítáme nekonečnou řadu. V teorii nekonečných řad je běžná situace, že součtem nekonečně mnoha racionálních čísel je číslo iracionální, např.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad .$$

Úloha 10 [5]: Dokažte, že rovnice

$$1999^{2000} \cdot x^2 + \left(2000^{1999}\right)^{2000} \cdot x + 2001^{2000} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.
Řešení: Je zřejmé, že postačí zabývat se determinantem této rovnice. Dokážeme-li, že determinant je přirozené číslo, které není druhou mocninou jiného přirozeného čísla, jsme hotovi (snadno se sporem dokáže, že $\sqrt{n}$ je pro $n \in \mathbf{N}$ buďto číslo přirozené nebo iracionální). Podle známého vzorce je $D = \left(2000^{1999}\right)^{2\cdot 2000} - 4 \cdot 1999^{2000} \cdot 2001^{2000}$. Provedeme odhad pro číslo D tak, že je uzavřeme mezi dva po sobě jdoucí čtverce přirozených čísel. Platí

$$\left(2000^{1999\cdot 2000} - 1\right)^2 < 2000^{1999\cdot 2\cdot 2000} - 4 \cdot 1999^{2000} \cdot 2001^{2000} < \left(2000^{1999\cdot 2000}\right)^2$$

Pravá nerovnost je zřejmá, levou lze dokázat snadno rozepsáním závorky vlevo a úpravou. Z této nerovnosti plyne, že hodnota diskriminantu je rovna přirozenému číslu, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. Proto je $\sqrt{D}$ iracionální a zadaná kvadratická rovnice má dva různé iracionální kořeny.

O algebraických a transcendentních číslech

Reálná čísla je možno rozdělit do dvou skupin:

- *algebraická čísla* – jsou kořeny nějaké algebraické rovnice s racionálními koeficienty;
- *transcendentní čísla* – nejsou kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

Po dlouhou dobu se předpokládalo, že všechna iracionální čísla jsou algebraická. Teprve až v roce 1844 dokázal francouzský matematik J. Liouville, že existují transcendentní čísla a že je jich dokonce nekonečně mnoho. V roce 1874 německý matematik G. Cantor pomocí metody, která dodnes nese jeho jméno (Cantorova diagonální metoda), dokázal, že množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je spočetná, a tedy také množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná. Proto je spočetná i množina všech kořenů všech těchto rovnic, tj. množina algebraických čísel. Již dříve ale bylo známo, že množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel je nespočetná (má mohutnost kontinua). Proto musí existovat v množině $\mathbf{R}$ jistá nespočetná podmnožina, tvořená právě transcendentními čísly.

Není obtížným problémem zkonstruovat transcendentní číslo. Metoda pochází od Liouvilla a využívá jisté posloupnosti řetězových zlomků (je popsána v [1]). Mnohem větší problém je ukázat, že dané číslo je transcendentní. Tento problém patří k nejobtížnějším v teorii čísel. Až v roce 1873 Hermite dokázal transcendentnost čísla e, v roce 1882 Lindemann transcendentnost čísla π. Důkazem transcendentnosti čísla π byl řešen historický problém tzv. kvadratury kruhu, tj. zda lze pravítkem a kružítkem sestrojit čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh. Je známo, že pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit pouze kořeny algebraických rovnic s racionálními koeficienty (algebraická čísla). Protože ale číslo π (a tedy i $\sqrt{\pi}$) je transcendentní, nemůže být takový čtverec eukleidovskou konstrukcí sestrojen. Na mezinárodním matematickém kongresu v roce 1900 Hilbert formuloval problém, zda jsou transcendentní čísla tvaru α^β, kde čísla α, β jsou algebraická čísla, přičemž číslo β je iracionální (a samozřejmě α není rovno žádnému z čísel 0, 1). Tento problém vyřešili Gelfand a Schneider až v roce 1934, kdy dokázali, že všechna čísla uvedeného tvaru jsou skutečně transcendentní (takovým číslem je např. číslo $2^{\sqrt{2}}$). Podrobnosti lze nalézt v [1] a [7].

Závěr

V tomto příspěvku jsme poukázali na některé problémy při osvojování racionálních a iracionálních čísel studenty středních a vysokých škol a předložili jsme rovněž několik úloh pro zpestření a zkvalitnění výuky při zavádění tělesa všech reálných čísel ve školské matematice. Hlavním cílem tohoto příspěvku je přispět k tomu, aby studenti znali racionální a iracionální čísla, uměli s nimi počítat, vhodně si je vyjádřit a alespoň populární formou dokázali rozlišit mezi čísly algebraickými a transcendentními.

Literatura

[1] HALAŠ, R. *Teorie čísel.* 1. vyd. Olomouc : Univerzita Palackého, 1977. 140 s. ISBN 80-7067-707-4.

[2] HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* 2. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1990. 554 s. r92U. ISBN 80-08-01344-3.

[3] PŠENIČKA, J. *Surdické výrazy.* Rozhledy matematicko-fyzikální, 56 (1977-78), č. 4, s. 158-161.

[4] *Iracionální čísla.* Zadání 1. série úloh pražského korespondenčního semináře KAM MFF UK Praha, ročník 1996-1997 [online]. Praha : Pražský korespondenční seminář [cit. 25. dubna 2007]. Dostupné na www: <http://mks.mff.cuni.cz>.

[5] *Racionální a iracionální čísla.* Zadání 1. série úloh pražského korespondenčního semináře KAM MFF UK Praha, ročník 1999-2000 [online]. Praha : Pražský korespondenční seminář [cit. 25. dubna 2007]. Dostupné na www: <http://mks.mff.cuni.cz>.

[6] *Racionální a iracionální čísla.* Zadání 2. série úloh pražského korespondenčního semináře KAM MFF UK Praha, ročník 2003-2004 [online]. Praha : Pražský korespondenční seminář [cit. 25. dubna 2007]. Dostupné na www: <http://mks.mff.cuni.cz>.

[7] ŠALÁT, T. *Reálne čísla.* 1. vyd. Bratislava : Alfa, 1982. 317 s. Knižnica Epsilon. r82U.

Adresa autora:
doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU
Poříčí 31, 603 00 BRNO
Česká republika
<beranek@ped.muni.cz>