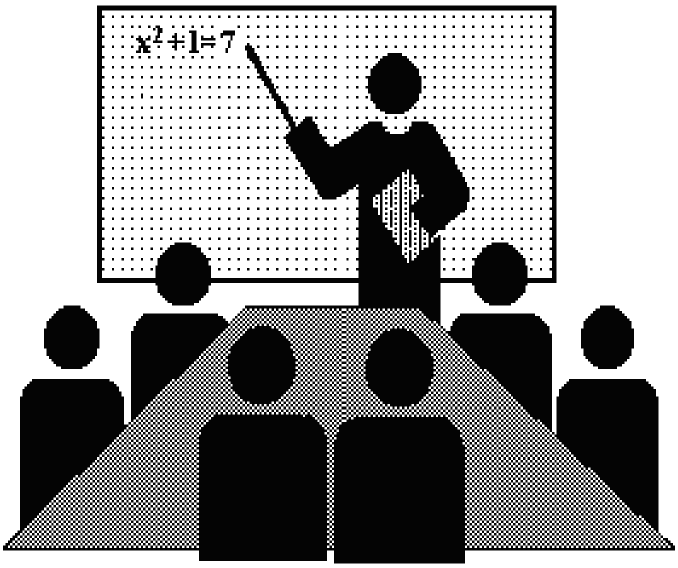
KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

7. ročník

KONFERENCIE

organizovanej s podporou
Európskeho sociálneho fondu

Matematika v škole dnes a zajtra



Zborník príspevkov

Ružomberok, 11. - 13. september 2006

Mathematics at school today and tomorrow

held September 11 - 13, 2006 at the Pedagogical Faculty of Catholic University in Ružomberok

sadzba
systémom $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Publikácia bola vydaná s podporou Európskeho sociálneho fondu

Editori:

Ján Gunčaga
Zdenko Takáč

Recenzenti:

Martin Billich
Jaroslava Brincková
Pavol Dedera
Petr Eisenmann
Roman Frič
Miroslav Gejdoš
Ján Gunčaga
Pavol Klenovčan
Jan Kopka
Ján Kuruc
Marián Trenkler
Tomáš Zdráhal

ISBN 978-80-8084-187-4

Obsah

Úvod

Rok 2000 - svetový rok matematiky bol výzvou pre matematickú obec, aby upozornila verejnosť na úlohu a miesto matematiky v pestrej mozaike svetovej kultúry a jej úlohy v pokroku ľudstva. Symbolicky práve v tomto roku vznikla na Pedagogickej fakulte Katolíckej univerzity tradícia organizovať konferenciu *Matematika v škole dnes a zajtra* zaoberajúcu sa týmito otázkami vyučovania matematiky na školách všetkých typov. Žiaľ jej iniciátor Doc. RNDr. Viliam Chvál, CSc. už nie je medzi nami. Dňa 5. marca 2007 odišiel na večnosť, avšak ostane v našich srdciach.

Tento zborník je dôkazom toho, že konferencia *Matematika v škole dnes a zajtra* vstúpila už do povedomia odbornej a pedagogickej komunity Slovenska. Svedčí o tom účasť na siedmej konferencii, ktorá sa konala v dňoch 11. – 13. septembra 2006 v Ružomberku.

Matematika má svoje pevné miesto v školskom vzdelávaní, ktoré v súčasnosti prechádza mnohými zmenami. Učitelia matematiky sa snažia v zápase o miesto matematiky vo vzdelávaní, ale hlavne v myslení svojich žiakov. K úrovni tejto konferencie významne prispela i účasť zahraničných účastníkov z Anglicka, Česka, Rakúska a Poľska. Ukazuje sa, že problémy a nadšenie nepoznajú hranice a že všetci si máme čo povedať.

Pestrosť i obsah prednesených príspevkov svedčia o tom, že máme erudovaných učiteľov matematiky na školách všetkých typov a stupňov ako i o tom, že sa zamýšľajú stále viac nad tým nielen čo učiť z matematiky, ale ako rozvíjať tvorivé myslenie mládeže, ktorá ju bude využívať zajtra. Stretnutia, ako táto konferencia potvrdzujú neustály príliv nových ideí, nových metód, nových prístupov k žiakom s cieľom priblížiť im krásu a užitočnosť matematiky. Matematici chápu, že matematika je organická súčasť všestranného formovania osobnosti žiaka a pre jej úspešnú výučbu treba hľadať a nájsť cestu do duše žiaka a vnášať do nej radosť z poznania a hľadania. Skúšanie takýchto nových ciest je neraz komplikované, na mnohé otázky sa nenašla odpoveď, mnohých otázok sme sa ešte nedotkli, no berieme to ako výzvu pre organizáciu ďalších ročníkov tejto konferencie. Sme radi, že v tomto roku sa súčasne uskutočnili aj podobné konferencie z informatiky a biológie. Veríme, že naša spolupráca s kolegami z katedier informatiky a biológie bude pokračovať v nasledujúcich rokoch a spolu sa budeme zamýšľať nad otázkami vyučovania.

Konferencia sa uskutočnila v rámci projektu, ktorý je financovaný Európskym sociálnym fondom. Tento projekt je realizovaný na Pedagogickej fakulte Katolíckej univerzity v Ružomberku v partnerstve so Združením katolíckych škôl Slovenska, Odborom školstva Mestského úradu v Ružomberku a Krajským školským úradom v Žiline. Vyslovujem naše poďakovanie vedeniu Katolíckej univerzity a Pedagogickej fakulty KU ako i všetkým pracovníkom, korí sa podieľali na úspešnom priebehu našej konferencie.

Podobne ako v minulých rokoch, tak aj v tomto roku sú ďalšie informácie o konferencii uverejnené aj na stránkach Katedry matematiky PF KU. Pozývame všetkých na ôsmy ročník konferencie Matematika v škole dnes a zajtra, ktorý sa uskutoční v dňoch 10. – 12. septembra 2007.

Organizačný výbor

Úpravy výrazov pomocou vzorcov na základnej škole

Jana Balážová

Abstract. *This article contains prepares for lessons of math in eight class of elementary school for theme Modification of algebraic expressions. Lessons are realized with personal computer and multimedia projector in presentation form using MS PowerPoint.*

Úvod

V tomto príspevku opisujem vyučovacie hodiny matematiky v 8. ročníku základnej školy relizované využitím IKT formou prezentácie. Obsahujú skupiny úloh usporiadaných podľa zväčšujúceho sa stupňa zovšeobecnenia.

Predmet: Matematika

Cieľová skupina: žiaci 8. ročníka

Tematický celok: Úpravy celistvých algebraických výrazov

Ciele: žiaci sa učia chápať písmeno vo význame čísla, naučia sa upravovať výrazy, získavajú zručnosti v narábaní s celistvými výrazmi, naučia sa zjednodušovať postupy pri počítaní pomocou vzorcov, získavajú vlastnosti potrebné pri pozornej a sústredenej práci, kontrolou správnosti výpočtov sa učia presnosti pri práci, učia sa chápať geometriu ako odraz reálneho sveta, rozvíjať svoju predstavivosť, čítať s porozumením matematický text, učia sa používať symboliku.

Metódy: informatívno receptívna

Formy: frontálna, práca vo dvojiciach

Pomôcky: počítač, dataprojektor, zošity, učebnice

1. Úprava podľa vzorca $(a+b)^2$ .... 1 hodina
2. Úprava podľa vzorca $(a-b)^2$ .... 1 hodina
3. Úprava podľa vzorca a^2-b^2 .... 1 hodina

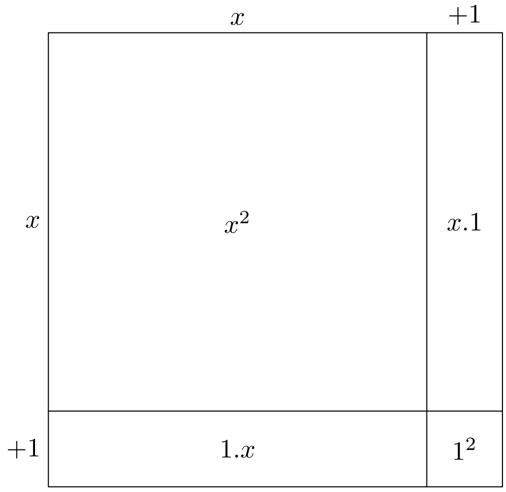
Priebeh 1. hodiny

Motiváca: 12 minút

Činnosť učiteľa: Zadanie úlohy 1. formulovanej ako reálna situácia zo života.

Úloha 1.: Krajčírka potrebovala rozmery štvorcového obrusu, ktoré nepoznáme, zväčšiť o jeden meter, aby opäť získala štvorec. Pomôžte jej vypočítať, koľko m^2 bude merať jej nový obrus.

Činnosť učiteľa: Postupnými animáciami spolu s návrhmi žiakov na riešenie sprístupňuje jednotlivé kroky riešenia. žiaci si počas riešenia nerobia poznámky.



Obr. 1: Náčrt k 1. príkladu

Riešenie úlohy 1.: *Činnosť učiteľa: Umožní žiakom zapísať si riešenie úlohy do zošita.* Pôvodný obsah: $S = x^2$ Nový obsah: $S' = (x+1)^2$

Zväčšenie: $S = x^2 + x.1 + 1.x + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

Platí : $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Činnosť žiakov: Postup a záver si zapisujú do zošitov.

Skúška: Pre stranu štvorca $x = 2$ metre 3 minúty

Činnosť učiteľa: Pre overenie pochopenia úlohy zadá konkrétne reálne rozmery obrusu a postupne sprístupňuje výsledok.

Činnosť žiakov: žiaci riešenia zapisujú do zošitov.

$$\begin{aligned} S &= 2^2 + 2.2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9\mathrm{m}^2 \\ S' &= (2+1)^2 = 3^2 = 9\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Obmena úlohy 1.: 5 minút

Činnosť učiteľa: Urobí ďalší krok ku zovšeobecneniu a zmení v úlohe rozmer, o ktorý sa ma obrus zväčšiť.

Krajčírka chce zväčšiť rozmer obrusu o 3 metre.

Činnosť žiakov: žiaci riešenia zapisujú do zošitov.

Riešenie obmeny úlohy 1:

$S' = (x+3)^2 = x^2 + x.3 + 3.x + 3^2 = x^2 + 2.3.x + 3^2 = x^2 + 6.x + 9$

Zovšeobecnenie: $(A+B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2$ 5 minút

Činnosť učiteľa: Otázkami sa presvedčí či žiaci pochopili úlohu a pristúpi ku zovšeobecneniu a vytvoreniu vzorca.

Činnosť žiakov: Odpovedajú na otázky učiteľa a spolupracujú pri formulácii vzorca.

$$\begin{aligned} (7+x)^2 &= 7^2 + 2.7.x + x^2 = 49 + 14x + x^2 \\ (2x+5)^2 &= (2x)^2 + 2.2x.5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25 \end{aligned}$$

Upevňovanie a precvičovanie učiva: 15 minút

Činnosť učiteľa: Zadá žiakom príklady na samostatnú prácu. Je možné zadať príklady vo forme pracovných listov.

Typ úlohy:	ľahšie	náročnejšie	ťažké
	1.$(a+x)^2$	7.$(2x+1)^2$	13.$(2a+3b)^2$
	2.$(10+b)^2$	8.$(9+4y)^2$	14.$(2u+9v)^2$
	3.$(v+1)^2$	9.$(5x+7)^2$	15.$(8g+9f)^2$
	4.$(4+y)^2$	10.$(6+3a)^2$	16.$(x^2+1)^2$
	5.$(m+8)^2$	11.$(1+8r)^2$	17.$(b^2+c^3)^2$
	6.$(p+q)^2$	12.$(7v+1)^2$	18.$(4k^3+2d^2)^2$

Činnosť žiakov: žiaci prepisujú príklady do zošitov, riešia ich samostatne a na záver si vo dvojiciach skontrolujú výsledky sprístupnené počítačom.

Domáca úloha: 2 minúty

učebnica: str. 83 / úl.1 a)b)c)

str. 86 / cvič.1;

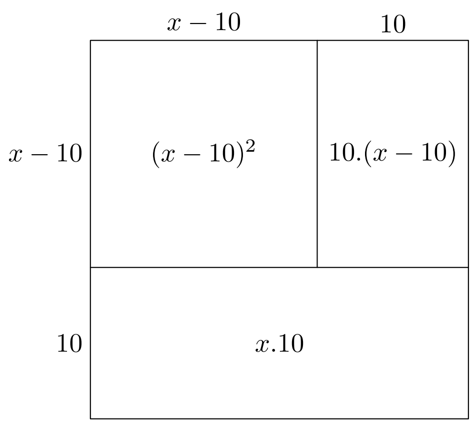
Priebeh 2. hodiny

Motiváca: 12 minút

Činnosť učiteľa: Zadaním úlohy 2. formulovanej ako reálna situácia zo života motivuje žiakov.

Úloha 2.: Krajčírka potrebovala rozmery štvorcového obrus, ktoré nepoznáme zmenšiť o 10 centimetrov, aby opäť získala štvorec. Pomôžte jej vypočítať, koľko m^2 bude merať jej nový obrus.

Činnosť učiteľa: Postupnými animáciami spolu s návrhmi žiakov na riešenie sprístupňuje jednotlivé kroky riešenia. žiaci navrhujú riešenie, počas riešenia si nerobia poznámky.



Obr. 2: Náčrt k 2. príkladu

Riešenie úlohy 2.:

Činnosť učiteľa: Počká a umožní žiakom zapísať si postup do zošita.

Pôvodný obsah: $S = x^2$ Nový obsah: $S' = (x-10)^2$

Obsahy častí, o ktoré sme obrus zmenšili: $S_1 = x.10$

$S_2 = 10.x - 100$

Obsah zmenšeného obrusu : $S = x^2 - x.10 - (10.x - 100) =$

$= x^2 - x.10 - 10.x + 100 =$

$= x^2 - 20x + 100$

$$\text{Platí : } (x-10)^2 = x^2 - 20x + 100$$

Činnosť žiakov: Postup a záver si žiaci zapisujú do zošitov.
Činnosť učiteľa: Pre overenie správnosti riešenia úlohy zadá konkrétne reálne rozmery obrusu a vykoná skúšku.
Skúška: Pre stranu štvorca $x = 300\text{cm}$ 3 minúty
$S = (300-10)^2 = 290^2 = 84100\text{cm}^2 = 8,41\text{m}^2$
$S' = 300^2 - 20.300 + 10^2 = 90000 - 4446000 + 100 = 84100\text{cm}^2 = 8,41\text{m}^2$
Činnosť učiteľa: Upozorníme žiakov, že výpočet S' zvládli spamäti.
Obmena úlohy 2.: 5 minút
Krajčírka chce zmenšiť rozmer obrusu o 2 metre.
Riešenie :
$(x-2)^2 = x^2 - x.2 - 2.x + 2^2 = x^2 - 2.2.x + 2^2 = x^2 - 4.x + 4$
Činnosť učiteľa: Otázkami sa presvedčí, či žiaci pochopili úlohu a pristúpi ku zovšeobecneniu a vytvoreniu vzorca.
Činnosť žiakov: Odpovedajú na otázky učiteľa a spolupracujú pri formulácii vzorca.
Zovšeobecnenie: $(A-B)^2 = A^2 - 2.AB + B^2$ 5 minút

$$(7-x)^2 = 7^2 - 2.7.x + x^2 = 49 - 14x + x^2$$
$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2.2x.5 + 52 = 4x^2 - 20x + 25$$

Upevňovanie a precvičovanie učiva : 15 minút
Činnosť učiteľa: Zadá žiakom príklady na samostatnú prácu. Je možné zadať príklady vo forme pracovných listov.

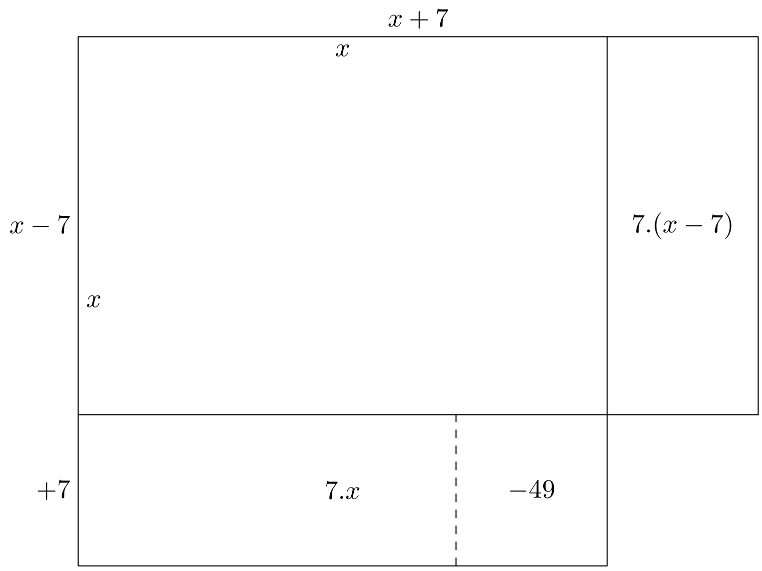
Typ úlohy:	ľahšie	náročnejšie	ťažké
	1.$(p-8)^2$	7.$(3m-7)^2$	13.$(4k-3j)^2$
	2.$(9-t)^2$	8.$(8-5u)^2$	14.$(2x-6y)^2$
	3.$(1-h)^2$	9.$(6-2r)^2$	15.$(6-r^2)^2$
	4.$(4-z)^2$	10.$(4-9u)^2$	16.$(12-x^3)^2$
	5.$(5-w)^2$	11.$(7-5a)^2$	17.$(2x-5y^2)^2$
	6.$(m-11)^2$	12.$(9b-1)^2$	18.$(4t-9p)^2$

Činnosť žiakov: žiaci prepisujú príklady do zošitov, riešia ich samostatne a na záver si vo dvojiciach skontrolujú výsledky sprístupnené počítačom.
Domáca úloha: 2 minúty

učebnica: str. 83 / úl. 1 d),e),f); úl. 2 b)c)
str. 86 / cvič. 2.

Priebeh 3. hodiny

Motiváca: 12 minút
Činnosť učiteľa: Zadá úlohu 3. formulovanú ako problémovú reálnu situáciu zo života.
Úloha 3.: Podnikateľ chce svoj pozemok tvaru štvorca neznámych rozmerov vymeniť za pozemok tvaru obdĺžnika tak, že stranu štvorca skráti o 7 metrov a dĺžku nového pozemku dostane tak, že o 7 metrov predĺži stranu štvorca. Je to možné ? Ak nie, koľko metrov štvorcových tvorí rozdiel ?



Obr. 3: Náčrt k 3. príkladu

Činnosť učiteľa: Postupnými animáciami spolu s návrhmi žiakov na riešenie sprístupňuje jednotlivé kroky riešenia. žiaci navrhujú riešenie, počas riešenia si nerobia poznámky.

Riešenie úlohy 3.: Nové rozmery: dĺžka : $(x+7)$
šírka : $(x-7)$
Pôvodný obsah : $S = x^2$ Nový obsah : $S' = (x+7).(x-7)$

$$S' = x^2 - x.7 + 7.x - 7^2 = \\ = x^2 - 49$$

$$S > S'$$

Platí : $(x-7).(x+7) = x^2 - 49$

Odpoveď: Vymeniť pozemky uvedeným spôsobom nie je možné. Podnikateľovi zvýši ešte 49 štvorcových metrov.

Činnosť žiakov: Postup a záver si žiaci zapisujú do zošitov.

Činnosť učiteľa: Pre overenie správnosti zadá konkrétne reálne rozmery pozemku a vykoná skúšku.

Skúška : pre stranu pôvodného pozemku $x = 35$ metrov 5 minút
$S = (35+7).(35-7) = 42.28 = 1176\text{m}^2$
$S' = 35^2 - 7^2 = 1225 - 49 = 1176\text{m}^2$

Obmena úlohy 3.: 5 minút
Podnikateľ chce zmenšiť a zväčšiť rozmery pozemku o 11 metrov.
Riešenie :
$(x+11).(x-11) = x^2 - 11^2 = x^2 - 121$

Činnosť učiteľa: Otázkami sa presvedčí či žiaci pochopili úlohu a pristúpi ku zovšeobecneniu a vytvoreniu vzorca.

Činnosť žiakov: Odpovedajú na otázky učiteľa a spolupracujú pri formulácii vzorca.

Zovšeobecnenie: $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$ 5 minút

$$\begin{aligned} (9-x).(9+x) &= 9^2 - x^2 = 81 - x^2 \\ (2x+3y).(2x-3y) &= (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2 \end{aligned}$$

Upevňovanie a precvičovanie učiva : 15 minút

Činnosť učiteľa: Zadá žiakom príklady na samostatnú prácu. Je možné zadať príklady *vo forme pracovných listov.*

Typ úlohy:	ľahšie	náročnejšie	ťažké
	1.$(x+3).(x-3)$	6.$(19-p).(19+p)$	11.$(m-7n).(m+7n)$
	2.$(m-9).(m+9)$	7.$(2x+8).(2x-8)$	12.$(6p+7q).(6p-7q)$
	3.$(k-5).(k+5)$	8.$(5v+7).(5v-7)$	13.$(11y-9z).(11y+9z)$
	4.$(t-13).(t+13)$	9.$(3k-5).(3k+5)$	14.$(4o-3r).(4o+3r)$
	5.$(d+c).(d-c)$	10.$(7h-1).(7h+1)$	15.$(x^2+5).(x^2-5)$

Činnosť žiakov: žiaci prepisujú príklady do zošitov, riešia ich samostatne a na záver si vo dvojiciach skontrolujú výsledky sprístupnené počítačom.

Domáca úloha: 2 minúty

učebnica: str. 84 / úl. 9, 10
str. 87 / cvič. 12, 13

Záver

Využitím IKT na hodinách matematiky som chcela prehĺbiť záujem žiakov o matematiku. Úlohy a postup ich riešenia som volila tak, aby poznatok vznikal ako abstrakcia získaných skúsenosti pri ich riešení.

Zdroj na získanie prezentácie v Power Pointe : www.moderniucitel.net

Literatúra

[1] ŠEDIVÝ, O. a kol.: *Matematika pre 8.ročník ZŠ 2. časť*, SPN, Bratislava 2001.

Adresa autora:
RNDr. Jana Balážová
Základná škola
Kudlovská ul. 11
066 21 Humenné
balazovajana@centrum.sk

Lineárna kombinácia v úlohách analytickej geometrie

Martin Billich

Abstract. *The aim of this paper is to give possibility of using linear combination of the equations for the plane curves to solve some problems of analytic geometry.*

Úvod

Pri riešení mnohých matematických úloh sa metóda riešenia môže stať oveľa príťažlivejšou ako skúmanie korektnosti jej použitia. Inými slovami, teoretickému rozboru úlohy sa nevenuje dostatočná pozornosť, čo určite nie je po didaktickej stránke správne. V tomto príspevku sa pokúsime na konkrétnych úlohách ukázať, že poznanie žiaka v zmysle "prečo to tak funguje" je nepostrádateľné. Dôkazom môže byť aj nasledujúca jednoduchá úloha.

Úloha 1. *Riešte systém dvoch lineárnych rovníc:*

$$5x - 2y = 7; \qquad x + 3y = 15 \tag{1}$$

Riešenie. Vynásobíme obe strany prvej rovnice číslom 3 a obe strany druhej rovnice číslom 2. Sčítaním takto získaných rovníc (oboch ich príslušných strán) a delením číslom 17 dostaneme $x = 3$ a následne $y = 4$. Potom $\{(3,4)\}$ je množinou všetkých riešení systému (1). □

Na tomto mieste si môžeme položiť otázku. Na základe čoho si môžeme byť istý, že nový systém rovníc $5x - 2y = 7$, $x = 3$ je ekvivalentný so systémom (1), t.j. má rovnakú množinu riešení ako (1)? Jazykom geometrie môžeme túto otázku preformulovať: "Prečo priamky, ktorých rovnice sú $5x - 2y = 7$ a $x = 3$ pretínajú priamku $x + 3y = 15$ v tom istom bode?"

Z vyššie uvedenou metódou riešenia systému lineárnych rovníc sa žiaci oboznámia už na základnej škole. Napriek jej častému používaniu, nájdeme iba veľmi málo kníh z algebry (resp. lineárnej algebry) v ktorých je uvedený aj dôkaz použitej metódy. Ak by sme aj chceli urobiť tento dôkaz so študentmi na vyučovacej hodine, ich častou reakciou je, že jednoduchosť danej metódy si už dôkaz nevyžaduje. Na tomto mieste treba pripomenúť, že práve podrobná analýza rôznych metód riešenia úloh môže pomôcť lepšie pochopiť vzájomné prepojenia medzi algebrou a geometriou.

Veta 1. *Nech $F_1(x,y), F_2(x,y)$ sú algebraické výrazy definované na množine S z $\mathbb{R}^2$. Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Potom systémy rovníc*

$$F_1(x,y) = 0, \qquad F_2(x,y) = 0; \tag{S1}$$

$$F_1(x,y) = 0, \qquad \alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y) = 0 \tag{S2}$$

sú navzájom ekvivalentné.

Dôkaz. Pre ekvivalentnosť systémov rovníc (S1) a (S2) stačí dokázať, že každé riešenie systému (S1) je súčasne aj riešením systému (S2), a naopak. V prípade, že množina riešení oboch systémov je prázdna, tvrdenie zrejme platí. Ak aspoň jedna z množín riešení je neprázdna, tak platí:

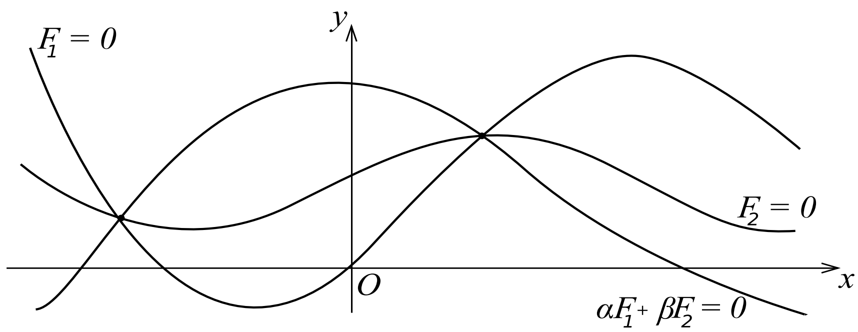
(i) Ak (a, b) je riešením systému (S1), tak $F_1(a, b) = 0$, $F_2(a, b) = 0$. Potom $\alpha F_1(a, b) + \beta F_2(a, b) = 0 + 0 = 0$, t.j. (a, b) je tiež riešenie systému (S2);

(ii) Ak (a, b) je riešením systému (S2) pre $\beta \neq 0$, tak z podmienky $F_1(a, b) = 0$ a $\alpha F_1(a, b) + \beta F_2(a, b) = 0$ vyplýva $\alpha \cdot 0 + \beta F_2(a, b) = 0$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $F_2(a, b) = 0$.

Dostávame, že množiny riešení oboch systémov sú rovnaké. □

Poznámka. Druhú rovnicu systému (S2) nazývame *lineárna kombinácia* rovníc (S1).

Tvrdenie predchádzajúcej vety môžeme graficky interpretovať nasledovne. Roviné krivky, ktorých rovnice sú $F_2(x, y) = 0$ a $\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0$ pretínajú graf krivky s rovnicou $F_1(x, y) = 0$ v tej istej množine bodov (*obr. 1*).



Obr. 1

Riešené úlohy

V nasledujúcich úlohách ukážeme, ako môžeme niektoré netriviálne problémy analytickej geometrie ľahko (bez zdĺhavých výpočtov) vyriešiť pomocou *vety* 1.

Úloha 2. *Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej spoločnými bodmi kružníc k_1 a k_2, ktorých rovnice sú*

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 = 0 \quad a \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 - 16 = 0 \tag{2}$$

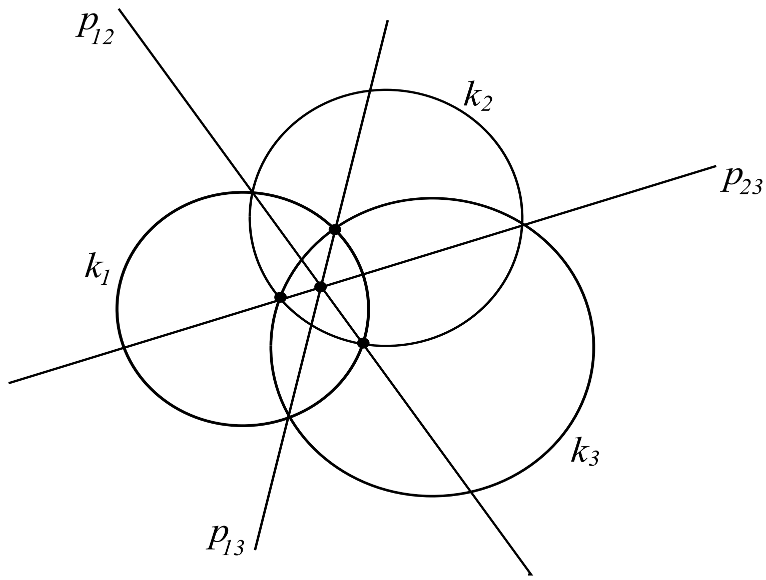
Riešenie. Najskôr overíme, že dané kružnice majú neprázdny prienik. Pretože vzdialenosť ich stredov je $2\sqrt{5}$ a veľkosti polomerov daných kružníc sú postupne 2 a 4, tak množina riešení systému rovníc (2) je neprázdna. Ak nahradíme druhú rovnicu tohto systému jej rozdielom s prvou rovnicou, dostávame systém (3), ktorý je podľa *vety* 1 ekvivaletný s (2) ($\alpha = 1; \beta = -1$):

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 = 0, \qquad x + 2y + 1 = 0 \tag{3}$$

Priamka $x + 2y + 1 = 0$ je hľadanou priamkou, nakoľko pretína kružnicu k_1 v tých istých bodoch ako k_2. □

Mnoho študentov si neuvedomí predchádzajúcu možnosť riešenia a postupuje v riešení systému rovníc (3) napr. dosadením $x = -2y - 1$ do prvej rovnice. Takto nájdu súradnice spoločných bodov daných kružníc a nakoniec určia rovnicu priamky, ktorá týmito bodmi prechádza.

Úloha 3. *Nech k_1, k_2, k_3 sú ľubovoľné kružnice v rovine, pričom každé dve z nich sa navzájom pretínajú v dvoch rôznych bodoch. Dokážte, že trojica spoločných tetív daných kružníc sa pretína v jednom bode (*obr. 2*).*



Obr. 2

Riešenie. Nech $F_i(x, y) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2 = 0$ je rovnica kružnice k_i v karteziánskej sústave súradníc, $i = 1, 2, 3$. Nech p_{ij} je priamka prechádzajúca spoločnými bodmi kružníc k_i a k_j, $1 \leq i < j \leq 3$. Analogicky s predchádzajúcou úlohou dostávame, že $p_{ij}(x, y) = F_i(x, y) - F_j(x, y) = (a_j - a_i)x + (b_j - b_i)y + c_{ij} = 0$ je rovnicou priamky p_{ij}, kde c_{ij} je reálna konštanta. Súradnice priesečníkov priamok p_{12} a p_{13} určíme riešením nesledujúceho systému rovníc.

$$p_{12}(x, y) = F_1(x, y) - F_2(x, y) = 0, \quad p_{13}(x, y) = F_1(x, y) - F_3(x, y) = 0 \quad (4)$$

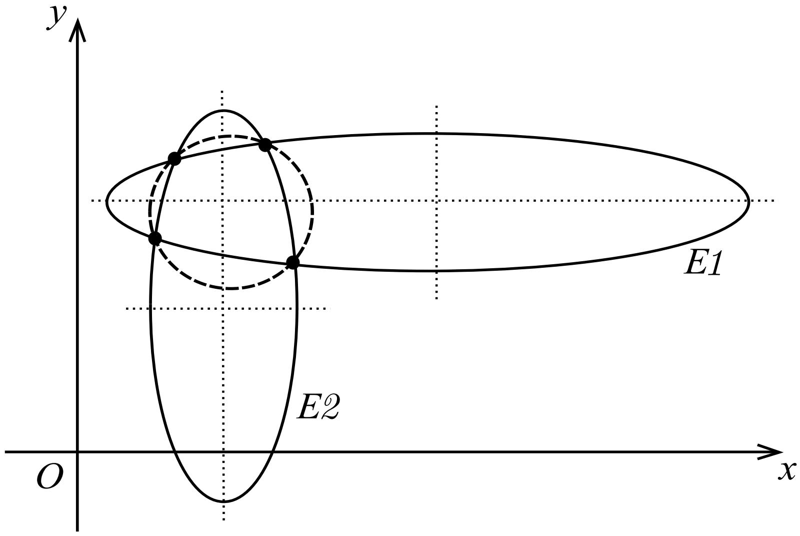
Ak nahradíme druhú rovnicu systému (4) jej rozdielom s prvou rovnicou, tak dostaneme systém rovníc:

$$F_1(x, y) - F_2(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) - F_3(x, y) = 0, \quad (5)$$

ktorý je podľa *vety* 1 ($\alpha = 1, \beta = -1$) ekvivalentný so systémom (4). Avšak druhá rovnica systému (5) je rovnicou priamky p_{23}. Preto priamky p_{13} a p_{23} pretínajú priamku p_{12} v tom istom bode. □

Úloha 4.

*a) Nech E1 a E2 sú dve elipsy v rovine, ktorých osi sú navzájom rovnobežné. Ak sa elipsy pretínajú v štyroch bodoch, tak spoločné body ležia na jednej kružnici (*obr. 3*). Dokážte.*



b) Ak sa dve paraboly P1 a P2, ktorých osi sú navzájom kolmé pretínajú v štyroch bodoch, tak spoločné body ležia na jednej kružnici. Dokážte.

Obr. 3

Riešenie. (a) Zvoľme súradnicový systém tak, aby osi oboch elíps boli rovnobežné so súradnicovými osami. Potom priesečníky daných elíps určíme riešením systému rovníc:

$$F_1(x,y) = b_1^2(x-m_1)^2 + a_1^2(y-n_1)^2 - a_1^2b_1^2 = 0$$
$$F_2(x,y) = b_2^2(x-m_2)^2 + a_2^2(y-n_2)^2 - a_2^2b_2^2 = 0. \tag{6}$$

Aby sme dokázali, že spoločné body ležia na jednej kružnici, nahradíme druhú rovnicu systému (6) lineárnou kombináciou $\alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y) = 0$, kde α a β zvolíme tak (viď nižšie), aby rovnica $\alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y) = 0$ bola rovnicou kružnice. Potom riešenie úlohy je bezprostredným dôsledkom *vety* 1. Nakoľko $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ je rovnicou kružnice práve vtedy, keď $A = B \neq 0$ a nie je súčasne bodom alebo prázdnou množinou, α a β určíme porovnaním koeficientov pri x^2 a y^2 v rovnici $\alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y) = 0$. Platí

$$\alpha b_1^2 + \beta b_2^2 = \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 \tag{7}$$

Ak $a_2 = b_2$, tak elipsa E_2 je kružnicou, a tvrdenie (a) je dokázané. Ak $a_2 \neq b_2$, položme $\alpha = 1$ v (7) a vypočítame β. Dostaneme $\beta = (a_1^2 - b_1^2)(b_2^2 - a_2^2)^{-1}$, čo bolo treba dokázať. □

(b) Ak si zvolíme súradnicové osi rovnobežne s osami daných parabol, tak rovnice P_1 a P_2 majú postupne tvar:

$$F_1(x,y) = a_1x^2 + b_1x + c_1 - y = 0 \quad \text{a}$$

$$F_2(x,y) = a_2y^2 + b_2y + c_2 - x = 0.$$

Keďže $a_1 \neq 0$ a $a_2 \neq 0$, rovnicou $a_2F_1(x,y) + a_1F_2(x,y) = 0$ je určená kružnica prechádzajúca spoločnými bodmi parabol. □

Záver

S pojmom lineárnej kombinácie sa stretávame iba zriedkavo pri riešení úloh analytickej geometrie. Aj keď sme v tomto príspevku uviedli iba riešenia štyroch úloh, pozorný čitateľ si iste uvedomil, že uvedené postupy môžeme využiť aj pri riešení iných úloh analytickej geometrie, nielen v rovine, ale aj v trojrozmernom priestore pre prípad lineárnej kombinácie rovníc rovín a guľových plôch (zväzkoch guľových plôch).

Literatúra

[1] BILLICH, M.: *Použitie zväzkov priamok a kružníc pri riešení úloh.* In: Disputationes Scientificae, KU Ružomberok, 2003, roč. 3, č.2, pp. 47-53.

[2] TRENKLER M.: *O lineárnej kombinácii.* Matematika, informatika, fyzika 1996, č.9, pp. 6-9.

Adresa autora:
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta KU
Námestie A. Hlinku 56/1
034 01 Ružomberok
e-mail: billich@fedu.ku.sk

Meníme postoje študentov k výkonom v matematike na 2. stupni ZŠ

Jaroslava Brincková

Abstract. *This paper shows tree aspects of the teaching of mathematics. The first one involves proportionality, which constitutes one of the cores of pupils' knowledge. The second one involves a didactic approach: combining a geometrical frame with a numerical context. The third one deals with the use of resources and the integration of new Technologies. The combination of these three aspects is relevant to work with trainees on teaching practices in the classroom.*

Kľúčové slová: aritmetika, geometria, pomer a úmernosť, funkcie, príprava učiteľov matematiky: základná škola, vysoká škola

Úvod

V roku 1980 dvaja americkí didaktici matematiky Rosnick a Clement realizovali výskum, ktorý sa týkal „*prekladu*" textu do jazyka matematických formúl a naopak. Autori predložili podľa G. Fischera a R. Malleho [3] vysokoškolsky vzdelaným osobám rôzneho veku úlohy podobného typu:

Nech S je počet študentov a P je počet profesorov na jednej univerzite. Na každého profesora pripadá 6 študentov. Vyjadrite túto situáciu rovnicou pomocou S a P.

Približne 60% opýtaných odpovedalo správne. Skoro všetci tí, čo vyriešili úlohu zle, napísali 6S = P. Pri neformálnom výskume učiteľov germanistiky v Rakúsku bola úspešnosť dokonca len jedna tretina. Výskum u študentov ekonómie dopadol neporovnateľne horšie ako u študentov techniky. Táto chyba sa v literatúre označuje ako Rosnickov-Clementov fenomén. Obaja výskumníci nechceli tento jav len dokázať, ale chceli aj vyskúmať, nakoľko sa dá ovplyvniť vhodnými „terapiami". Ťažkosti žiakov a dospelých so sémantickými aspektmi algebry boli pre nás podnetom na prepojenie geometrického rámca s numerickým kontextom v príprave tvorivých učiteľov matematiky. Netradičný prístup k didaktickému spracovaniu problematiky podobnosti v príprave učiteľov vo Francúzsku a Dánsku (pozri [1]) nás motivoval k inovácii obsahu vzdelávania učiteľov matematiky 2. stupňa v predmete Tvorivé dielne v matematike s cieľom, ukázať budúcim učiteľom matematiky vzťahy medzi jednotlivými zložkami matematiky (aritmetika – geometria – algebra) pomocou matematických projektov. Kombinovať geometriu s numerickým kontextom. Pre tvorbu vhodných učebných materiálov budúcich učiteľov matematiky využiť dostupné multimediálne prostriedky.

Porovnávame čísla a dĺžky

S porovnávaním dvoch prirodzených čísel sa stretávajú žiaci už na prvom stupni základnej školy dvoma spôsobmi:

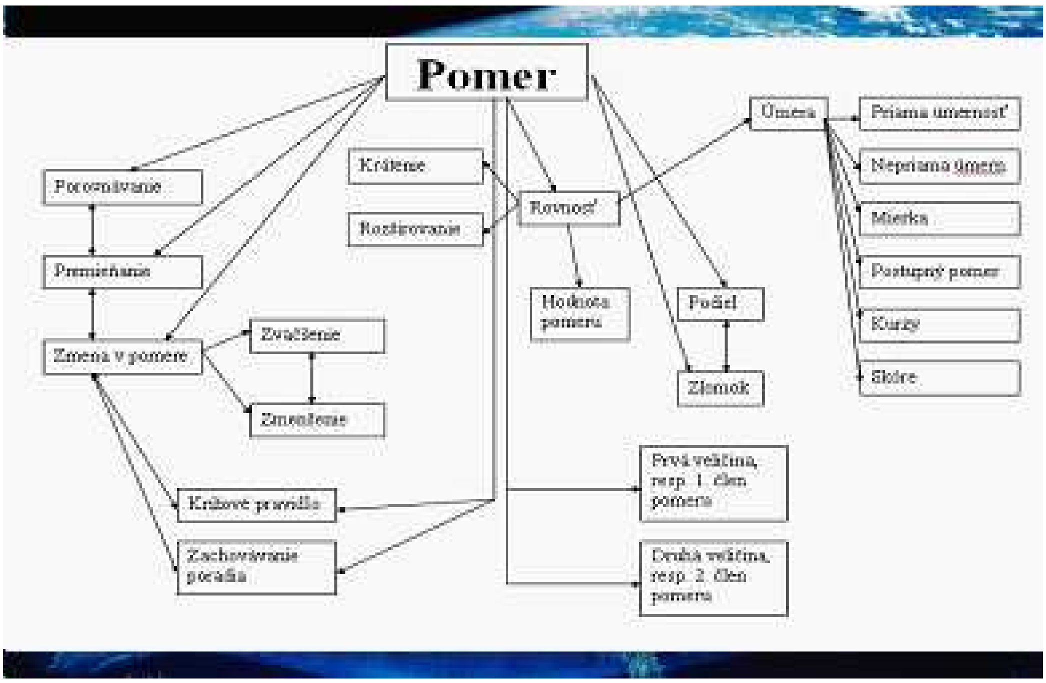
rozdielom: $c - b = a$ (Nech $a, b, c, d \in N$. Potom ak $a + b = c$, tak $c - b = a$) Odpovedáme na otázku ***o koľko viac*** *či* ***menej?***

podielom: $a : b = c$ alebo $\frac{a}{b} = c$, kde $b \neq 0$. Odpovedáme na otázku ***koľkokrát viac*** *či* ***menej***?

Ak $d \neq 1$ môžeme podiel zapísať aj ako rovnosť dvoch zlomkov $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, kde b a $d \neq 0$.

Kým pri sčitovaní a odčitovaní prirodzených čísel chápu ***číslo*** najčastejšie ***ako mnohosť***, predstava ***čísla ako operátora*** nastupuje pri zavedení operácie násobenia a delenia. Napríklad 6: 2 = 3 čítame: *6 je* ***dva krát*** *viacej ako tri.* Alebo ***dva krát*** *tri rovná sa 6.*

Kvalitatívne nový posun v myslení žiak nastáva, keď sa na zápis podielu dvoch prirodzených čísel pozeráme ako na zlomok ***a/b***. Napríklad zlomok 2/3 prezentujeme v školskej matematike ako dve z troch častí celku. Pritom 2/3 chápeme ako operátor, ktorý z celku veľkosti 60 dáva časť rovnú 40, ale z celku 120 dáva časť rovnú 80. Fakt, že zlomok porovnáva rôzne množstvá sa v učive o zlomkoch v 6. ročníku ZŠ dostatočne nezvýrazní. Prvým novým učivom v matematike 7. ročníka ZŠ sú operácie so zlomkami, ktoré kladú, vzhľadom na abstraktnosť precvičovaných algoritmov, veľké nároky na pamäť žiakov a sú časovo náročné. Zručnosť v práci so zlomkami je dôležitá pre ďalšie objavovanie v matematike Tým je vyjadrenie ***vzťahu medzi dvoma rôznymi množstvami,*** *ktoré nazývame* ***pomer".*** Podiel čísel a:b (24:12) nazývame v matematike ***pomer*** *a čítame a ku b. Hovoríme, že* ***a/b*** *je hodnota pomeru.* Množstvo matematických pojmov s ktorými pracuje žiak a vzťahy medzi nimi sú znázornené v Pojmovej mape na obr.č.1.



Obr.č.1: Pojmová mapa - Pomer

Rovnosť dvoch pomerov, napríklad: a : b = c : d, nazývame ***úmera.*** Jej úpravou na tvar $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, kde b a d$\neq$ 0, dostávame rovnosť dvoch zlomkov, v ktorých je sémanticky prvkami elementárnej algebry zapísané meranie dvoch objektov v rovnakých jednotkách miery. V školskej praxi sú to najčastejšie dĺžky, obsahy, objemy, hmotnosť, čas, rýchlosť, financie, teplota. Ťažisko práce učiteľa spočíva v identifikácii typu úmernosti a nácviku algoritmu trojčlenky pri výpočte priamej a nepriamej úmernosti. Pre malú časovú dotáciu a veľkú abstraktnosť učiva sa toto učivo nevracia späť ku zlomkom, ale prechádza hneď do etapy skúmania pomerov medzi dĺžkami odpovedajúcich si strán vzoru a obrazu objektov v zhodných zobrazeniach v geometrii 7. ročníka ZŠ. Ak pre trojuholníky ABC a A'B'C' platí že:$|AB| : |A'B'| = 1$, $|AC| : |A'C'| = 1$, $|BC| : |B'C'| = 1$ tak sú trojuholníky zhodné. Koeficient k pre všetky tri vzťahy je rovný 1. Meranie môžeme zapísať aj ako úmeru $|AB| : |A'B'| = 1$: 1. Skúmajme ako sa zmenia oba trojuholníky ak budeme meniť úmeru. Ak je k $>$ 1 bude sa obraz trojuholníka zväčšovať. Ak je z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ bude sa obraz trojuholníka zmenšovať. Ak je k $=$ 1, tak môžeme skúmať a popísať polohu vzoru a obrazu bez toho, aby sa ich dĺžky strán a veľkosti uhlov menili. Hovoríme o súmernosti osovej, stredovej posunutí a rotácii. Položme si otázku. Môže byť úmera aj záporná, keď meriame reálne objekty? Ak chápeme zlomok ako číslo racionálne a pomer ako zlomok, tak rovnosť dvoch pomerov v prípade rovnoľahlosti je príkladom abstrakcie v geometrii pre k $<$ 0. Poukazuje na opačnú orientáciu vzoru a obrazu voči stredu rovnoľahlosti. Pomocou pomeru k môžeme klasifikovať zobrazenia v školskej matematike tak, ako uvádza tabuľka č. 1.

Koeficient k a zobrazenia v geometrii				
Rovnoľahlosť	$k \in (-\infty, \infty)$			
Podobnosť	Zmenšenie k $\in (0, 1)$		Zväčšenie k $\in (1, \infty)$	
Zhodnosť $\mathbf{k = 1}$	Stredová súmernosť	Osová súmernosť	Posunutie	Otočenie

Tabuľka č. 1. Koeficient k a zobrazenia v geometrii

Matematický projekt kolegov z Paríža a Swenborgu [1] vychádza v príprave budúcich učiteľov matematiky pre ZŠ z numerického kontextu zlomkov a skúmaním pomocou Cabri geometrie umožňuje objaviť matematickú podstatu podobnosti.

Skúmajme však trojuholník ďalej. Ak vyjadríme v pravouhlom trojuholníku pre daný uhol α pomerom dĺžky protiľahlej odvesny a prepony (priľahlej odvesny a prepony), alebo pomer dĺžok oboch odvesien, tak môžeme modelovať goniometrické funkcie sínus (kosínus) alebo tangens daného uhla α. Koeficient pomeru $\boldsymbol{k}$ už nebude len racionálne číslo, ale reálne číslo, v prípade sínusu a kosínusu z intervalu $<0, 1>$, pre tangens a kotangens z intervalu (- ∞, ∞) okrem bodov nespojitosti.

V pravouhlom trojuholníku môžeme pomerom vyjadriť aj dĺžky jeho odvesien a výšky a tak odvodiť Euklidove vety o výške a odvesne, Pytagorovu vetu, prípadne skúmať Tálesovu kružnicu. Číslo sa takto stáva reprezentantom geometrického vzťahu. Pojem zlomok a pomer dvoch čísel sa takto postupne vinie učivom matematiky počas celého štúdia druhého stupňa ZŠ, pričom ani žiaci, ani budúci učitelia si túto súvislosť bez upozornenia neuvedomujú. Nazdávame sa, že práve malé utvrdzovanie vnútorných matematických vzťahov počas školskej dochádzky podporuje vznik Rosnick-Clementovho efektu.

Didaktické stvárnenie učiva

Jedno z úsloví hovorí: *Niektorí ľudia vydržia dve minúty nedýchať, dva týždne nepiť, mesiac nejesť a niekoľko rokov – nerozmýšľať.* Našou snahou bolo podnietiť študentov učiteľstva matematiky k tomu, aby začali aktívne rozmýšľať o možnosti podať učivo iným, netradičným spôsobom. Zvýrazniť väzby medzi jednotlivými časťami už prebraného učiva a dať žiakom podnety pre samostatné bádanie v matematike.

V úvode kurzu Tvorivé dielne v matematike ZŠ sme vybrali ako základ skúmania tri tematické celky. Z učiva aritmetiky Zlomky, z učiva algebry Lineárne rovnice a z učiva geometrie Trojuholník. Úlohou študentov bolo v skupinách podrobne spracovať teoretickú bázu a pojmovú mapu pre výklad učiva v jednotlivých ročníkoch ZŠ. S grafmi a diagramami sa žiaci stretávajú podľa J. Příhonskej [5], už od útleho veku. Uľahčujú im klasifikáciu objektov. Pojmová mapa im umožnila objaviť prvé vzťahy k ostatným častiam učiva matematiky v učebných osnovách.

V ďalšej časti sme ich nechali individuálne pracovať na detailnom a reálnom scenári vyučovacieho bloku. Vymedziť oblasti za ktoré zodpovedá učiteľ a za ktoré zodpovedajú žiaci. Zistiť oblasti (body), ktoré sú z metodického hľadiska ťažiskové pre osvojenie si danej problematiky. V analýze a priori sme diskutovali o možných úskaliach a ťažkostiach žiakov. Požadovali sme presné vymedzenie vzdelávacieho a výchovného cieľa. Nechali sme študentov kolektívne uvažovať nad ich individuálnymi návrhmi a vybrať pre realizáciu v triede ten, ktorý skupina označila ako najlepší.

K zvoleným „najlepším“ návrhom študenti vytvorili súbor úloh na precvičenie a vypracovali pomocou dostupných informačných technológií alternatívne žiacke pracovné listy. Ako matematický projekt spracovali gradovanú sériu úloh na precvičenie a overenie vedomostí z naučenej problematiky. Dve dvojice dobrovoľníkov sa podujali v rámci priebežnej pedagogickej praxe vyskúšať v 9. ročníku ZŠ, po dohovore s cvičnými učiteľkami, navrhnuté úlohy vo svojich scenároch. Ostatní študenti ich pozorovali na priebežnej praxi. Následná analýza odučených hodín na seminári ukázala, že žiaci nechápu pomer a úmeru ako jednu z foriem číselného zápisu zlomkov, ale ako izolované učivo. Pri skúmaní trojuholníka izolovali geometriu od aritmetiky a algebry. Zápis: *O pravouhlých trojuholníkoch ABC a A'B'C' platí: a : a'= b : b'= c : c'= 1: 2* $= \frac{1}{2}$ nevedeli bez náčrtku a rysovania pretlmočiť do jazyka geometrie. Podobne v tejto úlohe pomer a : c = a': c'= $\frac{1}{2}$. Určiť veľkosť prislúchajúceho uhla bolo pre mnohých žiakov problémom.

Záver

Študenti v analýze a posteriori skonštatovali platnosť tvrdenia J Coufalovej [2], že projektové vyučovanie v matematike je jednou z možností organického spojenia učebných predmetov alebo zložiek predmetu do kognitívnej a činnostnej oblasti. Kontinuitu matematické vzdelávania ovplyvňuje podľa A. Prídavkovej a I.Scholtzovej [4]. Medzi ne môžeme v prvom rade zaradiť vedomostnú úroveň žiakov, osobné postoje žiakov k vyučovaniu matematika a odbornú i pedagogickú erudíciu učiteľov. Využitie informačných technológií a internetu v práci učiteľa dáva dosť podnetov na vlastné spracovanie obsahu učiva matematiky tak, aby v úvode a v záverečnom opakovaní tematického celku sa ukázalo prepojenie oblastí matematiky a iných predmetov. Zvýšilo záujem študentov o hlbšie poznanie obsahu učiva v rôznych koncepciách učebníc a prácu s vlastným pracovným listom.

Literatúra

[1] Alvez, Y, Chesné, J.P. , Jappelt, A: *Úvod do podobnosti v geometrii.* Projekt LOSSTT-IN-MATH. Socrates – Comenius 2.1, PISA: UNIPI, 2006

[2] Coufalová,J.: *Projektové vyučování.* Náměty pro učitele. Praha: Fortuna, 2006, s.13, ISBN80-7168-958-0

[3] Fischera,G., Malle,R.: *Človek a matematika.* Bratislava: SPN, 1992

[4] Prídavková, A., Scholtzová, I.: Matematická edukácia v kontexte postupu žiaka z primárneho na sekundárny stupeň vzdelávania. In: *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy.* Olomouc: FP UP, 2006, s. 198. ISBN 80-244-1311-6

[5] Příhonská,J.: Konstruktivismus v odhalování metody číslování. In: *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární škol*y. Olomouc: FP UP , 2006, s. 204. ISBN 80-244-1311-6

Adresa autora:
Doc. RNDr. Jaroslava Brincková, CSc.
Katedra matematiky PF UMB
Ružová 13
974 11 Banská Bystrica
e-mail: jbrinckova@pdf.umb.sk

Struktura obrazu pojęcia matematycznego
The structure of concept image of mathematical object

Beata Bugajska - Jaszczołt

Abstract. *This article contains discussion on a test carried out among students of a secondary school. Analysis of students work led to identification the constitutive elements of the concept image of mathematical object.*

Tworzenie pojęć matematycznych utożsamiane jest w dydaktyce matematyki z procesem, w efekcie którego zostają one włączone w system posiadanej przez uczącego się wiedzy i wyraża się umiejętnością stosowania ich w rozmaitych sytuacjach zadaniowych. I choć, jak pisze J. Konior (2002, s.20), *„złożony proces dochodzenia przez umysł ludzki do pojęcia matematycznego i specyfika tego procesu nadal kryją wiele tajemnic"*, to badania ostatnich dziesięcioleci wskazują na celowość łączenia procesu poznawczego, w wyniku którego powstaje nowa wiedza, z sekwencją następujących po sobie etapów. W szczególności M. Hejny (1997, s. 17) wskazuje na wagę zainteresowania pojęciem (**faza motywacji**), działań prowadzących do zdobywania doświadczeń (**etap modeli**), które w efekcie „wglądu" w pojęcie (**podniesienie abstrakcji**) pozwalają wytworzyć intuicyjne powiązania fragmentu wiedzy w istniejącej sieci powiązań poznawczych (**etap krystalizacji**). W dydaktyce matematyki finalny produkt nazywa się „obrazem pojęcia" (por. „concept image": D. O. Tall, S. Vinner, 1981), „koncepcją pojęcia" (A. Sierpińska, 1985), „portretem pojęcia" (M. Hejny, 1997) lub „schematem" (E. Dubinsky, 1991, 2001). Koncepcja pojęcia matematycznego zwykle traktowana jest w literaturze, jako indywidualny twór, niewerbalny stowarzyszonym z nazwą pojęcia, wyrażający subiektywne wyobrażenia uczącego się, jego wiedzę i doświadczenie. Na jej tworzenie się mają wpływ, z jednej strony, indywidualne preferencje poznawcze (C. Nosal, 1990), z drugiej, treści i metody pracy nauczyciela, drogi nabywania oraz stosowania i komunikowania wiedzy o pojęciu przez daną osobę.

W języku obiegowym i praktyce szkolnej zwykle mówi się o kształtowaniu pojedynczego pojęcia matematycznego, nie umiejscowionego w teorii. Zwykle dochodzi, jak mówi S. Turnau (1990, s. 226) do wytworzenia intuicyjnego obiektu myślowego, któremu nadaje się nazwę. W toku dalszej nauki po jego zdefiniowaniu, w ramach określonej teorii matematycznej, staje się ono pojęciem matematycznym. Ta swoista izolacja oraz niewystarczający poziom wiedzy, świadomości metodologicznej i doświadczenia matematycznego uczniów czyni proces ich kształtowania skomplikowanym.

Dość powierzchowna wiedza na temat procesu kształtowania się pojęć sprawia, że często w praktyce dochodzi do wyboru elementów, jak się powszechnie sądzi koniecznych dla tworzenia pojęcia – definicji (w sformułowaniu proponowanym przez autora aktualnie używanego w szkole podręcznika), stowarzyszonych z nią elementów „słownika" oraz sytuacji, potrzebnych po to, aby wyjaśnić sens definiowanego obiektu, bądź aby „gładko" doprowadzić do sformułowania definicji (wówczas działania i tak zorientowane są na konkretną definicję). W polu widzenia nauczyciela pozostają więc jedynie niektóre elementy tworzonego pojęcia (patrz Załącznik 1).

Powstaje pytanie:

Czy znajomość tych wybranych elementów wystarcza uczniowi do swobodnego operowania pojęciem, funkcjonowania w różnych sytuacjach, do których mogą być odnoszone różne jego własności? Czy te elementy zapewniają wszechstronne, wieloaspektowe rozumienie pojęcia?

W sformułowaniu odpowiedzi posłużę się pojęciem kresu zbioru ograniczonego oraz wynikami obserwacji uzyskanymi w trakcie badań prowadzonych wśród uczniów liceum ogólnokształcącego, w szczegółach prezentując spostrzeżenia dotyczące koncepcji kresu zbioru ograniczonego posiadanej przez jednego z badanych uczniów.

Piotr - uczeń klasy trzeciej osiągający bardzo dobre wyniki w nauce, oceniany przez nauczyciela matematyki, jako osoba szybko ucząca się, przyswajająca wiadomości z dużą łatwością i swobodnie wykorzystująca je w różnych sytuacjach zadaniowych, brał udział (obok 120 innych uczniów) w badaniach, w trakcie których analizie poddano zachowanie uczniów wobec różnych sytuacji dotyczących kresu zbioru ograniczonego. Znalazły się tu zadania prowokujące różne działania ucznia, począwszy od polecenia wyznaczenia kresów danego zbioru, skonstruowania zbioru o danych warunkach, wyjaśnienia etapów postępowania oraz rozumowania w konkretnych sytuacjach, czy w końcu rozstrzygania prawdziwości pewnych wypowiedzi (z różnym udziałem języka formalnego i naturalnego) dotyczących kresu. Rozważane były zbiory skończone i nieskończone, z różną konstrukcją elementów, różnymi opisami zbioru, uporządkowania zbioru oraz opisem porządku zadanego w zbiorze, dopuszczające posługiwanie się językiem naturalnym, wieloznacznym i kontekstowym, bez konieczności używania specyficznej terminologii kresu, aż po zadania wymagające odformalizowania zakodowanych uprzednio informacji, czy też posługiwania się specyficznymi elementami „słownika” związanego z kresem.

Definicję kresu zbioru ograniczonego Piotr poznał na lekcji matematyki w pierwszej klasie. Rozważane były wówczas zbiory skończone, przedziały oraz zbiory utworzone z wartości ciągów monotonicznych i ograniczonych – słowem zadania najczęściej spotykane w podręcznikach i zbiorach zadań przeznaczonych dla uczniów liceum.

W sytuacjach znanych z lekcji matematyki radził sobie bardzo dobrze, bez trudu określał żądane kresy. Posiadana przez Piotra wiedza okazała się wystarczająca do wyznaczenia kresów przedziału, jako odpowiednio elementów otwierającego i zamykającego przedział, np. w zadaniu:

Do zbioru A należą liczby naturalne z przedziału (2,11).

Zbiór C = $\{x \in N\colon x \in \langle 1, 5\frac{1}{2}\rangle\}$.

Uzupełnij zdania:

Kres dolny zbioru A jest równy ....

Kres górny zbioru C jest równy ....

Piotr określał kresy zbioru wartości ciągu monotonicznego i ograniczonego, jako pierwszy wyraz ciągu oraz granicą w nieskończoności, np. w sytuacji

Zbiór	Kres dolny	Kres górny
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$		

Postawiony w nowych dla siebie sytuacjach rozszerzał zakres stosowalności wytworzonych schematów postępowania, np. w zadaniu :

Wyznacz, o ile istnieją, kres górny i dolny zbioru

$E = \{x \in R : x = t - t^2 \wedge t \in < -4, 1 >\}$.

Odpowiedź uzasadnij.

Kres dolny:...

Kres górny:..

Piotr błędnie wyznaczał kresy zbioru E, jako odpowiednie wartości funkcji na krańcach przedziału określoności.

W przypadku zbiorów utworzonych z wartości ciągu, gdy kolejność elementów „listy” nie była zgodna z uporządkowaniem naturalnym na osi liczbowej np.:

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ...\right\}, \quad \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, ..., \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}, ...\right\}$$

uczeń działania sprowadził do poszukiwania „końcowych” elementów zbioru widzianego na osi liczbowej. Niemożność wskazania, w wyniku skończonych czynności odpowiedniego elementu sprowokowała tezę, że kres nie istnieje.

Podobne czynności zaznaczania „kolejnych” elementów zbioru podejmował uczeń poszukując kresów zbiorów utworzonych z ułamków dziesiętnych, np.:

C $=\{-1,01; -1,01001; -1,010010001; -1,01001000100001; ...\}$, czy

D = {8,67(1); 8,67(2); 8,67(3); 8,67(4);...}, a niemożność wykonania tej konstrukcji w skończonym czasie, prowokowały przekonanie, że odpowiedni kres nie istnieje.

Piotr nie potrafił odwrócić ciągu czynności związanych z wyznaczaniem kresu i wykorzystać ich przy konstrukcji zbioru, który spełnia z góry określone warunki, nie wiązał również porządku z kresem. Nie dostrzegał tego związku nawet w znanych sobie sytuacjach, ale przywiązywał wagę do kolejności elementów „listy”. Pytania o istnienie kresów zbioru uporządkowanego relacja inną, niż „$\leq$”, np. w przypadku zbioru skończonego, w którym porządek opisano grafem, czy w przypadku uporządkowania relacją podzielności, pozostały bez odpowiedzi.

Piotr kojarzył, a nawet utożsamiał ze sobą pojęcia: ograniczoność, najmniejszy element, kres. W sytuacjach znanych sobie, stosował „wypróbowane” na lekcjach matematyki sposoby postępowania. W nowych, unikał formalnego odwoływania się do określenia kresu. W wypowiedziach podkreślał, że nie wie jak skorzystać z jego definicji (choć poprawnie ją przytaczał) i wyrażał przekonanie, iż niewiele mu ona pomaga w sytuacjach zadaniowych. Nawet „słownik” związany z kresem, który poznał w trakcie szkolnego procesu kształtowania pojęcia okazał się nieużyteczny. W wypowiedziach Piotra brak było zwrotów języka formalnego, często zaś pojawiało się wyrażenie „końce zbioru”, mający wiele znaczeń, np.:

- pierwszy (ostatni) element na „liście” w zapisie zbioru,
- skrajnie położona liczba na osi liczbowej,
- „końcowy” fragment wykresu funkcji.

Przy ich użyciu werbalizował swój sposób postępowania w sytuacjach zadaniowych, a także samo pojęcie - kres zbioru ograniczonego. Gdy mówił o ograniczoności zbioru, to miał na myśli naturalną liczbę jego elementów, porządek utożsamiał z następowaniem po sobie symboli. Słownik ucznia bogaty był w „słowa – klucze”, w rodzaju: „zbiór jest ciągiem”, „tu jest przedział”, „trzy kropki na końcu”, „wykres dąży”, które sugestywnie charakteryzują jego sposób myślenia. Działania podejmowane przez ucznia oraz sposób ich komunikowania determinowane były specyfiką danej sytuacji i ściśle związane z jej osobliwościami. Jego wiedza dotycząca kresu, jako mało elastyczna, ściśle wiązała się z informacjami zakodowanymi w układzie symboli i znaków opisujących zbiór.

Posiadane przez Piotra schematy postępowania miały lokalny zasięg. Uczeń nie posiadał umiejętności radzenia sobie w nowych sytuacjach, „podchodzenia” do problemów, słowem nie był wyposażony w strategie heurystyczne. Nie odwoływał się również w momencie „utknięcia” do definicji, bo nie stanowiła ona dla niego wykładni wiedzy o pojęciu, którą mógłby wykorzystać w działaniu, co więcej dla niego była ona jedynie formalnym, ale koniecznym jak sądził dodatkiem.

Rozważania na lekcjach matematyki wyłącznie sytuacji podobnych pod względem struktury (specjalne zbiory, o których mowa wcześniej, domyślnie podsuwany sposób uporządkowania zbioru) sprawiły, że uczeń utożsamił je z „obszarem” stosowalności pojęcia, utrudniły mu transfer zdobytej wiedzy na inne, ogólniejsze konteksty, stąd brak w świadomości ucznia związków z innymi pojęciami i ubogie intuicje, skojarzenia oraz wyobrażenia.

Z analizy zachowań ucznia wynika, że wiedza, którą Piotr otrzymał na lekcjach matematyki, okazała się nie wystarczająca do funkcjonowania w nowych dla niego sytuacjach. Na tle definicji nie potrafił samodzielnie wytworzyć tych elementów, które zapewniłyby mu swobodę w operowaniu pojęciem.

W zachowaniu Piotra istotnymi elementami były (patrz Załącznik 2):

- struktura sytuacji zadaniowych, którą wyznaczyły warunki szkolnej nauki o kresie, a więc zadania z poleceniem wyznaczenia kresów zbioru, zbiory utworzone z wartości ciągu monotonicznego i ograniczonego oraz przedziały, a w nich porządek naturalny ustalony domyślnie (konteksty sytuacyjne),

- procedury postępowania, które powstały na lekcji matematyki, w toku rozważania specjalnie dobranych zadań, były to schematy wyznaczania kresów przedziału oraz zbiorów wartości ciągów monotonicznych i ograniczonych (narzędzia wykonawcze),

- skojarzenia kresu z „końcem zbioru”, ograniczoności zbioru ze skończonością, a uporządkowania z kolejnością następowania symboli w opisie zbioru, wyobrażenia dotyczące zbioru uporządkowanego zespolone z konkretno – realistycznie odbieraną konstrukcją na osi liczbowej (baza intuicyjno – skojarzeniowa),

- język naturalny związany z rozważanymi sytuacjami, a nawet konkretnymi przykładami (aparat komunikowania)

- definicja kresu, jako nieodzowna, ale nieoperatywna składowa pojęcia (fakty).

Uczeń znał definicję kresu, dobrze radził sobie z rozwiązywaniem szkolnych zadań, jednak pod zasłoną pozornie dobrze ukształtowanego pojęcia kryły się niepoprawne intuicje, nieoperatywne schematy zachowania w sytuacjach zadaniowych.

Porównanie efektów kształtowania pojęcia – Załącznik 2 z zamierzeniami nauczyciela – Załącznik 1, jednoznacznie wskazuje, że są one dalekie od zakładanych. Zapewne byłyby inne, gdyby w polu widzenia osoby formułującej cele podejmowanych na lekcji matematyki zabiegów dydaktycznych były zarówno aspekty formalne (**fakty**), jak i intuicyjne (**baza intuicyjno – skojarzeniowa**) danego pojęcia, różnorodne, a nie tylko wygodne **konteksty sytuacyjne**, potencjalne sposoby postępowania, schematy, algorytmy i strategie heurystyczne (**narzędzia wykonawcze**) oraz towarzyszące im słowa (**aparat komunikowania**), a także zależności i związki z innymi pojęciami systemu, do którego ono przynależy (**elementy systemowe**).

W przypadku pojęcia kresu zbioru ograniczonego o ostatecznym kształcie jego koncepcji decydowały w równym stopniu wszystkie wymienione powyżej elementy. Taką prawidłowość odnotować można także w przypadku innych złożonych pojęć matematyki szkolnej, np. pojęcia granicy, czy pojęć rachunku różniczkowego i całkowego. Wynika to bezpośrednio z ich natury (powstają w wyniku nadbudowywania jednych nad drugimi), struktury logicznej określeń (często są to skomplikowane logicznie definicje) oraz tworzonych, w wyniku zabiegów odformalizowania, nieformalnych elementów.

W matematyce szkolnej funkcjonują równolegle z nimi i takie pojęcia, w koncepcjach których dominują niektóre tylko składowe elementy. Tak jest choćby w przypadku pojęcia wartości bezwzględnej. Ubogiej składowej intuicyjno – skojarzeniowej (wyobrażenia związane wyłącznie z odległością na osi liczbowej) odpowiadają elementy formalne, których znajomość wystarcza uczniowi do funkcjonowania w wielu sytuacjach zdaniowych.

W przypadku koncepcji pojęć elementarnych (zob. Z. Krygowska, 1977, s.7) (np. prostokąta, prostopadłościanu i innych), będących rezultatem spontanicznej aktywności poznawczej ucznia, współistnieją ze sobą: uboga składowa formalna oraz rozbudowane znaczenie kontekstowe oraz elementy wyobrażeniowo – skojarzeniowe. Funkcjonowanie w większości sytuacji zadaniowych zapewniają poprawne intuicje geometryczne, a niekiedy wyłącznie umiejętności posługiwania się symbolami (w sytuacjach dotyczących pola, czy objętości).

„Rozkład" elementów tworzących koncepcje pojęcia, jak wynika z powyższej, pobieżnej analizy może być zróżnicowany. Nie to jednak ma dla praktyki nauczania zasadnicze znaczenie, ale ich znajomość tychże elementów. Wiedza ta pozwala nauczycielowi rozpoznać z jednej strony sytuacje dydaktyczne, które wyzwalają i ugruntowują błędne intuicje, reguły operowania pojęciem, niewłaściwe sugestie języka – słowem potencjalnych „nosicieli" błędów, celem ograniczenia ich funkcjonowania, z drugiej zaś te, które sprzyjają tworzeniu nieformalnych elementów, m.in. skojarzeń, intuicji, zgodnych z sensem nadanym im przez definicje, na których byłoby wskazane budowanie koncepcji.

Analiza zachowania Piotra opisana w niniejszym artykule pokazuje konsekwencje zaniedbania tworzeniu obrazu pojęcia jakiejkolwiek składowej.

Pojawia się wniosek, że elementy:

- baza intuicyjno – skojarzeniowa
- fakty
- narzędzia wykonawcze
- elementy systemowe
- aparat komunikowania
- konteksty sytuacyjne
- można traktować, jako „współrzędne" koncepcji pojęcia matematycznego, które będą wyznaczać kierunki jego tworzenia się w umyśle uczącego się, sprzyjać kontroli i korygowaniu błędnie wytworzonych koncepcji.

Literatura

[1] Dubinsky E., Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, w: Advanced Mathematical Thiking, (ed.) Tall D. O., Kluwer Academic Publisher, 1991,s. 95 – 126..

[2] Dubinsky E., Mc Donald M., APOS: A Constructivist theory of Learning in Undergradute Mathematics Education Research, w: The Teaching and Learning at Univesity Level, Kluwer Acadermic Publishers 2001, s. 275 – 283.

[3] Hejny M., Rozwój wiedzy matematycznej, Dydaktyka Matematyki 19, 1997, s. 15 – 28.

[4] Gunčaga J. Limitné procesy v školskej matematike. Dizertačná práca. Nitra, FPV UKF, 2004

[5] Konior J., Czym jest pojęcie matematyczne (szkic z perspektywy nauczania i uczenia się), w: Materiały do studiowania dydaktyki matematyki pod red. J. Żabowskiego, tom i Prace prof. Dr hab. J. Koniora, Płock 2002, s. 11- 31.

[6] Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1- 3, Warszawa 1977.

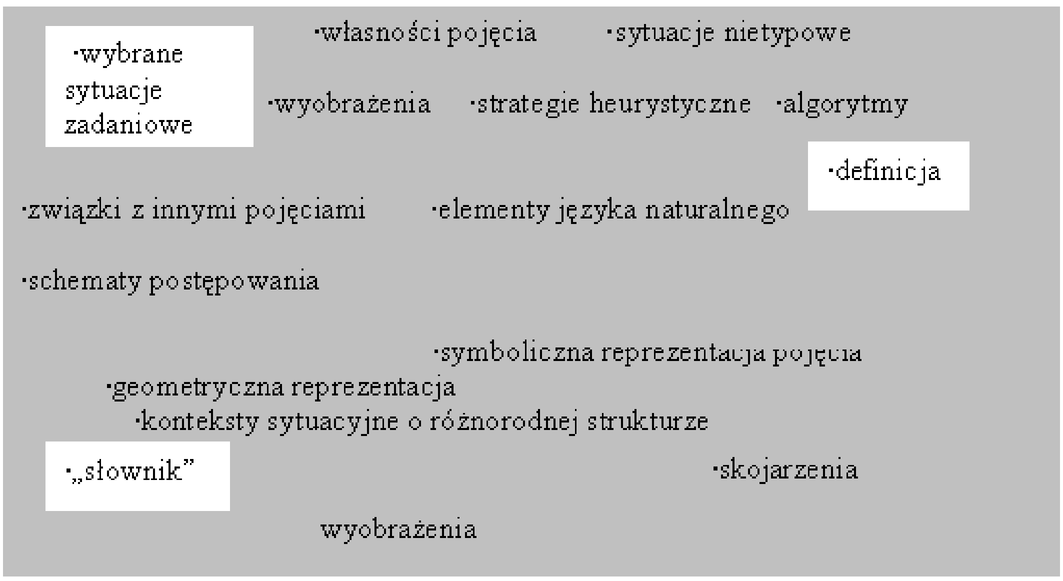
[7] Nosal C., Psychologiczne modele umysłu, PWN, Warszawa, 1990.

[8] Sierpińska A., O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy na podstawie studium przypadku, Dydaktyka Matematyki 4, 1985, s. 107 – 167.

[9] Tall D. O., Vinner S., Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, Educatinal Studies in Mathematics 12, 1981, s. 151 – 169.

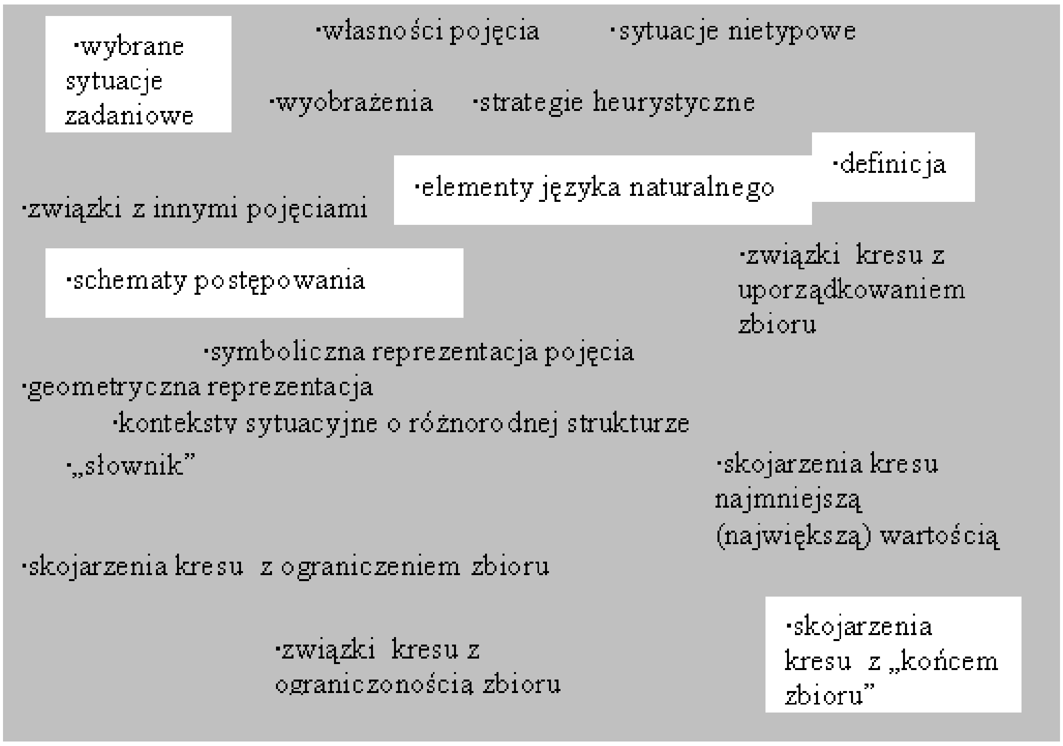
[10] Turnau S., Wykłady o nauczaniu matematyki, Warszawa 1990.

Załącznik 1
Elementy koncepcji pojęcia preferowane w nauczaniu matematyki



Załącznik 2

Struktura koncepcji (obrazu) pojęcia kresu zbioru ograniczonego posiadaną przez ucznia klasy trzeciej liceum - Piotra.



Adresa autora:
Beata Bugajska – Jaszczołt, dr
Akademia Świętokrzyska
Instytut Matematyki
ul. Świętokrzyska 15
25-406 Kielce
Poland
e-mail: beatabj@poczta.onet.pl, beatajaszczolt@gmail.com

The goal of a mathematical problem for the author and the recipient

Monika Czajkowska

Abstract. *We know that there is no mathematical education without the act of solving a task. Each of mathematical problems should evoke desirable behaviour and actions of a student. Especially, the goal of mathematical problem is: to pass on specific mathematical contents, to show heuristic strategies, to teach reading of mathematical text, to design mathematical models, to train mathematical efficiency. In my paper I will show some problems which are connected with recognize a goal of mathematical problem by students from a secondary school.*

1. Cel zadania matematycznego

Każde zadanie, które wybieramy, formułujemy albo rozwiązujemy, ma wywołać pożądane zachowania ucznia i doprowadzić do zmian w jego myśleniu i działaniu. W szczególności naszym celem może być: 1)przekaz określonych treści matematycznych; 2)prezentacja lub stosowanie strategii i technik heurystycznych, rozwijanie określonych aktywności, np. posługiwania się znanym schematem, uogólniania przykładów, dostrzegania prawidłowości, analogii, przeprowadzania prostych rozumowań; 3)rozumienie tekstu, kształcenie umiejętności zapisu informacji w określonym języku, jej kodowania i odczytywania, posługiwania się terminami lub symbolami; 4)stworzenie odpowiedniego modelu matematycznego dla rozwiązania problemów pozamatematycznych, badania tego modelu, interpretowania i konkretyzowania uzyskanych wyników, 5)kształcenie określonych sprawności, np. rachunkowych.

Na cel zadania można patrzeć z punktu widzenia trzech osób:

- autora zadania, czyli jego twórcy (Zadanie "mówi" o stosunku autora do zadania, do matematyki (przecież te, a nie inne treści wybrał), o znaczeniu rozważanego materiału, metody rozwiązywania, zwraca uwagę swą formą językową (ścisłość, symboliczność, atrakcyjność), a także prowokuje (lub nie) do działania. Autor osadził treści matematyczne w odpowiednim kontekście realistycznym lub pozbawił je takiego kontekstu, tworząc zadanie posłużył się językiem czysto matematycznym, symbolicznym albo potocznym, niekiedy użył specjalnych znaków czy koloru (np. dla określenia stopnia jego trudności), zamieścił rysunek (który może pełnić różne role, np. być zapisem tekstu zadania, wskazówką heurystyczną, ozdobnikiem) lub nie, stworzył zadanie zamknięte, z jednoznaczną odpowiedzią i taką ilością danych, jaka jest konieczna dla podania tej odpowiedzi lub otwarte, czyli takie, w którym występuje nadmiar lub niedobór danych, lub w którym możliwe są różne kierunki dedukcji i różne poprawne wnioski, wreszcie umieścił zadanie w odpowiednim miejscu w podręczniku lub zbiorze zadań (zob. Jacobson 1989, Czajkowska 2005));

- nauczyciela, który jest wielokrotnie jednocześnie odbiorcą zadania (ponieważ otrzymuje od autora gotowe zadanie) i nadawcą (najczęściej to on wybiera dane zadanie spośród wielu zadań z podręcznika czy zbioru, poleca je uczniom do rozwiązania i poprzez rozwiązanie zadania chce zrealizować określone cele nauczania);

- ucznia, czyli odbiorcy zadania, który chce odczytać intencje nadawcy i postępować zgodnie z oczekiwaniami autora zadania i nauczyciela, lub wybiera zadanie, chcąc nabyć określone umiejętności.

2. Trudności uczniów z określeniem celu zadania

Właściwa komunikacja nastąpi wtedy, gdy adresat (uczeń, nauczyciel) trafnie odczyta i zrozumie treść zadania oraz zinterpretuje informacje w nim zawarte (zob. Czajkowska 2003, 2005). Nauczyciel posiadający przygotowanie dydaktyczne oraz doświadczenie heurystyczne łatwiej "odczyta" intencje autora, określi cel, jakiemu może służyć rozwiązywanie konkretnego zadania matematycznego, umieszczonego w danym miejscu podręcznika, bądź zbioru zadań, niż uczeń szkoły podstawowej, gimnazjum lub szkoły średniej. Uczeń często (jak pokazuje praktyka) sądzi, że chodzi o jak najszybsze uzyskanie odpowiedzi na postawione w tekście zadania pytanie, wyniku będącego konkretną liczbą. Niekiedy nie rozumie intencji autora, które nagle się zmieniają.

Dla praktyki nauczania jest ważne, by uczeń oraz nauczyciel (także adresat zadań formułowanych w podręczniku) trafnie "odczytali" cel zadania, z którym się spotkają. Jeśli odczytają go niewłaściwie, wówczas zadanie może utracić sens kształcący, a nawet przynieść szkodę. Równie istotne jest aby uczeń właściwie zinterpretował informacje podane w zadaniu. Różne interpretacje tekstu, świadome bądź nie, narzucanie dodatkowych warunków (niekiedy nawet w zadaniach czysto matematycznych, w których takie postępowanie jest niedopuszczalne), wielokrotnie powoduje, że uczeń rozwiązuje zupełnie inne zadanie niż to, które otrzymał. Forma prezentacji treści (a zwłaszcza zabiegi redakcyjne i rysunki), język, czy stosowane przez autora konwencje dotyczące formułowania i rozumienia tekstu, mogą pomóc uczniowi w "odczytaniu" celu zadania i interpretacji zawartej w nim informacji, lub przeciwnie -spowodować, że cel będzie mglisty, a interpretacja informacji - niejednoznaczna. Brak umiejętności "odczytywania" celu zadania i interpretowania informacji w nim zawartej, rodzi trudności w uczeniu się, a sama matematyka staje się dla ucznia niezrozumiała. Rodzi się pytanie: czy uczniowie szkoły średniej posiadają powyższe umiejętności? Popatrzmy z tego punktu widzenia na kilka zadań i ich rozwiązania podane przez uczniów.

Przykład 1.

Uczniowie I klasy liceum, w trakcie omawiania zagadnień dotyczących geometrii analitycznej otrzymali następujące zadanie. Pochodziło ono z podręcznika do nauki matematyki, z którego uczniowie korzystali na lekcjach.

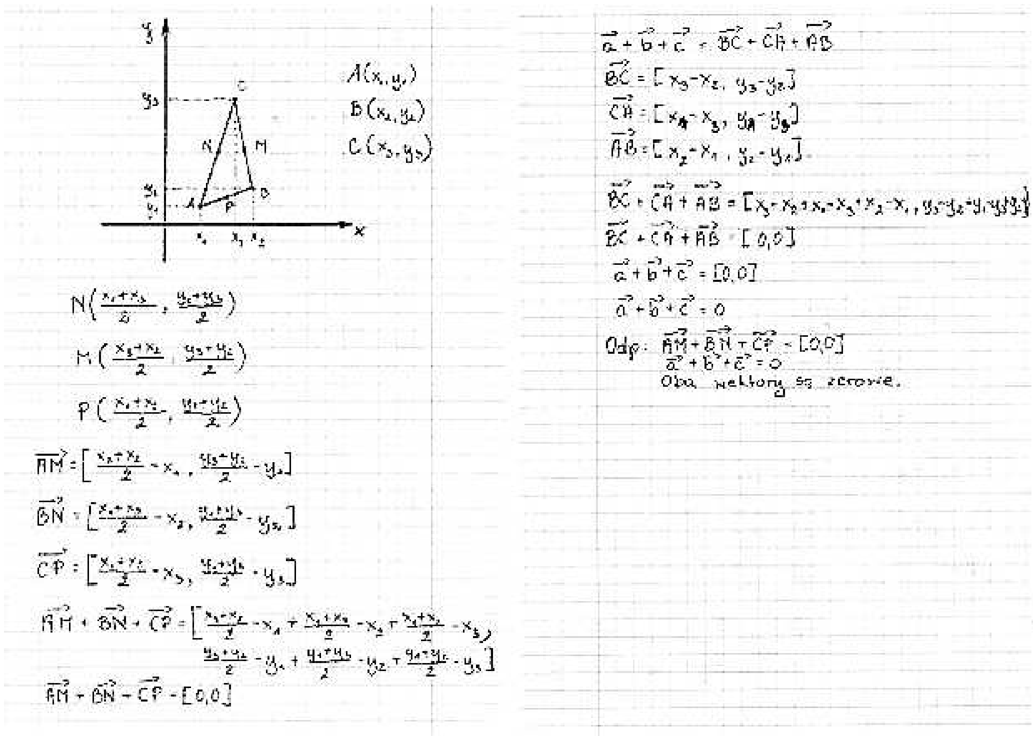
„W trójkącie ABC dane są $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$. Niech M, N, P będą odpowiednio środkami boków BC, AC, AB. Wykaż, że $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = 0$.

Wskazówka: Co możesz powiedzieć o wektorze $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?“

Nauczyciel od razu domyśli się intencji autora –chodzi o analizę informacji, o rozwijanie umiejętności dowodzenia, o wybór najefektywniejszej i najszybszej drogi rozwiązania problemu. Posłużenie się wskazówką ma ukierunkować myślenie ucznia, być dla niego radą na jakie fakty zwrócić uwagę, z czego warto skorzystać. Dla nauczyciela jest niemal oczywiste, że praca nad zadaniem ma prowadzić do rozwijania wielu rodzajów aktywności myślowych ucznia, które będą go przygotowywały do matematycznego podchodzenia do problemów teoretycznych.

Rys. 1 zawiera rozwiązanie podane przez Kubę:

Podana przez autora wskazówka w żaden sposób nie pomogła chłopcu w odczytaniu celu zadania, lecz wręcz przeciwnie -spowodowała, że stał się on dla niego jeszcze bardziej mglisty. Kuba rozpatrywał zadanie w kontekście w jakim ono występowało. Rozdział podręcznika, w którym zostało zadanie umieszczone, wcześniejsze zadania dotyczące działań na wektorach, gdy dane były ich współrzędne, wyznaczanie długości wektorów, itd. oraz temat lekcji „wektory w układzie współrzędnych“, spowodowały,



że uczeń uznał, iż konieczne jest umieszczenie wektorów w układzie współrzędnych. Nie rozumiejąc celu i sensu wskazówki "odczytał" ją nie jako pomoc od autora w odnalezieniu drogi dowodu, lecz jako kolejne polecenie. W trakcie prezentacji innego rozwiązania zadania, a tym samym i innego dowodu, chłopiec stwierdził, że „tak dodaje się wektory na fizyce, a na matematyce należy je umieścić w układzie współrzędnych".

Przykład 2.

Uczniowie II klasy liceum, na lekcji dotyczącej średniej arytmetycznej, modalnej i mediany, najpierw rozwiązywali zadania typu:

„Oblicz średnią arytmetyczną, modę i medianę danych liczb: 2,3,4,4,4,4,4,6,8,10,10.",

a następnie takie, w których co prawda, sytuacja dotyczyła świata realnego, ale z punktu praktycznych zastosowań była bezsensowna, polecenie zaś brzmiało „wyznacz arytmetyczną, modę i medianę". Oto przykład takiego zadania:

„W przedsiębiorstwie drogowym TRAKT zbadano pracowników, ze względu na ilość spóźnień do pracy. Wyniki zwiera tabela

Ilość spóźnień	0	1	2	3	4	5
Liczba pracowników	4	2	6	10	2	3

a) Wyznacz średnią arytmetyczną.

b) Podaj dominantę wyników.

c) Podaj medianę wyników".

W każdym przypadku rozwiązanie zadania ograniczało się do wyznaczenia odpowiednich parametrów. Należy zauważyć, że chociaż fabuła zadania drugiego dotyczyła zagadnienia pochodzącego ze świata realnego, to jego celem było wykonanie obliczeń rachunkowych. Uczniowie liczyli konkretne, jawnie wskazane parametry, których potem nie interpretowali, ani też nie zastanawiali się nad ich sensem.

Następnie zaproponowano uczniom następujące zadanie:

„Zbadano wzrost kandydatów do reprezentacji szkoły w rozgrywkach sportowych, a wyniki zawarto w tabeli:

Wzrost w cm	176	178	179	180	182	183	185	189	190
Liczba kandydatów	3	5	9	1	10	1	1	4	1

Wyznacz średnią arytmetyczną, dominantę i medianę wzrostu kandydatów. Wyniki zinterpretuj. Która z miar, twoim zdaniem, najlepiej charakteryzuje ten zestaw wyników?"

Kasia w wyniku obliczeń i pomyłki otrzymała: $\bar{x} = 704,78$, D=182, Me=180. Poproszona o interpretację powiedziała: „Średnia wzrostu w badanej grupie wyniosła 704,78 cm, dominanta 182 cm, mediana 180 cm". Na ostatnie pytanie odpowiedziała, że „najlepszą miarą jest dominanta, bo 182 „stoi" na środku".

Należy zauważyć, że dla uczennicy najistotniejsze były dane liczbowe zamieszczone w tabelce i parametry, które należało wyznaczyć, a także wyniki końcowe (rozumiane jako konkretne liczby). Nie ważne były natomiast obiekty charakteryzowane przez te liczby. Kasia dążyła do jak najszybszego uzyskania wyniku będącego konkretną liczbą. Była przekonana, że najważniejszy jest rachunek; nie potrafiła ocenić poprawności uzyskanych wyników, ani z punktu ich realnego odniesienia, ani powołując się na odpowiednią teorię matematyczną i nie dążyła do takiej oceny. Należy zauważyć, że podręczniki i czasami lekcje zapełnione są zadaniami, w których do autentyczności danych liczbowych nie przywiązuje się wagi. Wielokrotnie życiowo są one bezsensowne. Uczniowie rozwiązując takie zadania, otrzymują informację, że najistotniejszy jest rachunek, a nie zastosowanie matematyki. I w takiej konwencji formułują odpowiedzi.

Gdy uczniowie nie rozumieją intencji nauczyciela i celu zadania, które nagle się zmieniają są zdezorientowani; poprzednio tak działali i było dobrze, teraz robią tak samo i jest źle.

3. Podsumowanie

Nie każdy uczeń posiada umiejętność określenia właściwego celu zadania matematycznego. Tego trzeba uczyć. Wydaje się istotne podejmowanie takich działań, które sprzyjałyby budowaniu w myśli ucznia struktury (układu relacji) sytuacji opisanej tekstem zadania. Gdy taka struktura nie powstanie, wtedy nie będzie on w stanie odczytać właściwego celu zadania, poprawnie ocenić wagi poszczególnych słów, a w konsekwencji samodzielnie rozwiązać zadania.

Pobieżna lektura tekstu lub jedynie spojrzenie na zadanie, pozwala na określenie wartości i przydatności pojedynczych słów lub całych wyrażeń występujących w zadaniu dla realizacji celu zadania. To powoduje, że uczniowie przypisują im różną wagę. Dla tych, dla których najistotniejszy jest rachunek, opis sytuacji jest zbędny, nieistotny. Również polecenia typu „zinterpretuj" nie są ważne, nie są przeznaczone do zapamiętania i wykonania, co skutkuje całkowitym ich pominięciem. Z reguły ci uczniowie inaczej określają cel zadania niż nauczyciel. Rozbieżności w postrzeganiu tego celu powodują, że osoby uczące się nie dostrzegają i nie rozumieją powodów negatywnej lub niższej niż oczekiwana oceny zadania (przecież otrzymali wynik). To rodzi zniechęcenie, brak zainteresowania zadaniami o podobnej strukturze i blokady typu emocjonalnego, co w dłuższym okresie czasu skutkuje przeniesieniem negatywnych uczuć na przedmiot nauczania.

„Być uczniem" to być uczniem aktywnym; tego często oczekuje nauczyciel. Nie widząc celu i nie rozumiejąc intencji nauczyciela uczniowie rozwiązują zadania tak, aby jak najszybciej otrzymać wynik końcowy. Wydaje się zatem istotne, aby niekiedy pytać uczniów jak sądzą jaki jest cel tego zadania, jak sądzą dlaczego nauczyciel polecił rozwiązać akurat to zadanie, a także proponować uczniom takie zadania, które wymagają jedynie interpretacji wyników, odniesienia do realnej rzeczywistości lub porównania kilku rozwiązań.

Literatura

[1] Czajkowska M.: 2005, *Wartości motywacyjne zadań matematycznych*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce

[2] Czajkowska M., 2003, *Mathematical Task as a Linguistic Message (students' interpretation of the author's intention)*, Proceedings edited by Jarmila Novotná, International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT'03), Praga, s.51-56.

[3] Jakobson R., 1989, *W poszukiwaniu istoty języka*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa.

Adresa autora:
Monika Czajkowska, Dr
Akademia Świętokrzyska
Instytut Matematyki
ul. Świętokrzyska 15
25-406 Kielce
Poland
e-mail: monika.czajkowska@pu.kielce.pl

O kvalite vzdelávacieho softvéru

Radovan Engel

Abstract. *The paper deals with the category of quality of learning software in mathematics education. It also introduces especially one common way to measure the quality of such a software using catalogs of criteria. Some important criteria of quality are described too.*

Úvod

Moderné trendy vo vzdelávaní, ktoré odrážajú globálny rozmach informačných a komunikačných technológií (IKT) a nachádzajú významné uplatnenie pri celoživotnom vzdelávaní zamestnancov mnohých firiem, v štátnej správe a aj vo vysokoškolskej sfére sú v súčasnosti známe pod názvom e-learning. Záujem o e-learning neustále rastie a prejavuje sa aj na školách nižších stupňov. Základné predpoklady pre integrovanie e-learningu do vzdelávacieho procesu na základných a stredných školách sú v súčasnosti splnené. Veď kvalitnou výpočtovou technikou vybavené a na internet pripojené počítačové miestnosti už nie sú zvláštnosťou ani na menších školách. Uvedomujúc si možnosti, ktoré môžu IKT priniesť, sa zvažuje ich zmysluplné a účinné využívanie na plnenie vyučovacích cieľov jednotlivých predmetov, samozrejme aj matematiky. V súvislosti s takýmto vyučovaním matematiky sa otvára celý rad súvisiacich problémov a otázok. Významná je predovšetkým otázka kvality, ktorá má rozhodujúci podiel na využití potenciálu IKT. Problematika kvality vzdelávacieho softvéru je rozsiahla a preto sa budeme venovať len niektorým jej aspektom.

Vzdelávací softvér

Ako prvé je potrebné vymedziť práve pojem vzdelávací softvér. V literatúre sa možno stretnúť s rôznymi definíciami tohto pojmu. Baumgartner [1] charakterizuje vzdelávací softvér ako program, ktorý bol vyvinutý a naprogramovaný špeciálne pre jasne určené vzdelávacie účely. V takomto programe pritom vidí realizáciu určitej didaktickej koncepcie, ktorej predmetom je konkrétny vzdelávací obsah a je orientovaná na nejakú viac alebo menej definovanú cieľovú skupinu. Podľa neho je vo vzdelávacom softvéri hlavný účel jeho použitia rozhodujúcim spôsobom autormi dopredu určený. Môže ísť o učenie sa novým poznatkom priamym sprostredkovaním informácií, formou simulácie, prípadne hry alebo napríklad o precvičovanie vedomostí.

V súčasnosti existuje mnoho aplikácií, ktoré možno využiť pri vyučovaní matematiky. Od jednoduchých programov zameraných len na malé elementy učiva a prístupných zväčša zadarmo, až po komerčné softvérové aplikácie, ktoré pokrývajú celé tematické celky. Vývoju matematických výučbových programov sa od 90. rokov minulého storočia venujeme aj na Oddelení didaktiky matematiky Ústavu matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ. V minulosti sa na tvorbu výučbových programov využíval autorský systém LinkWay od firmy IBM, v súčasnosti je to autorský systém Toolbook Instructor od firmy SumTotal Systems. Na tvorbe spomenutých komerčných vzdelávacích programov sa podieľajú zvyčajne celé tímy odborníkov a sú distribuované najčastejšie formou optických médií. Medzi profesionálne počítačové firmy, ktoré sa v Čechách a na Slovensku venujú produkcii takéhoto matematického vzdelávacieho softvéru patria napríklad Langmaster, Terasoft, Matik, ... V krajinách západnej Európy je trh v oblasti vzdelávacieho softvéru ešte rozvinutejší a ponuka produktov je omnoho bohatšia.

Pokiaľ ide o využívanie vzdelávacieho softvéru pri vyučovaní matematiky, je potrebné si uvedomiť, že je závislé od mnohých faktorov. Predovšetkým je to didaktická koncepcia vyučujúceho, jeho skúsenosti s využívaním zvoleného vzdelávacieho softvéru a spôsob ako program vo vyučovaní nasadí. Ďalej je to celková atmosféra triedy, ale aj jej momentálna klíma, skúsenosti jednotlivých žiakov s učením sa, a tiež s počítačom podporovaným vyučovaním a v neposlednom rade aj samotný obsah vzdelávania, jeho náročnosť a špecifiká. Na efektívnosť používaného programu pri dosahovaní vzdelávacích cieľov teda významne vplývajú zvláštnosti učiteľa, žiakov aj učiva. Vzdelávací softvér je síce sofistikovaným učebným prostriedkom, nepôsobí napriek tomu nezávisle na učebných situáciách.

V prípade vzdelávacieho softvéru sa však často stáva, že kvantita ide na úkor kvality. Navyše vzdelávací softvér vytvorený špeciálne pre vyučovanie matematiky a prispôsobený učebným osnovám a učebným prostriedkom je zriedkavý. To len komplikuje situáciu učiteľov matematiky snažiacich sa o vhodné začlenenie takéhoto vzdelávacieho softvéru do vyučovacieho procesu a často býva dôvodom ich negatívneho prístupu k využívaniu vzdelávacích programov na hodinách matematiky. Z toho dôvodu by medzi kompetencie učiteľov matematiky okrem schopnosti efektívne využívať nejaký vzdelávací softvér mali patriť aj schopnosti kriticky zhodnotiť program určený na podporu vyučovania matematiky a vybrať si z ponuky dostupných aplikácii vhodný program s ohľadom na dosiahnutie vyučovacích cieľov.

Recenzia ako metóda hodnotenia vzdelávacieho softvéru

Existujú viaceré spôsoby hodnotenia vzdelávacieho softvéru. Bežnou metódou sú recenzie, v ktorých recenzent, zvyčajne odborník v danej oblasti, na základe svojich skúseností s jeho používaním softvér predstavuje, opisuje a hodnotí. Zvyčajne poukazuje na kladné stránky, ale aj nedostatky programu, navrhuje perspektívne možnosti jeho vylepšenia, porovnáva program s podobnými produktmi na trhu a niekedy aj dáva rady a námety na využívanie hodnotenej aplikácie vo vyučovaní. Charakteristickým znakom recenzií je určitá miera subjektivity a preto sa od nich neočakáva úplný opis obsahu a možností daného softvéru, ani „objektívne“ posúdenie. Úloha učiteľa vyberajúceho si vhodný vzdelávací softvér na základe recenzie potom spočíva v spracovaní subjektívnych skúseností a názorov autora recenzie a posúdení dôležitosti vymenovaných pozitív a negatív. Treba si tiež uvedomiť, že nie všetky elementy, ktoré recenzent uvádza ako nedostatky programu, bude rovnako vnímať aj učiteľ. Napríklad chýbajúce ozvučenie aplikácie a nahovorenie textov môže recenzent považovať za vážny nedostatok. Učiteľ, ktorý plánuje využívať softvér v počítačovej miestnosti s reproduktormi to však môže brať dokonca ako určitú výhodu. Veď zvuky programu by počas vyučovania mohli pôsobiť rušivo a bolo by ich aj tak potrebné vypnúť.

Hodnotenie vzdelávacieho softvéru pomocou zoznamu kritérií

Ďalšou možnosťou na hodnotenie vzdelávacieho softvéru je použitie kritérií kvality. Najpoužívanejším nástrojom hodnotenia založeným na týchto kritériách sú tzv. zoznamy kritérií. Ich využívanie je pritom pevne viazané na nejakú typológiu vzdelávacieho softvéru. Iný zoznam kritérií si totiž vyžaduje program sprístupňujúci nové poznatky formou simulácie a iný aplikácia na precvičovanie algoritmických úloh. Čím je príslušná typológia prepracovanejšia, tým účinnejšie je potom použitie zoznamu kritérií. Pri vyhodnocovaní výučbového softvéru takýmto spôsobom možno rozlíšiť štyri fázy. V prvej fáze ide o výber a sformulovanie kritérií kvality. V druhom kroku sa tieto kritériá operacionalizujú formuláciou výkonových štandardov. Konkrétne vyhodnocovanie predstavuje tretiu fázu. Zhrnutie výsledkov hodnotenia je obsahom posledného štvrtého kroku.

Kritéria kvality vyjadrujú, ktoré prvky považujú ich tvorcovia z hľadiska kvality produktu za najdôležitejšie a určitým spôsobom tak dávajú odpoveď na otázku, čo je podľa nich kvalitný vzdelávací softvér. Na Oddelení didaktiky matematiky našej fakulty zastávame názor, že obsah vzdelávacieho programu je najvýznamnejším kritériom kvality. Je preto aj prvou položkou medzi kritériami kvality, ktoré na našom pracovisku považujeme za kľúčové:

1. **Obsah a jeho didakticko-metodické spracovanie** – Obsah vzdelávacieho softvéru by mal vychádzať z platných učebných osnov príslušných tematických celkov matematického učiva. Ako bolo spomínané vyššie, je takáto požiadavka na vzdelávacie programy splnená zriedkavo. Spracovaný vzdelávací obsah by mal byť výsledkom dôslednej logicko-didaktickej analýzy daného učiva, ktorá by mala zohľadňovať vek cieľovej skupiny, psychologické požiadavky aj špecifiká vzdelávacieho prostredia v programe. Vzdelávací softvér by mal byť navyše doplnený dokumentáciou, ktorá by sa okrem technických záležitostí venovala aj metodike jeho využívania. Užitočné by boli tipy ako vhodne nasadiť aplikáciu vo výučbe, prípadne aj rozpracované návrhy vyučovacích hodín.

2. **Interaktivita** – Matematika sa v porovnaní s ostatnými vyučovacími predmetmi vyznačuje vyššou mierou abstraktnosti. Mnohé pojmy, s ktorými sa žiaci stretávajú, sú často náročné na predstavivosť a vyžadujú od nich veľkú dávku abstrakcie. To môže spôsobovať problémy menším deťom a slabším žiakom. Softvér by mal preto vytvárať prostredie, ktoré osvojovaný pojem nielen vhodne vizualizuje, ale umožňuje aj experimentovanie. Žiaci by mali mať možnosť aktívne skúmať vlastnosti daného matematického pojmu a jeho vzťahy so súvisiacimi pojmami.

3. **Pomoc a spätná väzba** – Počas procesu učenia sa dochádza k rôznym situáciám, v ktorých žiak potrebuje pomoc. Potrebu pomoci si najčastejšie uvedomí a zvyčajne ju aj vyhľadá vtedy, keď dostane spätno-väzbovú informáciu o svojej neúspešnosti. Pomoc mu môže poskytnúť učiteľ, rodič, spolužiak, ale aj vzdelávací program. V prípade softvéru je dôležité, aby išlo o cielenú a operatívnu pomoc na základe rozhodnutia učiaceho sa. V prípade matematického vzdelávacieho programu sa nám ako vhodná javí odstupňovaná pomoc, ktorá žiakovi hneď neposkytne hotový algoritmus riešenia príslušnej úlohy, ale sa ho primerane formulovanými tipmi snaží najprv priviesť k samostatnému vyriešeniu problému. Aj napriek pokusom o implementáciu prvkov umelej inteligencie do niektorých vzdelávacích aplikácií nedokáže poskytnúť počítač takú úroveň pomoci ako skúsený pedagóg. Zastávame preto názor, že by vzdelávací program mal v prípade vyčerpania všetkých možností pomoci odporučiť učiacemu sa, aby sa obrátil na svojho učiteľa.

4. **Ovládanie a navigácia** – Softvér by mal byť ovládateľný jednoducho a intuitívne. Snahou je minimalizovať čas potrebný na zvládnutie ovládania programu. Navigácia má umožňovať, že užívateľ v každom okamihu vie, kde sa

nachádza a má tiež pocit, že sa môže aplikáciou pohybovať podľa svojich predstáv.

5. **Vizuálne spracovanie** – Použitie grafických prvkov a multimédií má vo vzdelávacom softvéri plniť skôr pomocnú funkciu k obsahu. Multimédiá sú účinné pri udržiavaní pozornosti žiakov, napríklad prostredníctvom animovania stereotypných, už dostatočne osvojených algoritmov, akými môže byť úprava výrazov, či riešenie rovníc.

Pri formulovaní výkonových štandardov možno použiť nasledujúci model pozostávajúci z troch stupňov požiadaviek:

- **Prvá úroveň (necessitata)** slúži na určenie podmienok, ktoré musia byť nevyhnutne splnené. Ak nejaké kritérium z tejto úrovne nie je splnené, tak to má nevyhnutne za následok vylúčenie produktu, prípadne sa ohodnotí ako nevyhovujúci. Takouto „KO“ charakteristikou sú napríklad hardvérové nároky vzdelávacieho softvéru.
- **Druhá úroveň (desiderata)** popisuje funkcie a vlastnosti programu, ktoré idú nad absolútne minimum. Ich neprítomnosť však nevedie k vylúčeniu takéhoto produktu. Ide o akési výhody. Príkladom takejto výhody môže byť napríklad existencia metodických pokynov k vzdelávaciemu softvéru.
- **Tretia úroveň (ideals)** súvisí s ideálnymi vlastnosťami vzdelávacieho softvéru. Pritom sa jedná o sotva dosiahnuteľné alebo realizovateľné cieľové predstavy, ktoré slúžia hlavne ako ukazovatele pri vylepšovaní aplikácie. Príkladom takejto cieľovej predstavy je program s vysoko citlivou umelou inteligenciou, ktorá by mu umožňovala poskytovať žiakovi pomoc porovnateľnú s pomocou zbehlého učiteľa.

Pri samotnom vyhodnocovaní vzdelávacieho softvéru sa pripravené výkonové štandardy meraním a porovnávaním aplikujú na výučbový softvér. Metódy využiteľné pri tomto procese možno rozdeliť na relatívne a absolútne:

- **Relatívne metódy vyhodnocovania vzdelávacieho softvéru** – Charakteristickým znakom týchto metód je, že sa viaceré produkty na základe kategórií kvality porovnávajú navzájom. Zaradiť tu možno predovšetkým:
  - **Usporiadanie (Ranking)**. Pri tejto metóde sa jednotlivé hodnotené aplikácie usporiadajú do postupnosti. Na prvom mieste sa nachádza produkt, ktorý najviac zodpovedá stanovenému kritériu kvality a na ďalších miestach postupne programy menej vyhovujúce. Pri použití tejto metódy však nemáme žiadnu informáciu o tom, aké rozdiely sú medzi jednotlivými produktmi. Vzdelávacie programy môžeme napríklad na základe súladu ich obsahu s príslušnými matematickými osnovami zoradiť od aplikácie, ktorá najviac odpovedá osnovám po takú, ktorá im odpovedá najmenej.
  - **Rozdelenie (Apportioning)**. Jednotlivým programom sú pridelené rôzne podiely z celkového množstva zdrojov podľa toho, ako odpovedajú kritériám kvality. Výsledok hodnotenia možno znázorniť koláčovým grafom, ktorého najväčšiu časť tvorí najvyššie ohodnotený produkt, a ktorý, na rozdiel od predchádzajúcej metódy znázorňuje aj rozdiely, ktoré sú medzi jednotlivými produktmi.

- **Absolútne metódy vyhodnocovania vzdelávacieho softvéru** – V prípade týchto metód sa vzdelávací softvér posudzuje len na základe kritérií kvality a výkonových štandardov nehľadiac na iné hodnotené produkty. Patrí tu hlavne:
  - **Odstupňovanie (Grading)**. Pri použití tejto metódy sa hodnotené programy zaraďujú do určitých kategórií na základe normy, ktorá bola pripravená vopred zohľadnením nejakého kritéria kvality. Zoberme si napríklad kritérium kvality súvisiace s poskytovaním pomoci pri riešení matematických úloh. Najjednoduchšia s tým súvisiaca norma delí vzdelávacie programy len do dvoch kategórií. Na programy, ktoré učiacemu sa neposkytujú žiadnu pomoc a programy, ktoré pomoc poskytujú. Použitím citlivejšej normy možno samozrejme dosiahnuť delenie výučbových programov do väčšieho množstva kategórií.
  - **Bodovanie (Scoring)**. Už z názvu je zrejmé, že posudzovanému softvéru sa vychádzajúc z kritérií kvality priraďuje určité množstvo bodov. Uvažujme interaktivitu ako kritérium kvality a bodovú škálu od 0 do 10. Minimom bodov ohodnotíme program, ktorý neobsahuje žiadne prvky aktívnej práce s matematickými pojmami, ani experimentovanie. Naopak program umožňujúci priamu manipuláciu s matematickými pojmami, zmenu a objavovanie ich vlastností dostane plný počet bodov.

Každá zo spomínaných metód má svoje výhody aj nevýhody. S cieľom zvýšiť účinnosť hodnotenia je ich však možné medzi sebou kombinovať.

Zhrnutím hodnotenia čiastkových elementov vzdelávacieho softvéru dostaneme súhrnné zhodnotenie kvality produktu. Napríklad v prípade, že ako metóda vyhodnocovania bolo použité bodovanie, stačí spočítať body za jednotlivé kritériá kvality pri programe. Celkový súčet vyjadruje kvalitu aplikácie.

Zoznamy kritérií predstavujú obľúbený nástroj hodnotenia vzdelávacieho softvéru. Za ich hlavné **výhody** sa považujú nasledujúce skutočnosti:

- Na rozdiel od recenzií nemusia hodnotenie pomocou zoznamov kritérií uskutočňovať výlučne experti v oblasti vzdelávacieho softvéru, ale aj učitelia.
- Takéto hodnotenie sa môže realizovať nezávisle na učebnom procese.
- Pretože sa proces hodnotenia uskutočňuje postupným spracovávaním kritérií, javí sa ako objektívny a validný.

Používanie zoznamov kritérií pri posudzovaní vzdelávacieho softvéru sa však aj kritizuje. Ako dôvody kritiky sa uvádzajú najmä tieto **nevýhody**:

- Pri hodnotení pomocou zoznamov kritérií sa hovorí o učení, aj keď sa vlastne jedná len o dohady týkajúce sa procesu učenia.
- Úspech vzdelávacieho softvéru vo vyučovacom procese závisí od množstva kritérií, nie všetky sú pritom zastúpené v používanom zozname kritérií. Percentuálny prínos konkrétneho kritéria zo zoznamu k učebnému úspechu je preto veľmi malý.
- Používanie zoznamov kritérií často vedie k nereálnym očakávaniam. Môže vzniknúť dojem, že takýmto spôsobom dobre ohodnotený softvér garantuje učebný úspech a že jeho empirické preskúšanie už nie je potrebné.

Zoznamy kritérií sú vhodné hlavne na diferencované opisovanie jednotlivých prvkov vzdelávacieho softvéru a môžu byť užitočné pri rozhodovaní sa o praktickom nasadení softvéru vo vyučovaní.

Záver

Kvalitné vzdelávacie programy môžu významným spôsobom prispieť k zefektívneniu vyučovania matematiky. Z pohľadu učiteľov matematiky preto existuje potreba zorientovať sa v ponuke vzdelávacieho softvéru. Sofistikované spôsoby hodnotenia takýchto aplikácií môžu byť v tomto smere značne nápomocné.

Literatúra

[1] BAUMGARTNER, P.: Information *und Lernen mit Multimedia und Internet, Lehrbuch für Studium und Praxis.* Vydavateľstvo Beltz, Weinheim 2002.

[2] BIFFI, C.: *Evaluation von Bildungssoftware im Spannungsfeld von Objektivität und praktischer Anwendung.* [online]. Publikované 8.5.2002. Dostupné z <www.medienpaed.com/02-1/biffi1.pdf >.

[3] BIFFI, C.: *Tücken und Kriterien der Beurteilung von Lernsoftware.* [online]. Publikované December. 2003. Dostupné z <www.medien-lab.ch/dok/biffi_Lernsoftware_ia.pdf>.

[4] LEHOTSKÁ, D.: *Počítačové prostredia pre objavovanie matematiky.* Sborník Národní konference o počítačích ve škole, Liberec 2005.

[5] LUKÁČ, S. – KRAVEC, R.: *Výučbový program z elementárnej teórie čísel.* MIF č. 20, Metodické centrum Prešov 2000.

Adresa autora:
RNDr. Radovan Engel
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: radovan.engel@upjs.sk

Miesto matematiky v Montessori škole

Marcela Florková

Abstract. *Math and geometry at Montessori schools are presented and treated in the same way as art, building with blocks, music, gardening, and all other subjects. Children naturally have an interest in all aspects of mathematics, weight, order, systems, series, time, quantities and symbols, and so forth. We can serve the development of the mathematical mind by feeding this interest, giving sensorial experiences first, and only then their representatives on paper.*

Úvod

S vyučovacím systémom Márie Montessori som sa prvý krát stretla pri učiteľskom výcviku na VŠ ako s alternatívnym vyučovacím spôsobom. Mala som ambície navštíviť Montessori ZŠ v Bratislave, písala som vtedy diplomovú prácu ohľadom humanizácie hodnotenia a mala som dohodnuté interview, ktoré sme kvôli chorobe museli odložiť a tu moja skúsenosť skončila. Znova som sa začala zaujímať o typ Montessoriovskej školy popri štúdiu materiálov vo svojej dizertačnej práci ohľadom vyučovaniaeometrie na 1. stupni, kde som sa často stretala s menom niekdajšieho učiteľa Montessori školy – Pierra Van Hiela.[1] Zvedavosť a trocha aj šťastie ma doviedlo až do „Old Colony Montessori School“ v Hingham, Massachussets, v USA, kde tento typ školy má oveľa bohatšiu tradíciu ako u nás.

Nechcem sa rozpisovať o metódach, ktoré škola M. Montessori používa vo všeobecnosti, ani o ich kladoch či záporoch, centrom mojej pozornosti vo svojom príspevku bude matematika a predovšetkým geometria, ktorej sa tu venuje omnoho väčšia pozornosť ako u nás.

Filozofia Márie Montessori

Keby ľudia používali reč iba na vyjadrenie myšlienok, keby sa ich múdrosť dala vyjadriť iba mysľou, nezostali by nijaké stopy po predchádzajúcich generáciách. Civilizávia môže existovať, len keď ruka a myseľ idú „ruka v ruke“. Ruka je tým úžasným orgánom, ktorý sme ako dar zdedili.

—Dr. Maria Montessori

Matematické a geometrické symboly na papieri, podľa filozofie Márie Montessori, dávajú pre mladších školských žiakov zmysel, keď čerpajú zo zmyslovej skúsenosti. Deti majú prirodzený záujem o matematiku, hmotnosť, poradie, systémy, čas, množstvo, symboly a pod. Rozvíjať matematické myslenia takto môžeme, len keď nasýtime detskú zvedavosť a záujem, v prvom rade poskytnutím zmyslovej skúsenosti, a až potom ukážkou jej abstraktných predstaviteľov na papieri. K aktivitám, ktoré podporujú prirodzenú lásku k matematike patria: počítanie, triedenie, či klasifikácia rôznych druhov predmetov podľa farby, veľkosti, meranie hmotnosti, vykonávanie domácich prác ako napríklad umývanie riadu, ktoré má logický a následný postup.

[1] Pierre M. Van Hiele, celoživotný rezident Holandska, je známy ako Montessori pedagóg a autor série učebných osnov, ktoré sa vyznačujú bohatým zoskúpením geometrických aktivít. Taktiež je vo svete preslávený svojimi úrovňami myslenia v súvislosti s geometriou.

Materiály k vyučovaniu matematiky a geometrie nemusia byť finančne náročné; môžu byť vyrobené z kartóna, koráliek, stavebnicových kociek, fazuliek, hocičoho, čo pomôže dieťaťu pochopiť matematický koncept pomocou zmyslov. V skutočnosti, čím bežnejšie predmety využívame, tým viac sa matematika stane skutočnosťou detského reálneho, praktického a každodenného života.

Návšteva v Montessori škole

Priamo na návšteve Montessori základnej školy to vyzeralo nad moje očakávania. V triede 21 detí od veku 3 do 6 som zakúsila ako sa teória M. Montessori spája s realizáciou.

Učiteľ od dieťaťa nič nevyžaduje, ale mu to ponúka, prezentuje za pomoci manipulačného materiálu, len jednému dieťaťu v danom čase a to buď učiteľom, jeho asistentom, alebo dobrovoľníkom rodičom, ktorý dostal inštrukcie od zaškoleného učiteľa, prípadne učiteľ poverí žiaka, ktorý už danému učivu rozumie.

Deti si volia, čím sa na hodine budú zaoberať a robia to dovtedy, kým ich to prestane zaujímať alebo kým nie sú pripravené postúpiť na ďalšiu úroveň. Samozrejme nie každé dieťa sa dostane ku všetkým pomôckam, ktoré sú k dispozícii v tomto ročníku, ale najdôležitejšie je, že všetky oblasti geometrie a matematiky, ktoré chceme dieťaťu sprístupniť sú prítomné v okolí, v ktorom dieťa pracuje. Dieťaťu sa predstaví nová aktivita len vtedy, keď je na to pripravené a dá sa mu možnosť pokračovať ďalej alebo skončiť s danou aktivitou. V rovnakom čase je obklopené ďalšími deťmi, ktoré sú zaujaté objavovaním matematických súvislostí.

Výsledkom tejto formy výuky je, že deti už v tomto veku dokážu vyjadrovať množstvo a symboly čísel v tisíckach. Učia sa ščítavať, odčítavať, násobiť a deliť v desatinnej sústave a so zlomkami súčasne. V geometrii, niektoré deti už v troch rokoch vedia za pomoci dotyku rozlíšiť medzi ovaloidom, elipsoidom, štvorbokým ihlanom, trojbokým ihlanom, trojbokým hranolom, atď, vedia ich aj pomenovať. Učiteľ si do pripravených hodnotiacich tabuliek systematicky zaznačuje dosiahnutú úroveň každého žiaka.

Ponúkam pár nápadov z návštevy, ktoré si učiteľ môže sám vyrobiť:

Látkové modely rovinných útvarov sú štvorce vystrihnuté z jednofarebenj látky, na nich je šijacím strojom viditeľnou niťou prešitý steh a to buď po uhlopriečkach (rozdeľuje látkový štvorec na štyri trojuholníky) alebo inak, napríklad, aby rozdeľoval látkový štvorec na štyri malé štvorce, alebo na polovicu, čím vzniknú dva obdĺžniky, a ešte na polovicu, čím vzniknú štyri obdĺžniky. Najťažšia úloha pre Alex bol štvorec rozdelený na 16 štvorcov. Deti potom skladajú látkový štovrec podľa stehu a pomenúvajú nové útvary, ktoré im vzniknú.

Číselné sústavy na násobilku sú koráliky (môžu byť fazuľky a pod.) zoskúpené po jednom, dvoch, troch, štyroch, atď, tak aby sa mohli napájať na seba a boli farebne rozlíšené. Predtým ako sa žiakom predstaví pojem násobilka, rátajú po skupinách, napríklad po päťkách 5, 10, 15, atď.

Záver

Geometriu ako aj matematiku si môžu žiaci obľúbiť natoľko ako hodiny hudby, výtvarnej výchovy, prácu v záhrade ako aj ďalšie predmety. Učebná látka môže byť dieťaťu prezentovavná rovnako pútavo ako predmety umenia, môže vychádzať z prirodzeného záujmu dieťaťa ešte predtým, ako mu dáme na vyučovaní šancu vytvoriť si akýkoľvek negatívny postoj k tomuto predmetu. Dieťaťu potom nezostáva nič iné ako si skutočne zamilovať aj tak nepopulárny predmet alebo ak nič iné, aspoň sa vyhnúť strachu z matematiky, ktorý zažívajú mnohí z nás a priznajme si častokrát aj učitelia matematiky.

Literatúra

[1] Van Hiele, Pierre. M. *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play, Teaching Children Mathematics.* February 1999, Vol 5, No 6.

[2] Van Hiele, Pierre. M.: *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.* 1986 Academic Press, Inc. Orlando, Florida ISBN 0-12-714160-1.

[3] http://www.michaelolaf.net/1CW36math.html#INTRO 2006.

[4] http://www.keypress.com/DG/resources/TeachingWithDG.html 2006.

Adresa autora:
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta KU
Námestie A. Hlinku 56/1
034 01 Ružomberok
e-mail: florkova@fedu.ku.sk

O školních vzdělávacích programech v ČR

Eduard Fuchs

Abstract. *The paper contains several thoughts about another school reform which is in progress in the Czech Republic. The main instruments of this reform should be "School Educational Programs" which are supposed to be worked out by individual schools independently. The author participates in creating a material about the role of mathematics in these Educational Programs.*

Další reforma českého školství

České i slovenské školství od druhé světové války prošlo početnou řadou reforem a změn koncepcí organizačních i obsahových. Zkušenější učitelé o tom vědí své. Permanentně proklamovaná péče o zvyšování úrovně vzdělanosti u nás nabyla podoby vymýšlení zásadních změn, úprav učebních plánů, neustálého zavádění nových metod a učebních postupů. Školství samozřejmě musí reagovat na vývoj vědy, na celkový rozvoj společnosti i na zavádění nových technologií. Jen je nutno mít na paměti, že nově zaváděné koncepce budou záhy koncepcemi zastaralými a žádné změny neumenší rozhodující roli učitelů. Ti dobří budou učit dobře i při špatné reformě, jen jejich práce bude obtížnější, a některým vyučujícím žádná reforma ke zkvalitnění výuky nepomůže.

V České republice tak nyní probíhá další z těchto reforem. Jejím hlavním nástrojem mají být Školní vzdělávací programy, které si školy samostatně připraví na základě tzv. Rámcových vzdělávacích programů, které postupně pro jednotlivé typy škol Ministerstvo školství zveřejňuje. Typické pro zavádění reforem u nás je však to, že nikdo před spuštěním reformy fundovaně neodpoví na zásadní otázky, které by měly být předem vyjasněny. Tak například nebyla vůbec systémově zkoumána otázka, zda je správné přenést tak velkou volnost v tvorbě koncepce jednotlivých předmětů a ve formulaci výstupních požadavků na jednotlivé školy.

Zcela jistě existuje velká řada škol, které takto získané možnosti bezezbytku využijí a na základě četných diskusí mezi vyučujícími jednotlivých předmětů připraví program, který bude pro žáky znamenat zkvalitnění výuky nejen v jednotlivých předmětech, ale přinese i nezbytné a dosud obtížně prosazované posílení mezipředmětových vztahů.

Na druhé straně je nutno si uvědomit, že v ČR existuje více než 1 500 základních škol, které mají méně než 100 žáků. Na těchto školách často učí neaprobovaní učitelé, maturanti a přesluhující důchodci. Opravdu i na těchto školách budou probíhat kvalifikované diskuse mezi vyučujícími, které posléze vyústí ve formulaci školního programu, který bude znamenat kvalitativní zlepšení současného stavu? Opravdu jsou na všech základních i středních školách ředitelé, kteří mají pochopení pro rozvoj a adekvátní postavení všech předmětů ve výuce na dané škole?

Dochází tak k naprosto kuriózní situaci. Vysoké školy musí připravovat akreditační materiály rozepsané do nejmenších podrobností a po akreditaci se musí těchto dokumentů bezpodmínečně držet. Jakákoliv změna v hodinové dotaci například ve cvičení k některé přednášce je téměř neprůchodná s odůvodněním, že není v souladu s akreditovanými materiály. Fakulty jsou násilně tlačeny do bakalářsko-magisterské unifikace, která je pro některé obory, například pro studium učitelství, nevyhovující a mnohdy doslova absurdní. Zdůvodnění je fiktivní a nesmyslné: je motivováno představou některých byrokratů (a bohužel i řady akademických pracovníků), že je nutno v rámci Evropské unie umožnit nekomplikovaný přechod bakalářům z jedné univerzity na magisterské pokračování i jiného typu studia na univerzitě jiné. S jistou dávkou nadsázky: absolvent bakalářského studia dějin umění v Bruselu by měl mít možnost bez problémů pokračovat v magisterském studiu jaderné fyziky v Praze (a naopak).

A v této situaci se základním (a středním) školám dává pravomoc, díky níž se Pepíček, který se přestěhuje z Horní Lhoty do Lhoty Dolní - a takové stěhování je na rozdíl od výše zmíněného přechodu Praha-Brusel reálné a obvyklé - ocitne sice ve stejné třídě, leč se zcela jinými vyučovacími předměty a s odlišnou náplní.

Základní právní prostředí je však nutné respektovat a výuka musí probíhat v těch mantinelech, které jsou vymezeny. Za každé situace přesto zůstává dost prostoru pro aktivní vklad jednotlivců i institucí.

Již před lety, na 4. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v r. 1992, jsme se rozhodli vytvořit v rámci Jednoty českých matematiků a fyziků pro základní školy a pro všechny typy středních škol standardy pro výuku matematiky, které by formulovaly názor Jednoty na to, jaká by měla být výstupní úroveň žáků, a to bez ohledu na to, kdy, jak a zda vůbec k obdobnému názoru dospěje Ministerstvo školství. Toto rozhodnutí se ukázalo správným a prozřetelným. Standardy, které jsme vytvořili, sehrály důležitou roli a dodnes patří k dokumentům, které ani oficiální instituce nemohou obejít při formulaci základních programových dokumentů. Poznamenejme, že k podobnému stavu se nedopracovala česká pedagogická obec v žádném z dalších vyučovacích předmětů.

Proto jsme považovali za samozřejmé, že je nutno reagovat i na situaci, kterou lze jednoduše charakterizovat pojmem Rámcové vzdělávací programy. Bylo zajímavé a poučné sledovat reakce na to, když jsme na 9. setkání učitelů matematiky v Srní v r. 2004 ohlásili, že ve spolupráci s nakladatelstvím Prometheus chceme přichystat sérii materiálů na pomoc učitelům matematiky při tvorbě školních vzdělávacích programů. Na jedné straně následoval téměř jednotný souhlas učitelů, na straně druhé až překvapivě negativní reakce zástupců oficiálních institucí (především Výzkumného ústavu pedagogického), kteří v tom zřejmě viděli nepřiměřený zásah do svých kompetencí a jednostranných představ o tom, jak mají být školní vzdělávací programy tvořeny.

Přes tyto reakce jsme se rozhodli na oznámených materiálech pracovat. Podobně jako u standardů jsme se dohodli, že s přípravou materiálů nebudeme u jednotlivých typů škol čekat na zveřejnění definitivních a oficiálních Rámcových programů, neboť základní parametry probíhající reformy nastaveny byly a náš materiál, jakkoliv měl být zaměřen jako pomocný text pro přípravu školních programů, jsme nikdy nechápali jako ryze účelový bezduchý rozpis programu rámcového, ale chtěli jsme učitelům nabídnout své zkušenosti, návrhy, metodické postupy, argumenty pro vedení školy i širší veřejnost atd.

S potěšením můžeme konstatovat, že tyto materiály byly vypracovány a nakladatelství Prometheus je v průběhu roku 2006 vydalo (viz [2], [3], [4], [5]).

Jak již bylo uvedeno, tyto svazky nejsou jen pouhým přepisem Rámcového vzdělávacího programu do daného prostředí školy, ale snažili jsme se učitelům poskytnout materiál, který jim usnadní tvorbu těchto plánů, poskytne podklady a inspiraci pro interdisciplinární vztahy, pozornost jsme věnovali využití nejrůznějších pomůcek včetně počítačů ve výuce, snažili jsem se dát náměty pro tvorbu projektů atd. Součástí jednotlivých svazků je i obsáhlý seznam doporučené literatury, přehled zajímavých internetových adres a celostátních akcí, které se v České republice pro učitele matematiky konají apod.

Postavení matematiky

Jak již bylo naznačeno, jedním z cílů zmíněných materiálů bylo poskytnout učitelům dostatek argumentů pro zajištění odpovídajícího postavení matematiky ve školních vzdělávacích programech. Všichni dobře víme, jak módní je dnes vystupovat proti matematice a exaktním vědám vůbec. Velmi častá je argumentace typu *K čemu to budou děti potřebovat?* nebo *Náš František (Anička) bude lékařem (historikem, umělcem ...) a matematiku nebude nikdy potřebovat.*

Smyslem školy přece není jen předání jistého souhrnu vědomostí, ale především **výchova** a **vzdělávání** v tom nejširším slova smyslu. Jak již bylo mnohokrát řečeno, to nejpodstatnější, co si absolvent školy do života odnáší, je to, co mu zůstane, až zapomene všechny dílčí poznatky. Proto je diskuse na téma „K čemu to budu potřebovat?“ zcela pomýlená a kontraproduktivní. Kdybychom situaci hodnotili jen z tohoto hlediska, mohli bychom odbourat ze školy téměř vše. Většinu vědomostí nebudeme v praktickém životě potřebovat nikdy a navíc dopředu ani nevíme, co opravdu potřebovat budeme.

A lze rozumně argumentovat rodičům zmíněného Františka nebo Aničky? Samozřejmě. I když pomineme skutečnost, že není vůbec jisté, zda zmíněný František bude opravdu tím, co si rodiče desetiletého kloučka přejí, je jejich vidění světa naprosto deformované.

Proč by se měl matematiku učit třeba historik? Protože si neumím představit, jak může historik vysvětlit a pochopit „smysl“ toho, co se odehrálo například v 16. a 17. století, když nepochopí dosah toho, co znamenali např. Descartes, Newton nebo Leibniz. Vhled do jejich vidění světa je pro pochopení dějin důležitější než znalost chronologie panovníků tehdejší doby.

Opravdový znalec umění nemůže pochopit kompozici obrazu bez znalosti perspektivy a znalosti toho, co je to „zlatý řez“. (Abychom byli spravedliví: může význam zlatého řezu studentům vysvětlit matematik, který se nikdy nevnořil do kompozice obrazů a jejich zákonitostí?)

Potřebuje matematiku lékař? Pokud ne, tak proč k nám na fakultu chodí lékaři z fakultní nemocnice, kteří se marně snaží pochopit návod k moderním přístrojům, kde se na první straně hovoří o vlastnostech rychlé Fourierovy transformace?

Potřebujeme vůbec umět počítat, když přece v knihách (v kalkulačce, v počítači) jsou všechny vztahy uvedeny a jde jen o to děti naučit tyto prameny používat? Pokud ne, proč se při výuce cizího jazyka biflujeme cizí slovíčka? Vždyť přece ve slovníku (translátoru, na internetu,...) jsou všechna tato slova uvedena. Napadne někoho, že to je důvod k tomu, abychom se jazyky neučili?

Takových příkladů bychom mohli jmenovat nepřeberně.

Samozřejmě, že škola nemá učit zbytečnou faktografii, musí reagovat na moderní vědecké trendy, musí využívat a současně učit i děti využívat moderní technologie atd. Nic z toho však neumenšuje zásadní roli učitele.

Přímo esencí těch nejzrůdnějších názorů na vývoj našeho školství je nedávný článek O. Botlíka uveřejněný v Lidových novinách ([1]). Autor nejprve předestřel falešný obraz našeho současného školství. Citujme: *(Žáci) byli sice ve škole přítomni fyzicky, ale ne duchem. Proč by taky měli vnímat nešťastnici, která na tabuli přepisovala ze svých dvacet let starých příprav světová naleziště černého uhlí a ropy?* Do protikladu pak postavil ideál toho, jak by škola v blízké budoucnosti měla vypadat. Nejprve urazí většinu učitelů, fakult, autorů učebnic atd. (*Třeba osnovy a metody výuky jsou v podstatě stejné jako v polovině minulého století. Tahle setrvačnost vždy vyhovovala většině učitelů ve školách, mnoha jejich učitelům na pedagogických fakultách i autorům učebnic*). Nezapomene udělat standardní „mediální" omyly, když například nezaznamená, že většinu středoškolských učitelů nevychovaly pedagogické, ale filozofické, přírodovědecké, matematicko-fyzikální fakulty apod. a poté předvede svůj obraz ideálního školství, v němž se nebudou žáci nic muset „učit postaru".

Podle Botlíka lze počty odbourat: *Dnes už se žáci učí počítat z hlavy spíš kvůli tomu, že to rozvíjí jejich myšlení. Potřebovat to nebudou.*

Ostatně i učit psaní je zbytečné: *....Na počítači se malé děti naučí produkovat text rychleji: „výroba písmenek" se zásadně zjednoduší, chyby lze snadno opravit a vytištěný výsledek vypadá skvěle. Děti navíc nemusí do omrzení opakovat stejné znaky a slova jako v písance... Psát rukou se děti snadno naučí o rok či dva později.*

Tak jen nevím, proč například sportovci tak usilovně trénují. Podle Botlíkova modelu by se měl například budoucí skokan do výšky dívat na rozbory skoku na internetu, napsat o tom několik důmyslných esejů a pak, až bude potřeba, za nějaký ten rok světový rekord klidně skočí.

Podle Botlíka ovšem ani těch učitelů nebude příliš zapotřebí. „Rozumná" škola si za pár let nechá tak nanejvýš dva nebo tři, které ovšem bude moci pořádně zaplatit, další místa obsadí „učitelskými pomocníky" bez patřičného vzdělání: *Škole na ně rázem přibylo peněz, neboť ostatní zaměstnanci – učitelští pomocníci – mají jen maturitu. Mladí lidé nikdy neměli s novými technologiemi vážnější potíže – zato škola ano.*

Bylo by to úsměvné, kdyby to nebylo svým způsobem tragické. Lidé s takovými názory mají v dnešní společnosti, bohužel, vliv nikoliv zanedbatelný.

Závěr

Jsou věci, které občas mohou člověka deprimovat, současně však na každou takovou myšlenku existuje protilék. Tím jsou například akce jako je například toto naše setkání.

Vždycky je potěšující vidět a poslechnout si tolik učitelů základních a středních škol, kteří svou dennodenní činností vyvracejí slova všech Botlíků, postdomodernistů a dalších. Díky jim – a nejen jim – si snad naše školství i nadále podrží vysokou úroveň, kterou má.

Čím víc jsem měl možnost poznat úroveň školství v zahraničí, tím více si vážím toho našeho, českého i slovenského Tím samozřejmě ani v nejmenším nechci naznačit, že není co zlepšovat. Právě akce, které se nyní účastníme, je však dokladem toho, že se o to společně snažíme.

Literatura

[1] BOTLÍK, O.: Začnou čeští učitelé rozbíjet počítače? *Lidové noviny*, 29. 4. 2006.

[2] FUCHS, E. - BINTEROVÁ, H.: *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. SOU.* Prometheus, Praha 2006.

[3] FUCHS, E. - HOŠPESOVÁ, A. - LIŠKOVÁ, H. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. Základní školství.* Prometheus, Praha 2006.

[4] FUCHS, E. - HRUBÝ, D.: *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. Gymnázia*. Prometheus, Praha 2006..

[5] FUCHS, E. - PROCHÁZKA, F. - STANĚK, M.: *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. SOŠ,* Prometheus, Praha 2006.

Adresa autora:
Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Masarykova univerzita
Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno
Česká republika
e-mail: fuchs@math.muni.cz

Motivation and Investigation Strategies in Children Learning Mathematics

Len Frobisher and Jan Kopka

Abstract. *Mathematics and 'school mathematics' are very different 'beings'. The majority of children develop a negative attitude towards school mathematics. This paper looks at teachers' perceptions of mathematics and ways of developing investigative learning activities that motivate children. Examples of how such activities can be used in a classroom are described. Arising from the examples, investigative notions of mathematical processes and strategies are examined.*

What is this subject 'mathematics' that children learn?

You may have noticed that I have not asked 'What is mathematics? This is intentional as, after more years of teaching than I dare mention, I claim that mathematics and the 'school mathematics' that children learn are very different 'beings'. I do not intend to write a treatise about the nature of the two beings, but to make one potent observation:

School mathematics is viewed by the vast majority of children and students as both static and sterile, it is more of a beast than a being; but to those involved researching at the boundaries of mathematics the subject is dynamic and productive of new ideas and relationships.

Two questions arise as a consequence of this remark that are of interest to me and I hope to you also.

- Why do children and students have to suffer for at least 15 years before a selected few are 'permitted' to experience what researchers believe mathematics really is: a subject of beauty and excitement, in which thrills, satisfactions and frustrations abound?
- Is it possible to change the hardened antagonistic opinions about mathematics that so many students have?

In this paper I will offer some suggestions that may go some way to answering the two questions, but first what do teachers think mathematics is?

Teacher's perceptions of mathematics

At the present time there are large numbers of adults and children who take pride in saying, '*I hate maths. I was never any good at it.*' I believe that those who say this are referring to 'school mathematics', not the mathematics that we know so well. What do teachers think of mathematics? There are two extreme and opposing views, with many more teachers leaning toward the first category than the latter:

- Firstly, there are those who see mathematics as an established body of knowledge, skills and techniques set in stone and students **will** learn it despite their valiant and often successful efforts to resist.

I respectfully claim that those who hold this perception are misguided and, over the years of their training to become teachers, have been misled by restricting their experiences to a form of 'school mathematics' at a more advanced level. Such teachers use methods which were used by their teacher and their teachers before them, all with limited success; telling children what to do and how to do it and having them practice it until boredom sets in for both teacher and child. This vicious cycle has resulted in a lack of motivation and negative disposition of many, many children toward mathematics.

- Secondly, there are those who regard mathematics as a way of thinking and reasoning, providing them with opportunities to ignite the power of their students' minds and to excite and challenge their natural, innate intellectual curiosity.

  I claim that this category of teachers, although at present fewer in number, holds the key to bring about the change that is needed to improve the attitude of every child to mathematics and to motivate them to advance their learning in ways that they never thought were possible.

Are children naturally motivated to learn mathematics?

I begin with two personal beliefs:

- *Children are born to be mathematicians.*
- *Before schooling children are highly motivated and delight in thinking mathematically.*

One of the most important roles of any teacher of mathematics is to harness the motivation children bring with them in their desire to learn. We know that mathematics learning is most effective if children are mentally challenged sufficiently to arouse their interest and to actively participate in their learning without becoming so intimidated as to provoke evasion tactics.

Are there ways to motivate children?

When developing learning activities that contribute towards a child's retention and enhancement of their motivation to learn mathematics, teachers should examine issues personal to each child and also those related to the aims of the mathematics curriculum.

Issues personal to a child

- an activity should contain a level of **challenge** appropriate to each child;
- initially, every child should feel that they are likely to achieve a measure of **success**;
- the **context** in which an activity is set, environmental or mathematical, should relate to the maturity and ability of the children;
- every child should have an **understanding** of the activity so as to be able to make an immediate start without asking the teacher for help;
- opportunities need to be provided for children to work together in pairs or small groups to **share** their ideas and their learning;

- where appropriate, an activity should involve **manipulatives** and/or **diagrams** which demand use of a child's senses and which can be moved, turned and flipped, physically and mentally, and which require the use of a child's **observation** skills;
- at the end of an activity each child should have a feeling of **satisfaction** and **achievement**, if not elation.

Mathematics curriculum issues

There are also five important mathematics curriculum issues for a teacher to consider:

- to **target** the mathematical **content** of an activity at a particular aspect of the curriculum that you have or are about to teach: an investigation activity is not an 'add on' to the normal curriculum;
- to devise **open activities** that have more than one solution: why do children have to find answers that a teacher knows already?
- to design activities that may be **investigated** in different ways: children are given more decision making control ;
- to develop ways of showing **connections**, where possible, between apparently isolated data: mathematics begins to make sense as it is no longer viewed as a collection of unrelated concepts, knowledge and skills;
- to provide opportunities in an activity to develop, use and apply a variety of investigative **processes** and **strategies**: children 'do' mathematics as they think and reason.

I intend to delay discussion on processes and strategies until we have looked at a number of activities that attempt to match the issues listed above.

Examples of activities

I will consider four activities. Each activity is shown on an activity card or sheet. This is a way of presenting an activity to children who are able to work with little guidance or direction; it is does not suggest that it is the only way for children to investigate an activity. Most activities can begin with the whole class working together. I hope that the example activities show it is possible to present them to children and students of differing ages and abilities using in a variety of modes. As we discuss each activity, I would like you to keep referring to the issues for motivating children described previously to check if they are evident in the activity.

Activity 1: Addition pairs, suitable for 6 year olds upward who are practising addition of two whole numbers with answers 9 or less.

Each child has a set of 0 to 9 number cards,

$$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$$

figure 1

and also on card an open addition for testing pairs of numbers.

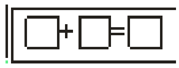
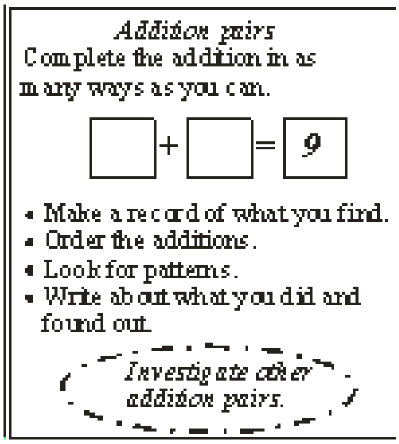


figure 2

I begin this activity writing the open addition on the board and writing 9 in the answer box. I ask for any two numbers that complete the addition. Children are only too ready to offer suggestions. I record, perhaps, two or three of them.



At this time the children are highly motivated and eager to offer other solutions. I then suggest that they work with a partner to **find as many pairs of numbers as they can** and use the recording sheet, figure 3, for those pairs they think are

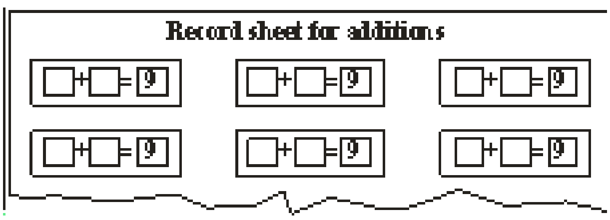


figure 3

correct solutions. (I would seldom ask children to **find all 10 additions** as children feel they have failed if they can only find say, 8 additions). Not all children resort to using number cards and the addition card. Those who are confident with addition may move directly to the recording sheet. It is at this time that you need to observe the thinking that takes place. For example, one pair may use pattern to write all the possible pairs. You can, if you wish, make the activity competitive and say, for example, '*Silva and Truda have already found four different pairs of numbers*'. This acts as an incentive for others to find more than four.

It highly likely that at least one pair will ask, for example, '*Is 7+2 the same as 2+7?*' If this occurs, I ask the class to stop for a moment and listen to the question. It is necessary to discuss this with everyone in order to arrive at an agreed 'definition' of what is meant by 'same' and 'different' when applied to these addition pairs. In this particular investigative activity I would steer children to deciding that 7+2 is different from 2+7. Your experience will alert you to a sensible definition of 'same' that is appropriate for each activity.

After a while you will sense that it is time to bring the class back together. As with many investigative activities, at stages in a lesson there is more than one way forward. Here we may fill the board with additions contributed by children, or as I like to do, ask the children to cut out each addition from their recording sheet and then put them in an order. I deliberately do not specify the criterion for the order, this being a decision left to children (see figure 4). Children quickly develop skills in ordering data as they observe patterns. Another purpose of ordering is to indicate where and what data is missing, if any. For example, if the ordered data ‘jumps’ from

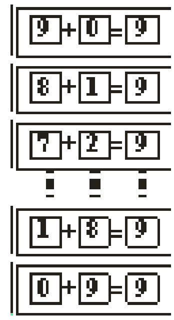


figure 4

7+2=9 to 5+4=9 children hastily write the missing addition, namely 6+3=9, and insert it in their order until they have a complete ordered set. At which time it is appropriate to talk about how many additions there are which have the answer 9. How many are there? What method of working it out for additions with the answer N would you use?

The 10 different additions with the answer 9 form a system which has a structure as illustrated in figure 4. Some mathematicians claim that mathematics is a collection of systems whose structures are studied by searching for patterns and relationships? Are they correct?

The activity ends by either children writing an account of what they did, the patterns they observed and the relationships discovered with explanations ‘why’, or in the case where children’s writing skills are not yet developed, talking together as a class about the patterns and relationships that they detected.

When working with older children the activity can be extended by asking, *‘What would happen if the answer to each addition was 8? Would the number of additions be the same, less or more? Predict how many.’* The natural extension is to investigate additions with the answer 7, 6, . . . , 2, 1, 0. Each set of additions for a given answer forms its own system, but are the systems connected in any way? This is itself an investigative activity or, what some would claim, an investigation.

The connections between all possible addition pairs with answers from 0 to 9 can be shown on a tree diagram (see figure 5). This reveals relationships between data which, previous to constructing the diagram, most children see as isolated and unrelated facts. It also illustrates diagrammatically that each system is a sub-system of a much larger system that comprises all two-number additions. This infinite system has a structure which figure 5 illustrates. Seven additions and relationship arrows have been left empty for you to complete. Notice the patterns in the additions in rows, diagonals and columns. What ‘meaning’ could you give to the ‘left’ and ‘right’ diagonal arrows?

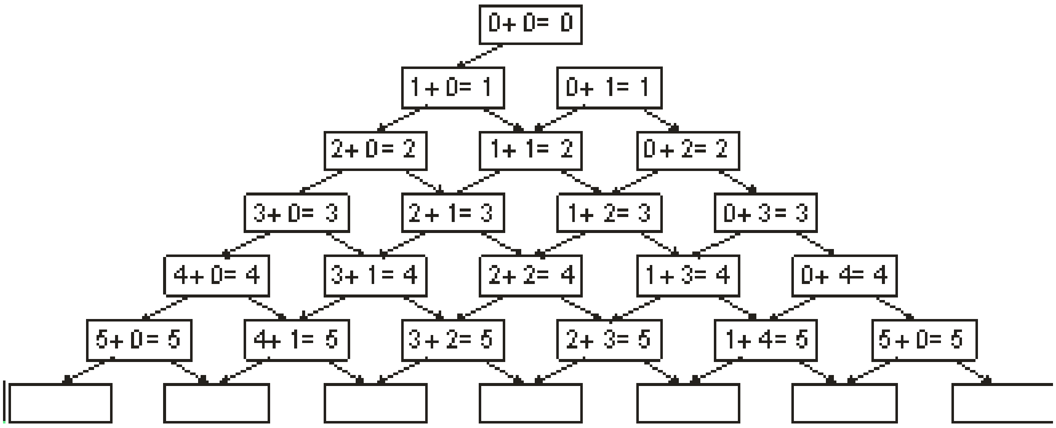


figure 5

An interesting problem arises when viewing the tree diagram. '*For a given answer N, how many addition pairs are there which have answers less than or equal to N?'*

Table 1 helps us to see a pattern in the 'Number of pairs'.

Answer	0	1	2	3	4	5
Number of pairs	1	3	6	10	15	21

table 1

We immediately recognize that the number of pairs is a triangular number T_{N+1}. As we are inductively reasoning we offer this as a conjecture. We prove it by induction.

For a given N, the number of pairs is $1 + 2 + 3 + \ldots + (\mathrm{N}+1) = \mathrm{T}_{N+1}$.

For example, when $\mathrm{N} = 3$ we get $1 + 2 + 3 + 4 = \mathrm{T}_4$.

Activity 2: Making patterns, suitable for 7 year olds upward studying symmetry and angles that are multiples of half-right angles.

Each child has a set of half-coloured squares (see figure 6). It is helpful if the squares are coloured on both sides.

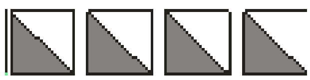


figure 6

I start by showing them the four squares in different orientations and ask if they are the same or different, and why (see figure 7).

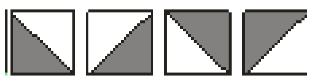
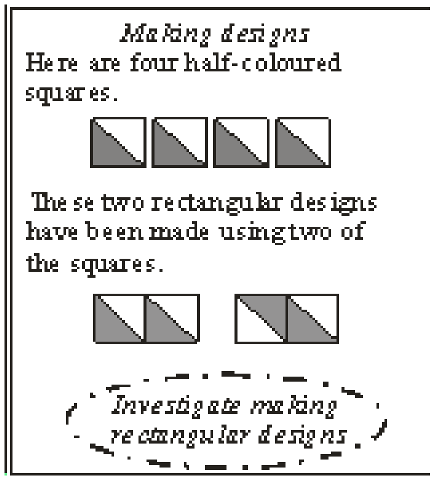


figure 7



As each square can be obtained by reflection or rotation of the basic square it is advisable to 'steer' children towards agreeing that they are defined as the same. Without this 'restriction' children are overwhelmed by the amount of data created.

Next, I put two squares side-to-side to make at least two rectangular designs. I then challenge children to predict how many different rectangular designs are possible with two squares. These predictions can be written on the board for reference when children have made their designs. You may also wish them to explain how they arrived at their prediction. They are then ready for the challenge of making as many as designs they can: usually they do so with great enthusiasm. The purpose of keeping a record of the designs they make quickly arises as children destroy one design to make

another, forgetting which they have made. You may wish to discuss ways the designs can be recorded or provide a recording sheet (see figure 8). Note, the blank rectangular designs have no diagonals. Why is this?

During the making and recording of designs observe children; check on

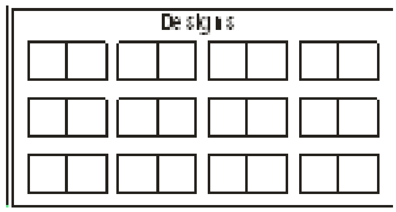


figure 8

strategies they use. Trial and error is the most common strategy with some children being more systematic than others. At the very end of the activity children should share and compare their strategies.

After an appropriate period of time children cut out each individual design from their record sheet so they can inspect designs that may be the same. It is very difficult for many children and adults to visual whether two designs or diagrams are the same when both are presented in a static format some distance away from each other. This is very demanding and provokes the intuitive use of reflective and rotational symmetry. Children find it helpful to have mirrors available for testing reflective symmetry, particularly as two mirrors placed touching each other

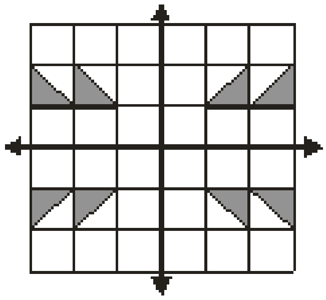


figure 9

at right angles can show two or four designs which are the 'same' (see figure 9).

The class can be brought together at this stage to share their findings and discuss which of their designs are the same. This enables everyone to begin activities based upon all six different designs (see figure 10).

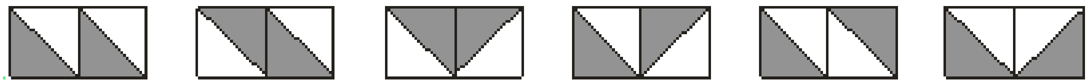


figure 10

The six designs are the members of a system that the children have created. Activities based on the six designs usually involve:

- sorting the designs according to different criteria. For example, closed shapes, symmetry or number of right angles or half-right angles;
- performing 'operations' on one or more designs in some way;
- relationships between pairs of designs.

You will find that children, given freedom to devise their own activities, are very inventive. An 'operation' activity which some suggest places two designs together to form a square with the objective of making a closed shaded shape. You might like to try this for yourself. Are you able to visualize which pairs of shapes can make a closed shape and which do not?

A relationship activity involves finding 'duals' which can be explored by asking children to find, from the six designs, a partner for each one with reasons why the two designs are associated. They readily choose the pairs in figure 11, with two of the six designs apparently not having duals. Why this is so proves to be an interesting discussion point. Why do you think it is?

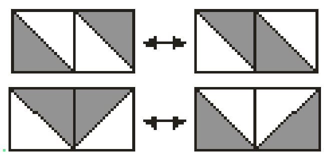


figure 11

The activity can be extended to using 3, 4, ... squares to make rectangular designs on 'one-level', that is of dimension 1xN. An investigation using the physical squares proves to be very difficult for children as the number of possible designs rapidly increases. However, the obvious question to ask is '*For a given number N of half-coloured squares, what is the number of 1xN designs that can be made?*

But does such a generalization exist?

An alternative investigation looks at 2x2 symmetrical designs. For example, '*Use 4 squares to make 2x2 designs that have reflective symmetry.'*

What happens if the basic shape is an equilateral triangle?

An extension investigation for older children codes each basic square design according to the position of the coloured triangle. For example,

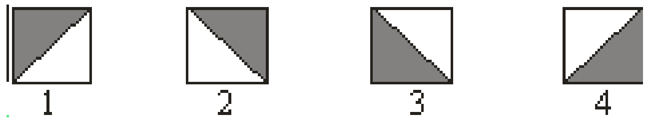


figure 12

where 1 = top left, 2 = top right. 3 = bottom left, 4 = bottom right . The four basic designs 1, 2, 3 and 4 form an equivalence set.

Children can consider how each basic design is transformed after reflection in vertical and horizontal axes. They can then code each 1x2 design

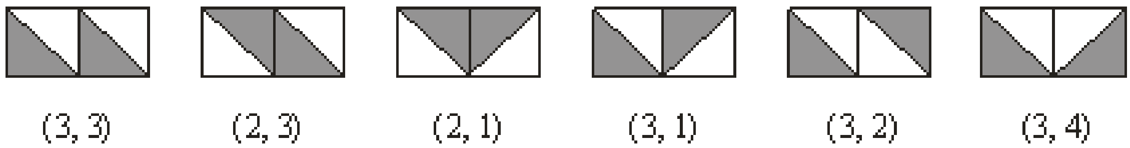


figure 13

What are the equivalence sets for each of the six 1x2 designs?

What patterns are there in each equivalence set?

Activity 3: A 6-pin geoboard, suitable for 8 year olds upward who are studying triangles.

This 6-pin geoboard has a pin at each corner of a regular pentagon with a sixth pin at the intersection of the perpendiculars from each corner to the opposite side (see figure 12). If geoboards are not available, they can be replaced by a sheet of copies of the geoboard which can also act as a recording sheet. Each child has a

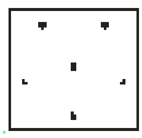


figure 14

geoboard, rubber (elastic) bands and a recording sheet.

I begin by asking a child to make a triangle on my geoboard and take the opportunity to talk about the properties of a triangle. I then ask the children to make the same triangle on their geoboard, but in a different position. In turn, children show their triangle to the class and explain why it is the same as the one on my geoboard. I encourage them to use the words reflection and rotation. If appropriate, I introduce the word 'congruent'. Everyone records the five congruent triangles (see figure 13).

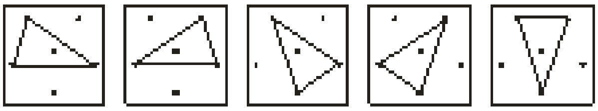
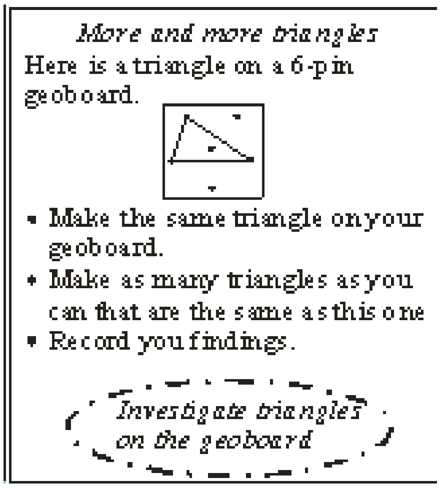


figure 15



Children are often surprised that the five triangles are congruent as ‘they don’t look the same’. Some children may find it necessary to cut out one of the triangles from their recording sheet to test that it is congruent to the other four. What is special about the triangles? Are they equilateral, isosceles or scalene? How can you tell?

I then ask the children to predict how many different triangles they think can be made on the 6-pin geoboard. A record of these on the board is useful for reference. The children are then challenged to make as many different triangles as they can. They are usually very enthusiastic, but surprised to find that there are only three more. Again they find all congruent triangles for

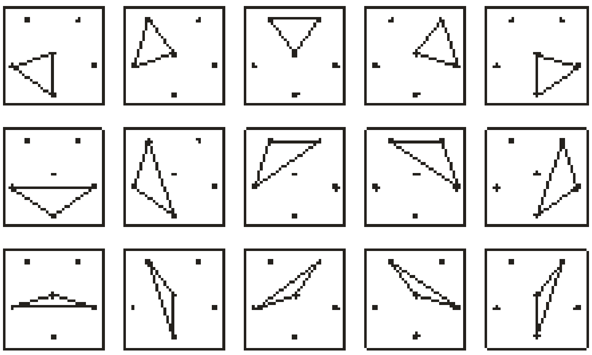


figure 16

each different triangle (see figure 14). You may wish to invite children to explain why for every different triangle there are four others congruent to it. What is special about the triangles? Are they equilateral, isosceles or scalene? How can you tell? The four different triangles form a system. The four triangles can be sorted, operated on and relationships discovered. In the following activity children operate on each set of five congruent triangles.

Each triangle can be represented as a string using the following symbols:
c is a line segment from a vertex of the pentagon to the centre
n is a line segment from one vertex of the pentagon to another
d is a diagonal of the pentagon.

The string for each of the four triangles is:

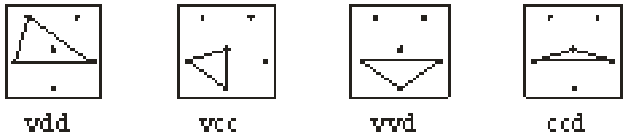


figure 17

Children enjoy constructing on one geoboard the design that a set of five congruent triangles make. Obviously, there will be four such patterns, one for eacj triangle, but are any likely to be the same pattern (see figure 15)? Which triangle produces which design?

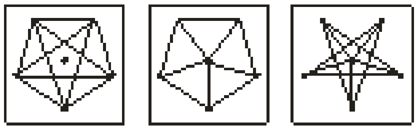


figure 18

The activity ends by asking the class to work at home investigating making 4-, 5-, 6-, ... sided polygons on the 6-pin geoboard.

In a search for a generalization, an extension activity considers the number of different polygons that can be made on regular polygon geoboards having 4, 5, 6, ..., N pins. Table 2 shows how this may be recorded. It is only partly completed, leaving you to investigate further. Please, let us know if you are able to find a generalization or to prove that this no generalization is possible!

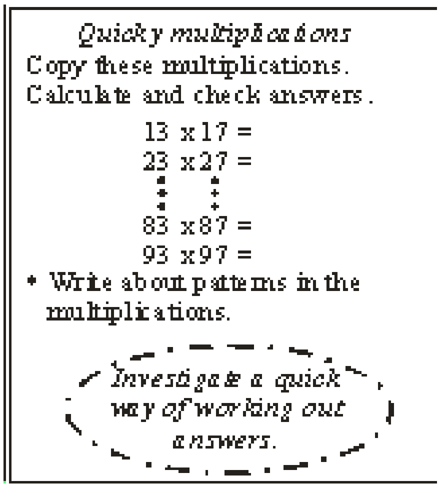
number of sides of polygons	number of pins 4	5	6	7
3	2	2	4	
4	1	1		
5		1		
6				
7				
8				
.				
total	3	4		

table 2

Activity 4: 2-digit by 2-digit multiplication, suitable for 9 year olds upward who are practising multiplication.

Each child should have a calculator for checking multiplications.

I begin this activity by writing 13 x 17 on the board and ask for help with calculating the answer. Everyone checks the answer with a calculator. I write on the board 13 x 17 = 221 This is repeated for 23 x 27 = 621 and 33 x 37 =1221 so that the board looks like this. 13 x 17 = 221 23 x 27 = 621 33 x 37 = 1221 The children are then asked to work in pairs to complete the pattern of multiplications each with its answer. I tell them that they can either calculate each



answer or look for patterns which might help them find the answers without any calculating. Calculators are only used for checking answers. After a period of time, the class come together to check that everyone has the correct multiplications and answers. They are recorded on the board to complete the nine multiplications in the pattern (see table 16). The children are asked to describe any patterns they have observed and how the patterns help them quickly find answers.

13	x	17	=	221
23	x	27	=	621
33	x	37	=	1221
43	x	47	=	2021
53	x	57	=	3021
63	x	67	=	4221
73	x	77	=	5621
83	x	87	=	7221
93	x	97	=	9021

table 3

The important patterns in the multiplications are:

- the tens digits in each number go from 1 to 9;
- the tens digit in both numbers is the same;
- the unit digit in the first number is always 3;
- the unit digit in the second number is always 7;
- the sum of the unit digits in the two numbers is 10 (this is not seen as relevant at this stage by most children;

The important patterns in the answers are:

- the unit digit is always 1;
- the tens digit is always 2;
- the last two digits in each answer, 21, are the product of the unit digits 3 and 7;

- the number of hundreds in an answer is the product of the tens digit in one of the numbers and one more than it. For example, the number of hundreds in the answer to 43 x 47 is 4 x 5 =20.

Are these patterns peculiar to our choice of numbers, or is it possible to generalize to other 2-digit x 2-digit multiplications with the same relationships between the digits? What do you think?

The question can be asked of older children leading them to a search for an algebraic proof. With younger ones more examples need to be investigated giving them opportunities to reason inductively, rather than deductively.

You might like to try these examples:

68 x 62, 74 x 76, 89 x 81, 95 x 95.

Does the generalization extend to 3-digit x 3-digit multiplications? For example, 126 x 124.

What is a process?

Processes are something that we do, physically and mentally. They appear as actions and are described using verbs. For example, sorting, explaining, listing, analysing. Their most important function is to put our mathematical concepts, knowledge and skills to work, using and applying them in exploring activities, and investigating and solving problems. They should be the 'ings' of our teaching and children's learning of mathematics.

Unfortunately, many teachers assume children will work with processes in their school mathematics, but seldom make children aware of which processes they expect them to use. This may be due to the teachers not being conscious of what processes are, what their purposes are, how and when it is appropriate to put them to use.

There are four categories of mathematical processes:

- *Communication processes*

  Talking, agreeing and disagreeing, questioning, debating, describing and explaining are just a few of those that belong in this category. They are used to communicate with or for others, adults or children.

- *Recording processes*

  Processes in this category include writing, drawing, listing, tabling, graphing, symbolizing and memorising. They provide means by which children can retain and communicate information and data in an ordered and logical manner and format.

- *Operational processes*

  These are about doing something with information and data; they include collecting, sorting, ordering, changing, combining, dissecting and relating.

- *Reasoning processes*

  Reasoning processes are, perhaps, the most fundamental in that without them progress in mathematics would come to an end for any learner; this state is apparent in those children who have given up trying to understand school mathematics. They include clarifying, analysing, thinking and understanding. The major reasoning processes that are the everyday tools of mathematicians are shown in figure 17.

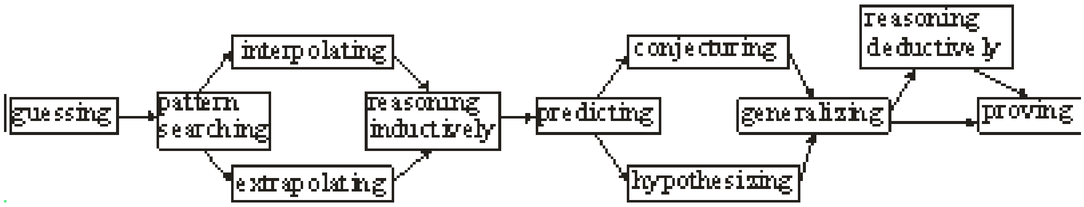


figure 19

It is time for you to look back at the four activities which were described earlier. Make a list of the *communication*, *recording*, *operational* and *reasoning* processes children would likely use when investigating the activity. Could they have used the processes without first being taught them? Do you expect students who come to you from schools to train as teachers to already have knowledge and experience of using processes in their mathematics? Do you consciously teach mathematical processes? Do you make students aware of when you are using such processes? Should you do so?

What is a strategy?

There are many definitions or descriptions of what a strategy is in mathematics. I feel strongly that unless, as a teacher, you are clear in your mind what a strategy is then you cannot expect children to respond to the instruction '*Use a strategy*' when they are investigating.

I define a strategy as a collection of processes placed in an order of use when investigating an activity or problem. The order may not be a conscious one, nor will it necessarily be one thought out before an investigation takes place. Indeed, my experience suggests that very often a strategy evolves as more and more is revealed during an investigation. For example, when is the time ripe to draw a diagram?

However, defining a strategy in this way has its implications. If a strategy is to be successful (I am not sure how this is measured!) then a learner, who is meeting an investigation for the first time, must have a wealth of processes to call upon, be capable of using them and have them readily available: children must develop associations between processes and the kind of situations which relate to them. For example, at the start of most activities creating or collecting data is a natural beginning, followed by making sense of the data by sorting it in different ways.

Although processes can be taught, the matching of a process with different kinds of situations for immediate recall, in my opinion, can only be developed by fruitful investigation experiences over many, many years; this must start on the first day children come to school. These associations between situation and process, and hence rich and productive strategies, cannot develop unless a school has a well thought out approach which continues in every classroom throughout children's schooling, and also when they become students training to be teachers.

The teachers of mathematics in a school must be of one mind about the value, role and methods of implementing an investigation approach to the teaching and learning of mathematics. It is our duty as trainers of teachers to find ways of achieving this.

What of the future?

The limited ambitions of schools and universities of having only a few children and students succeeding and developing a lasting positive attitude towards mathematics is no longer acceptable in a world in which mathematicians and scientists are in great demand, but in short supply. What every one of us should desire is that mathematics is taught with the aim that **every** child and student finds the subject exciting, challenging and exhilarating. This is not an unachievable ideal, as not to believe this is questions why we are teaching mathematics to many children.

An important contribution toward this goal is to allow children into the secret garden of the subject we all love and enjoy: give children greater involvement and control of their learning and decision making. The content of the mathematics curriculum, including the learning of knowledge and skills, does not need to substantially change, but the teaching approach we use must be reconsidered as it has already failed generations of children. I submit that an investigative approach with greater emphasis on processes and strategies can contribute to increasing children's motivation and desire to study mathematics to higher levels. 'Enjoyment of and success in mathematics by every child and student' should be our aim for the future.

References

[1] Baroody, A.J. & Coslick, R.T.: Fostering Children's Mathematical Power. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 1998

[2] Devlin, K.: The Maths Gene. Weidenfeld & Nicolson, London, 2000

[3] Frobisher, L. (Ed.): Maths Investigation, Books 3 to 6. Heinemann, Oxford, 2003

[4] Kopka, J.: Vyzkumny Pristup Pir vyuce Matematiky, Acta Universitatis Purkynianae, 2004

[5] Orton, A. & Frobisher, L.: Insights into Teaching Mathematics. Cassell, London, 2005

[6] Orton, A & Wain, G. (Ed.).: Issues in Teaching Mathematics, Cassell, London, 1994

Authors' address:
Len Frobisher
Buckstone Avenue
Leeds LS17 5HP
England
e-mail: ljfrobisher@btinternet.com

Professor Jan Kopka
Ceske mladeze
400 96 Usti nad Labem
Czech Republic
e-mail: kopkaj@sci.ujep.cz

Stochastikunterricht in Österreich — Möglichkeiten und Hintergründe

Stefan Götz

Abstract. *In this talk I present some elementary examples of the* Bayes*ian point of view in inference statistics which work without the concept of random variables. Additionally, I give an overview on the stochastic curriculum in the Austrian school system (for students from age 10 to 18), as well as in the teacher training at universities. Recent changes and developments of the Austrian education system are also mentioned, e.g. the "standards" of mathematics concerning the eighth grade level (students age 14). The didactical analysis of a well known paradoxon in probability theory (the so-called problem of the other child) completes this tour d'horizon. So the lecture includes new "stoffdidaktische" incentives in the stochastic curriculum and the wide gap between theory and practice of (Austrian) stochastic education at the school and university level will be discussed.*

1 Warum überhaupt Mathematik am Gymnasium?

Mathematik ist im Fächerkanon des Gymnasiums wegen

- der *Anwendungen*
- ihres Charakters als *Kulturfach*
- *der Mathematik an sich:* "‘*Autonomer Aspekt:* Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen — von festgelegten Prämissen ausgehend — stringent abgeleitet werden können. Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess."’ ([LP], Oberstufe: 9. – 12. Schulstufe).

Dieser letzte Punkt soll im Folgenden betont werden. Dabei ist die Suche nach und die Betonung von *Charakteristika* der Mathematik eine ganz wichtige Aufgabe für den Mathematikunterricht, die die Fachdidaktik u. a. wahrzunehmen hat. "What's going on in mathematics?" ist eine der Leitfragen dieses Vorhabens, daraus resultiert die Forderung, dass die Fachdidaktik immer auch die Nähe zum Fach bewahren muss. Es sind in diesem Zusammenhang nicht immer inhaltliche Aspekte, die es zu verfolgen gilt, sondern auch — vielleicht sogar vor allem — Fragen der Heransgehensweise an die, der Sichtweise von der Mathematik, die fundiert in Hinblick auf den Mathematikunterricht reflektiert werden müssen.

2 Bayes for Beginners (nach [RAI])

Beispiel 1: Unter 1 000 000 deutschen Ein-Euro-Münzen befindet sich eine, die auf beiden Seiten "‘Adler"’ zeigt, alle übrigen sind normal. Eine dieser Münzen wird zufällig ausgewählt und 20-mal geworfen. Dabei erscheint immer "‘Adler"’. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Münze normal ist?

Lösung: Es sei A das Ereignis "‘Münze ist normal"’ und B das Ereignis "‘Es erscheint bei 20 Würfen immer ‚Adler‘"’. Mit dem Konzept "‘Bedingte Wahrscheinlichkeit"’ und dem vollständigen BAYES*'schen Theorem* erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(B|A)\cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B|A)\cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)\cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|\neg A)\cdot \mathrm{P}(\neg A)} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot \frac{999999}{1000000}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot \frac{999999}{1000000} + \frac{1}{1000000}\cdot 1} = \frac{999999}{2048575} = 0,488\ldots \end{aligned}$$

Die *neue Sichtweise* des BAYES'schen Ansatzes wird schon bzw. gerade an diesem einfachen Beispiel deutlich:
Aus $\mathrm{P}(A) \approx 1$ (LAPLACE!) *a priori* wird $\mathrm{P}(A|B) \approx 0,49$ *a posteriori.*

Auf diese Weise ist ein *Modell für das "‘Lernen aus Erfahrung"’* zustande gekommen, welches schematisch so dargestellt werden kann:

$$\boxed{\text{Vorwissen}} \xrightarrow[\text{BAYES'sches Theorem}]{\text{Daten}} \boxed{\text{Neue Einschätzung}}$$

Dabei ist	Vorwissen	von 1 000 000 Münzen eine Adler-Adler
	Daten	20-mal "‘Adler"’ bei 20-mal werfen
	Neue Einschätzung	wahrscheinlicher, dass Adler-Adler

2.1 *Anschlussfrage 1:* **Bei welcher Anzahl n von Münzen ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_n gerade $\frac{1}{2}$?**

Diese Problemstellung führt auf eine *lineare* Gleichung in $\frac{1}{n}$, nämlich

$$p_n := \frac{\frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \frac{1}{n}\cdot 1} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \frac{1}{n}} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

woraus wir $n = 2^{20} + 1 = 1048577$ berechnen.

Eine *Übersicht* bietet (mittels *DERIVE*) die stetige Fortsetzung des *Graphen* von $p(n)$: $n \mapsto p_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, also Abbildung 1.

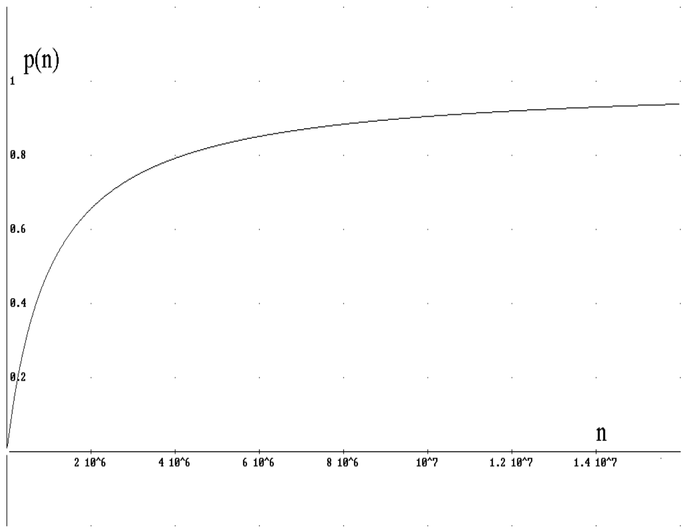


Abbildung 1: Zur Anschlussfrage 1

Es ist $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ und $p_1 = 0$, was wir auch verstehen können: Bei sehr vielen Münzen, unter denen nur eine ungewöhnliche ist, ist es fast sicher, eine normale erwischt zu haben, obwohl B eingetreten ist. Wenn dagegen nur eine Münze vorhanden ist, dann ist das die Adler-Adler, und das Ereignis A ist somit unmöglich.

2.2 *Anschlussfrage 2:* Wie oft muss man werfen, damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_k gleich $\frac{1}{2}$ ist?

Die Antwort

$$p_k := \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{999999}{1000000}}{\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{999999}{1000000} + \frac{1}{1000000} \cdot 1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

liefert wieder eine *lineare* Gleichung, diesmal in $\left(\frac{1}{2}\right)^k$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{1999998}$, woraus $k = \frac{\ln 1999998}{\ln 2} - 1 = 19{,}93\ldots$ folgt.

Es ist $p_{19} = 0{,}6560\ldots$ und $p_{20} = 0{,}4881\ldots$

Weiters ist $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$ und $p_1 \approx 1$. Auch diese Ergebnisse lassen sich interpretieren: Wird sehr oft geworfen und die Münze zeigt immer "‘Adler"’, dann wird das Ereignis A immer unwahrscheinlicher. Bei nur einem Wurf hingegen (mit dem Ergebnis "‘Adler"’) ist es fast sicher, eine normale Münze erwischt zu haben.

DERIVE zeigt wieder die stetige Fortsetzung des *Graphen* von $p(k)$: $k \mapsto p_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, siehe Abbildung 2.

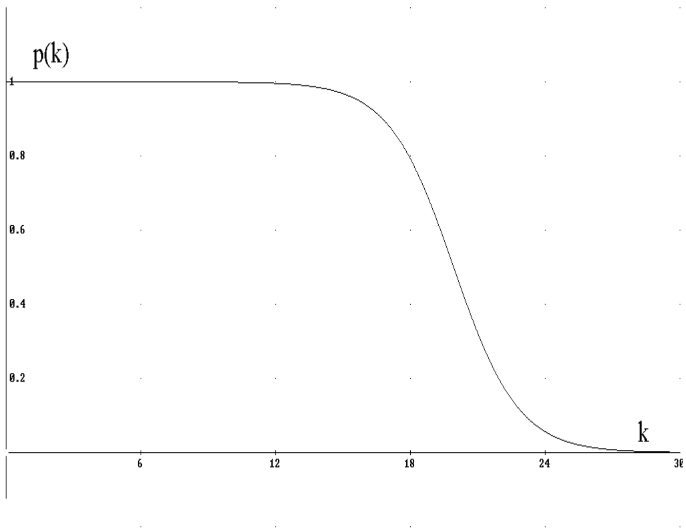


Abbildung 2: Zur Anschlussfrage 2

2.3 Didaktischer Kommentar

Schon dieses sehr einfache und künstliche BEISPIEL 1 mit seinen Anschlussfragen zeigt, wie schnell Methoden aus einem anderen mathematischen Gebiet (hier: der Analysis) in stochastischen Situationen zum Einsatz kommen: Funktionsgraphen zeichnen, Gleichungen lösen, Grenzwerte berechnen. Die Interpretation der so erhaltenen Ergebnisse gelingt nur dann, wenn die zugrunde liegende stochastische Natur der in Rede stehenden Situation berücksichtigt wird.

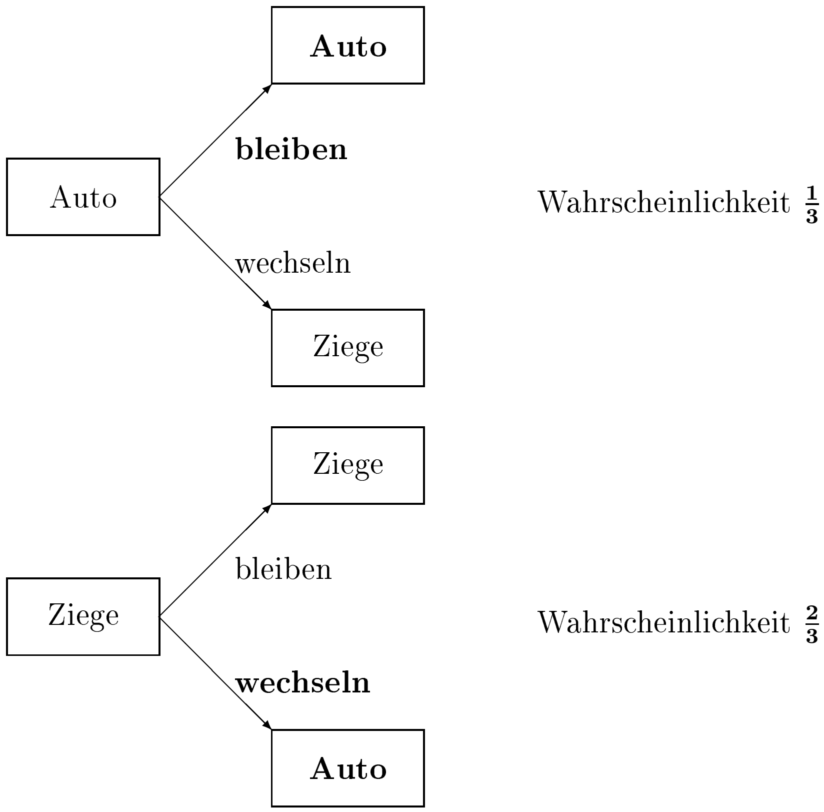
Inhaltlich ist hier die (mathematische) Modellierung des "‘Lernens aus Erfahrung"’ von zentraler Bedeutung, die darin verwendete BAYES’sche Formel gewinnt dabei zusätzlich an Aussagekraft, wenn sie wie ausgeführt mit analytischen Hilfsmitteln noch tiefer analysiert wird.

3 Bayes und die Ziegen

Beispiel 2: Folgendes Spiel bei einer Show: Hinter drei Türen befinden sich zwei Ziegen und ein Auto, dieses ist der mögliche Gewinn. Der Kandidat, der nicht weiß, hinter welcher Tür sich das Auto bzw. die Ziegen befinden, wählt eine Türe, z. B. die linke. Der Spielleiter, der das schon weiß, öffnet eine andere Tür, hinter der sich eine Ziege befindet (Abbildung 3). Der Kandidat hat jetzt die Möglichkeit, bei seiner gewählten Tür (der linken) zu bleiben oder auf die noch geschlossene zu wechseln. Wie sind die beiden Strategien (bleiben oder wechseln) zu bewerten?

3.1 Die klassische Lösung

wird an einem Diagramm gezeigt:



Die Strategie "‘Wechseln"’ führt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ zum Erfolg, "‘Bleiben"’ dagegen nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

3.2 Die Lösung nach Bayes ([VW])

Der Zustand θ_j bezeichne die Situation "‘Das Auto steht hinter der Tür j."’. Es gibt also drei mögliche Zustände.

A priori wird

$$\mathrm{P}(\theta_j) = \frac{1}{3} \quad (j = 1, 2, 3)$$

gesetzt bzw. eingeschätzt.

Nun tippe der Kandidat auf Tür 1 und Tür 3 wird geöffnet, das sei das Ereignis

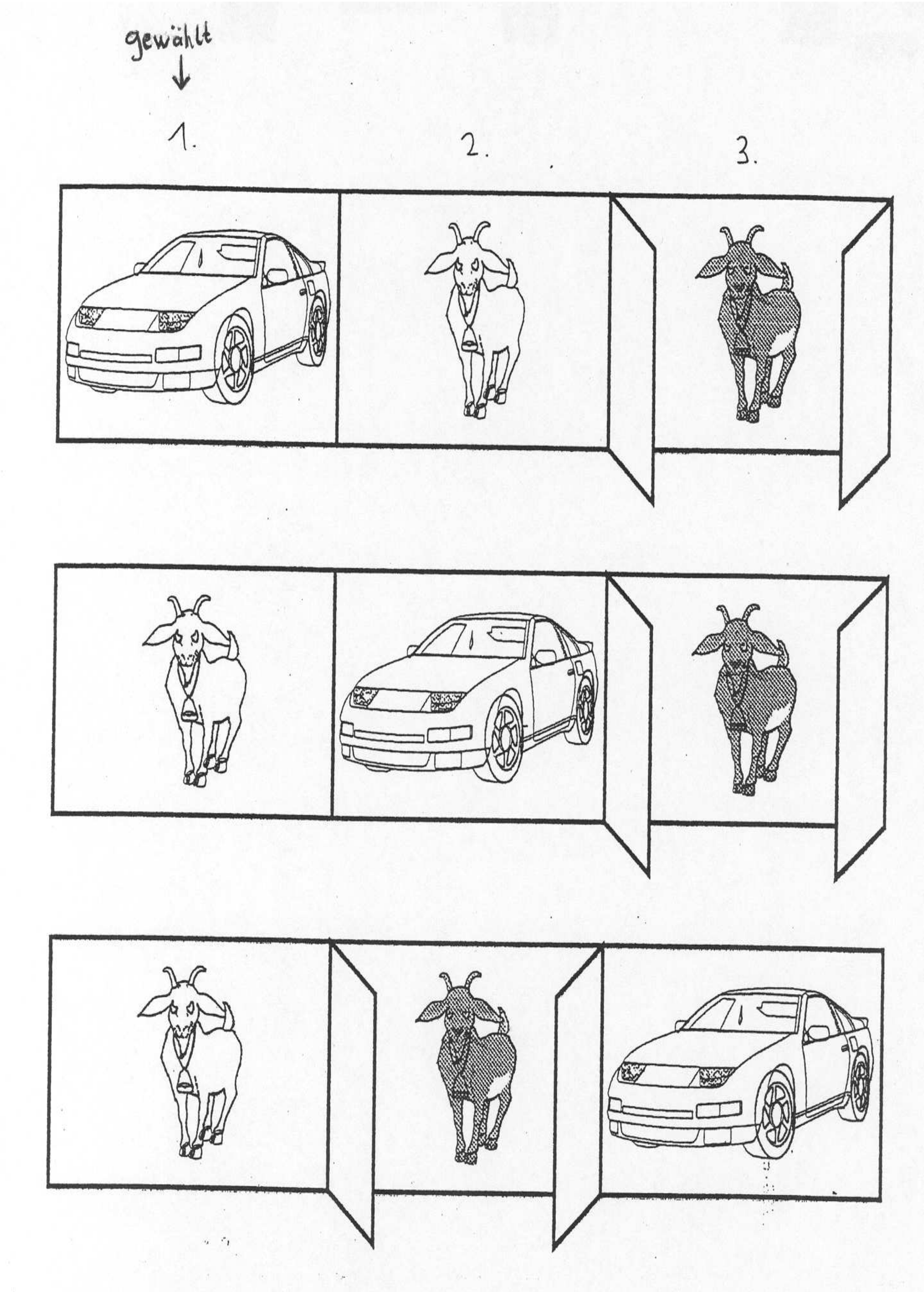


Abbildung 3: Zwei Ziegen und ein Auto

$x = 3$. Die folgenden "'Vorwärtswahrscheinlichkeiten"' ergeben sich fast zwingend:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x = 3|\theta_3) &= 0 \ , \\ \mathrm{P}(x = 3|\theta_2) &= 1 \quad \text{und} \\ \mathrm{P}(x = 3|\theta_1) &= \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Wenn das Auto hinter Tür 3 ist, wird diese Türe vom Spielleiter *nicht* geöffnet: er öffnet immer eine Ziegentür, so sind die Regeln. Wenn sich das Auto aber hinter Tür 2 befindet, *muss* der Spielleiter Tür 3 öffnen, denn die vom Kandidaten gewählte Tür 1 darf er nicht öffnen, ebensowenig wie die Autotür 2. Einzig die dritte mögliche Situation lässt dem Spielleiter die *Wahl:* das Auto befindet sich hinter der vom Kandidaten gewählten Tür 1. Dann kann er sich frei zwischen Tür 2 und Tür 3 entscheiden, welche er öffnen wird. Wirft er dafür eine faire Münze, so sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten jeweils $\frac{1}{2}$.

A posteriori ist dann

$$\mathrm{P}(\theta_j|x = 3) = \frac{\mathrm{P}(x = 3|\theta_j) \cdot \mathrm{P}(\theta_j)}{\sum\limits_{i=1}^{3} \mathrm{P}(x = 3|\theta_i) \cdot \mathrm{P}(\theta_i)} \qquad j = 1, 2, 3 \ ,$$

das heißt im Nenner steht

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}(x = 3) = \\ = \ & \mathrm{P}(x = 3|\theta_1) \cdot \mathrm{P}(\theta_1) + \mathrm{P}(x = 3|\theta_2) \cdot \mathrm{P}(\theta_2) + \mathrm{P}(x = 3|\theta_3) \cdot \mathrm{P}(\theta_3) = \\ = \ & \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta_1|x = 3) &= \frac{\mathrm{P}(x = 3|\theta_1) \cdot \mathrm{P}(\theta_1)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \ , \\ \mathrm{P}(\theta_2|x = 3) &= \frac{\mathrm{P}(x = 3|\theta_2) \cdot \mathrm{P}(\theta_2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \\ \mathrm{P}(\theta_3|x = 3) &= 0 \ . \end{aligned}$$

D. h. Wechsel von Tür 1 auf Tür 2 *verdoppelt* die Aussicht, das Auto zu gewinnen! Denn die erste berechnete "'Rückwärtswahrscheinlichkeit"' entspricht der Strategie "'Bleiben"', die zweite bedeutet "'Wechseln"'. Wieder hat sich die Einschätzung der (jetzt drei) möglichen Zustände durch die "'Datenerhebung"' (i. e. $x = 3$) verändert: von $\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$ auf $\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{2}{3}\middle|0\right)$.

3.3 Variationen über das Verhalten des Spielleiters ([GÖ])

Wenn $\mathrm{P}(x = 3|\theta_1) = 1$ gesetzt wird, d. h. eine starke Vorliebe für Tür 3 (modulo der zugrundeliegenden Situation) vorliegt — es wird nun also keine Münze geworfen! —, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta_1|x = 3) &= \frac{1}{1 + 1 + 0} = \frac{1}{2} \ , \\ \mathrm{P}(\theta_2|x = 3) &= \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ \mathrm{P}(\theta_3|x = 3) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Nun ist "‘Bleiben"’ *genauso gut* wie "‘Wechseln"’. Denn ob der Spielleiter die Türe 3 öffnet weil er muss (θ_2 ist der Fall) oder unbedingt will (wenn θ_1 vorliegt), muss ohne weitere Informationen als gleich wahrscheinlich eingeschätzt werden.

Ist dagegen $\mathrm{P}(x = 3|\theta_1) = 0$, d. h. besteht eine große Abneigung gegen Tür 3 (modulo der zugrundeliegenden Situation) — wieder wird nun keine Münze geworfen! —, so ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\theta_1|x = 3) &= \frac{0}{0+1+0} = 0\ , \\
\mathrm{P}(\theta_2|x = 3) &= \frac{1}{1} = 1 \quad \text{und} \\
\mathrm{P}(\theta_3|x = 3) &= 0
\end{aligned}$$

zu konstatieren. In diesem Fall ist alles klar: es *muss gewechselt* werden, denn der Spielleiter öffnet nie freiwillig die Tür 3, er tut es aber, ergo: er wird dazu gezwungen. Also steht das Auto hinter Tür 2.

Allgemein sei $\mathrm{P}(x = 3|\theta_1) =: p \in [0, 1]$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\theta_1|x = 3) &= \frac{p}{p+1+0} = \frac{p}{1+p} \quad \text{und} \\
\mathrm{P}(\theta_2|x = 3) &= 1 - \frac{p}{1+p} = \frac{1+p-p}{1+p} = \frac{1}{1+p}\ , \\
\mathrm{P}(\theta_3|x = 3) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Graphen der Funktionen $b(p) := \frac{p}{1+p}$ (für "‘Bleiben"’) und $w(p) := \frac{1}{1+p}$ (für "‘Wechseln"’) mittels *DERIVE* bringt Abbildung 4.

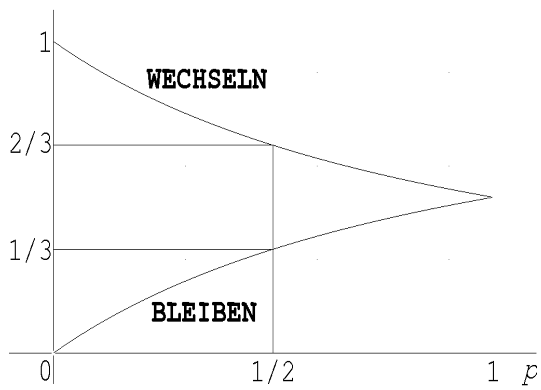


Abbildung 4: Wechseln versus Bleiben

Man erkennt wegen $p \leq 1$ (siehe auch Abbildung 4) $b(p) \leq w(p)\ \forall p \in [0, 1]$, das heißt:

WECHSELN IST NIE SCHLECHTER ALS BLEIBEN!

3.4 Didaktischer Kommentar

Schematisch sieht der Erkenntnisgewinn mit BAYES so aus:

A-priori-Einschätzung:

- $\mathrm{P}(\theta_j) = \dfrac{1}{3} \qquad j = 1, 2, 3$
- "‘Münzwurf"’ des Spielleiters bei Wahlmöglichkeit

BAYES’sches Theorem

Datum: $x = 3$

A-posteriori-Einschätzung der "‘Welt"’ θ_j $(j = 1, 2, 3)$:

$\mathrm{P}(\theta_1) = \dfrac{1}{3}$ und $\mathrm{P}(\theta_2) = \dfrac{2}{3}$

Die Variation eines bestimmten Parameters führt zu einer *Modellbildung* des "‘Verhaltens"’ des Spielleiters, was zu einer fast exotischen Stellung dieser Thematik innerhalb der (Schul-)Mathematik führt. Entscheidend ist dabei die Einsicht, dass die A-posteriori-Einschätzung stark von der Modellierung eben dieses Verhaltens abhängt. Informationen dazu bekommt man z. B. durch Beobachten der relativen Häufigkeit des Öffnens einer bestimmten Tür, wenn Wahlmöglichkeit besteht. Oder man kennt jemanden aus dem Umfeld des Spielleiters, der/die über das bevorzugte Verhalten desselben Bescheid weiß. Dieses Modell erlaubt es also, eventuell vorhandenes subjektives Wissen miteinfließen zu lassen. Genauso könnte man die A-priori-Einschätzung variieren, wenn es (subjektive) Gründe dafür gibt.

Zur (numerischen) Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten $\frac{2}{3}$ für Erfolg bei "‘Wechseln"’ ist zu bemerken, dass hier völlig unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsbegriffe zugrunde liegen. Die *klassische Interpretation* hat eine long run situation vor Augen: Wenn *alle* Kandidaten wechseln, dann wird *auf lange Sicht* in $\frac{2}{3}$ der Fälle das Auto gewonnen werden.

Bayesianisch betrachtet wird eine *Einzelsituation* bewertet. Das Vorwissen (ob der Spielleiter für den Fall des Falles eine Münze geworfen hat, ob a priori wirklich alle Türen gleichermaßen für das Auto in Frage kommen) plus die Daten $(x = 3)$ führen zur Einsicht: "‘Nimm die andere Tür! Die Chance ist dann z. B. $\frac{2}{3}$ oder jedenfalls mindestens 50%, dass das Auto dahinter ist."’

Also entspricht die klassische Interpretation der Produzentensicht der Spielshow, die Bayesianische dagegen der Kandidatensicht.

Die Einführung der Variablen p liefert die *Funktionen* b und $w = 1 - b$, deren Graphen einen *Überblick* über die (stochastische) Situation erlauben und die obige Erkenntnis suggerieren.

Apropos p: was heißt eigentlich mit $p = \frac{3}{4}$ ist $w\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$ und $b\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{7}$? Eine *operationale Deutung* passiert über eine *fiktive faire* Wette zwischen zwei Partnern, welche an einem *Beispiel* demonstriert werden soll. Sei a =14000 € der Wert des Autos. Dann müsste der Kandidat $14000 \cdot \frac{4}{7} = 8000$ € Einsatz bei Wahl der Strategie "‘Wechseln"’ einzahlen, der Partner dagegen nur $14000 \cdot \frac{3}{7} = 6000$ €. Erwischt der Kandidat die Autotür, so erhält er die 14000 €, sonst der Partner. Also heißt "‘fair"’ hier, dass der Einsatz der Gewinnerwartung entspricht. Die Wette ist natürlich fiktiv, tatsächlich geht es ja um das Auto oder nichts.

Mit anderen Worten: $w(p) \cdot a$ ist die Gewinnerwartung bei der Wechselstrategie.

Die Ergebnisse für die Extremfälle $p = 0$ und $p = 1$ können direkt interpretiert werden.

Insgesamt fungieren die Funktionen w und b als analytische Hilfsmittel für die Beurteilung einer stochastischen Situation, ein weiteres schönes elementares Beispiel für das Zusammenwirken von Methoden aus verschiedenen mathematischen Gebieten.

4 Der österreichische Lehrplan Mathematik — Kostproben ([LP])

4.1 AHS-Unterstufe und Hauptschule: 5. – 8. Schulstufe

Im allgemeinen Teil werden unter der Überschrift *Bildungs- und Lehraufgabe* mathematische Grundtätigkeiten genannt: Produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, Kritisches Denken und Darstellen und Interpretieren.

An *Unterrichtszielen und Unterrichtsinhalten* werden welche aus Arithmetik, elementarer Algebra und Geometrie angeführt.

Unter *Didaktische Grundsätze* findet sich u. a. der Hinweis auf den *Kern- und Erweiterungsbereich*, welche im Verhältnis 2 : 1 die Unterrichtszeit ausmachen sollten und in einer individuellen von den Lehrenden zu erstellenden Jahresplanung transparent gemacht werden. Dazu finden sich Erläuterungen zum systematischen und situationsbezogenen Lernen, zum verständnisvollen Lernen, verschiedene Unterrichtsformen wie Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit und projektorientierter Unterricht werden erklärt. Die Motivierung der Schülerinnen und Schüler soll u. a. mittels Themen aus ihrer Erfahrungswelt passieren. Ein wichtiger Grundsatz ist das Unterrichten in Phasen, die Vernetzung ausgewählter Stoffinhalte, das Herstellen von Querverbindungen. Die Sicherung des Unterrichtsertrags geschieht durch das Lernen, erworbenes Wissen zu rekonstruieren, eigenständig darzustellen und auch zu begründen. Weiters ist Individualisierung und Differenzierung auch innerhalb einer Klasse gefordert. Das Lesen mathematischer Texte trägt dem sprachlichen Aspekt der Mathematik, die eine eigene Sprache ("‘Fachsprache"’) ausgebildet hat, Rechnung. Bei den Aufgabenstellungen sollen elementare Tätigkeiten gefragt sein und aufeinander aufbauende Lösungsschritte zum Ziel führen. Das Arbeiten mit dem Taschenrechner und dem Computer begleitet im Idealfall den gesamten Mathematikunterricht, ein Werkzeug, dessen Indikationen zum Einsatz im Laufe der Zeit herausgearbeitet werden sollen. Last but not least unterstützen historische Betrachtungen z. B. die Begriffsbildung oder die Entwicklung spezieller Methoden.

Der *Lehrstoff* zur Stochastik wird in allen vier Klassenstufen unter der Überschrift "'Arbeiten mit Modellen, Statistik"' angeführt.
In der *1. Klasse* sind Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen gefragt.
Die *2. Klasse* fordert schon das Ermitteln von relativen Häufigkeiten, die Schüler und Schülerinnen sollen entsprechende graphische Darstellungen lesen, anfertigen und kritisch betrachten können. Die Fähigkeit, Manipulationsmöglichkeiten (in statistischen Darstellungen) erkennen zu können, ist ein wichtiger Beitrag zur Allgemeinbildung.
In der *3. Klasse* steht das Untersuchen und Darstellen von Datenmengen am Programm.
Die *4. Klasse* schließlich bringt das Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (z. B. Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm).

4.2 AHS-Oberstufe (Gymnasium): 9. – 12. Schulstufe

Die *Bildungs- und Lehraufgabe* im *allgemeinen Teil* enthält die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, damit Einsicht in Zusammenhänge erlangt werden kann und das Lösen von Problemen möglich wird.

Mathematische Kompetenzen aus den Gebieten "'Zahlen"', "'Algebra"', "'Analysis"', "'Geometrie"' und "'Stochastik"' sollen erlangt werden. Dabei ist Darstellend - interpretierendes, Formal - operatives, Experimentell - heuristisches und Kritisch - argumentatives Arbeiten erwünscht.

Verschiedende *Aspekte der Mathematik* wie der schöpferisch - kreative, der sprachliche, der erkenntnistheoretische, der pragmatisch - anwendungsorientierte, der autonome und der kulturell - historische sollen im Unterricht angesprochen werden.

Durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen steht im Mittelpunkt der *didaktischen Grundsätze*. Die Angabe minimaler — maximaler Realisierung bei jedem der folgenden Punkte soll ihre Konkretisierung im Unterricht veranschaulichen. Das Lernen in anwendungsorientierten Kontexten, in Phasen, im sozialen Umfeld, unter vielfältigen Aspekten, mit instruktionaler Unterstützung, mit medialer Unterstützung und mit technologischer Unterstützung wird so beschrieben.

Der *Lehrstoff* zur "'Stochastik"' (das ist auch die jeweilige Kapitelüberschrift) beginnt in der *6. Klasse* mit dem Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik; das Kennen des Begriffs Zufallsversuch, das Beschreiben von Ereignissen durch Mengen wird angeführt; das Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wird ebenso gefordert wie das Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen. Das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten, z. B. mit Hilfe der Multiplikations- und Additionsregel ist genauso Inhalt wie das Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit. In Realgymnasien ist das Arbeiten mit dem Satz von Bayes Pflicht.

Die *7. Klasse* verlangt das Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung. Das Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist ebenso gefragt wie der von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz. Konkret ist das Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen angeführt.

In der *8. Klasse* steht das Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung im Zentrum. Konkret ist das Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen gemeint, welches im Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen endet.

5 Standards in der 8. Schulstufe ([ST])

Nachhaltigkeit soll auf Basis eines sogenannten *Kompetenzmodells* erreicht werden, welches folgende Komponenten enthält: *Mathematische* und *Überfachliche.*

Erstere unterteilen sich wieder einerseits in

- *A1: Darstellen, Modellbilden,*
- *A2: Operieren, Rechnen,*
- *A3: Interpretieren und Dokumentieren* und
- *A4: Argumentieren und Begründen,*

diese beschreiben also die *A: Handlungsdimension.*

Andererseits besteht die *B: Inhaltliche Dimension* aus

- *B1: Arbeiten mit Zahlen und Maßen,*
- *B2: Arbeiten mit Variablen und funktionalen Abhängigkeiten,*
- *B3: Arbeiten mit Figuren und Körpern* und
- *B4: Arbeiten mit statistischen Kenngrößen und Darstellungen.*

Zweitere, also die *C: Überfachlichen Kompetenzen und Standards* sind in

- *C1: Autonomes Lernen,*
- *C2: Arbeitstechniken, Methodenkompetenzen,*
- *C3: Kooperatives Handeln* und
- *C4: Kritisches Denken und Reflektieren*

differenziert.

Die *Formulierung* der Standards geschieht in *"'Ich kann ... "'* (*"I can do ..."*) Statement wie z. B.

$\boxed{\text{A1}}$ Ich kann Sachverhalte in verbaler, tabellarischer, grafischer und symbolischer Form darstellen.

$\boxed{\text{A2}}$ Ich kann Ergebnisse abschätzen oder auch überprüfen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll runden.

$\boxed{\text{A3}}$ Ich kann den Lösungsweg einer Aufgabe beschreiben.

$\boxed{\text{A4}}$ Ich kann einzelne Rechenschritte begründen wie auch begründen, warum ein Rechenschritt bzw. eine bestimmte mathematische Argumentation falsch ist.

bzw. für $\boxed{\text{B4}}$

- Ich kenne wichtige statistische Darstellungsformen (Tabellen, Piktogramm, Stab-, Kreis-, Linien- und Streudiagramm) und kann damit verständig und angemessen arbeiten.
- Ich kann mit absoluten und relativen Häufigkeiten sowie mit tabellarischen oder grafisch dargestellten Häufigkeitsverteilungen verständig und angemessen umgehen.
- Ich kenne das arithmetische Mittel, den Median und Quartile und kann mit diesen Kennzahlen angemessen arbeiten.
- Ich kann (eventuell mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms) statistische Tabellen und Grafiken erstellen sowie statistische Kennzahlen ermitteln.

Mittlerweile ist ein Pool von *konkreten Aufgaben* entstanden, jede mit einer (i) *Klassifikation* nach *A, B, C* und *Komplexität*. Weiters werden (ii) erlaubte *Hilfsmittel* angegeben und (iii) ein möglicher *Lösung*sweg.

Folgendes *Beispiel* möge das eben Gesagte illustrieren: Unter dem Titel *Bevölkerungsentwicklung in Österreich* findet sich die **Aufgabenstellung:**

Das folgende Diagramm zeigt die Bevölkerungsentwicklung der letzten 50 Jahre in Österreich: Abbildung 5.

a) Zeichne in das Diagramm "'nach Gefühl"' eine Gerade ein, die die Bevölkerungsentwicklung seit 1951 möglichst gut beschreibt ("'Trendgerade"'). Versuche mit Hilfe der gezeichneten Trendgeraden die Bevölkerungszahl Österreichs im Jahr 2010 vorauszusagen!

b) Ein Mitschüler hat lediglich die Punkte bei 1991 und 2001 durch eine Gerade verbunden und mit Hilfe dieser Geraden die Bevölkerungszahl im Jahre 2010 vorausgesagt. Was meinst du dazu? Für welche Vorgehensweise würdest du dich entscheiden?

Klassifikation:

- Handlungsdimension
  - A1: Darstellen, Modellbilden
  - A3: Interpretieren und Dokumentieren

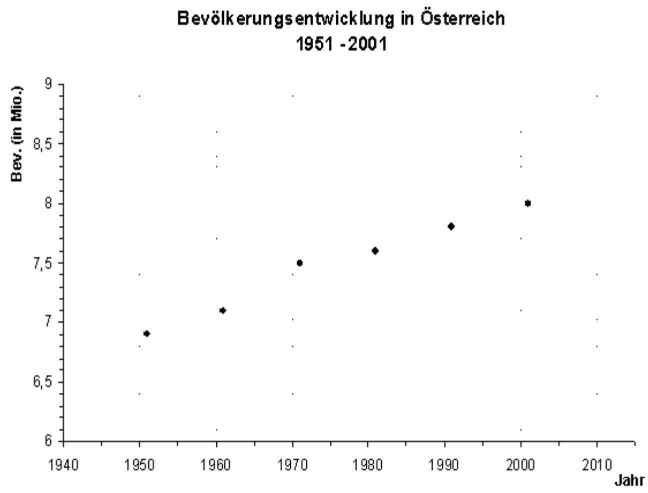


Abbildung 5: Bevölkerungsentwicklung in Österreich

- Inhaltliche Dimension
  - B2: Arbeiten mit Variablen und funktionalen Abhängigkeiten
  - B4: Arbeiten mit statistischen Kenngrößen und Darstellungen
- Geringe Komplexität
  Höhere Komplexität

Hilfsmittel: Lineal
Ziele, erwartete Lösung(en):

1. Lösung des Beispiels wird vor allem von Schüler/innen des ersten Leistungsniveaus erwartet

2. Lösungsweg(e)

   a) Die Schüler/innen müssen

   - ein Streudiagramm lesen und interpretieren können,
   - einen (annähernd) linearen Trend erkennen und mit Hilfe einer Geraden grafisch veranschaulichen können,
   - aus der grafischen Darstellung einer Trendgeraden Prognosewerte ermitteln können

   (Abbildung 6).

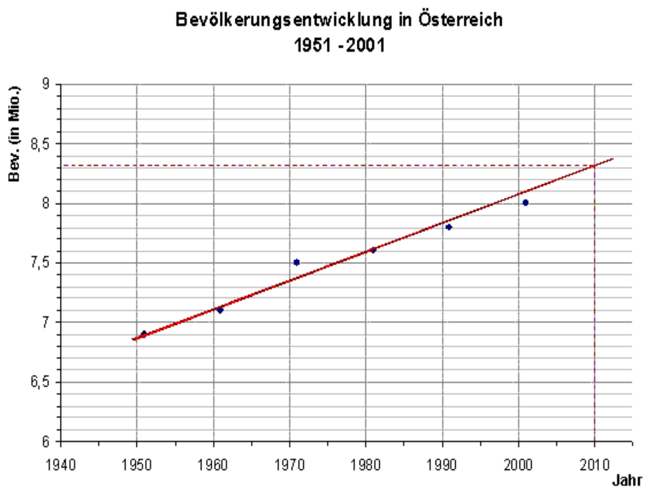


Abbildung 6: Bevölkerungsentwicklung in Österreich — Lösungsvorschlag

b) "‘Die Trendgerade berücksichtigt alle gegebenen Daten von 1951 – 2001 in gleicher Weise, die Prognose meines Mitschülers berücksichtigt nur die Werte von 1991 und 2001. Das kann sinnvoll sein, wenn der Trend in früheren Jahren deutlich anders verläuft, kann aber auch problematisch sein (eine Prognose der Bevölkerungszahl im Jahre 1981 anhand der Werte 1961 und 1971 etwa hätte nur sehr schlecht gepasst). Ich würde mich daher im Normalfall und auch in diesem Beispiel für das Modell der Trendgeraden entscheiden, wobei ich bei der nach Gefühl eingezeichneten Trendgeraden eventuell versuchen würde, die jüngeren Daten etwas stärker zu berücksichtigen als weiter zurückliegende."’

Kommentar:

- *Sprachliche Anforderungen:* hoch
- *Lernstoff der Schulstufe:* 8

Abschließende *Bemerkungen:*

i) Die Standards sind in Österreich zur Zeit in der Testphase, der geplante Start ist 2008.

ii) Die Ausarbeitung von Standards für die *zwölfte* Schulstufe ist derzeit im Gange.

6 Das Problem des anderen Kindes ([GH])

Beispiel 3: Man weiß, dass eine Familie zwei Kinder hat und mindestens ein Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Familie zwei Mädchen hat?

In der Literatur finden sich *zwei verschiedene* Lösungen: erstens $\frac{1}{2}$ mit dem Argument, dass Buben- und Mädchengeburten annähernd gleichwahrscheinlich und unabhängig vom Geschlecht der Schwester sind.

Zweitens $\frac{1}{3}$ mit der Begründung, dass eine Familie mit zwei Kindern folgende Konstellationen der Kinder aufweisen kann: *MM, MB, BM, BB,* dabei steht "‘M"’ für "‘Mädchen"’ und "‘B"’ für "‘Bub"’, und "‘*BB*"’ fällt aus!

Beispiel 4, Fortsetzung von Beispiel 3: Wie ändert sich die Situation, wenn man weiß, dass das *ältere* Kind ein *Mädchen* ist?

Lösung: $\frac{1}{2}$

i) entweder mit der Begründung dafür von oben,

ii) oder aus $\Omega = \{MM, MB, BM, BB\}$ wird $\Omega' = \{MM, MB\}$, wobei das Geschlecht des älteren Kindes zuerst genannt wird, also:

$$\mathrm{P}(MM|\Omega') = \frac{\mathrm{P}(MM \cap \Omega')}{\mathrm{P}(\Omega')} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \; .$$

Aber was ist mit BEISPIEL 3? — Dazu muss folgende Frage beantwortet werden: *Wie kommt die Information "'mindestens ein Mädchen"' zustande?*

Wenn z. B. eine *(zufällige) Begegnung* [J(unge)=B(ub)] stattgefunden hat, kann die Situation folgendermaßen illustriert werden: Abbildung 7.

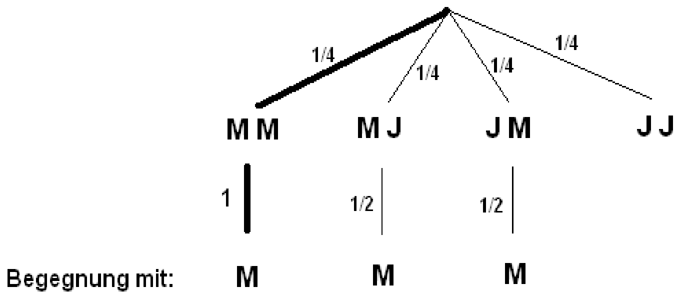


Abbildung 7: Baumdiagramm für zufällige Begegnung

Wir *sehen*: P(Dicker Pfad)=P(die beiden anderen Pfade zusammen), also:

$$\mathrm{P}(MM|\text{Begegnung mit } M) = \frac{1}{2} \; .$$

Formal kann mit BAYES geschlossen werden:

$$\mathrm{P}(MM|M) = \frac{\mathrm{P}(M|MM) \cdot \mathrm{P}(MM)}{\mathrm{P}(M)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \; .$$

Analoge Situationen wären etwa ein Freund sieht, ..., und berichtet davon, oder das Hören einer (weiblichen) Kinderstimme oder Vater oder Mutter erzählt: "'Gestern hat ein Mädchen geweint."'

Ein wenig anders stellt sich die Situation dar, wenn der Vater oder die Mutter sagt: "'Gestern hat *Anna* geweint."' Dann kann wieder das alte Argument von oben gebracht werden: P[bestimmtes Kind (das zweite neben Anna)=M]=$\frac{1}{2}$.

Die Baumdiagramme sehen nun so aus: Abbildung 8 oder Abbildung 9.

In beiden Fällen ist der Anteil der fett gedruckten Pfade an der Gesamtheit zu berechnen: $\frac{1}{2}$.

Was ist aber, wenn die Frage *"'Sind in Deiner Familie beide Kinder Buben?"'* vom Vater oder von der Mutter mit *"'Nein!"'* beantwortet wird? — Dann endlich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$: Abbildung 10.

Conclusio:

(i) $\frac{1}{2}$ ist dann der Fall, wenn ein Zufallsexperiment die Information liefert.

(ii) $\frac{1}{3}$ dagegen liegt vor, wenn Wissende die Möglichkeit "'*BB*"' ausschließen.

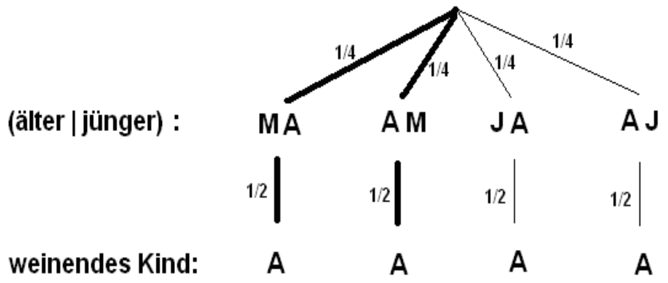


Abbildung 8: Anna weint 1

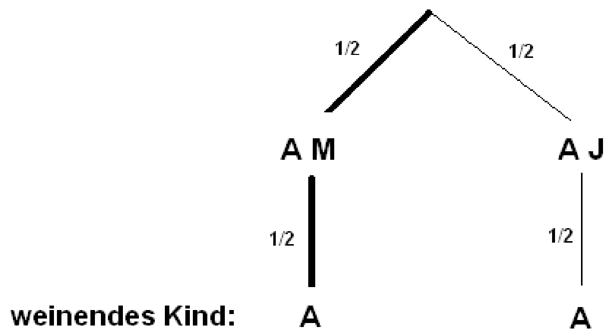


Abbildung 9: Anna weint 2

7 Die Ausbildung in Stochastik von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien

Eine *vierstündige Vorlesung* "'Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Lehramtskandidat/innen"' und ein *zweistündiges Proseminar* dazu, beides im zweiten Studienabschnitt, bieten z. B. (beim Verfasser dieses Beitrags) folgendes Programm:

I. Wahrscheinlichkeitstheorie

1.) Einführung
2.) Axiomatische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
3.) Endliche Wahrscheinlichkeitsräume —
LAPLACE'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff
4.) Kombinatorik
5.) Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit von Ereignissen
6.) Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und
die Formel von BAYES
7.) Das BERNOULLI'SCHE Gesetz der großen Zahlen
8.) Die Ein- und Ausschaltformel und ein Paradoxon
9.) Geometrische Wahrscheinlichkeiten
10.) Der Begriff der Zufallsvariablen
11.) Diskrete Zufallsvariable
11.1 Definition

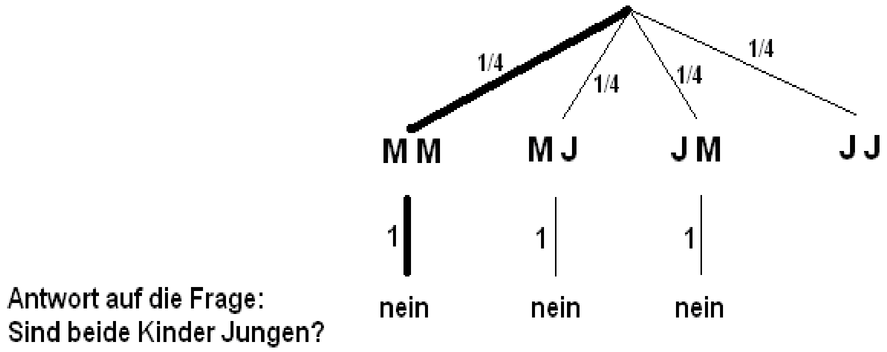


Abbildung 10: Keine zwei Buben in der Familie

11.2 Verteilungsfunktion
11.3 Der Erwartungswert
11.4 Varianz und Streuung (oder Standardabweichung)

12.) Paare von diskreten Zufallsvariablen

13.) Erzeugende Funktionen

14.) Spezielle diskrete Verteilungen

14.1 Die Binomialverteilung
14.2 Die geometrische Verteilung
14.3 Die POISSON-Verteilung
14.4 Die hypergeometrische Verteilung

15.) Stetige Zufallsvariable

16.) Spezielle stetige Verteilungen

16.1 Die gleichmäßige Verteilung
16.2 Die Exponentialverteilung
16.3 Die Normalverteilung

II. Statistik

1.) Beschreibende Statistik

2.) Beurteilende Statistik

2.1 Einpunktschätzung
2.2 Bereichsschätzung
2.3 Testen von Hypothesen
2.4 Der BAYES'sche Ansatz
2.5 Ein verteilungsfreies Testverfahren – der Vorzeichentest
2.6 Der Chi-Quadrat-Anpassungstest
2.7 Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

3.) Lineare Regression

8 Big Points

Bei der im vorigen Abschnitt vorgestellten Lehrveranstaltung zeigt sich, dass bestimmte Verständnisschwierigkeiten, "‘Knackpunkte"’ immer wieder auftreten, so dass auf diese besonderes Augenmerk in der Ausbildung gerichtet werden sollte. Ein paar wesentliche "‘Hürden"’ seien im Folgenden genannt.

Die Unterscheidung der Begriffe *Zufallsvariable, Parameter und empirische Größe* ist in einer konkreten stochastischen Situation, z. B. in einem Anwendungsbeispiel, schwierig. Die Tabelle zeigt ein typisches Beispiel.

Testvariable	Erwartungswert	arithmetisches Mittel
$\bar{X}$ beim Testen und Schätzen	$\mathrm{E}(X) = \mu$ Kennzeichen einer Verteilung	$\bar{x}$ aus Daten gewonnen
beurteilende Statistik	Wahrscheinlichkeits- theorie	beschreibende Statistik

Die ewige Frage nach dem Verhältnis *relative Häufigkeit* R_n bzw. r_n – *Wahrscheinlichkeit* P bzw. p eines Ereignisses A, welches durch Abbildungen wie Abbildung 11 in gewisser Weise noch unklarer wird, wird immer wieder — spontan! — unsauber beantwortet:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|R_n(A) - p| \leq \varepsilon) = 1 \quad \text{versus} \quad \lim_{n\to\infty} r_n(A) = p$$

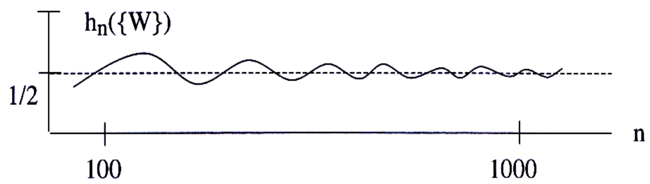


Abbildung 11: Relative Häufigkeiten "‘pendeln sich ein"’

Was beschreibt die Testvariable X beim Testen von Hypothesen? — Diese Frage sollte immer zuerst bei einer konkreten Aufgabe aus diesem Gebiet geklärt werden.

Die Interpretation eines (klassischen) *Konfidenzintervalls*: nicht der Parameter liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $\gamma < 1$ im Intervall, sondern umgekehrt: das Intervall umfasst mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $\gamma < 1$ den unbekannten Parameter. Der Bayesianische Standpunkt stützt bekanntlich die erste Sichtweise.

Der *Wertebereich* einer Zufallsvariablen: Ist er diskret oder überabzählbar, wenn endlich, wo beginnt er, wo endet er?

Die Definition der Verteilungsfunktion und was bei einer bestimmten Zufallsvariablen daraus wird ist oft überraschend diffizil zum Anschreiben:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i) \quad \text{bzw.} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \ .$$

Wo findet sich die Variable x auf der rechten Seite des Ausdrucks wieder?

Literatur

[GH] Götz, Stefan und Humenberger, Hans: *Das Problem des anderen Kindes.* Preprint Universität Wien (11 Seiten), 2006.

[GÖ] Götz, Stefan: *Ziegen, Autos und Bayes — eine never-ending story.* In: Stochastik in der Schule Band **26** (2006), Heft 1, S. 10–15.

[LP] *Österreichischer AHS-Lehrplan Mathematik.*
`http://www.oepu-noe.at/recht/lp/index.htm`
(19.8.2006).

[RAI] Raith, Peter: *Proseminar zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für LAK.* Universität Wien, Sommersemester 2004.

[ST] *Standards in Mathematik für die 8. Schulstufe.*
`http://www.gemeinsamlernen.at/index2.asp` (19.8.2006).

[VW] Vancsó, Ödön und Wickmann, Dieter: *Das Drei-Türen-Problem in bayesscher Sicht.* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern für die GDM herausgegeben von Michael Neubrand. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 1999, S. 551–554.

Author's address:
Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz
Faculty of Mathematics
University of Vienna
Nordberstraße 15
A-1090 Vienna
Austria
e-mail: Stefan.Goetz@univie.ac.at

Význam niektorých faktorov vo flexibilnom myslení žiakov

Štefan Gubo

Abstract. *The main purpose of this presentation is to report on our research results which goal is to investigate students' successfulness in solving problems which need first of all flexible thinking. The research was conducted at primary (Grade 5 and Grade 8) and secondary (Grade 11) schools in three counties of Slovakia. Altogether 745 students were tested. As far as the main objective of our research was concerned, we have examined the relation between students' successfulness in solving puzzle-problems and following factors: gender, half-term mark from Mathematics and qualification of parents. To estimate student's ability in solving puzzle-problems we have compiled a test of 11 puzzle-problems.*

Úvod

V dnešnej dobe rýchly vývoj informačných a komunikačných technológií zapríčiňuje aj prehodnotenie pojmu vedomosti. Už nie je postačujúce len si osvojiť poznatky, čoraz väčšmi sa ukazuje nárok na ich tvorivú aplikáciu. Spolu s nimi sa dostanú do popredia otázky rozvíjania tvorivosti a problémového myslenia. Jeden z najdôležitejších komponentov tvorivosti je flexibilné myslenie, ktoré umožňuje riešiteľovi skúmať daný problém z rôznych aspektov. Flexibilné myslenie zahŕňa v sebe aj schopnosť redefinície problému, pomocou ktorej sa k riešeniu možno dostať rýchlejšie a bez vyvinutia väčšieho úsilia.

V tomto príspevku chceme publikovať výsledky tuzemského empirického výskumu, ktorého cieľom je nájsť význam niektorých faktorov vo flexibilnom myslení žiakov základných a stredných škôl.

Charakteristika výskumu

Cieľ výskumu

Našou snahou bolo uskutočniť empirický výskum zameraný na meranie úrovne flexibilného myslenia žiakov základných a stredných škôl na Slovensku s nasledovným cieľom: zistiť aký je vzťah medzi úrovňou flexibilného myslenia žiakov a nasledovnými faktormi: pohlavie, polročná známka z matematiky, vzdelanie rodičov.

Prostriedky výskumu

Úroveň flexibilného myslenia žiakov sme chceli merať pomocou neštandardizovaného testu, ktorý sme zostavili sami. Problémové situácie, ktoré vyžadujú flexibilné myslenie veľmi dobre reprezentujú (matematické) hlavolamy (pozri [1]). Vychádzajúc z tohto tvrdenia *Test hlavolamov* sme zostavili z 11 problémov, ktoré mali charakter hádaniek a k ich riešeniu nebola potrebná hlbšia matematická vedomosť (p. prílohu).

Test hlavolamov sme prichystali v dvoch verziách (A, B), žiaci ktorí sedeli v jednej lavici dostali odlišnú verziu. Problémy verzie B sme konštruovali pomocou preštylizovania problémov verzie A, pričom sme dávali pozor na to, aby sa zmeny dotýkali iba povrchových čŕt problémov. V prípade figurálnych problémov sme obrázok transformovali pomocou súmernosti alebo otočenia. Poradie problémov na oboch verziách sme zvolili tak, aby pre žiakov bola ekvivalencia čím menej badateľná.

Pri kvantitatívnom vyhodnotení riešení sme používali len dve kategórie: *správny* (1 bod) alebo *nesprávny* (0 bodov). Žiaci teda vedeli získať maximálne 11 bodov. Na vypracovanie úloh testu mali žiaci 40 minút.

Vzorka výskumu

Výskum sme uskutočnili v apríli-máji školského roka 2004/2005 na základných školách, gymnáziách a osemročných gymnáziách v Banskobystrickom, Košickom a Nitrianskom kraji. Do výskumu sme zapojili žiakov troch ročníkov: 5. ročník (Prima), 8. ročník (Kvarta) a 2. ročník (Sexta). Rozdelenie počtu žiakov vo výskume podľa ročníkov a krajov sme zhrnuli v *tab.* .1.

Tab. č. 1. Rozdelenie počtu žiakov vo výskume

Kraj	**Počet žiakov**			**Spolu**	%
	5. / Prima	8. / Kvarta	2. / Sexta		
Banskobystrický	66	85	42	**193**	26 %
Košický	66	65	62	**193**	26 %
Nitriansky	115	130	114	**359**	48 %
Spolu	**247**	**280**	**218**	**745**	
%	33 %	38 %	29 %	100 %	

Vyhodnotenie výskumu

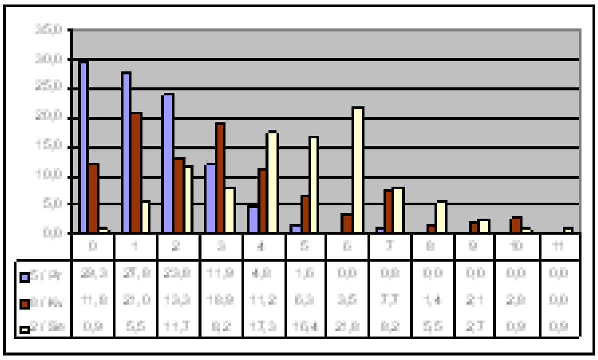
Kvantitatívne vyhodnotenie výskumu

Relatívna úspešnosť žiakov jednotlivých ročníkov v oboch verziách *Testu hlavolamov* obsahuje *tab.*.2.:

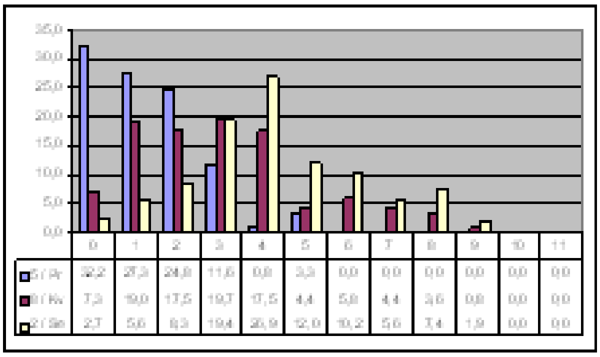
Tab. č. 2. Relatívna úspešnosť žiakov v jednotlivých ročníkoch

%		5. / Prima		8. / Kvarta		2. / Sexta	
		test *A*	test *B*	test *A*	test *B*	test *A*	test *B*
Výkon žiakov	priemer	13,1	11,9	28,5	27,9	43,6	38,6
	rozptyl	12,2	11,3	23,0	18,9	19,6	18,4
	n	126	121	143	137	110	108

Z *tab.*.2 vyplýva že pre žiakov 5. roč./Prima test sa ukázal dosť náročný. Keď triedime žiakov podľa získaných bodov, môžeme vidieť v prípade oboch verziách testu, že o niečo menej ako tretina žiakov 5. roč./Prima nedokázalo získať ani jeden bod, a viac ako 80% udával správnu odpoveď nanajvýš na 2 hlavolamy (pozri *obr.* $1a - 1b$). Najúspešnejší boli žiaci 2. roč./Sexta, ale ani oni nedokázali získať viac ako 50% maximálneho počtu bodov. Keď triedime žiakov podľa získaných bodov, vidíme že relatívna úspešnosť žiakov 8. roč./Kvarta, 2. roč./Sexta sa čím viac približuje k normálnemu rozdeleniu.



Obr. 1a. Histogram rozdelenia relatívnej úspešnosti v jednotlivých ročníkoch (test A)



Obr. 1b. Histogram rozdelenia relatívnej úspešnosti v jednotlivých ročníkoch (test B)

Súvislosť úspešnosti žiakov so skúmanými faktormi

Na začiatku výskumu každý žiak vyplnil dotazník, v ktorom uviedol svoje meno a priezvisko, dátum narodenia, názov školy, triedu, polročnú známku z matematiky v školskom roku 2004/2005, a najvyššie vzdelanie rodičov. Tieto údaje umožňujú vykonanie výpočtov, ktoré hľadajú odpoveď na otázku, aký je vzťah medzi úspešnosťou žiakov v teste a faktormi viac-menej spojenými s výkonom žiakov vo vyučovacom procese.

Pohlavie žiakov a ich úspešnosť v teste

Na porovnanie výsledkov chlapcov a dievčat v oboch verziách testu sme používali dvojvýberový t-test. Pri porovnaní získaného počtu bodov chlapcov a dievčat v oboch verziách testu na odchýlku rozptylov F-test neudával signifikantnú hodnotu, teda dvojvýberový t-test sme mohli urobiť v každom ročníku. V prípade 5. roč./Prima a 8. roč./Kvarta sme nenašli dôležité rozdiely medzi výkonom chlapcov a dievčat ani v jednej verzie testu (pozri *tab.* . 3a4.).

Tab. č. 3. Porovnanie úspešnosti chlapcov a dievčat v 5. roč./Prima

5. / Prima	priemer A	n	t	p	priemer B	n	t	p
Chlapci	1,39	54	- 0,34	0,73	1,26	57	- 0,42	0,67
Dievčatá	1,47	72			1,36	64		

Tab. č. 4. Porovnanie úspešnosti chlapcov a dievčat v 8. roč./Kvarta

8. / Kvarta	priemer A	n	t	p	priemer B	n	t	p
Chlapci	2,97	75	- 0,79	0,43	2,94	68	- 0,69	0,49
Dievčatá	3,31	68			3,18	69		

V 2. roč./Sexta v prípade verzie A testu sme sa dostali veľmi blízko k 95% hranici signifikancie zvyčajne použitej v pedagogických výskumoch, kým v prípade verzie B testu úspešnosť chlapcov bola vyššia na hladine významnosti $p < 0,01$ (pozri *tab.*.5).

Tab. č. 5. Porovnanie úspešnosti chlapcov a dievčat v 2. roč./Sexta

2. / Sexta	priemer A	n	t	p	priemer B	n	t	p
Chlapci	5,17	47	1,56	0,12	4,93	42	2,90	0,004**
Dievčatá	4,52	63			3,80	66		

Poznámka: *: $p < 0,05$; **: $p < 0,01$; ***: $p < 0,001$.

Polročná známka z matematiky a úspešnosť žiakov v teste

Na základe polročnej známky z matematiky sme vytvorili 4 skupiny tak, že žiakov s hodnotením „dostatočný“ a „nedostatočný“ sme zaradili do tej istej skupiny. Na overovanie hypotézy, že žiaci s lepším prospechom z matematiky sú úspešnejší pri riešení problémov na flexibilné myslenie, v každom ročníku sme urobili analýzu rozptylov pre porovnanie 4 skupín. Analýzu rozptylov môžeme vykonať len vtedy, keď rozptyly jednotlivých skúmaných skupín sa podstatne neodlišujú.

V 5. roč./Prima v prípade oboch verziách testu, Levenov test ukázal podstatné rozdiely medzi rozptylmi, teda analýzu rozptylov nie je možné urobiť. Pomocou Dunnettovho postupu sa však dá zistiť, medzi ktorými skupinami sú dôležité odlišnosti. V prípade oboch verzií testu sme dostali, že výsledky žiakov skupiny „výborný“ sú signifikantne lepšie ako výsledky žiakov ostatných skupín. Iné rozdiely medzi skupinami sme nenašli.

V 8. roč./Kvarta v prípade verzie A testu na základe Levenovho testu sme nemohli urobiť analýzu rozptylov. Po vykonaní Dunnettovho postupu sme došli k záveru, že výsledky žiakov skupiny „výborný“ sú signifikantne lepšie ako výsledky žiakov skupiny „dobrý“ a „dostatočný-nedostatočný“, a podobne výsledky žiakov skupiny „chválitebný“ sú signifikantne lepšie ako výsledky žiakov skupiny „dostatočný-nedostatočný“.

V prípade verzie B testu Levenov test neukázal podstatné rozdiely medzi rozptylmi jednotlivých skupín. Ako výsledok analýzy rozptylov sme dostali, že vplyv faktoru polročnej známky z matematiky na úspešnosť žiakov v *Teste hlavolamov* je signifikantný. Pomocou *Fisherovej LSD* skúšky sme sa chceli dozvedieť, v akej miere sa odlišujú jednotlivé skupiny. Výsledok párovej komparácie (*Post Hoc Comparison*) sme zhrnuli v *tab.* . 6. (v tabuľke sa nachádzajú hodnoty pravdepodobnosti p chýb zodpovedajúce k danému páru).

Tab. č. 6. Výsledok Fisherovej LSD skúšky v 8. roč./Kvarta

test B	2	3	4-5
1	0,002**	0,0004***	0,0001***
2		0,554	0,001**
3			0,005**

Poznámka: *: $p < 0,05$; **: $p < 0,01$; ***: $p < 0,001$.

V 2.roč./Sexta Levenov test neukázal podstatné rozdiely medzi rozptylmi jednotlivých skupín ani v prípade verzie A, ani verzie B. Podľa analýzy rozptylov vplyv faktoru polročnej známky z matematiky na úspešnosť žiakov v *Teste hlavolamov* je signifikantný v prípade oboch verziách testu. *Tab.* . 7 obsahuje výsledok *Fisherovej LSD* skúšky.

Tab. č. 7. Výsledok Fisherovej LSD skúšky v 2. roč./Sexta

test A	**2**	**3**	**4-5**	**test B**	**2**	**3**	**4-5**
1	0,097	0,003**	0,0002***	**1**	0,280	0,024*	0,0003***
2		0,097	0,007*	**2**		0,111	0,0009***
3			0,296	**3**			0,062

Poznámka: *: $p < 0,05$; **: $p < 0,01$; ***: $p < 0,001$.

Na základe výsledkov analýzy rozptylov môžeme vysloviť, že je silný vzťah medzi výsledkami žiakov v *Teste hlavolamov* a polročnou známkou z matematiky. Zdá sa, že flexibilné myslenie žiakov s lepším prospechom z matematiky je viac rozvinuté. To môžeme odôvodniť s tým, že z matematiky šikovní žiaci vedia vytvoriť o danom probléme širšiu reprezentáciu, čo značne zvyšuje pravdepodobnosť úspešného riešenia problému.

Vzdelanie rodičov a úspešnosť žiakov v teste

Vzdelanie rodičov je dosť často sledovaný faktor v pedagogických výskumoch. V našej analýze sme neočakávali signifikantné vzťahy medzi úspešnosťou žiakov pri riešení netradičných hlavolamov v školskom vyučovaní a najvyšším vzdelaním rodičov.

Naproti tomu po analýze výsledkov jednotlivých verzií testu pomocou Spearmanovej korelácie v prípade 5. roč./Prima a 8. roč./Kvarta sme našli silnú pozitívnu koreláciu medzi výsledkami žiakov a vzdelaním rodičov. V prípade 2. roč./Sexta to však nemôžeme vysloviť: tam sme našli iba koreláciu medzi úspešnosťou žiakov vo verzii A testu a vzdelaním otca (pozri *tab.* . 8.).

Tab. č. 8. Súvislosť medzi úspešnosťou žiakov a vzdelaním rodičov

	test A		**test B**	
	vzdelanie otca	vzdelanie matky	vzdelanie otca	vzdelanie matky
5 / Prima	0,33***	0,26**	0,39***	0,32***
8 / Kvarta	0,34***	0,34***	0,38***	0,41***
2 / Sexta	0,20*	0,058	0,06	0,11

Poznámka: *: $p < 0,05$; **: $p < 0,01$; ***: $p < 0,001$

Zhrnutie

V uvedenom príspevku sme publikovali výsledky empirického výskumu zameraného na zistenie vzťahov medzi flexibilným myslením žiakov základných a stredných škôl a niektorými faktormi. Do výskumu sa zapojilo vcelku 745 žiakov z troch ročníkov, pri zbere údajov sme používali dva meracie prostriedky (Dotazník, Test hlavolamov).

Na základe výsledkov môžeme poznamenať, že na vzorke žiakov základných škôl resp. ročníkoch Prima a Kvarta osemročných gymnázií nie je významný rozdiel medzi výsledkami pohlavia. Na stredných školách resp. v ročníku Sexta osemročných gymnázií chlapci dosiahli lepšie výsledky ako dievčatá, hoci signifikantné rozdiely sme našli iba v prípade verzie B testu.

Ďalším dôležitým výsledkom nášho výskumu je silná korelácia školskej známky z matematiky s úrovňou flexibilného myslenia žiakov, t.j. žiaci s lepším prospechom z matematiky sú úspešnejší v riešení problémov na flexibilné myslenie.

Literatúra

[1] Dreyfus, T. – Eisenberg, T.: *A matematikai gondolkodás különböző oldalairól.* In Sternberg, R.J. – Ben-Zeev, T. (eds.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest 1998.

[2] Róka, S.: *Igaz vagy hamis?* Tóth Könyvkereskedés és Kiadó kft, Debrecen 2002.

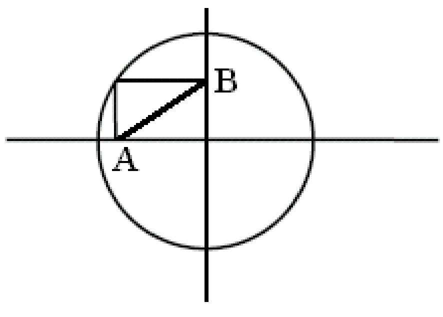
Adresa autora:
RNDr. Štefan Gubo
Univerzita J. Selyeho, Pedagogická fakulta
Katedra informatiky
ul. Roľníckej školy 1519
945 01 Komárno
e-mail: gubo.istvan@selyeuni.sk

Príloha – Problémy Testu hlavolamov (test A)

1. Vodné ľalie zdvojnásobia svoj obsah za 24 hodín. Na začiatku leta je v jazere jedna vodná ľalia. Na pokrývanie celého jazera ľalie potrebujú 60 dní. Ktorého dňa je pokrytá polovica jazera?

2. V šuflíku sa nachádza 20 párov čiernych a 15 párov bielych ponožiek rovnakej veľkosti. Ak je v miestnosti úplná tma a nevieme rozlíšiť farbu ponožiek, koľko kusov treba vybrať, aby sme si mohli byť úplne istý, že budeme mať dve ponožky rovnakej farby?

3. Aká je dĺžka úsečky AB, ak polomer kružnice je $r = 5$ cm?

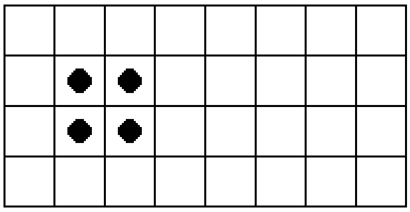


4. Ako je možné rozdeliť troma rezmi tortu kruhového tvaru na 8 rovnakých častí?

5. Použitím 6 zápaliek zostrojte 4 rovnostranné trojuholníky! Nakreslite riešenie!

6. Máme dva rovnaké poháre. Do prvého nalievame víno, do druhého rovnaké množstvo vody. Potom z prvého pohára vyberieme lyžicu vína, prelievame to do druhého, a dôkladne premiešame. Teraz prelejeme lyžicu z tejto zmesi do pohára s vínom. Je viac vody v pohári pôvodne s vínom, alebo je viac vína v pohári pôvodne s vodou? Odôvodnite svoju odpoveď!

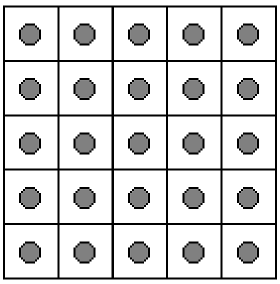
7. Na obrázku je pôdorys pozemku, na ktorom sa nachádzajú 4 studne. Ako by sa dalo rozdeliť pozemok na 4 častí rovnakého tvaru a obsahu tak, aby v každej časti bola jedna studňa! Nakreslite riešenie!



8. Osobné auto ide z Nitry do Bratislavy rýchlosťou 60 km/h. O 15 minút neskôr štartuje druhé auto z Bratislavy do Nitry rýchlosťou 70 km/h. Vzdialenosť dvoch miest je 90 km. Ktoré z nich bude bližšie k Nitru, keď sa stretnú?

9. Na nič netušiaci papagáj sa potichučky priplazila mačka, ktorá sa naňho vrhla. Papagáj zostal bez pohybu a nevydal ani hlások. Prečo?

10. Na každé pole šachovnice rozmerov 5x5 políčok postavme lienku. Zrazu každá lienka prejde na susedné políčko (dve políčka sú susedné, ak majú spoločnú stranu). Môže sa stať, že po prechode na každom políčku sedela jedna lienka? Odôvodnite svoju odpoveď!



11. Na vyraďovacej šachovej súťaži štartovalo 512 súťažiacich. Spolu koľko hier hrali na súťaži? Odôvodnite svoju odpoveď!

Medzipredmetové vzťahy matematiky s inými vyučovacími predmetmi

PETER HANISKO

ABSTRACT. *The paper deals with interdisciplinary relations between mathematics and another teaching subjects at high school. There are described possibilities of utilizations and applications of mathematics and mathematical knowledge to another teaching subjects.*

ÚVOD

Matematika je veda o kvantitatívnych vzťahoch a priestorových formách reálneho sveta. Ako taká zaujíma medzi ostatnými vedami zvláštne postavenie. Jednou z význačných zvláštnosti je jej neobyčajná rozšírenosť v najrôznejších oblastiach vedy a techniky. V takmer všetkých vedných oblastiach sa možno stretnúť s matematikou, s matematickou formou definícií základných pojmov a s matematickými vzorcami, ktoré výstižne opisujú súvislosti a zákonitosti tej ktorej vednej disciplíny.

Jedným z cieľov matematického vzdelávania na gymnáziách je, aby žiaci vedeli aplikovať získané vedomosti a zručnosti pri riešení rôznych úloh nielen z fyziky, ale aj pri štúdiu ďalších prírodovedných alebo technických predmetov, modelovať jednoduché fyzikálne, chemické, biologické, ale aj ekonomické javy a efektívne pritom využívať výpočtovú techniku.

O užitočnosti matematiky sa najmä dnes, v období veľkého vedecko-technického rozvoja veľa hovorí. Matematické vzdelávanie je potrebné nielen pre fyzikov a technikov, ale aj pre lekárov, biológov, psychológov, právnikov, politikov, jazykovedcov a mnohých ďalších. Matematika dáva nielen prospešné poznatky, ale významne formuje aj myslenie a mnohé osobnostné vlastnosti.

1 Medzipredmetové vzťahy vo vyučovaní prírodovedných predmetov

Žiaci poznávajú skutočnosť, že prírodné vedy skúmajú svet z rozličných hľadísk svojimi vlastnými výskumnými metódami. V súhrne výsledky skúmania dávajú celkovú predstavu o stavbe a štruktúre prírody a sveta, čo má dôležitý výchovný význam.

Medzipredmetové vzťahy sú podmienené existenciou jednotlivých vyučovacích predmetov v školskom systéme a odrážajú objektívne existujúce medzivedné vzťahy. Každá prírodná veda je súborom vnútorne logicky usporiadaných poznatkov, ktoré svojím vecným obsahom tvoria určité vedné odbory (disciplíny). V súčasnosti je pre rozvoj prírodných vied charakteristické, že poznatky jednotlivých vied, ale aj vedných odborov neexistujú izolovane, ale navzájom sa prelínajú a často spolu kauzálne súvisia, a tak dochádza k ich integrácii. Vzťahy medzi poznatkami jednotlivých vedných odborov môžeme rozdeliť do dvoch skupín[2].

[2]FAZEKÁŠOVÁ, D. a kol.: *Medzipredmetové vzťahy vo vyučovaní prírodovedných predmetov.* Prešov, 2004.

- **Medziodborové vzťahy** - sú to vzťahy medzi poznatkami jednotlivých vedných odborov rôznych vied. Označujú sa aj termínom ***interdisciplinárne vzťahy***.

- **Vnútroodborové vzťahy** - sú to vzťahy medzi poznatkami jednotlivých vedných odborov tej istej vedy. Označujú sa aj termínom ***intradisciplinárne vzťahy***.

Medziodborové a vnútroodborové vzťahy sa označujú spoločným názvom **medzivedné vzťahy**, a sú odrazom vzájomnej súvislosti a podmienenosti prírodných javov. Vzájomné rešpektovanie a využívanie medzivedných vzťahov medzi jednotlivými prírodnými vedami umožňuje riešiť mnohé problémy a vedie k pochopeniu podstaty javov a dejov prebiehajúcich v prírode, napomáha pri vytváraní zjednodušeného obrazu sveta.

Medzipredmetové vzťahy vo vyučovaní na gymnáziách sa môžu uskutočňovať dvoma spôsobmi[3].

- Časovou koordináciou pri vyučovaní rôznych vyučovacích predmetov.

- Jednotným výkladom vedeckých pojmov preberaných v matematike, fyzike a v iných vyučovacích predmetoch.

Vzájomná súvislosť medzi vyučovacími predmetmi ma principiálny pedagogický význam. Od jej realizácie závisí trvanlivosť a použiteľnosť vedomosti žiakov, rozvíjanie ich myslenia a prispieva k systematickosti vyučovania. Pri výuke matematiky na gymnáziách sú dôležité medzipredmetové vzťahy najmä s fyzikou a chémiou. Účelné využívanie týchto vzťahov vedie k prekonávaniu izolovaných štruktúr poznatkov z jednotlivých predmetov. Tým možno lepšie prispieť k hlbším vedomostiam žiakov, ku zvýšeniu kvality myšlienkových procesov a dosiahnutie zovšeobecňujúceho myslenia, ktoré podporuje samostatné riešenie problémov. Napríklad pri vyučovaní fyziky na gymnáziu sa opierame nielen o predchádzajúce vedomostí z fyziky, ale aj o určité poznatky z iných prírodných a humanitných predmetov, najmä matematiky, chémie, dejepisu a pod. Napríklad, pri preberaní kmitania a vlnenia vo fyzike sa učiteľ opiera o vedomosti z matematiky (trigonometrické funkcie), pri výklade zákonov elektrolýzy sú potrebné poznatky o elektrolytickej disociácii a o valencii z chémie, pri objasňovaní historického vývoja objavov napr. z elektriny a magnetizmu sa odvolávame na historické skutočnosti o potrebách priemyslu v tomto období, pri vyučovaní o zemskom magnetickom poli sú zase potrebné vedomosti zo zemepisu. Takto by sme mohli pokračovať aj ďalej o význame jedného predmetu pre druhý a o ich vzájomných prepojeniach.

Matematika prispieva k realizácií princípu systematickosti v iných vyučovacích predmetoch. Takáto systematickosť sa zabezpečuje vo vyučovaní každého predmetu a aj v medzipredmetových vzťahoch. Táto systematická väzba medzi jednotlivými vyučovacími predmetmi učí žiakov, že medzi rôznymi druhmi poznania nie sú ostré hranice a že rôzne oblasti vedy a techniky nie sú od seba oddelené, ale vzájomne späté.

[3]REZNIKOV, L. I., a kol.: *Základy metodiky vyučovania fyziky.* 1. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1972. s. 24.

2 Medzipredmetové vzťahy matematiky s inými vyučovacími predmetmi

Problematika vnútropredmetových a medzipredmetových vzťahov sa dotýka prírodovedných predmetov ako sú fyzika, matematika, chémia, biológia, zemepis. Práve v nich a najmä v ich vyučovaní, by sa malo odrážať vzájomné pôsobenie a prienik obsahu ich poznania. Prírodovedné učebné predmety používajú veľa spoločných pojmov, študujú tie isté objekty a systémy, aj keď z rozdielnych hľadísk, podľa vlastného predmetu skúmania a práve v tom spočíva ťažisko ich spolupráce. Podstata realizácie vnútropredmetových a medzipredmetových vzťahov v prírodovedných učebných predmetoch je v tom, že nejde len o uskutočňovanie integrity v poznávaní prírodnej skutočnosti, ale ide aj o rozvoj poznávacej činnosti žiaka, jeho tvorivosti, logického myslenia, teda o všestranný rozvoj žiakovej osobnosti.

Matematika sa využíva pri vyučovaní takmer všetkých predmetov na gymnáziách. Predmety, v ktorých sa matematika využíva je možné rozdeliť do troch skupín.

- Predmety, pri vyučovaní ktorých sa bez matematiky vôbec nezaobídeme (fyzika, astrofyzika, chémia, informatika, základy ekonómie).
- Predmety, v ktorých sa matematika využíva len v menšej miere (biológia, zemepis, geológia).
- Predmety, v ktorých sa matematika nevyužíva na priame výpočty rôznych veličín, ale sa s matematikou pracuje len ako s pojmom alebo v súvislosti s historickými udalosťami, ktoré s matematikou súvisia (dejepis).

2.1 Súvislosť matematiky s fyzikou

Učivo fyziky je pevne spojené s matematikou, pretože vo fyzike sa okrem experimentálnej metódy vo väčšine prípadov používa najmä metóda matematická. Vo fyzike vyučovanej na gymnáziách asi niet oblasti, v ktorej by sa žiaci pri formulácií fyzikálnych pojmov a zákonov nestretli s matematikou. Matematickú terminológiu a pojmy používame pri definovaní rôznych fyzikálnych veličín a ich jednotiek.

Fyzikálne závislosti sa vo fyzike na gymnáziu vyjadrujú zvyčajne analytický, pomocou rovníc. Pritom je veľké nebezpečenstvo, že žiaci budú tieto rovnice formálne chápať ako algebraické výrazy. Je preto potrebné venovať veľkú pozornosť správnemu chápaniu funkčnej závislosti. V matematike pre rozvitie pojmu funkčná závislosť sú veľmi dôležité príčinno-následné súvislosti medzi javmi, ktoré sa vyučujú vo fyzike. Funkčná závislosť sa môže vyjadriť tromi spôsobmi - ***analyticky***, ***tabuľkou*** a ***graficky***. Vo vyučovaní fyziky na gymnáziu má prednosť najmä grafický spôsob. Používajú sa tu tri matematické pojmy - súradnicová sústava, premenná veličina a funkcia. Graf vyjadruje kvantitatívny priebeh fyzikálnej závislosti. Dynamiku fyzikálneho javu, ktorý je vyjadrený v analytickej forme pochopia však len žiaci, ktorí sú v matematike na dostatočne vysokej úrovni.

Stanovenie grafických závislosti medzi fyzikálnymi veličinami na základe experimentu pomáha žiakom utvárať si predstavy o priamej a nepriamej úmernosti, o lineárnej, kvadratickej, exponenciálnej a logaritmickej funkcii, o rýchlosti zmeny funkcie apod. Graf názorne ukazuje predovšetkým zmenu fyzikálnych veličín v závislosti od času (rýchlosť pohybu, rýchlosť zmeny veľkosti prúdu, apod.) a od polohy (zmena teploty pozdĺž kovovej tyče, potenciál v elektrickom obvode, atď.). Grafické zobrazenie sa používa pri riešení fyzikálnych úloh a spracovaní a rozbore výsledkov laboratórnych prác. Používajú sa najmä grafy v pravouhlom súradnicovom systéme (grafy z kinematiky, termodynamiky), v polárnych súradniciach (diagram rozloženia intenzity svetla okolo zdroja svetla), nomogramy (izotermy látok), vektory (v statike a elektrostatike), zobrazenia polí (siločiary elektrického a magnetického poľa, ekvipotenciálne hladiny), zobrazenia v optike, atómovej fyzike (úrovne energie) a pod. Všetky tieto typy grafov sú účinným názorným prostriedkom vo vyučovaní fyziky.

Dôležité je matematické vyjadrovanie fyzikálnych veličín na základe pojmu funkcia. Interpretácia pojmu funkcia pri preberaní vzťahov pre rýchlosť, dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, rovnice pre výkon elektrického prúdu alebo periódu kmitov matematického kyvadla nevyvoláva u žiakov nijaké ťažkosti. Čas, dráha, výkon alebo perióda sú funkcie, zrýchlenie rovnomerne zrýchleného pohybu, odpor a zrýchlenie voľného pádu sú parametre. V týchto prípadoch sa vždy jedná o funkčnú závislosť jednej premennej. Iné je to pri riešení problémov, kedy sa uvažuje funkčná závislosť dvoch a viacerých premenných. Tieto prípady sú už ťažšie pochopiteľné mnohým žiakom.

V niektorých prípadoch musia žiaci poznať význam a pojem derivácie, ktorý sa však na gymnáziách vyučuje len okrajovo, vo voliteľných alebo nepovinných predmetoch z matematiky. Týka sa to najmä prípadov zavedenia pojmu derivácia v bode, napr. pri zavedení fyzikálnych pojmov ako rýchlosť, zrýchlenie apod. Na odvodenie fyzikálnych závislosti veľkosti odstredivého zrýchlenia, periódy kmitov matematického kyvadla a iných, sa tiež využíva pojem derivácia. Nevýhodou je, že derivácie sa na gymnáziách preberajú až na konci vyučovania matematiky, keď sú už všetky uvedené témy z fyziky prebrané. Preto, pri zavedení niektorých fyzikálnych pojmov, kde je potrebná derivácia, sa využíva pomer $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, kde veličiny Δx a Δt sú definované ako najmenšie hodnoty, ktoré ešte možno prístrojmi zmerať. Je potrebné mať na zreteli, že v celkom malých časových intervaloch procesy prebiehajú rovnomerne. Za týchto podmienok sú stredné a okamžité hodnoty fyzikálnych veličín rovnaké. Na gymnáziách je to možné riešiť tak, že pri opakovaní fyziky môžeme použiť pojem derivácie na to, aby sme spresnili už prv zavedené fyzikálne pojmy a tiež odvodili najdôležitejšie rovnice vo fyzike, ktoré boli predtým odvodené zjednodušene alebo boli formulované bez odvodenia. Na väčšine gymnázií sa však takýto postup nerealizuje.

Vo vyučovaní fyziky na gymnáziách sa pri riešení fyzikálnych úloh vykonávajú operácie nielen s číslami, ale aj s rozmermi jednotlivých fyzikálnych veličín, keďže číselná hodnota a jednotka (m, s, kg) fyzikálnej veličiny sú medzi sebou pevne spojené a spolu hlbšie vyjadrujú kvantitatívne vzťahy existujúce v prírode. Na hodinách fyziky sa matematické úkony vo väčšine prípadov vykonávajú len s číslami. V tom lepšom prípade sa jednotky pridávajú len vo výsledku.

Vo vyučovaní fyziky možno matematické úkony s fyzikálnymi veličinami realizovať dvojakým spôsobom[4]. Všetky fyzikálne veličiny určené v podmienkach úlohy sa prevedú do jedného systému jednotiek, najčastejšie do SI sústavy. Potom sa dosadia do rovnice a vykonávajú sa algebraické úkony s číslami a jednotkami fyzikálnych veličín. Takýto postup riešenia sa využíva najmä na začiatku preberania tej ktorej témy z fyziky a aj v prípadoch, keď podľa jednotky fyzikálnej veličiny môžeme určiť správnosť rovnice, z ktorej počítame výsledok fyzikálnej úlohy. V iných prípadoch všetky fyzikálne veličiny tiež prevedieme do jednotného systému jednotiek (SI sústava) fyzikálnych veličín a matematické operácie robíme len s číslami. V odpovedí potom za číselnou hodnotou dáme príslušnú jednotku fyzikálnej veličiny. V prípade potreby nie je problém preveriť správnosť výslednej jednotky vo výsledku tak, že sa

[4]REZNIKOV, L. I., a kol.: *Základy metodiky vyučovania fyziky.* s. 26.

vykonajú matematické výkony len s jednotkami fyzikálnych veličín.

Vo fyzike na gymnáziách sa často používa aj približné určovanie hodnôt. Pri spracovávaní výsledkov rôznych fyzikálnych experimentov nemá zmysel určovať výsledky s väčšou presnosťou ako je presnosť vlastného merania. Presnosť merania závisí od presnosti meracích prístrojov.

Pri určovaní výsledkov vo fyzike je veľmi dôležité správne zaokrúhľovanie výsledkov matematických operácií a určenie chýb výsledkov merania. Pri riešení fyzikálnych úloh sa musia dôsledne uplatňovať pravidlá približného riešenia. Nie vždy je totiž potrebné robiť presné výpočty. Vo väčšine prípadov totiž stačí aby sme poznali len približnú hodnotu veličiny, ktorú dostaneme riešením problému.

Význam matematiky vo vyučovaní fyziky spočíva v tom, že sa matematický formulujú podmienky a z týchto podmienok sa matematickou cestou získavajú závery. Na základe východiskových údajov, ktoré charakterizujú stav telesa alebo sústavy telies, pomocou matematických operácií dostaneme záver, ktorý sa buď teoretický alebo experimentálne overí. Matematicky sa odvodzujú vzťahy napr. vzťahy určujúce rozťažnosť telies vplyvom tepla, rovnice pre ohniskovú vzdialenosť šošovky, zväčšenie mikroskopu alebo ďalekohľadu a pod.

Matematickou cestou možno vyučovať mnohé témy učiva fyziky, ktoré vysvetľuje jedná teória, napr. zákony pre plyny, kmity a vlnenie, atď. Tým sa rozvíja myslenie žiakov. Veľmi dôležité je správne používanie jednotiek fyzikálnych veličín. Je potrebné, aby sa jednotky požívali podľa medzinárodnej sústavy jednotiek SI.

Spojitosť medzi matematikou a fyzikou sa donedávna prejavovala najmä v tom, že fyzika využívala matematiku na riešenie fyzikálnych problémov a zadávala matematické úlohy na riešenie. V súčasnosti už aj fyzika prispieva k rozvoju matematiky.

2.2 Súvislosť matematiky s inými vyučovacími predmetmi na gymnáziu

Spoločnou črtou použitia matematiky pri vyučovaní iných predmetov na gymnáziách je to, že matematika, ktorá sa tu používa je matematika elementárna, ktorá ešte nedovoľuje zobraziť a skúmať pohyb, plynulý proces, ale ani zložitejšie súvislosti. Takmer všetky vedné disciplíny využívajú matematiku alebo aspoň niet zásadných príčin, ktoré by možnosť jej použitia vylučovali. Preto oblasť použitia matematiky v praxi ani v teórií nie je zásadne ohraničená, veď všetky formy pohybu možno skúmať matematicky. Nie v každej vednej disciplíne sú aj rovnaké možnosti pre použitie matematiky. Každá vedná disciplína, ktorá sa relatívne samostatne rozvíja, je ovplyvnená rozvojom iných disciplín a sama raz zreteľnejšie, raz menej zreteľne ovplyvňuje rozvoj ostatných vedných disciplín.

S matematickým aparátom, aj keď len elementárnymi základmi sa stretávame v mnohých prírodovedných, ale aj humanitných vyučovacích predmetoch na gymnáziu.

Pri vyučovaní základov ***kryštalografie a mineralógie*** v predmete **geológia** sa matematika využíva pri definovaní kryštálových sústav, kde rozhodujúcu úlohu majú tzv. kryštálové osi, ich poloha a dĺžka. Matematika skúma priestorové mriežky a skúma rozloženie molekúl v kryštáloch. V sústave kosoštvorcovej a v sústave kubickej sú kryštálové osi navzájom kolmé na základný dvojihlán. V prvej z nich má každá os inú dĺžku, v druhej majú dve osi rovnakú dĺžku a tretia os inú dĺžku. V kockovej sústave všetky tri osi majú rovnakú dĺžku. Trojklonná sústava má tri rôzne dlhé osi, ktoré zvierajú ostré uhly. Jednoklonná sústava sa vyznačuje tým, že jedná z osi zviera s druhými dvoma pravý uhol, ale tieto dve zvierajú spolu ostrý uhol. Napokon šesťuholniková sústava má štyri kryštálové osi (tri rovnako dlhé ležia v jednej rovine, rozdeľujú ju na šesť rovnakých uhlov a štvrtá os je kolmá na túto rovinu). V základoch mineralógie sa stretávame s použitím fyziky pri určovaní vlastnosti nerastov (hustota, tvrdosť, optické vlastnosti, elektrické a magnetické vlastnosti, atď.) a cez fyziku sa stretávame s matematikou pri vyučovaní mineralógie na gymnáziách.

Podobne je to aj v **chémii**. Pri definovaní rôznych chemických vlastnosti prvkov a zlúčenín (atómová a molekulová hmotnosť) a pri výpočtoch, ktoré sa v chémii často vyskytujú sa používa matematika. Napríklad Mendelejevov objav periodickej sústavy prvkov a pokroky fyzikálnej chémie otvorili dvere pre použitie matematiky v chémii. Matematika sa v chémii využíva najmä prostredníctvom fyzikálnych procesov, ktoré prebiehajú spolu s chemickými procesmi, aj keď ide o procesy kvalitatívne odlišné, ale prebiehajú súčasne a nemožno ich od seba oddeliť. Na gymnáziách sa matematika v chémii používa najmä pri výpočtoch koncentrácie roztokov, pri výpočtoch chemických vzorcov, chemických väzieb, molekulových hmotnosti a pri periodickej sústave prvkov.

Zriedkavejšie sa stretávame s potrebami základných matematických vedomosti na gymnáziu pri vyučovaní **zemepisu**. Aj tu však pri určovaní polohy miesta na zemskom povrch (zemepisná šírka - rovnobežky, zemepisná dĺžka - poludníky) sa používajú výrazy z geometrie práve tak, ako aj pri vysvetľovaní zákonitosti striedania ročných období na zemeguli (obratníky, polárne kruhy, ekliptika, uhol, ktorý zviera zemská os s ekliptikou, dni rovnodennosti, miestny, pásmový a svetový čas, časová rovnica) sa nezaobídeme bez matematiky. Taktiež aj pri osvojovaní si základných poznatkov o mapách (mierka, rôzne druhy máp a projekcií) o podnebí (izotermy letné a zimné, priemerné zrážky, ich závislosť od nadmorskej výšky a polohy skúmanej oblasti), pri opise jednotlivých krajín a štátov (hustota obyvateľstva, percentuálne porovnania s inými krajinami a pod.) a pri rôznych iných, nie výhradne opisných poznatkoch, ktoré sa vyučujú na hodinách zemepisu na gymnáziu sa používajú základné poznatky a metódy matematiky.

Pri vyučovaní **biológie** na gymnáziu sa zaobídeme pomerne dobré bez poznatkov z matematiky. Je to snáď preto, že zložitosť a zákonitosti biologických procesov dávajú možnosť odovzdať len nepatrnú časť hlbších základných poznatkov. Azda jediným miestom, kde sa matematika v biológii vyučovanej na gymnáziu používa aspoň okrajovo, sú základy genetiky.

Pri vyučovaní **informatiky** na gymnáziu sa využíva skutočnosť, že matematika ako exaktná veda má na riešenie typových úloh presne stanovené postupy riešenia. Ich ovládanie je založené na logickej nadväznosti a následnej forme automatizácie riešenia. Ako príklad medzipredmetových vzťahov matematiky a informatiky na gymnáziách je možné uviesť výučbu algoritmov. Výhodné je vo výučbe algoritmov a následne na praktických cvičeniach aplikovať metódy rozboru riešenia konkrétnej úlohy na príkladoch z matematiky. Úlohou aplikovania týchto metód je naučiť študentov známe postupy riešenia matematických úloh zapísať vo forme vývojového diagramu. Základným krokom je logický rozbor riešenia danej úlohy do čiastkových krokov.

V humanitných predmetoch sa matematika nevyužíva priamo na konkrétne výpočty rôznych veličín alebo charakteristík tak ako je to v prírodovedných predmetoch, ale s matematikou sa pracuje len ako s pojmom, čiže nepriamo.

Pri vyučovaní **dejepisu** sa žiaci stretávajú s matematikou pri preberaní učiva, ktoré sa týka jednotlivých historických období, v ktorých pôsobili významné osobnosti matematiky a v ktorých vznikali jednotlivé významné matematické teórie a metódy (napr. staroveké Grécko - vznik geometrie apod.).

Predmet, ktorý je založený na matematike a ktorý matematiku využíva vo veľkej miere je **základy ekonómie a ekonomiky**. Tu sa počítajú a určujú základné ekonomické ukazovatele, ktoré vo väčšej alebo menšej miere ovplyvňujú každodenný život každého človeka (HDP, HNP, miera inflácie, krivky ponuky a dopytu, proces tvorby cien, miery nezamestnanosti, úrokové miery a úroky, zisk a strata, atď.).

Záver

Len vo veľmi výnimočných prípadoch používa človek symboly, ktoré sú zrozumiteľné na celom svete. Na matematiku, ale aj iné predmety nemôžeme pri vypočítavaní takýchto prípadov nikdy zabudnúť. Naviac prínos matematiky pre každý ďalší odbor ľudskej činnosti možno bez väčších problémov rozlíšiť a označiť ako nevyhnutný.

Matematika je deduktívna veda, ktorá odvodzuje veľké množstvo špecifických teórií z malého počtu veľmi všeobecných axióm. Nie všetky závery, ktoré sa podarí matematike sformulovať, nájdu uplatnenie aj vo fyzike, chémii, zemepise a iných predmetoch. Niekedy posunie o obrovský krok dopredu len malý fragment nejakej rozsiahlej teoretickej práce. Matematika a iné predmety, v ktorých sa matematika využíva aj napriek tomu tvoria nerozlučný celok, ktorý denne používame k riešeniu problémov najrôznejšieho druhu. Výstavba matematických modelov je však vždy spojená s istými zjednodušujúcimi predpokladmi, ktoré riešenie problému uľahčuje a niekedy aj priamo podmieňuje. Napríklad záporný výsledok získaný matematickým výpočtom má vo fyzike, ale aj iných vedách hneď niekoľko možných vysvetlení. Môže to napríklad vo fyzike znamenať, že predpokladané silové účinky majú obrátený smer, alebo že takýto výsledok nie je nutné brať do úvahy, pretože sa napríklad pri objeme určitej látky v chémii alebo biológii jedná o zanedbateľnú veľkosť, ktorú získame napríklad ako nejaké riešenie kvadratickej rovnice.

Fyzika, chémia, biológia a iné predmety majú na rozdiel od matematiky k dispozícii rôzne experimenty a nie sú založené len na matematických dôkazoch. V mnohých prípadoch ich nezaujíma ani všeobecné riešenie. Keď narazia na problémy, že niečo neplatí, snažia sa v mnohých prípadoch nájsť rôzne spôsoby aby to platilo. Naviac riešia pomerne málo rôznorodých problémov, takže to nevedie k neprehľadnostiam, ako keby každý problém mal svoj vlastný originálny postup. Avšak aj napriek tomu sa tieto predmety bez matematiky nedokážu vôbec zaobísť.

Literatúra

[1] FAZEKÁŠOVÁ, D. a kol.: *Medzipredmetové vzťahy vo vyučovaní prírodovedných predmetov.* Prešov, 2004.

http://naturescience.fhpv.unipo.sk/fyzika/didmat/medzipredmet.htm.

[2] REZNIKOV, L. I., a kol.: *Základy metodiky vyučovania fyziky.* 1. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1972. 146 strán.

Adresa autora
PaedDr. Ing. Mgr. Peter Hanisko
Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita v Ružomberku
Detašované pracovisko Levoča
Kláštorská 23
054 32 Levoča
e-mail: hanisko@fedu.ku.sk

Verifikácia výsledkov vplyvu blended learning na vyučovanie matematiky

Lívia Hasajová

Abstract. *On adjusting activity blended learning into algebraic educational require adaptation and evaluation experimental act direct in taught operation. Thence are in report initiate finding blended lerning in lesson mathematics. Results they are analyse and adjusting by built in statistic manner.*

Kľúčové slová: blended learning, e-learning, e-vzdelávanie, experiment, Internet, informačné a komunikačné technológie, spracovanie údajov, vedomostná úroveň, štatistika

Úvod

K aktuálnym témam súčastného rozvoja vzdelávacích metód v teórii vyučovania matematiky neodmysliteľne patrí tvorba a použitie elektronických študijných materiálov. Takto pripravené materiály sa dajú veľmi efektívne využiť v rôznych formách štúdia (denné, dištančné). Trendom vzdelávania sa už niekoľko rokov v komerčnej sfére, no stále častejšie i vo vzdelávacích inštitúciách stáva ***e-learning***. *„Je to vlastne elektronický vzdelávací kurz, ktorý sa celý odohráva výlučne v prostredí Internetu a ponúka bohatú, pútavú a interaktívnu výučbovú skúsenosť.*“[5] Kombinovaná forma vyučovania matematiky – ***blended learning*** v doslovnom preklade znamená zmiešané vyučovanie. Čiže kombinácia klasickej prezentačnej formy (cvičenia, prednáška) vyučovania a e-learningovej podpory (elektronické materiály prístupné na Internete v prostredí moodle). Okrem klasického prezentovania učiva na cvičeniach majú študenti možnosť pracovať aj s materiálmi v elektronickej forme. Text musí byť kratší, ale kvalitnejší a predovšetkým musí byť jednoznačne zrozumiteľný ako jeho samotný obsah, tak aj ovládanie, orientácia študenta v ňom. Pokiaľ chceme vytvoriť učebnú oporu pre e-learning, nemusíme mať od začiatku žiadne špeciálne a nákladné programové vybavenie.

„Súčastný rozvoj *informačných a komunikačných technológií (IKT)* spôsobuje prevratnú zmenu metód vzdelávania.“[6] Nové vzdelávacie metódy vplývajú na vyučovanie a samostatné štúdium matematiky.

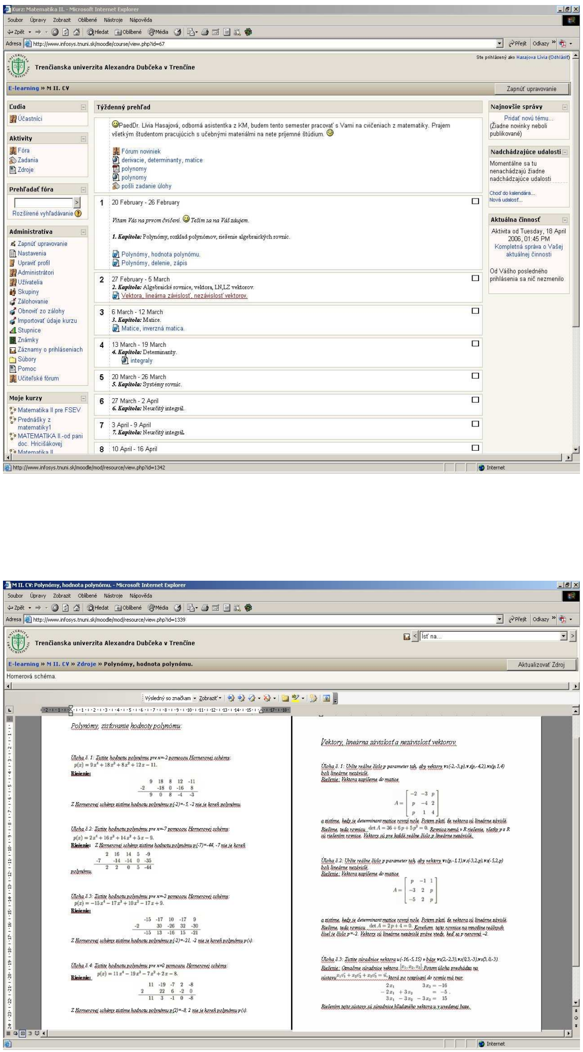
Priebeh a ciele experimentu

Na našej katedre matematiky používame ***blended learning*** viac ako dva roky, pripravujeme si elektronické materiály pre vyučovanie cvičení z matematiky I., II.(viď ukážka obr. č.1). Treba priznať, môžeme stále niečo vylepšovať, tento proces nie je to uzavretý. Zaujímala nás otázka, do akej miery ovplyvní používanie ***blended learning*** úspešnosť záverečného testovania študentov, konkrétne zápočtové písomné práce z cvičení z matematiky. Počas semestra písali rovnaké zápočtové previerky, pre

[5]Fulier, J.: *Vplyv koncepcií vyučovania a moderných výučbových prostriedkov na vyučovanie matematiky*, In: Učiteľ matematiky-jeho profil a príprava, UKF Nitra, Edícia Prírodovedec č. 168, Vydavateľstvo Michala Vašku, Prešov, 60 s.,2005, ISBN 80-8050-843-7

[6]tamtiež

zaujímavosť uvádzame výsledky oboch skupín. Stanovili sme si ***výskumný problém*** zaoberajúci sa vplyvom použitia informačných a komunikačných technológii vo vyučovaní matematiky, na výkonoch ***študentov FSEV*** TnUAD . uSledovali sme ich v priebehu dvoch semestrov na prednáškach, cvičeniach matematika I., matematika II., následne sme porovnávali obidve skupiny študentov. Išlo o ***kvantitatívny výskum***, na spracovanie ktorého sa použili ***štandardné štatistické metódy*** vyjadrujúce významnosť rozdielu medzi získanými číselnými údajmi reprezentujúcimi premenné vstupujúce do vzájomných vzťahov. Na ***riešenie výskumného problému*** s cieľom dodržať základné zásady realizácie kvantitatívneho výskumu sme sa rozhodli použiť experimentálnu metódu. ***Do procesu experimentu*** vstupuje nezávisle premenná ako označenie pre experimentálnu zmenu, ktorou v našom prípade bol ***blended learning*** vo vyučovaní matematiky. Závislá premenná určuje dôsledok nezávislej premennej, t.j., čo bolo spôsobené vplyvom ***experimentálnej zmeny***. Pre úspešný a relevantný priebeh experimentu je dôležité vybrať dve, čo najviac, rovnocenné skupiny subjektov. Získané výsledky pre obe skupiny boli následne testované, analyzované a verifikované.



obr. č. 1. Ukážka stránok z cvičení matematiky, jednoduchá učebná opora (blended learning).

Špecifiká výskumného problému a jeho hypotéz

Pre objektívne spracovanie výsledkov vplyvu blended learning na výchovný, vzdelávací proces je nutné stanovenie výskumného problému, zrealizovanie výskumu, jeho analýza a vyhodnotenie (MS Excel). Uvedená problematika a stanovené ciele si vyžiadali špecifikovanie výskumného problému kauzálneho typu: *Aký je vplyv použitia blended learning vo vyučovaní matematiky na výkon študentov?*

Pre verifikačný proces boli stanovené nasledujúce hypotézy:

Hypotéza H1: *Študenti vzdelávaní blended learning dosahujú minimálne rovnocenné výsledky v riešení matematických úloh ako študenti vzdelávaní tradičným spôsobom.*

Hypotéza H2: *Študenti vzdelávaní prostredníctvom blended learning dosahujú lepšie výsledky v riešení úloh z matematiky z hľadiska trvácnosti nadobudnutých poznatkov ako študenti vzdelávaní tradičnou metódou (bez IKT).*

Verifikačný proces a jeho kvantifikácia

Od typu výskumného problému závisí aj forma realizácie a spracovania. Zrejme, pri kauzálnych výskumných problémoch sa používa experimentálna metóda. Porovnávajú sa dve skupiny (viac skupín) subjektov, ktoré sa líšia jedným z javov[7] – napr. vyučovacím, výchovným štýlom. Preto bol vplyv blended learningu na výkon študentov sledovaný formou experimentu. Išlo o kvantitatívny výskum, na spracovanie ktorého sa použili štandardné štatistické metódy vyjadrujúce významnosť rozdielu medzi získanými číselnými údajmi reprezentujúcimi premenné vstupujúce do vzájomných vzťahov. Na riešenie výskumného problému s cieľom dodržať základné zásady realizácie kvantitatívneho výskumu sme sa rozhodli použiť experimentálnu metódu. Do procesu experimentu vstupuje nezávisle premenná ako označenie pre experimentálnu zmenu, ktorou v našom prípade bola integrácia informačných a komunikačných technológií do vyučovania matematiky. Závislá premenná určuje dôsledok nezávislej premennej, t.j. čo bolo spôsobené vplyvom experimentálnej zmeny. Závislá premenná zisťovaná pri riešení primárneho výskumného problému bola sledovaná v dvoch ukazovateľoch – úroveň vedomostí študentov (hypotéza H1) a trvácnosti nadobudnutých poznatkov študentov (hypotéza H2). Pre úspešný a relevantný priebeh experimentu je dôležité vybrať dve, čo najviac, rovnocenné skupiny subjektov. Kontrolnú aj experimentálnu skupinu tvorili študenti *FSEV TnUAD*, ktorí boli sledovaní v priebehu dvoch semestrov. Je obtiažne vytvoriť úplne náhodný výber, preto sme pracovali s už hotovými krúžkami, ktorých úroveň bola podobná. Výber súboru subjektov bol zameraný podľa porovnateľnosti relevantných znakov dôležitých pre skúmanie, t.j. rovnaké podmienky pre obe skupiny z hľadiska materiálneho zabezpečenia a tiež z hľadiska kvalifikovanosti a odbornosti učiacich, ktorí boli navyše rovnakého veku i pohlavia, pričom v čase experimentu pracovali rôznymi metódami. Študenti výberového súboru navštevovali *rovnakú* vysokú školu, rovnaký ročník a absolvovali ten istý učebný plán s rovnakou hodinovou dotáciou. Overovanie zo špecifikovaných hypotéz prebiehalo podľa samostatného experimentálneho plánu. Spracovanie, vyhodnotenie a analýza získaných údajov prebehla prostredníctvom použitia štandardných metód matematickej štatistiky, ktorých výber závisel od typu a vzťahu použitých premenných. Na zisťovanie vplyvu blended learning vo vyučovaní matematiky na výkon študentov a verifikáciu porovnateľnosti vedomostnej úrovne študen-

[7] Komárik, Emil: Metódy vedeckého poznávania človeka. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2002, 212 s., ISBN 80-223-1717-9.

tov výberového súboru, ktorí boli zapojení do experimentu, sme zvolili oblasť tém matematiky I.,II..

Overovanie hypotézy H1: *Študenti vzdelávaní blended learning dosahujú minimálne rovnocenné výsledky v riešení úloh ako študenti vzdelávaní tradičným spôsobom.*

Charakteristika výskumného súboru:Výskumný súbor tvorilo 67 študentov (prihlásených na začiatku semestra v skupine bolo 74 študentov) FSEV TnUAD, pričom experimentálna skupina pozostávala zo 34 študentov porovnávaciu skupinu tvorilo 33 študentov. Z hľadiska zastúpenia pohlavia (*Tab. 1*)boli skupiny porovnateľné.

skupina	študenti	študentky	spolu
experimentálna skupina	9 26%	25 74%	34
kontrolná skupina	8 24%	25 76%	33
spolu	17 25%	50 75%	67

Tab. 1: Prehľad subjektov výskumu podľa pohlavia.

Experimentálny plán: Realizácia experimentu na overenie hypotézy H1 prebiehala podľa experimentálneho plánu dvoma priebežnými testmi. Po absolvovaní testu sme skúmali vzájomný vzťah bodových ziskov testu jednotlivcov medzi oboma skupinami.

	Test 1	Pôsobenie (rozdielna metodika)	Test 2
experimentálna skupina	áno	blended learning	áno
kontrolna skupina	áno	tradičné vyučovanie	áno

Schéma 1: Experimentálny plán s priebežnými testami.

Spôsob spracovania a výsledky experimentu: Dôležitým prvkom pri overovaní hypotézy je správny výber testovacieho kritéria. Ak predpokladáme, že základné súbory majú približne normálne rozdelenie použitím F-testu zistíme, či rozdiel medzi ich rozptylmi je štatisticky významný. Pri testovaní významnosti rozdielu medzi rozptylmi formulujeme nulovú hypotézu

H0: Rozptyly základných súborov sú rovnaké, t.j. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Testovacím kritériom je veličina $F = \sigma_1^2/\sigma_2^2$. Jej porovnaním s kritickou hodnotou na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, zistíme a vyhodnotíme výsledok. Pomocou programu MS Excel sme vypočítali údaje zhrnuté v *Tab. 2*, pričom vstupnými údajmi sú súčty bodov jednotlivcov získaných v testoch z experimentálnej skupiny a k ním zodpovedajúce súčty bodov v kontrolnej skupine. Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria je F=1,351200003 a príslušná kritická hodnota je $F_{krit.} = 1,904822966$, t.j. $F < F_{krit.}$ nastáva prípad, ktorý sme očakávali skoro s istotou. Nezamietame nulovú hypotézu (rovnosť rozptylov základných súborov) a hovoríme, že rozdiel medzi rozptylmi nie je štatisticky významný, t.j. oba výbery pochádzajú z tej istej populácie. Je dôležité, že rozptyly oboch súborov sú rovnaké. Ak by sa významne líšili, tak rozdiel medzi priemermi môžeme iba odhadovať.[8]

[8]Komárik, Emil: Metódy vedeckého poznávania človeka. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2002, 212 s., ISBN 80-223-1717-9.

Dvojvýberový F-test pre rozptyl

	experimentálna skupina	kontrolna skupina
stredná hodnota	7,532811453	7,324621942
rozptyl	6,058900294	5,212355003
pozorovanie	34	33
rozdiel	33	32
F	1,351200003	
P(F-f)(1)	0,290642738	
F krit.(1)	1,904822966	

Tab. 2: Prehľad štatistických charakteristík F-testu.

Po vykonaní F-testu môžeme skúmať vplyv experimentálneho zásahu na veľkosť aritmetického priemeru, ktorý overujeme t-testom, konkrétne t-testom pre súbory s rovnakým rozptylom. Pri teste významnosti rozdielu dvoch priemerov formulujeme dvojstrannú nulovú hypotézu $\mu_1 = \mu_2$, to znamená, že predpokladáme rovnosť priemerov:

H0 : Dva sledované súbory pochádzajú z tej istej populácie a rozdiel medzi ich priemermi je spôsobený náhodou.

Základné charakteristiky výberového súboru vypočítané pomocou MS Excel sú uvedené v *Tab. 3.* Vypočítaná hodnota testovacieho kritéria je $t = 0,321435667$. Porovnaním tejto hodnoty s kritickými hodnotami jednostranného testu $t_{krit1.}$=1,673565748 a dvojstranného testu $t_{krit2.}$=2,004881026 zisťujeme, že $t < t_{krit1}$ a taktiež t< t_{krit2}. To znamená, že nulovú hypotézu nezamietame a rozdiel priemerov považujeme za štatisticky nevýznamný.

Dvojvýberový t-test s rovnosťou rozptylov

	experimentálna skupina	kontrolna skupina
stredná hodnota	7,532811453	7,324621942
rozptyl	6,058900294	5,212355003
pozorovania	34	33
spoločný rozptyl	5,635627649	
hypoteticky rozdiel stred.h.	0	
rozdiel	65	
t štatistika	0,321435667	
P(T-t) (1)	0,192066371	
t krit (1)jednostranný test	1,673565575	
P(T-t) (2)	0,807933629	
t krit (2)dvojstranný test	2,004881026	

Tab. 3: Prehľad štatistických charakteristík t-testu.

Overili sme platnosť hypotézy H1, že študenti vzdelávaní prostredníctvom blended learning dosahujú rovnocenné výsledky ako študenti vzdelávaní bez IKT. Pre zaujímavosť možno uviesť, že pri jednostranne formulovanej otázke by sa alternatívna hypotéza „priemer v experimentálnej skupine je vyšší ako priemer v kontrolnej skupine“

potvrdila. Nasvedčuje tomu kladné znamienko číselnej hodnoty testovacieho kritéria t, t.j. študenti vzdelávaní prostredníctvom blended learning dosiahli v teste vyššie bodové skóre.

Overovanie hypotézy H2: *Študenti vzdelávaní prostredníctvom blended learning dosahujú lepšie výsledky v riešení úloh z matematiky z hľadiska trvácnosti nadobudnutých poznatkov ako študenti vzdelávaní tradičnou metódou (bez IKT).*

Verifikácia hypotézy H2 bola experimentálna zmena spočívajúca v časovom odstupe
jedného semestra, po ktorom boli opätovne otestované obe skupiny. Následne sa znovu vyhodnotili výsledky oboch skupín a vypracovali závery o dôsledkoch času na trvácnosť vedomostí študentov. Predpokladali sme, že študenti používajúci okrem klasickej formy vyučovania i elektronické materiály, majú vedomosti trvalejšieho charakteru.

Charakteristika výskumného súboru podobne ako experimentálny plán sú totožné s predchádzajúcim overovaním.

Spôsob spracovania a výsledky experimentu: Cieľom overovania hypotézy H2 bolo zistiť vplyv časového odstupu na vedomosti z matematiky nadobudnuté rôznou metodikou. Po ukončení experimentálneho procesu sme mali možnosť spracovať údaje z testovania pred experimentálnou zmenou spôsobenú odstupom jedného semestra i po nej v obidvoch skupinách. O každom študentovi sú k dispozícii dva relevantné údaje o vykonaní testu, ktoré tvoria závislý pár a predpokladáme, že vybrané výbery sú z dvoch približne normálne rozdelených základných súborov, môžeme zo známych štatistických metód použiť t-test pre párové hodnoty. Formulujeme nulovú hypotézu H0 pre obe skupiny a overíme jej platnosť.

H0: *Predpokladáme rovnosť priemerov základných súborov* $\mu_1 = \mu_2$.

Vstupnými údajmi pre testovacie kritérium bolo bodové skóre jednotlivcov získané z úloh v testoch i ich opakovaní.

Dvojvýberový párový t-test pre strednú hodnotu.

experimentálna skupina	test 1	test2
stredná hodnota	7,532811453	6,818525738
rozptyl	6,058900294	3,762619554
pozorovania	34	34
Pears. Korelácia	0,249882011	
hypoteticky rozdiel stred.h.	0	
rozdiel	66	
t štatistika	1,311025472	
P(T-t) (1)	0,230297257	
t krit (1)jednostranný test	1,703288035	
P(T-t) (2)	0,361045496	
t krit (2)dvojstranný test	2,051829142	

Tab. 4: Prehľad štatistických charakteristík t-testu v pozorovanej skupine.

Interpretácia výsledkov platných pre experimentálnu skupinu: Vypočítaná hodnota testovacieho kritéria t=1,311025472, pri zvolenej významnosti p=0,05 je menšia ako kritické hodnoty pre jednostranný test $t_{krit1} = 1,703288035$ a dvojstranný $t_{krit2} = 2,051829142$. Rovnosť priemerov základných súborov nezamietame, ich rozdiel považujeme za nevýznamný a spôsobený len vplyvom náhodných činiteľov.

Dvojvýberový párový t-test pre strednú hodnotu.

kontrolna skupina	test 1	test2
stredná hodnota	7,532811453	6,235446891
rozptyl	6,058900294	6,076522413
pozorovania	33	33
Pears. Korelácia	0,301821141	
hypoteticky rozdiel stred.h.	0	
rozdiel	64	
t štatistika	2,690245131	
P(T-t) (1)	0,004986451	
t krit (1)jednostranný test	1,703288035	
P(T-t) (2)	0,024737987	
t krit (2)dvojstranný test	2,051829142	

Tab. 5: Prehľad štatistických charakteristík t-testu v skupine bez blended learning.

Interpretácia výsledkov platných pre kontrolnú skupinu: V tejto skupine bola hodnota testovacieho kritéria $t = 2,69024513$, a príslušné kritické hodnoty pre jednostranný test $t_{krit1} = 1,703288035$ a dvojstranný $t_{krit2} = 2,051829142$. Platí, že $t > t_{krit1}$ a zároveň $t > t_{krit2}$. Zamietame nulovú hypotézu o rovnosti priemerov základných súborov a tvrdíme, že sa výberový priemer na zvolenej hladine významnosti štatisticky významne líši od známej hodnoty priemeru základného súboru.

Pri voľnejšej interpretácii môžeme konštatovať, že časový odstup nespôsobil rapídny pokles vedomostnej úrovne z matematiky. V skupine bez blended learning je uvedený rozdiel významný a trvácnosť nadobudnutých poznatkov bola podstatne slabšia ako v experimentálnej skupine. Čiže sme overili predpoklad formulovaný v hypotéze H2.

Záver

Overili sme platnosť stanovených hypotéz. Zistili sme, že študenti vzdelávaní pomocou blended learning dosahujú minimálne rovnocenné výsledky v riešení matematických úloh, ako študenti vzdelávaní bez použitia IKT. Medzi sledovanými skupinami nebol štatisticky významný rozdiel vo výsledkoch získaných testovaním a teda inovačná metóda založená na elektronickej podpore vyučovania matematiky nemala zásadný okamžitý vplyv na kvalitu a hĺbku nielen za uspokojivé, ale aj prínosné.

Literatúra

[1] Fulier, J.: *Vplyv koncepcií vyučovania a moderných výučbových prostriedkov na vyučovanie matematiky*, In: Učiteľ matematiky- jeho profil a príprava, UKF Nitra, Edícia Prírodovedec č. 168, Vydavateľstvo MichalaVašku, Prešov, 60 s., 2005,ISBN 80-8050-843-7

[2] Komárik, Emil: Metódy vedeckého poznávania človeka. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2002, 212 s., ISBN 80-223-1717-9.

Adresa autora:
PaedDr. Lívia Hasajová
Odborný asistent
Katedra matematiky TnUAD
Ul. Študentska 2
911 01 Trenčín
e-mail: hasajova@tnuni.sk

Prostredia napomáhajúce budovanie aritmetických schém

Milan Hejný

Abstract. *Traditional approach to teaching elementary arithmetic focuses to practice mental and later also written addition and subtraction. However the deep knowledge in this area can be reached only by creating the scheme of additive triad: a set of three numbers one of which is the sum of two others. Ways of creating such triad in two processual environments called ambulation and staircase are described.*

Poznámka. Štúdia bola vypracovaná s podporou grantu GAČR 406/05/2444

1 Prológ

Viete koľko máte vo svojom byte a) okien, b) dverí, c) lámp, d) kobercov? Asi žiadne z týchto čísel nepoviete ihneď, ale ku každému sa dopočítate. Budete v duchu prechádzať svojím bytom, z miestnosti do miestnosti, a budete počítať a) okná, b) dvere, c) lampy, d) koberce. To môžete uskutočniť, pretože vo vedomí máte uloženú **schému** svojho bytu. Výsledok nepoviete ihneď, ale nájdete ho celkom bezpečne.

Predstavte si teraz bizarnú situáciu, že chcete získať lukratívne zamestnanie a viete, že o toto miesto usiluje aj osoba X. Viete, že konkurzná komisia sa vás bude pýtať na počty rôznych objektov vo vašom byte. Ste presvedčený(á) že konkurz musíte vyhrať. Predsa svoj byt poznáte lepšie, ako osoba X, ktorá vo vašom byte bola iba pár krát. Lenže osoba X, hoci pozná váš byt iba povrchne, venovala príprave na konkurz veľké úsilie. Naučila sa naspamäť odpovede na všetkých 50 otázok uvedených v informačnom letáku a u pohovorov zažiarila. Vám prišlo zbytočné učiť sa čísla naspamäť, pretože ste predpokladali(a), že komisia bude overovať skutočné poznanie vášho bytu, nielen pár čísel. Osoba X konkurz vyhrá. Vás to mrzí, lebo viete, že keby sa konkurzná komisia opýtala na niečo, čo nemá osoba X nacvičené, ukázalo by sa, že vaša znalosť bytu je hlboká, ale znalosť osoby X je iba povrchná. S námietkou sa zveríte jednému členovi komisie. Ten vám povie, že úlohou konkurzu nebolo preukázať znalosť vášho bytu, ale schopnosť zapamätať si súbor údajov.

Historka je silno pritiahnutá za vlasy. Žiaľ nie je až tak ďaleko od toho, čo často praktikujeme u rôznych skúšok z matematiky. Žiaka nehodnotíme podľa toho, ako hlboko do matematiky vidí, ale podľa toho, ako má pamäťou zvládnuté súbory poznatkov a algoritmov.

Vymyslená historka nie je iba provokáciou. Jej zmysel je hlbší a pozitívnejší. Je to ilustrácia kľúčového pojmu našich úvah, pojmu schéma.

2 Schéma

Schémou rozumieme ucelený súbor objektov a väzieb medzi týmito objektmi, prípadne úkonov a operácií, ktorý vo vedomí človeka vznikol v dôsledku rôznych opakujúcich sa zvedomovaných skúseností. Pritom myseľ človeka je schopná kedykoľvek vynoriť predstavu celku i ktorejkoľvek jeho časti.

Napríklad počet stenových uhlopriečok kocky zistím tak, že si vybavím v predstave schému kocky a uvidím, že má 6 stien a na každej stene 2 uhlopriečky.

Schému nemožno vytvoriť stereotypným nácvikom zameraným na jednotlivosti. Dobre poznané matematické schémy sú základom kvalitného matematického poznania. Žiaľ, vo vyučovaní matematiky venujeme budovaniu schém ďaleko menšiu pozornosť než nácviku algoritmov. Prejaví sa to napríklad na riešení slovných úloh s antisignálom. Tak úlohu *Prehral som 5 guliek. Ostalo mi ich už iba 8. Koľko guliek som mal pred hrou?* Mnoho druhákov riešilo výpočtom $8 - 5 = 3$. Použili inštrukciu *je to úloha na odčítanie lebo je tam slovo „prehral“.* V niektorých triedach tak postupovali skoro všetci žiaci. Našli sa ale aj triedy, kde skoro všetci žiaci vyriešili túto úlohu správne, použitím či už statickej (obrázok), alebo dynamickej (manipulácia s predmetmi) schémy. Triedy, v ktorých uvedený test dopadol dobre majú šťastie na dobrú učiteľku, ktorá buduje vo vedomí žiakov schémy, konkrétne schému aditívnej trojice.

Schéma aditívnej trojice, stručne **triáda**[9] sa skladá z troch čísel, pričom najväčšie z nich je súčtom dvoch menších. Prídavné meno „aditívna“ netreba tu uvádzať, pretože o multiplikatívnych triádach nepíšeme. Každá triáda poukazuje 4 vzťahy. Napríklad triáda (3,5,8) poukazuje na vzťahy $5 + 3 = 8$, $3 + 5 = 8$, i $8 - 5 = 3$, $8 - 3 = 5$ a každý z týchto vzťahov poukazuje na trojicu (3,5,8). Všetky 4 uvedené vzťahy predstavujú tú istú matematickú skutočnosť, ale rozlične artikulovanú. Dodajme, že triáda má mnoho reprezentácií. Napríklad triáda (3,5,8) má popri 4 uvedených číselných reprezentácií i veľa reprezentácií grafických (sčítacie trojuholníky, hadi, domčeky, ...) ale najmä sémantických (úloha hore uvedená, alebo situácia: na ihrisku sú 3 dievčatá a 5 chlapci, dovedna 8 detí; alebo iná situácia: bývam na 3. podlaží, môj kamarát na 8. ; on býva o 5 podlaží vyššie ako ja).

Triáda predstavuje bázu aritmetického myslenia žiaka prvého stupňa. Žiak, ktorý vie skvele a rýchlo počítať, ale má iba chudobnú zásobu rôznych reprezentácií triády, nemá matematické myslenie rozvinuté. Slovné úlohy, zlomky, záporné čísla, percentá,... to všetko mu bude robiť v budúcnosti značné ťažkosti.

3 Hlboká znalosť podľa Z. Semadeniho

Poľský matematik a didaktik matematiky, Zbigniew Semadeni zaviedol do didaktiky matematiky termín hlboká idea[10] (deep idea, idea głęboka). Termín slúži aj ako nástroj na analýzu kvality matematického poznania človeka. Pomáha hľadať kritériá, ktorými sa hlboká znalosť (t.j. znalosť podstaty) odlišuje od znalosti povrchovej, ktorú voláme aj formálnou znalosťou, alebo protézou znalosti. Semadeniho analýzy sú zväčša zamerané na matematiku gymnázia a vysokej školy, ale metodika tu použitá je dobre aplikovateľná i prvý stupeň. Ide predovšetkým na dôraz položený na *sieť vzájomných väzieb medzi hlbokými ideami.* Aplikované na naše bádanie, ide o to, ukázať triádu ako hlbokú myšlienku, ako to, čo tvorí jadro kvalitného poznania základnej úrovne aritmetického myslenia. Hádam najlepšie je možné triádu ako hlbokú myšlienku predstaviť pomocou testovacích nástrojov, teda odpovedať na otázku, ktorá tvorí nadpis ďalšej kapitoly.

[9] Pojem triády zaviedli P. Černek a V. Repáš pod názvom sčítacia/odčítacia rodinka. (Viz Repáš a kol. 1997). Výskum o didaktických možnostiach pojmu uskutočnila J. Slezáková-Kratochvílová (2006)

[10] Pojem je rozpracovaný z mnohých pohľadov v sérii článkov publikovaných prevážne v časopise Dydaktyka Matematyki. Pozri napr. Semadeni (2005) a zoznam článkov tu uvedený.

4. Ako testovať znalosť triády?

Ako môžeme zistiť, do akej miery má daný žiak vybudovanú vo svojom vedomí ideu triády v určitej reprezentácii? Pri odpovedi na túto otázku nás bude inšpirovať metafora uvedená v prológu. Ako zistíme, či daný človek má vo svojom vedomí dobre vytvorenú schému vlastného bytu? Môžeme sa ho pýtať na jednotlivé objekty v jeho byte, alebo dokonca na detaily, ale všetky tieto otázky testujú iba povrchovú vrstvu poznania. Iba to, čo sa dá zvládnuť pomocou pamäti, bez poznania siete súvislostí, ktorými sú tieto jednotliviny poprepájané. Účinnejšie je položiť otázku, ktorá vyžaduje globálny vhľad na jeho byt ako celok. Napríklad: *ako by ste investovali 20 000 Sk, ktoré ste vyhrali na renováciu bytu*? Podobné testovacie otázky sa pokúsime vytvoriť pre reprezentácie triády. Začneme so základnou štrukturálnou reprezentáciou.

Každá triáda (a, b, c) poukazuje na 4 väzby: $a + b = c$, $b + a = c$, $c - a = b$, $c - b = a$. Ak v ktorejkoľvek z týchto väzieb jedno číslo zaslepíme, dostane úlohu na sčítanie či odčítanie. Týchto úloh existuje 6 typov. Predovšetkým typy $a + b = ?$ a $c - a = ?$. Riešením týchto úloh sa vo vedomí žiaka nebuduje schéma, ale súbor asociácií. Keď sa nás niekto opýta, koľko je 5 + 3, nevybaví sa v našej mysli schéma, ale spoj 5 + 3 = 8 a naša odpoveď je okamžitá. Trochu inak je to s úlohami ďalších 4 typov: $a + ? = c$, $c - ? = b$, $? + b = c$, $? - b = c$. Ak mám vyriešiť úlohu ? − 13 = 15, tak moja odpoveď nebude okamžitá. Najprv si uvedomím, že treba riešiť úlohu ? = 13 + 15 a až potom sčítam. Transformácia $\boxed{? - 13 = 15} \rightarrow \boxed{? = 13 + 15}$ prebehne vnútri schémy (13,15,?) a tento krok vyžaduje istý, hoci asi veľmi krátky, čas. Pre prváka je ale úloha ? − 3 = 5 výrazne náročnejšia ako úloha 3 + 5 = ? Náročnosť je spôsobená tým, že žiak ešte nemá túto schému vytvorenú. Akonáhle má žiak (tretiak-štvrták) tuto základnú reprezentáciu schémy triády vytvorenú, dokáže bez väčších ťažkostí vyriešiť i úlohu ? − 13 = 15. Ak naopak túto úlohu rieši obtiažne, napríklad metódou pokus-omyl, tak to znamená, že žiak ešte nemá dobre vytvorenú schému triády v tejto reprezentácii.

Ešte náročnejšia je pre žiaka úloha, na riešenie ktorej nestačí transformovať vzťahy, ale treba vnútri schémy odhaľovať nové väzby, konštruovať nové objekty, tvoriť hypotézy a tieto preverovať. Napríklad dve úlohy určené druhákom, ktorí poznajú pojem triáda pod menom „rodinka" a vedia že dve rodinky, ktoré majú dve čísla rovnaké a líšia sa iba v treťom čísle nazývame *susedné rodinky* (napr. (2,3,5) a (2,5,7)):

<u>Úloha 1</u>. Čísla 3 a 9 doplň tretím číslom na rodinku; nájdi všetky riešenia.

<u>Úloha 2*</u>. Vytvor dve susedné rodinky. Najmenšie číslo prvej je 2, najväčšie číslo druhej je 8.

Tretia úloha, určená piatakom, je náročnejšia

<u>Úloha 3</u>. Vytvor tri rodinky. Najmenšie číslo prvej je 1, najväčšie číslo tretej je 13. Prvá a druhá rodinka sú susedné a druhá a tretia sú susedné. (Úloha má tri riešenia).

Podobným spôsobom je možné zostrojiť testovacie úlohy i pre iné reprezentácie triády. Jedno prostredie, ktoré umožňuje budovanie triád na úrovni procesu a neskôr i konceptu teraz popíšeme.

5. Prostredie POCHODOVANIE

Počítať sa dieťa učí riekankou jeden, dva, tri, ... K počítaniu nestačí vedieť slová, dieťa musí vedieť ako zosúladiť slová s pohybom ruky, ktorá počíta. Synchronizácia slova a pohybu je teda vstupnou bránou do aritmetiky. Ak pohyb ruky zameníme za kráčanie, dostávame naše prostredie. To učiteľ zavádza v etapách. Napríklad:

1. Učiteľ pochoduje a sám počíta kroky.	6. Pochodovanie povelom riadi žiak.
2. Učiteľ pochoduje a trieda počíta kroky.	7. Kráčame dopredu i dozadu.
3. Žiak pochoduje a trieda počíta kroky.	8. Povel sa zapíše šípkami.
4. Pochodujú 2-3 žiaci a trieda počíta.	9. Pochodovanie sa skladá z 2 úsekov.
5. Počítajú iba žiaci, ktorým to ešte nejde.	10. Zavedieme sčítanie a odčítanie.

Povely, ktoré pri pochodovaní používame majú tvar *Päť krokov dopredu, pochoduj, teraz!* Záverečné slovo „teraz“ je dôležité organizačne. Zložitejšie povely, skladajúce sa z viacerých úsekov majú napríklad tvar *Tri kroky dopredu, potom dva kroky dopredu a nakoniec štyri kroky dozadu, pochoduj teraz!*

Povely sa zapisujú pomocou šípok. Napríklad uvedené vyššie povely budú zapísané: $\boxed{\to\to\to\to\to}$ a $\boxed{\to\to\to \mid \to\to \mid \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow}$.

Po zvládnutí prípravných etáp príde na rad operácia sčítania a potom i odčítania. Dvaja žiaci, Adam a Ema stoja vedľa seba a veliteľ velí: *Ema, tri kroky dopredu, potom jeden krok dopredu teraz!* Ema pochoduje 3 a potom 1 krok. Adam zatiaľ stojí. Teraz je Ema 4 kroky pred Adamom a určený žiak má dať jednorázový povel Adamovi tak, aby chlapec postúpil dopredu a stál vedľa Emy. Povel bude znieť *Adam, štyri kroky dopredu, teraz!* V šípkovom zápise sa predstavenie zapíše

EMA $\boxed{\to\to\to \mid \to}$ ADAM $\boxed{\to\to\to\to}$	alebo stručne $\boxed{\to\to\to \mid \to} = \boxed{\to\to\to\to}$.

Podobne je zavedené i odčítanie. Napríklad odčítanie $5 - 2 = 3$ vykoná dvojica povelov: *Ema, päť krokov dopredu a potom dva dozadu, teraz!* a *Adam, tri kroky dopredu teraz!* V jazyku šípkového zápisu: $\boxed{\to\to\to\to\to \mid \leftarrow\leftarrow} = \boxed{\to\to\to}$.

Žiaci bez ťažkostí odpochodujú aj úlohy, v ktorých sa začína kráčať dozadu a v ktorých je výsledkom kráčanie dozadu. Napríklad pochodovanie $\boxed{\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow \mid \to\to\to} = \boxed{\leftarrow}$.

Po zavedení operácie sčítania i odčítania, môžeme pristúpiť k úlohám, ktoré začínajú vo vedomí žiakov budovať schému triády v reprezentácii krokov. Sú to úlohy typu $\boxed{\to\to\to \mid ?} = \boxed{\to\to\to\to}$ alebo $\boxed{? \mid \to\to\to} = \boxed{\leftarrow}$ alebo zložitejšie, s dodatočnou podmienkou: doplň 4 šípky do zápisu $\boxed{? \mid \to\to\to} = \boxed{\leftarrow \mid ? \mid ?}$, nájdi aspoň tri riešenia.

6. Komentáre k prostrediu POCHODOVANIE

1. Pochodovanie je proces. Keď žiak – figurant urobí tri kroky, robí operátor zmeny. Mení svoju polohu. Žiak, ktorý si uvedomí, že *tri kroky dopredu a potom dva kroky dozadu* je to isté ako *jeden krok dopredu* vie sčítať odčítať operátory zmeny. Toto počítanie je podstatne iné, ako tradičné počítanie objektov. Objekt je niečo, čo možno **opakovane** evidovať zrakom, často i hmatom. Keď je v učebnici nakreslený obrázok 3 chlapcov a 2 dievčat, má úlohu na sčítanie $(3+2=5)$, rovnako i úlohu na porovnanie tj. odčítanie $(3\text{-}2=1)$ žiak stále pred očami. Krok takto evidovať nemožno. Prebehne v čase, odznie a ostáva po ňom iba záznam vo vedomí. Podobne je to s údermi hodín, gólmi v sieti súpera a pod.

2. Neskôr, keď sa žiaci naučia proces zaznamenávať, ostane informácia o procese uchovaná na papieri. To už ale nie je proces sám, ale iba jeho záznam. Tak sa z procesu stane koncept, či dokonca procept.

3. Prostredie pochodovania je sprevádzané tromi jazykmi: akustickými povelmi, pohybmi figurantov a šípkovými zápismi. Ako vedľajší produkt riešenia úloh v tomto prostredí si žiak osvojuje spontánny preklad medzi jazykmi, čo je dôležitá schopnosť nielen v matematike. Viacerí didaktici ukazujú, že pestrosť matematických jazykov je organickou súčasťou matematického poznávania. Inšpiráciu pre koncipovanie účinného vyučovania v ontogenéze môžeme nájsť vo fylogenéze. Dodajme, že pre naše bádanie v oblasti jazykov sú podnetné najmä práce L. Kvasza; pozri L. Kvasz (2006) a ďalšie práce uvedené tu v zozname literatúry.

4. Pochodovanie má ešte jednu prednosť. Umožňuje žiakovi nadobúdať skúsenosti s izolovanými modelmi javu, ktorý bude neskôr zavedený ako záporné číslo. Keď totiž budeme meniť šípkové zápisy na číselné, bude rovnosť $\boxed{\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow \mid \rightarrow\rightarrow\rightarrow} = \boxed{\leftarrow}$ zapísaná v tvare -4 + 3 = -1. Jej sémantický zmysel je v prostredí pochodovania jasný: keď urobím najprv 4 kroky dozadu a potom 3 dopredu, budem o 1 krok za východzou pozíciou. Nepoznáme žiadny prvákovi zrozumiteľný sémantický zmysel daného vzťahu v konceptuálnom prostredí objektov.

Inak povedané, žiak prvej triedy je schopný pracovať so zápornými číslami v jazyku krokov i v jazyku šípok, ale ešte nie v jazyku číslic. Dodajme, že asi i jazyk číslic by nejeden prvák zvládol, ale túto možnosť treba napred preskúmať experimentálne.

5. V tradičnom vyučovaní sa procesom venuje malá pozornosť. To je asi hlavná príčina toho, že neskôr žiaci nie sú schopní riešiť dynamické úlohy, tj. úlohy, v ktorých čas hrá dôležitú úlohu (pozri nasledujúci bod). Myseľ človeka totiž inak pracuje s procesuálnou a inak s konceptuálnou situáciou. Preto má prostredie chodenia, ako reprezentant procesuálnych modelov aritmetických vzťahov, dôležité miesto pri otváraní sveta aritmetiky deťom. Pochodovania je dôležitým doplnkom tradičných prostredí, v ktorých sa číslo viaže na stav, t.j. počet určitých objektov.

6. Žiaci na ZŠ majú problémy s riešením slovných úloh o operátoroch zmeny(úlohy o veku, o stretávaní sa bežca a motocyklistu, o napúšťaní bazénu viacerými prítokmi odrazu,...).. Ukazujú to mnohé výskumy. Napríklad J. Ruppeldtová (2006) podrobne analyzuje príčiny neúspechov žiakov štvrtého ročníka pri riešení úlohy:

Peter si našetril nejaké peniaze. Najskôr z nich minul 9 Sk. Potom z ďalšieho vreckového si ušetril 14 Sk. Celkovo pribudlo alebo ubudlo Petrovi z našetrených peňazí? O koľko?

Riešiteľ nevie, koľko peňazí mal Peter na začiatku a to robí mnohým žiakom ťažkosti, pretože v prvých triedach sa s touto myšlienkovou schémou nestretávali. Nazdávame sa, že žiaci, ktorí od prvej triedy nadobúdajú skúsenosti s pochodovaním, budú schopní úlohu modelovať v prostredí krokov: najskôr 9 krokov dozadu, potom 14 krokov dopredu dá výsledok 5 krokov dopredu.

7. Prostredie SCHODIŠTE

Keď už žiaci vedia v prostredí pochodovania riešiť i úlohy o triáde, prejdeme na ďalšie prostredie – na schodište. To je vytvorené v triede iba virtuálne, postupnosťou na zemi ležiacich lístkov s číslami 1, 2, 3, ... Dva susedné lístky sú vzdialené jeden krok žiaka. Každý lístok predstavuje jeden schod. Žiak, ktorý má stáť na treťom schode sa postaví k lístku s číslom 3. Keď dostane povel *štyri kroky dopredu*, postúpi na číslo 7. Žiaci si to predstavujú ako postúpiť o 4 schody vyššie. Je asi zrejmé, ako sa v tomto prostredí sčíta a odčíta. Napriek tomu uvedieme dve ilustrácie:

Namiesto „trojka“ spočiatku hovoríme „tretí schod“. Neskôr žiaci sami tento jazyk zjednodušia. Podobne ako pri pochodovaní i v tomto prostredí po istej dobe začneme

Vzťah	Povel ukazujúci platnosť vzťahu	Šípkový zápis vzťahu
$3 + 2 = 5$	Postav sa na trojku a choď dva kroky dopredu. Dostal si sa na päťku.	[3 | →→ | 5]
$3 - 2 = 1$	Postav sa na trojku a choď dva kroky dozadu. Dostal si sa na jednotku.	[3 | ←← | 1]

povely (a teda i pohyby) zaznamenávať písomne. Šípkový zápis vzťahu je vložený do **boxu**, ktorý má tri **okná**: prvé vstupné, druhé šípkové a tretie výstupné. V prvom aj treťom okne sú zapísané stavy číslami, v prostrednom je operátor zmeny zapísaný šípkami tak, ako to poznáme z pochodovania.

I tu, po zavedení operácie sčítania i odčítania, ktoré žiakom už žiadne problémy nerobí, pristúpime k úlohám, ktoré vo vedomí žiakov budujú schému triády v reprezentácii schodišťa. Najprv sú to úlohy, v ktorých je prázdne nie posledné, ale prvé, alebo druhé okno boxu. Teda úlohy typu [3 | ____ | 7] , alebo typu [_ | ←←←← | 5]. Potom prídu náročnejšie úlohy. Napríklad také v ktorých je prostredné okno iba čiastočne prázdne: [4 | ←← | | 5], alebo také, v ktorých existuje viacero riešení a treba nájsť všetky.

<u>Úloha 4</u>. Daný je box s piatimi oknami [4 | ___ | | ___ | 7]. Zistite aké čísla môžu byť v treťom okne, ak vieme, že druhom a štvrtom okne je dovedna 5 šípok.

Neskôr prídu i výrazne náročnejšie úlohy akou je táto úloha.

<u>Úloha 5</u>. Dané sú tri prázdne boxy [__ | ____ | __]. Do šiestich krajných okien boxov doplňte šesť čísel 1, 2, 3, 4, 5 a 6 a do troch prostredných okien boxov deväť šípok →→→→→ a ←←←← tak, aby vznikli tri správne záznamy, pričom v každom šípkovom okne sú šípky iba jedného smeru. Nájdite to riešenie pre ktoré súčet troch čísel vo vstupných oknách je čo najväčší.

K poslednej úlohe sa vrátime v komentároch. V závere kapitoly ešte ukážeme, ako je možné v prostredí schodište modelovať aritmetické zápisy so zátvorkami; osobitne s mínusom pred zátvorkou. Znaku [– ( ] aj následnému znaku [ )] zodpovedá v prostredí schodišťa príkaz „čelom vzad“, ktorému tu priradíme znak †. Pri tejto konvencii bude úloha $3 + 5 - (2 - 4) = ?$ riešená pochodovaním pomocou série povelov:

		Povel		Akcia/pozícia figuranta
3		Postav sa na tretí schod		Stojí na schode 3 tvárou nahor.
+5		Choď 5 krokov dopredu		Postúpi 5 schodov nahor, stojí na 8. schode
-(		Urob čelom vzad		Stojí na 8. Schode tvárou nadol
2		Choď dva kroky dopredu		Zíde o 2 schody, stojí na 6. schode
-3		Choď 3 kroky dozadu		Pospiatky stúpne o 3 schody, stojí na 9. schode
)		Urob čelom vzad		Stojí na 9. Schode tvárou nahor

Dodajme, že zápis povelu je hlučný [3 | →→→→→ † →→ | ←←←← † | ?] , ale v dobe, keď sa tieto úlohy riešia, nie je už šípkový jazyk bežne používaný.

8. Komentáre k prostrediu SCHODIŠTE

1. Tretiaci, ktorí vedeli v prostredí schodišťa sčítať, odčítať, zapisovať pohyby aj dávať povely dostali úlohu [2 | ←←← | ?] . Skôr ako stihol figurant stúpiť na doteraz

neoznačený schod „-1“ už jeden chlapec kričal, že *treba dokresliť schod mínus jedna.* Jeho vysvetlenie že *to je ako pri výťahu a v nemocnici majú i poschodia mínus 4* bolo triedou všeobecne akceptované ako zrozumiteľné. Iný chlapec hneď na kalkulačke ukazoval, že tam je to tiež tak. Ukázalo sa, že jedno malé predstavenie a nasledujúca diskusia žiakov otvorili cestu do záporných čísiel v reprezentácii adries. Dodajme, že so zápornými číslami v reprezentácii stavov (dlhy) mali niektorá žiaci triedy problémy ešte aj v piatom ročníku.

2. Prostredie SCHODIŠTE je blízke známemu prostrediu HADOV. V oboch sú stavy a operátory zmeny, v oboch možno modelovať úlohy ako $5 + 4 - 7 + 2 - 1 - 3 = ?$ Ale v každom z týchto prostredí existujú situácie ktoré nemožno previesť do druhého z týchto prostredí. Tak v prostredí schodov môžeme modelovať výrazy zo zátvorkami, ale v prostredí hadov sa to nedá. Naopak, v prostredí hadov, môžeme modelovať aj operácie násobenia, ale v prostredí schodov sa to nedá. Odlišnosť prostredí dáva žiakovi možnosť nadobúdať rôznorodé skúsenosti, odhaľovať vzťahy rôznych typov a vytvárať siete vzťahov, ktoré tvoria schému triády v rôznych prostrediach a tým hlbokú ideu triády.

3. Vráťme sa k úlohe 5. Pre žiaka štvrtého ročníka nie je ľahké nájsť všetkých 6 jej správnych záznamov a je pre neho veľmi obtiažne zdôvodniť, že iné riešenia neexistujú. Napriek tomu špičkový žiak, ktorý má vhľad do triády v tomto prostredí zistí, že zo vzťahu $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \mid \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow} = \boxed{\rightarrow}$ (ten mimochodom prichádza z prostredia pochodovania) vyplýva, že súčet čísel v troch výstupných oknách musí byť o jednu viac, ako súčet čísel vo vstupných oknách. Pretože súčet všetkých čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ je nutne súčet všetkých čísel v troch vstupných oknách rovný 10 a vo výstupných oknách je rovný 11. Tým je úloha vyriešená bez toho, aby bolo treba hľadať všetky správne záznamy.

Záver

Na záver tri myšlienky. Prvé dve rekapitulujú zámer, ktorý sme štúdiou sledovali, tretia sa týka ďalších informácií, ktoré môžu byť čitateľovi užitočné.

A. Prvý výsledok štúdie je teoretický. Je to kritická analýza existujúcej praxe vyučovania aritmetiky v prvých ročníkoch základnej školy. Snažíme sa ukázať, že nácvik pamäťového i písomného sčítania a odčítania, uskutočňovaný predovšetkým pomocou jazyka číslic a sémanticky viazaný dominantne na reprezentáciu čísla ako stavu nedostatočne rozvíja žiakovo matematické myslenie a vedie iba povrchovým znalostiam. Riešenie didaktického problému vidíme v orientácii vyučovania na schémy, predovšetkým na schému triády a to v čo možno najrôznorodejších prostrediach.

B. Druhým výsledkom štúdie je popis dvoch konkrétnych prostredí s náznakom didaktickej stavby, ktorá vedie k budovaniu opísaných triád. Tieto prostredia boli rozpracované pre potreby učebnice pre 1. ročník, ktorú autor spoločne s kol. D. Jirotkovou a J. Slezákovou-Kratochvílovou píše pre nakladateľstvo FRAUS. Dodajme, že v rámci stále prebiehajúceho výskumu sú rozpracovávané ďalšie prostredia, ale ich zaradenie do prípadne ďalších učebníc je limitované inovačnou kapacitou učiteľskej verejnosti, ktorá nie je na masívny príval nových myšlienok pripravená. Zdá sa, že tu veľmi naliehavo platí povestné „menej je niekedy viac“.

C. Opísaný výskum, ktorý je stále živý, nie je izolovaný. K podobným výsledkom dospievajú aj ďalší bádatelia. Tu sme zmienili meno Z. Semadeniho, ale bolo by možné uviesť desiatky mien ďalších.

Záverom dovoľte upozorniť na novú knižku, ktorá sa objavila na poľskom trhu. Knižka, ktorej autorkou je Ewa Swoboda (2006) je venovaná budovaniu geometrických pravidelností u detí. Tento pojem je úzko prepojený na pojem geometrickej schémy a geometrickej štruktúry, teda na hlboké myšlienky v oblasti geometrie, aby sme použili terminológiu Semadeniho.

Literatúra

[1] HEJNÝ, M., *Prostředí, která otevírají svět čísel* (Srní 2006)

[2] JIROTKOVÁ, D. *Budování konceptuálních představ čísla u dítěte ve věku 5-8 let.* (Srní 2006)

[3] KVASZ, L., *The History of Algebra and the Development of the Form of its Language,* (Philosophia Mathematica, 2006.

[4] REPÁŠ, V.; ČERNEK, P.; PYTLOVÁ, Z.; VOJTELA, I. *Matematika pre 5. ročník základných škôl. Prirodzené čísla.* Orbis Pictus Istropolitana, 1997.

[5] RUPPELDTOVÁ, J. Interpretačná dominanta riešenia slovnej úlohy. In Uhlířová M (Ed): *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy, Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí*, Olomouc 2006, str. 212-217.

[6] SEMADENI, Z. *Koncepcja sieci wzajemnych powiązań idei głębokich i powiązań ich modeli formalnych*, Dydaktyka matematyki, č. 28, Kraków, 2005.

[7] SLEZÁKOVÁ, J. *Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5-8 let* (Srní 2006)

[8] SWOBODA, E. *Przestreń, regularności geometriczna i kształty w uczeniu sie i nauczaniu dzieci.* Rzeszów: Wydawnictwo Universytetu Rzeszowskiego, 2006

Adresa autora:
Milan Hejný, Prof., RNDr., CSc.
KMaDM, PF UK
M. D. Rettigove 4
116 39 Praha 1, ČR
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz

Pripravenosť študentov dištančných foriem štúdia PdF TU na vzdelávanie prostredníctvom IKT

Pavel Híc, Milan Pokorný

Abstract. *The paper deals with the readiness of students to use ICT, computer supported learning, and e-learning during their study. The authors characterize results of a survey made on a sample of 606 students, who study in a distance form of study at the Faculty of Education, Trnava University.*

Úvod

Moderné informačné a komunikačné technológie predstavujú jednu z efektívnych alternatív na získavanie vedomostí. Aby však študenti dokázali študovať prostredníctvom IKT, musia najmä:

- vedieť, že takáto alternatíva pre (samo)štúdium vôbec existuje,
- mať určité základné zručnosti pri práci s PC, Internetom a technológiami,
- mať bezproblémový prístup k PC a Internetu.

Schopnosti práce s PC a prístup k Internetu sú špecifické pre študentov jednotlivých fakúlt. Nemá zmysel porovnávať zručnosti študentov Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK so zručnosťami študentov PdF TU. Aby bol vzdelávací proces prostredníctvom e-learningu efektívny, musí každá fakulta nielen pripraviť či zakúpiť kvalitné elektronické kurzy, ale musí naviac poznať schopnosti svojich študentov. Preto sme sa nezamerali na prieskum, v rámci ktorého by sme oslovili náhodne vybranú vzorku študentov z rôznych fakúlt SR, ale rozhodli sme sa pre pomerne homogénnu vzorku, ktorú tvorilo 606 študentov externých foriem štúdia PdF TU. Prieskum bol vykonaný v septembri a októbri 2005 počas zápisu študentov.

Základné údaje o študentoch

Ako sa dá predpokladať, väčšinu študentov externých foriem štúdia PdF TU tvoria ženy (okolo 70%). Zatiaľ čo rozdelenie podľa pohlavia je podobné pre denné aj externé štúdium, rozdelenie podľa veku je značne odlišné. Rozdelenie vzorky podľa veku je uvedené v tabuľke 1. Z daného rozdelenia vyplýva, že čo sa týka počítačových zručností, nemožno vychádzať z výskumov, ktoré sú zamerané na čerstvých absolventov stredných škôl.

Vek	Počet študentov
do 25 rokov	126
25 – 29 rokov	132
30 – 34 rokov	109
35 – 39 rokov	92
nad 39 rokov	147

Tabuľka 1

Čo sa týka typu absolvovanej strednej školy, podiel stredných priemyselných a odborných škôl a podiel stredných odborných učilíšť je približne 1:1. Iba približne každý 25. študent externých foriem štúdia na PdF TU je absolventom gymnázia.

Väčšina študentov externých foriem štúdia PdF TU pracuje na plný úväzok (až 88%). Títo študenti sú teda časovo veľmi vyťažení, z čoho vyplýva potreba poskytnúť im informácie tak efektívne, ako je to len možné. Pre týchto študentov je výhodné minimalizovať počet kontaktných hodín a zvýšiť podiel samoštúdia prostredníctvom kvalitných materiálov.

Zručnosti a vedomosti nadobudnuté počas štúdia na strednej škole

V prvej časti dotazníka sme zisťovali, s akými kategóriami softvéru sa študenti učili pracovať počas ich štúdia na strednej škole. Zistili sme, že s textovým editorom sa učila pracovať približne polovica respondentov a s tabuľkovým procesorom asi tretina respondentov. So zvyšnými programami (grafické programy, databázové systémy, programovacie jazyky) sa učilo pracovať menej ako 10% respondentov. Pretože sme predpokladali, že odpovede budú závisieť aj od veku respondentov, vyhodnotili sme odpovede zvlášť pre skupinu pozostávajúcu z približne 25% najmladších respondentov (ďalej skupina M) a zvlášť pre skupinu pozostávajúcu z približne 25% najstarších respondentov (skupina S). Ako sa dalo predpokladať, percentuálne zastúpenie študentov, ktorí pracovali počas štúdia na strednej škole s textovým editorom či tabuľkovým procesorom, je výrazne vyššie v skupine M (až 90% respondentov zo skupiny M sa učilo pracovať s textovým editorom a 70% z nich sa učilo pracovať s tabuľkovým procesorom). Z uvedeného zistenia vyplýva, že ak by sme dotazník robili aj so študentmi denného štúdia, ktorých vekové rozdelenie je úplne iné, podiel študentov ovládajúcich prácu s textovým editorom a s tabuľkovým procesorom by sa približoval hodnotám zisteným v skupine M, nie v celej vzorke respondentov externého štúdia. Taktiež možno predpokladať, že v budúcnosti bude podiel študentov externého štúdia prichádzajúcich na vysoké školy, ktorí ovládajú základy práce s uvedenými dvoma kategóriami softvéru, postupne narastať.

Taktiež sme chceli vedieť, či sa študenti počas štúdia na strednej škole stretli s využitím PC ako prostriedku na dosiahnutie vzdelávacích cieľov v predmetoch iných ako programovanie, výpočtová technika či informatika. Žiaľ, iba 6% respondentov odpovedalo na túto otázku kladne. Situácia nie je oveľa lepšia ani v skupine M, kde kladne odpovedal iba približne každý ôsmy respondent. Možno teda predpokladať, že chápanie PC a moderných technológií ako prostriedku na dosiahnutie vzdelávacích cieľov nie je u absolventov stredných škôl dostatočne rozvinuté. Počítače sa na stredných školách zväčša používajú iba ako objekty výuky.

Práca s PC v súčasnosti

V druhej časti dotazníka sme zisťovali, s akým softvérom momentálne študenti pracujú a ako dokážu využívať služby Internetu. Zistili sme, že viac ako polovica študentov pracuje s PC denne, zatiaľ čo iba 20% študentov pracuje s PC menej ako raz za týždeň. Z tohto pohľadu by teda štúdium prostredníctvom počítača nemalo byť neprekonateľnou prekážkou. Ako sa dá predpokladať, študenti najčastejšie používajú textový editor (viac ako 80% študentov ho používa minimálne raz za mesiac) a tabuľkový procesor (47% študentov ho používa minimálne raz za mesiac). Ostatné druhy softvéru používa častejšie ako raz za mesiac menej ako sedmina študentov.

Čo sa týka frekvencie pozerania Internetových stránok, približne 60% študentov si pozerá www stránky aspoň raz za týždeň, čo je pomerne slušný základ pre zavedenie štúdia prostredníctvom e-learningových kurzov umiestnených v LMS. Treba však spomenúť aj to, že až 30% študentov si www stránky nepozerá vôbec, čím sa podľa nášho názoru izoluje od množstva užitočných a ľahko dostupných informácií. Je trochu prekvapujúce, že výsledky o niečo lepšie vyznievajú v prospech starších študentov. Taktiež existujú menšie rozdiely medzi mužmi a ženami v prospech mužov.

Viac ako polovica študentov si pozerá svoju mailovú schránku aspoň raz za týždeň. Opäť sa ukazujú menšie rozdiely medzi staršími a mladšími v prospech starších študentov a medzi mužmi a ženami v prospech mužov. Žiaľ, až 42% študentov nemá vlastnú mailovú schránku, a teda ani návyk využívať Internet ako prostriedok na komunikáciu.

Zaujímalo nás aj to, či si študenti uvedomujú skutočnosť, že Internet možno použiť aj na on-line komunikáciu. Práve toto využitie Internetu je veľmi dôležité pri e-learningu, nakoľko integruje študentov rozmiestnených po celej republike do jednej virtuálnej triedy. V súlade s našimi očakávaniami neboli zistené výsledky optimistické. Až 57% študentov nikdy nepoužilo chat, zatiaľ čo iba približne každý piaty študent použil túto službu viac ako 50-krát za celý život. Čo sa týka pohlavia, opäť sú výsledky priaznivejšie u mužov. Čo sa týka veku, tentokrát sú výsledky priaznivejšie u mladších študentov. Treba však konštatovať, že využívanie tejto služby u našich študentov je nedostatočné a v prípade zavádzania e-learningu vo väčšom objeme by bolo nutné vybudovať v nich presvedčenie, že chat nie je iba niečo, čo robia na Internete mladí, keď sa nudia.

Prístup k PC a k Internetu

V tretej časti dotazníka sme zisťovali, či majú študenti dostatočný prístup k PC a k Internetu. Prístup k PC sa javí ako optimistický, nakoľko až 90% študentov uviedlo, že majú prístup k PC doma alebo v práci. 48% študentov dokonca uviedlo, že prístup k PC má aj doma, aj v práci. Použitie elektronických materiálov pre samoštúdium (elektronické skriptá, off-line kurzy) sa teda nejaví ako problém.

Situácia je horšia pri prístupe k Internetu. Iba dve tretiny študentov má Internet buď doma alebo v práci. Prístup na Internet u priateľov či prostredníctvom kaviarne nie je pre podmienky štúdia akceptovateľný. Použitie e-learningových kurzov v prostredí LMS by teda spôsobovalo problémy až tretine študentov, z čoho vyplýva, že tieto kurzy môžu byť zatiaľ použité iba ako jedna z alternatív (nie však jediná). Situácia je najhoršia vo vzorke mladých, kde prístup k Internetu (doma alebo v práci) má iba polovica študentov.

Materiály, z ktorých by študenti chceli študovať

V štvrtej časti dotazníka sme zisťovali, z akého materiálu by sa študenti učili najradšej. Skoro polovica študentov by sa najradšej učila z vlastných poznámok z prednášok (to je pri obmedzenom počte hodín na diaľkovom štúdiu problematické). Približne štvrtina študentov by najradšej používala elektronický kurz na CD a približne pätina klasické skriptá či učebnicu. Elektronický kurz prístupný cez Internet preferuje iba každý štrnásty študent. Situácia je výraznejšie odlišná iba vo vzorke mužov, kde elektronické skriptá na CD sú najobľúbenejšie až u 30% respondentov, avšak aj v tejto skupine sú najobľúbenejším materiálom vlastné poznámky z prednášok.

Vo všetkých sledovaných skupinách (muži, ženy, skupina M, skupina S) platí to isté poradie obľúbenosti:

1. vlastné poznámky z prednášok,
2. elektronické skriptá na CD,
3. klasické skriptá či učebnica,
4. elektronický kurz prístupný cez Internet,
5. poznámky z prednášok od spolužiakov.

Čo sa týka užitočnosti jednotlivých materiálov, za najužitočnejšie sú považované klasické skriptá či učebnica spolu s elektronickými skriptami na CD. Tento názor vyjadrili približne traja z piatich respondentov. Poznámky od spolužiakov a kurz prístupný cez Internet považuje za užitočný približne každý štvrtý respondent. Myslíme si, že rozdiel medzi elektronickým kurzom na CD a kurzom prístupným cez Internet je spôsobený tým, že študenti poznajú oveľa viac nevýhod on-line kurzov ako ich výhod. Uvedomujú si, že pri štúdiu kurzu prístupného cez Internet by museli mať bezproblémový a lacný prístup na Internet. Nakoľko väčšina z nich sa s týmto spôsobom štúdia ešte nestretla, nepoznajú výhody vzájomnej komunikácie prostredníctvom chatu, diskusného fóra či videokonferencie.

Viac ako 90% respondentov by sa snažilo obsah elektronických kurzov vytlačiť. Výsledky sú porovnateľné vo všetkých sledovaných skupinách. Z odpovedí respondentov vyplýva, že by bolo vhodné pripraviť ku každému kurzu (či už on-line alebo off-line) aj jeho tlačenú podobu, nakoľko vytlačenie obsahu kurzu umiestneného na Internete je pomerne komplikované. Na jednej strane tým (v prípade on-line kurzov) stratíme možnosť sledovať prácu niektorých študentov, na druhej strane možno predpokladať, že študenti si to vytlačia aj tak, avšak v pre nich oveľa horšej a nekvalitnejšej podobe.

Moderné technológie ako zdroj informácií

V záverečnej časti dotazníka sme zisťovali, či majú naši externí študenti skúsenosti so štúdiom prostredníctvom výukového CD či Internetového kurzu.

Iba približne pätina študentov odpovedala, že študovali prostredníctvom viacerých elektronických kurzov a ďalšia pätina študovala prostredníctvom jedného kurzu. To znamená, že až traja z piatich študentov nemajú žiadne skúsenosti so štúdiom prostredníctvom CD. Situácia je nepatrne priaznivejšia v skupine mužov.

Čo sa týka štúdia prostredníctvom on-line kurzu umiestneného na Internete, iba každý dvadsiaty študent má určitú skúsenosť s týmto typom vzdelávania sa. Situácia je nepatrne priaznivejšia v skupine mužov a najmenej priaznivá v skupine študentov do 25 rokov.

Viac ako polovica študentov však často používa Internet, keď potrebuje zistiť určitú informáciu (vrátane počasia, kurzov, najnovších správ z domova a zo sveta, ...). Iba 11% študentov zatiaľ Internet ako zdroj informácií nepoužilo.

Záver

Z odpovedí respondentov vyplýva, že veľká časť študentov sa doteraz nestretla s možnosťou využitia moderných informačných a komunikačných technológií ako prostriedku na dosiahnutie určitých vzdelávacích cieľov. Nakoľko štúdium formou e-learningu je podstatne odlišné od štúdia prostredníctvom kontaktných prednášok a tlačených skrípt, mnohí naši študenti by mali s touto metódou značné problémy. Na druhej strane treba pripomenúť, že existuje pomerne značná časť študentov, pre ktorú by využitie moderných technológií vo vzdelávaní predstavovalo efektívny doplnok ku klasickému spôsobu vyučovania.

Literatúra

[1] GAVORA, P.: Úvod do pedagogického výskumu. UK, Bratislava 1999.

[2] GAVORA, P.: Výskumné metódy v pedagogike. UK, Bratislava 1997.

[3] TUREK, I.: Učiteľ a pedagogický výskum. MC, Bratislava 1998.

Adresa autorov:
doc. RNDr. Pavel Híc, CSc.
Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita
Priemyselná 4
P.O.BOX 9
918 43 Trnava
e-mail: phic@truni.sk

PaedDr. Milan Pokorný
Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita
Priemyselná 4
P.O.BOX 9
918 43 Trnava
e-mail: mpokorny@truni.sk

Integrovaná výuka s matematikou na 1. stupni základní školy

Jitka Hlaváčková

Abstract. *This paper deals with the integration of education with mathematics at the primary school. It is possible to use project method or show the links between different subjects by the aid of fairy tales and games.*

Integrovaná výuka

O potřebě integrované výuky na základní škole - specielně pak na 1. stupni ZŠ - se hovoří nejen mezi odborníky[11] z Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, ale i mezi pedagogy a rodiči. Pokud si rodiče pro své děti nevyberou jednu z možností alternativního vzdělávání, jsou mnohdy nuceni hledat základní školu, která nabízí alespoň něco málo navíc, než „jen“ základní vzdělání. Proto je potřeba základní školství stále rozvíjet, obohacovat a žákům nabízet zajímavé školní i mimoškolní činnosti.

Národní program rozvoje vzdělávání v České Republice (tzv. Bílá kniha) z roku 2001 uvádí: „Škola musí usilovat o to, aby vzdělání mělo pro všechny žáky smysl a osobní význam. To vyžaduje nejen změny obsahu vzdělávání, metod a forem výuky, ale i změny klimatu a prostředí školy.“[12] Dá se říci, že v současné době probíhá mezi školami „boj o žáka“. Není výjimkou, když základní škola nabízí rozšířenou výuku vybraného předmětu, např. cizího jazyka, tělesné či hudební výchovy. Tento fakt však ještě nemusí rodiče přesvědčit o vhodnosti umístění svého dítěte do podobně zaměřené školy, protože v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání se uvádí, že škola by měla vytvářet nabídku povinně volitelných předmětů pro rozvoj zájmů a individuálních předpokladů žáka.

K celkové změně vyučování na základní škole nepřispěje pouze tvorba a následné uplatňování Školního vzdělávacího programu (ŠVP) vytvořeného na základě Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV), ale aktivní spolupráce a invence samotných učitelů, kteří se přímo účastní vzdělávacího procesu. Často je na ně kladen nesnadný úkol – motivovat žáky tak, aby je právě probíhající aktivity přitahovaly a zároveň obohacovaly.

V dnešní škole se o takto pojaté vyučování snaží nejeden učitel, stále je to však málo. Žáci na 1. stupni základní školy jsou her, soutěží a pohádek chtivé, touží stále něco objevovat, poznávat - tento potenciál je nutné využít. Nejen projektové vyučování a pohádkové hodiny mohou být dostupným prostředkem, ale také jednoduše a vhodně propojená témata jednotlivých předmětů mohou dostatečně pokrýt učitelovu snahu o integrovanou výuku. V takových aktivitách je potřeba využít také žákovu tvořivost.

Chybami se člověk učí

Jedna paní učitelka začlenila multikulturní výchovu do výuky osobitým způsobem – vybrala si 5 národností, o kterých její žáci neměli příliš tušení. Ke každé z nich

[11] viz Melichar, J. Integrovaná výuka s matematikou, str. 23 –30.
[12] viz Národní program rozvoje vzdělávání v České Republice, str. 11–12.

v literatuře vyhledala jednu pohádku, která alespoň částečně vypovídá o mentalitě lidí a konkrétní kultuře. Aby navodila správnou atmosféru, přišla do hodiny jednou oblečená jako Gejša, podruhé jako indiánka, jindy přivedla černocha z jedné africké země. Žáci vnímají takový přístup učitele naprosto odlišně, než klasickou frontální výuku. Celá hodina byla věnována jazykové výchově s prvky multikulturality a na otázku, zda by se do takto koncipované hodiny daly zařadit prvky matematiky, odpověděla jednoznačně kladně. Přestože se inovací výuky matematiky nezabývala, po následném rozboru sama přicházela s návrhy, jak by se dala matematika bez problémů začlenit do této hodiny. Domnívám se, že podobné „nedostatky“ pramení z toho, že každý učitel preferuje určitý předmět, kterému věnuje mnoho času a nápadů. Neuvědomuje si však, že na stejné téma lze objevit vhodná cvičení i v jiných předmětech. Pro uvedenou učitelku to znamená poučení k příštím aktivitám, ostatní učitele – především ty budoucí – se to musíme pokusit naučit během jejich studia.

Didaktickou hrou i pohádkou lze nejen dosáhnou úspěchu u žáků, ale je i možné dospět k požadovanému cíli výuky. Abych navázala na předešlé zkušenosti, ráda bych představila jeden z přístupů k integrované výuce na 1. stupni základní školy.

Jak propojit matematiku s jazykovou výchovou

V hodině Českého jazyka (literatury) se čte pohádka O červené Karkulce. Po čtení přijde převyprávění žáky, dramatizace a práce s textem (vyhledávání rýmů apod.). V matematice si vzpomeneme, se kterou pohádkou jsme pracovali v hodině ČJ a žáci vypracují matematické slovní úlohy, které paní učitelka připravila. Poté se žáci rozdělí do skupin, ve kterých se pokusí transformovat pohádku do humorné formy. Tím nám může vzniknout např. pohádka O zelené Karkulce, O červené motorce apod., nechme pracovat dětskou fantazii. Žáci ve skupinách mají za úkol nejen vymyslet příběh s koncem (nemusí psát, ale umět vyprávět), zároveň na balící papír vytvořit patřičnou ilustraci příběhu a na samostatné papíry vymýšlet slovní úlohy související s příběhem. Není tedy jednoduché vymyslet příběh tak, aby se v jeho ději dal najít vhodný příklad k počítání. Každá skupina tedy vytvoří takové malé portfolio, které bude sloužit ostatním skupinám jako soubor pracovních listů. Každá skupina postupně představí svůj příběh společně s ilustrací a pak zadá úlohy ostatním žákům.

Tyto aktivity nemusí probíhat v jedné vyučovací jednotce, ale mohou se zapojit do krátkodobého projektu či pouze zpestřit jedno školní dopoledne, kde nehraje roli zvonění ani tradiční přestávky. V obou případech lze využít mnoho dalších možností, jak propojit výuku jednotlivých předmětů do jednoho tématického celku.

Závěr

Vhodná inovace ve výuce ze strany učitele, je krokem ke zpříjemňování vyučovacího procesu a tím tedy i k dosahování cílů výuky. I žáci ocení odlišnou formu vzdělávání a naučí se chápat souvislosti mezi jednotlivými předměty, což může pozitivně ovlivnit jejich pohled na vzdělávání.

Literatura

[1] *Národní program rozvoje vzdělávání v Česklé Republice.* Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Praha 2001.

[2] Melichar, J.: *Integrovaná výuka s matematikou.* Matematika v škole dnes a zajtra. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok 2001.

Adresa autora:
Mgr. Jitka Hlaváčková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta UJEP
Hoření 13
400 96 Ústí nad Labem
Česká Republika
E-mail: hlavackova@pf.ujep.cz

O hľadaní inverznej relácie k funkcii $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ s použitím grafického programu graphmatica

Klement Hrkota, Klement Hrkota ml.

Abstract. *As the graphical program graphmatica has helped to find the inverse relation of function* $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$.

Zručný počtár nájde inverznú funkciu (zatiaľ nevie, že to bude relácia) vcelku rýchlo.

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \quad / \quad ^2$$

$$y^2 - 2x = 2\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \quad / \quad ^2$$

$$y^4 - 4y^2x + 4x^2 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x = \frac{16 - y^4}{16 - 4y^2} = 1 + \frac{y^2}{4}$$

Teda inverznou funkciou je funkcia $y = 1 + \frac{x^2}{4}$. Vtedy si ale uvedomí, že výsledok je podozrivo jednoduchý, veď funkcia inverzná k funkcii $y = 1 + \frac{x^2}{4}$ je predsa funkcia $y = 2\sqrt{x-1}$ a to má s pôdnou funkciou pramálo spoločné. Po krátkej kontrole výpočtu nezostáva mu, než funkcie porovnať $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} \; / \; ^2$

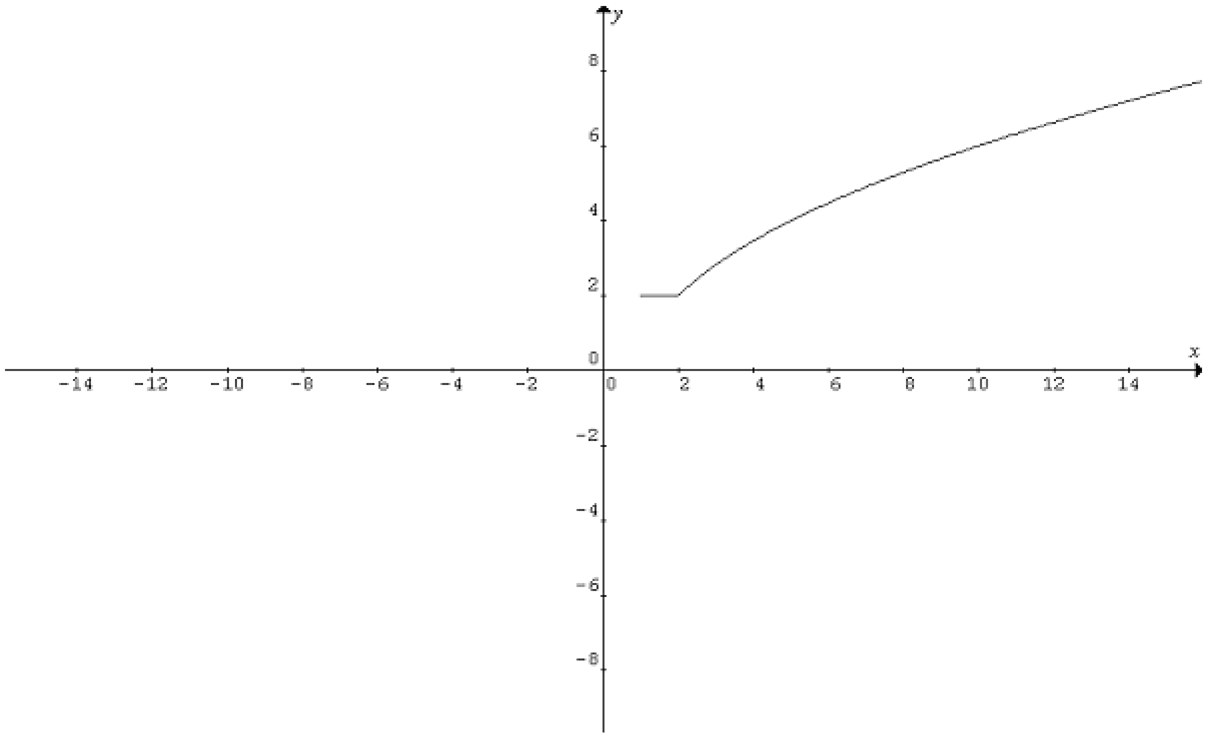
$$2x + 2\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 4x - 4$$

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = x - 2 \quad / \quad ^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

Ľ = P

Podozrenie však pretrváva a tak to skúsi s grafickým programom graphmatica. Funkcia je zobrazená na Obr. 1 a všetko sa objasní.



Obr. 1

Funkcia $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ nie je prostá, no jej prostá časť pre $x \geq 2$ je skutočné zhodná s časťou funkcie $y = 2\sqrt{x-1}$. Táto skutočnosť nebola pri výpočte inverznej funkcie odhalená preto, lebo technika výpočtu nezohľadnila dôsledky neekvivalentných úprav. Ak budeme pri výpočte postupovať nasledovne

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \quad / \quad ^2$$

$$y^2 = 2x + 2\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \quad / \quad ^2$$

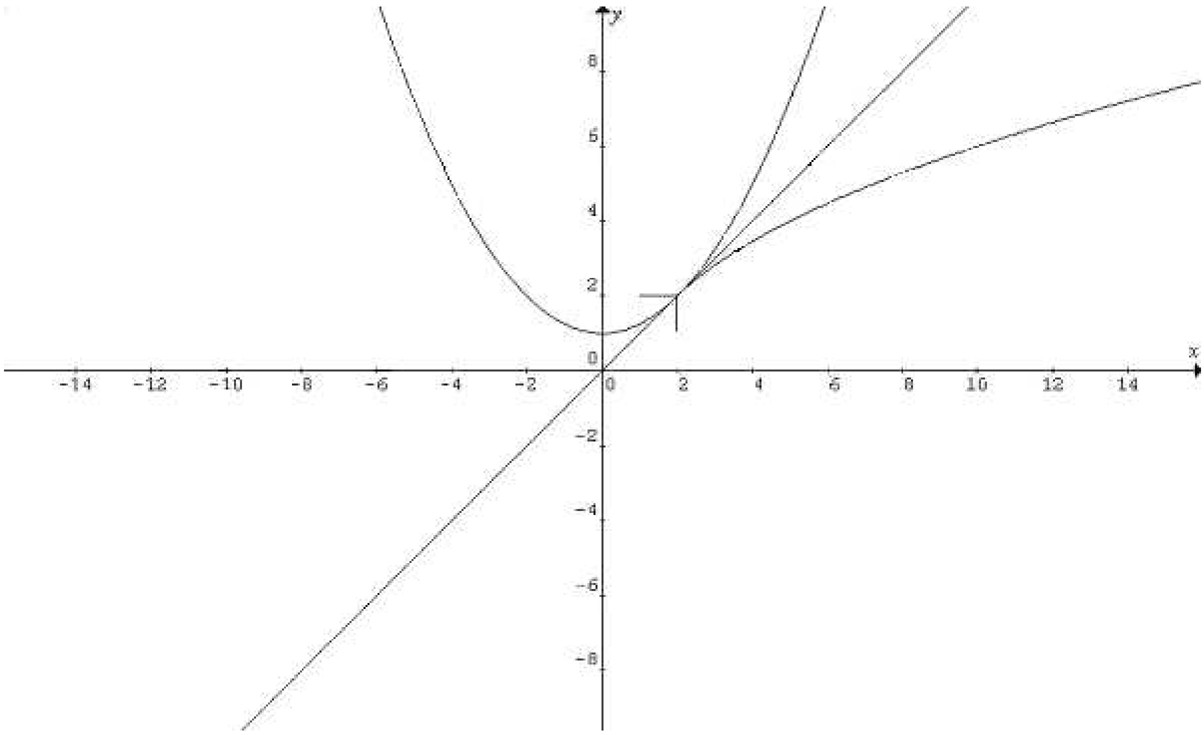
$$y^2 = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$$

$$y^2 = 2x + 2\left|x - 2\right|$$

Ak $x \geq 2$ ak $1 \leq x < 2$

$$y^2 = 4x + 4 \quad y^2 = 4$$

Výpočet nás upozorní, že ide o inverznú reláciu k funkcii (Obr. 2) a podporný technický prostriedok by nebol nutný.



Obr. 2

Adresa autorov:
RNDr. Klement Hrkota, RNDR. Klement Hrkota ml.
PGJB, Palackého 4 TNUAD, Študentská 2
911 01 Trenčín 911 01 Trenčín
e-mail: hrkota@piar.gtn.sk, hrkota@tnuni.sk

Bernard Bolzano – výnimočná osobnosť i nasledovaniahodný učiteľ

Dušan Jedinák

Abstract. *This is an essay to pay tribute to and to remember Bernard Bolzano, a professor of Religion, Logic, Mathematics and a devoted preacher on morality, ethics, and social issues, a rare personality and a teacher worthy to follow.*

Úvod

Zdá sa mi, že práve na pôde Katolíckej univerzity v Ružomberku treba aj v našich postmoderných časoch pripomenúť život a dielo významného mysliteľa, filozofa i matematika, učiteľa náboženstva i nadšeného spoločenského reformátora, ktorý bol vo svojej dobe starostlivým a citlivým vychovávateľom, prísnym a spravodlivým examinátorom, pozoruhodným a úspešným učiteľom s neobyčajnou popularitou i morálnou autoritou. Jeho nedeľné príhovory k študentom boli zamerané nielen na otázky náboženské, ale aj etické, výchovné a sociálne. Preberal problematiku pokroku a osvety, mravný zákon, lásku k vlasti i rovnosť ľudí. Veľmi dobre spoznal, že v*iera nás nezbavuje povinnosti používať vlastný rozum a naopak.* Uznával, že zodpovedný človek je povinný získavať zdôvodnené presvedčenie aj o svojej viere. Poslednú prednášku k študentom zakončil známou výzvou Pavla z Tarzu (asi 8-68): *Skúmajte všetko a dobré si podržte* (1Sol 5, 21).

Svedomitý profesor

Už úvodná prednáška presvedčila poslucháčov pražskej univerzity, že mladý, vychudnutý, chorľavý profesor je rozhodnutý odovzdávať filozofické i matematické poznatky s plným nasadením svojich síl a schopností, s láskou i pochopením pre študentské starosti svojich žiakov. Namiesto dohodnutej rebélie sa po jeho prvej prednáške ozval potlesk. Počas celého učiteľského svojho pôsobenia (1806–1819) sa **Bernard Bolzano** nevyhýbal žiadnym študentským a spoločenským otázkam (poslucháčov bolo postupne okolo päťtisíc). Zdôrazňoval úlohu celoživotného štúdia, lebo vzdelanie považoval za nástroj formovania ľudského rozumu: *Bez toho, že by sme preceňovali hodnotu, ktorú poznanie má, musíme všetci uznať, že nevedomosť a omyl pôsobí celému ľudstvu nesmierne zlo... každý človek, pokiaľ je živý, má pokračovať vo svojom vzdelávaní.* **Bolzano** neskrýval odhodlanie pre zmenu spoločenských pomerov ani odvahu priekopníka nielen zdôvodnených náboženských predstáv, ale aj príslušných cirkevných premien.

Životný osud

V Čechách prežil celý svoj život. Narodil sa v Prahe 5. októbra 1781 ako štvrté dieťa z dvanástich. Matka bola pražská Nemka, starostlivá a zbožná. Otec pochádzal z Talianska, venoval sa obchodu so starožitnosťami a umeleckými predmetmi. Nadaný Bernard navštevoval nemeckú základnú školu a piaristické gymnázium, súkromne študoval taliančinu, francúzštinu a gréčtinu. Pri štúdiu filozofie (1796-1799) na pražskej univerzite spoznal nový svet. Objavil netradičné súvislosti medzi matematikou, logikou a filozofiou. Všetky školské predmety študoval veľmi svedomito. Filozofickú fakultu absolvoval s vyznamenaním a rozhodol sa ešte pre štúdium teológie (1800–1804). Absolvoval prísne skúšky z matematiky a fyziky, získal doktorát filozofie, stal sa kňazom (1805). Roku 1806 bol menovaný za univerzitného učiteľa náboženstva, napriek tomu, že mal povesť talentovaného matematika (F.J. Gerstner ho považoval za jedného z najlepších matematikov akých poznal) a uchádzal sa o profesúru v tomto odbore. **Bolzano** aj na poste univerzitného katechétu učil študentov kriticky a nezaujato myslieť. *Omnoho viac ako o šírenie užitočných právd sa musíme usilovať o to, aby sa cvičením u ľudí rozvinula schopnosť úsudku... musíme ich naučiť samostatne rozpoznávať nesprávne úsudky.* Stal sa aj členom matematickej sekcie Kráľovskej českej spoločnosti náuk (1815), neskôr (1841-1848) aj sekretárom jej matematickej a filozofickej sekcie. Bol aj dekanom filozofickej fakulty (1818). Odklon od úradne stanovených osnov ho priviedol k sporu s absolutistickou vrchnosťou v Prahe i vo Viedni. Za bludárske vety (112) z jeho kázní (300), ktoré boli označené za neprispôsobené vieroučným pojmom a potrebám vtedajšej cirkevnej a vládnej moci, získal „přísnou důtku“ a „nespůsobilost ke každé státní službě“. Zosadili ho z miesta univerzitného učiteľa (1819), poslali ho do výslužby (s ročnou penziou 300 zlatých), zakázali mu verejnú činnosť. Bol prinútený orientovať sa viac na vedné odbory, v ktorých možno slobodne argumentovať

a dokazovať – matematiku a logiku. V tichom prostredí Těchobuzi na Pacovsku (1823–

1841) žil skromne v rodine priateľa J. Hoffmanna, čo mu umožnilo venovať sa aj úvahám o všeobecnom ľudskom poznaní, o spravodlivejšom spoločenskom poriadku. Písal po nemecky, jeho práce vydali žiaci a prívrženci. Chatrné zdravie a tuberkulózne chrlenie krvi mu sťažovalo život. Z jeho jedenástich súrodencov sa dospelého veku dožil iba jeden. V rodine brata Jána, v pražskej Celetnej ulici, strávil **Bernard Bolzano** posledné roky života. Trápený dlhodobou chorobou, zomrel na ťažký zápal pľúc 18. 12. 1848. Za veľkej účasti pražského ľudu ho pochovali na Olšanskom cintoríne v Prahe.

Odborné matematické pojednania

Cenil som si na matematike len to, čo je súčasne filozofiou. Prvá Bolzanova odborná práca bola z matematiky – ***Úvahy o niektorých predmetoch elementárnej geometrie*** (1804). Ďalšie matematické práce ***Príspevky k zdôvodnenejšiemu výkladu matematiky*** (1810), ***Binomická poučka*** (1816), ***Rýdzo analytický dôkaz*** (1817), ***Tri problémy rektifikácie, výpočtov plôch a objemov*** (1817) a posmrtne objavené práce ***Náuka o funkciách*** a ***Teória čísiel*** (dokončené asi v rokoch 1833-1841, vyšli po česky tlačou až v roku1931) sú výrazom netradičných úvah a prostriedkov, ktorými sa snažil spresniť matematické postupy. Nimi zanechal trvalú stopu pri výstavbe matematickej analýzy. V práci ***Rýdzo analytický dôkaz*** dokázal vetu: Ak funkcia $f(x)$ je v intervale $\langle a, b\rangle$ spojitá a $f(a).f(b) < 0$, tak v $\langle a, b\rangle$ existuje aspoň jedno c tak, že $f(c) = 0$. Svojimi prácami bol predchodcom Cauchyho, Cantora, Weierstrassa. **Bolzano** vyslovil nevyhnutnú a postačujúcu podmienku pre konvergenciu postupností, podal presnú definíciu spojitej funkcie a naformuloval o nej niekoľko dôležitých viet. Popísal konštrukciu spojitej funkcie v uzavretom intervale, ktorá nie je monotónna v žiadnom čiastočnom intervale a ukázal, že body, v ktorých táto funkcia nemá deriváciu, ležia všade husto v danom intervale. Zaoberal sa a mal rozpracovanú teóriu reálnych čísiel, v mladosti sa pokúšal aj o dôkaz axiómy o rovnobežkách. **Bolzano** vysvetlil pojmy uzavretý, otvorený a polouzavretý interval, presne vymedzil pojmy limity a derivácie. *Matematiku možno definovať ako vedu, ktorá pojednáva o všeobecných zákonoch, podľa ktorých sa veci musia riadiť vo svojej existencii.*

Spoznal, že v matematike sa nemôžeme zaobísť bez dôkazu existencie. Pri každom dôkaze žiadal uviesť všetky predpoklady, používať dané a neuchyľovať sa k cudzorodým pojmom. Naznačil cesty k formalizácii niektorých dôkazových postupov. Mal geniálnu intuíciu, kriticky a originálne zameral svoju pozornosť na precízne definovanie základných pojmov aj v iných vedných odboroch. Pozoruhodným spôsobom predvídal celý rad zásadných problémov modernej formálnej logiky a teórie vedy.

V Bolzanovom diele stále ostáva mnohé, čím by sme mohli po dnes inšpirovať (P. Zlatoš).

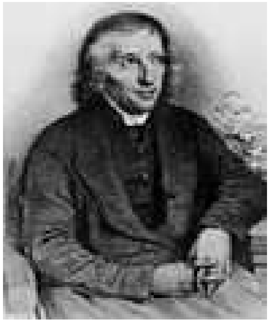
Hra predstáv samých o sebe

Bernard Bolzano ponúkol dôkaz existencie aktuálneho nekonečného množstva právd samých o sebe. Pravda sama o sebe je fakt (výpoveď, poznanie) o tom, ako to skutočne je, bez ohľadu na to, či je to niekým myslené alebo vyslovené. *Niečo je pravda nie preto, že to tak poznáva Boh, ale naopak Boh to tak poznáva, pretože to tak je.* **Bolzano** vyšiel z tejto predstavy: Existuje aspoň jedna pravda sama o sebe. Ak by to nebola pravdivá výpoveď, tak by bola pravdivá výpoveď: Neexistuje žiadna pravda sama o sebe. Ale to by bola tiež pravda sama o sebe. S tým bude každý súhlasiť, lebo opačné tvrdenie odporuje samé sebe. *Keby neboli pravdy samé o sebe, nemohli by existovať ani žiadne poznané alebo myslené pravdy.* **Bolzano** tým považoval existenciu aspoň jednej pravdy samej o sebe za rozumovo prijateľnú pre každého. Potom už ľahko ukázal (indukciou, cez výpoveď, že predchádzajúce výpovede samé o sebe sú tiež novou pravdou o sebe), že právd o sebe je možných nekonečne veľa. Pretože kresťanský Boh je vševediaci, obsiahne ich všetky, to znamená nekonečné množstvo právd bude aktuálne (uskutočnené). Božia prozreteľnosť sa tak stala obsiahnutím všetkých právd – uskutočnením (aktualizáciou) nekonečného množstva právd samých o sebe. Nekonečné množstvo právd samých o sebe je vo vedomí Božom (Sensorium Dei). Pre človeka, ktorý sa nedíva Božími očami, strácajú predstavy aktuálneho nekonečna svoje opodstatnenie.

Bolzano prijal názor, že aktuálne (uskutočnené) nekonečné množstvo právd samých o sebe je natrvalo prítomné v Božej obrazotvornosti. Mnohí matematici uverili v bezospornosť pojmu aktuálneho nekonečna, rozpracovali teórie, v ktorých prijali „zrejmé“ spory za „zdanlivé“ (paradoxy). Nimi konštruované matematicko-logické modely tieto ťažkosti vysvetľujú tak, že ich môžeme intelektuálne prijať ako javy, ktorými sú charakterizované naše predstavy o nekonečných množinách. Rukami to nemožno uchopiť, ale rozum to pochopí.

Prenikavá logika pojmov

Hlbokým odkazom v oblasti sémanticky založenej koncepcie logiky sa stalo monumentálne Bolzanovo ***Vedoslovie***(Vědosloví s podtitulem *Pokusy o zevrubné a větším dílem i nové vylíčení logiky se stálým zřetelem k jejímu dosavadnímu zpracování*; štvorzväzkové; hlavné časti: *Fundamentálna náuka* – problematika objektívnych právd, *Elementárna náuka* – poňatie základnej logiky (pojmy, výroky, úsudky), *Náuka o poznaní* – analýza procesu myslenia, *Heuristika* – objavovanie vedeckých



poznatkov, *Samotné vedoslovie* – metodológia vedeckého postupu a oznamovanie jeho výsledkov; 718 paragrafov), dokončené asi v rokoch 1829-1830, ktoré vyšlo anonymne až r. 1837. **Bolzano**, vychádzajúc zo svojich filozofických a etických princípov, snažil sa hľadať postupy pri usporiadaní právd pre jednotlivé vedy a spôsob ich výkladu v učebniciach. *Predovšetkým som si stanovil pravidlo, že ma žiadna zrejmosť predpokladu nedonúti k tomu, aby som sa cítil zbavený povinnosti hľadať preň dôkazy tak dlho, pokiaľ jasne neuvidím, že nemožno a prečo nemožno požadovať žiadny dôkaz.* Napriek nadmernému rozsahu, rozvláčnej forme výkladu i úzkostlivej presnosti argumentácie toto dielo prispieva k pozoruhodnej úprave logicko-metodologických a filozoficko-matematických základov poznávania.

Vykročenie za pochopením uskutočneného nekonečna ***Paradoxy nekonečna***, napísané v rokoch 1847–1848, ktoré prvý raz vyšli r. 1851, obsahujú základné idey o práci s nekonečnými množinami. Na túto prácu sa odvolával aj tvorca teórie množín Georg Cantor. **Bolzano** rozlíšil konečnú, spočitateľnú a nespočítateľnú množinu, uznával aktuálne nekonečno. Dokázal, že vlastná podmnožina nekonečnej množiny môže byť s ňou samou ekvivalentná. **Bernard Bolzano** dospel až k pojmom mohutnosti množiny a mohutnosti kontinua, ale nevyužil ich. Medzi prvými pochopil význam nekonečna v matematike a vytušil dôležitosť presných definícií. Napísal: *Konečné a nekonečné sa vzťahuje na určité vnútorné vlastnosti predmetov a vôbec sa netýka len ich vzťahov k našej poznávacej schopnosti či dokonca k našim zmyslom.* S poznaním Bolzanových filozoficko-matematických predstáv rastie aj naše presvedčenie, že sa dá vystihnúť možné ako skutočné, že je prípustné obmedzenie neukončeného, že aj nekonečnu patrí naprostá určitosť. V dnešnej psychoanalýze matematiky (teórie množín) majú Bolzanove názory o zmysle a význame aktuálneho nekonečna nezanedbateľnú úlohu.

Pozorne vnímal aj spoločenské okolie

Otvorene a netradične sa vyjadroval nielen o problémoch náboženských, mravných, ale aj o sociálnych a národných. Vnímal právo poddaných na odpor proti nespravodlivosti. Svoje utopické predstavy o riadení spoločnosti zverejnil **Bolzano** v práci ***O najlepšom štáte*** (prvá verzia bola napísaná v 20. rokoch 19. storočia, v roku 1831 ju venoval svojej priateľke A. Hoffmannovej, neskôr prácu dopĺňal a upravoval, dokončená bola až v prvej polovici 40. rokov, rukopis koloval medzi priateľmi a bol opisovaný; tlačou práca vyšla nemecky v roku 1932 a česky roku 1934). Je odrazom ideí o všeobecnom blahu ako najvyššom mravnom zákone, uznaním toho, že *podstatné je ctiť v každom človeku dôstojnosť ľudskej prirodzenosti.* Vždy sa snažil ukazovať ako zabrániť neospravedlniteľnému zlu a neľudskému trápeniu, ako spojiť tvorivý intelekt, nezištnú spoluprácu a slúžiacu zodpovednosť spoločenskej praxe. *Nič na svete nesmieme mať za istejšiu a nepochybnejšiu ako zásadu, že všetci pozemšťania sa vyznačujú v podstate rovnakou prirodzenosťou a majú v podstate rovnaké práva... Každý boháč namiesto toho, aby si robil nárok na zvláštne prejavy úcty, by mal cítiť kvôli svojmu bohatstvu potrebu ospravedlnenia a obhajoby.*

Premýšľavé náboženstvo

Katolícky osvietenec **Bolzano** vedel, že výchova a vzdelávanie sú užitočným prostriedkom pre zušľachtenie každého človeka i ľudstva ako celku. Chcel ukázať kresťanstvo v súlade s ľudským intelektom a presvedčiť o zmysluplnej spolupráci náboženskej viery a kritického myslenia v živote každej osobnosti. *Při výkladu každé pravdy, která se má státi přesvědčením žáků, je nutně třeba dbáti této zásady: aby všechny námitky, které proti ní vzneseny, ..., byly aspoň krátce dotčeny, neboť setkáli se žák později s některou z těchto námitek, které mu byly zamlčeny, jest jen zřídka s to, aby ji bez návodu patřičně rozřešil, a jest pak ve své víře zmaten.* Rozvoj kritického myslenia je aj doménou logiky, metodológie vied i matematiky. V nich sú podnetné impulzy nielen pre vzdelanosť (logická stavba prejavu, znalosť definícií pojmov, argumentmi podložený výklad), ale aj pre mravnosť, múdrosť i cnosť každého človeka v nezištnej činorodej spolupráci celého ľudstva.

Z odkazu a pre spomienku

Pripomeňme si ešte niekoľko myšlienok, ktorými sa učiteľ náboženstva a filozofie **B. Bolzano** zapísal do sŕdc svojich kolegov i žiakov:

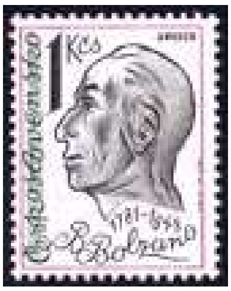
- *Byť šťastným a iných obšťastňovať – to je pravé poslanie človeka... Priznajme sa pred celým svetom, že potrebujeme lásku, milovať a byť milovaní.*

- *Musíme byť rozhodní. Priľnúť k pravde, k dobrej veci ľudstva a nie sa chcieť zapáčiť nejakej skupine, nejakej súdnej stolici... Odvahu potrebuje aj učiteľ, pretože pravá osveta vždy naráža na odpor: v každej krajine sa nájdu ľudia, pre ktorých je čistá pravda soľou v očiach...*
- *Pravá veselosť nielenže neuberá z ľudskej dôstojnosti, ale je aj podstatnou podmienkou jej dokonalosti... Zo všetkých možných spôsobov jednania vyber vždy ten, ktorý po uvážení všetkých dôsledkov najviac prispeje k blahu celej spoločnosti.*
- *Múdry človek nie je nikdy pyšný a spupný; skôr o sebe zmýšľa skromnejšie ako iní... nechce panovať nad inými, ale nechce tiež byť ich sluhom...*

Pedagogika ako súlad slov a skutkov

Z odkazu významných učiteľov, ktorí dokázali zosúladiť slová so skutkami a osobným životom zostane vždy niečo pozitívne vo vedomí ich žiakov, aj keď sa ich cesty rozídu. Takou pedagogickou osobnosťou bol bez pochýb aj profesor **Bernard Bolzano**, ktorý si ešte ako začínajúci vychovávateľ predsavzal: *Mojou prvou povinnosťou musí byť, aby som si získal lásku svojich žiakov.* Svojou výchovno-vzdelávacou činnosťou povzbudil mnohých v presvedčení, že pravdivé poznanie, cnostná mravnosť a nezištná osvetová spolupráca prispievajú k dokonalosti ľudského rodu. Pedagogické umenie je aj v tom, systematicky zušľachťovať zároveň ľudský um aj cit. K tomu patrí aj skromné, dôstojné a láskavé vystupovanie v škole aj na verejnosti. Od učiteľov na základných alebo na stredných školách nemusíme vyžadovať nadpriemerné vedomosti, ak *učiteľ bude človek dobrý, so zdravým rozumom a veselou mysľou, ak bude mať trochu lásky pre povolanie a ak bude náležite poučený, ako si v učiteľskej službe počínať.*

Dnes je možno zrejmé



Bolzano mal nesporne špekulatívne nadanie a schopnosť kriticky posudzovať logickú argumentáciu. Ponúkal svoje názory, ku ktorým sa dopracoval svojím intelektom sám, aj keď často neboli podporované dôverou všetkých. Napriek tomu, bol svojím okolím považovaný za zbožného, veľmi vzdelaného a duchom osvieteného kňaza, ktorý v nezištnej spolupráci s blížnymi napomáhal blahu celého ľudstva. *Ani v hodinách najťažšej bolesti som nezakolísal vo viere v Boha a jeho prozreteľnosť.* Katolícka kresťanskosť, ale aj duchaplné logicko-matematické predstavy mu prinášali nepochybnú radosť krehkého tela a povznášajúcej sa duše. Vnímal každú hlbokú náboženskú vieru i rozsiahle logicko-matematické vedomosti ako dve strany univerzálnej mince – ľudskej intelektuálnej schopnosti poznávať pravdu samú o sebe. Dnes je možno zrejmé, že univerzitný učiteľ **Bernard Bolzano** zanechal zmysluplný odkaz láskavej múdrosti nielen v spoločensko-náboženskej oblasti, ale aj na poli vedecko-matematickej metodológie. Možno aj pre nás, učiteľov matematiky na všetkých druhoch a stupňoch škôl, zostanú aspoň trochu inšpirujúce jeho slová: *Slabý matematik nebude nikdy mocným filozofom... aby to, čo možno bolo povedané nejasne, bolo vysvetlené jasnejšie, to, čo je úplne nesprávne, bolo odvolané, ale všetko správne a pravdivé, aby čo najskôr bolo všeobecne prijaté.*

Žije v našich predstavách

Múdry a ušľachtilý **Bernard Bolzano** zostane dejinách zapísaný ako významný matematik, logik, filozof i sociálny mysliteľ. Ako človek pokrokový, ktorý svoje presvedčenie, vedecké i humanistické, nielen hlásal, ale aj žil. Podarilo sa mu vytvoriť obdivuhodné dielo zjednocujúce morálne ideály s prísnou vedeckou metódou, praktické postupy bádania s teoretickou logikou, oduševnenie pre pojmovú usporiadanosť so skutočnými formami pravdy a sveta. Myšlienka Isokratova, ktorú použil ako motto svojej prvej vedeckej práce, je zaujímavým postrehom, výstižnou charakteristikou i podnetným impulzom: V*o vedách i vo všetkých ostatných oblastiach neprinášajú pokrok tí, ktorí kŕčovite zotrvávajú na ustálenom stave vecí, ale tí, ktorí sa usilujú o lepšie, tí, ktorí sa odvážia stále meniť všetko, čo nie je v poriadku.*

Bernard Bolzano, profesor pražskej univerzity, mimoriadny zjav českej kultúrnej minulosti, si odžil svoj neľahký osud v silovom poli medzi etikou a matematikou, náboženstvom a logikou. Stal sa príkladom zosúladenia korektného vedeckého záujmu s ušľachtilou ľudskosťou mravnej autority. Prispel k harmonizácii pojmovej usporiadanosti so skutočnými formami pravdy vo svete. Ako nezabudnuteľná učiteľská osobnosť viedol študentov ku kritickému a nezaujatému mysleniu, k odvahe sa slobodne vyjadrovať a správne argumentovať, aby pravda bola ľahšie nájdená, zrozumiteľnejšie vyložená a účinnejšie pochopená. Zostane zapísaný nielen medzi najprenikavejších mysliteľov 19. storočia v Čechách, ale aj do množiny nezabudnuteľných postáv európskej kultúrnej civilizácie.

Literatúra

[1] BERKA, K.: *Bernard Bolzano*. Praha. Horizont, 1981.

[2] BOLZANO, B.: *O logice* (faksimile překladu). Praha: Památnik národního písemníctví, 1981.

[3] BOLZANO, B.: *O nejlepším státe*. Praha: Mladá fronta, 1981.

[4] BOLZANO, B.: *Paradoxy nekonečna*. Praha: Academia, 1963.

[5] BOLZANO, B.: *Vědosloví*. Praha: Academia, 1981.

[6] BOLZANO, B.: *Vlastní životopis*. Praha: Odeon, 1981.

[7] BOLZANO, B.: *Výbor z filozofických spisů*. Praha: Svoboda, 1981.

[8] JARNÍK, V.: *Bolzano a základy matematické analýzy*. Praha: JČMF, 1981.

[9] LOUŽIL, J.: *Bernard Bolzan*o. Praha: Melantrich, 1978.

[10] PAVLÍKOVÁ, M.: *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*. Praha: UK, 1985.

[11] VOPENKA, P.: *Podivuhodný květ českého baroka*. Praha: Karolinum, 1998.

[12] ZLATOŠ, P.: *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*. Bratislava: IRIS, 1995.

Adresa autora:
Trnavská univerzita - Pedagogická fakulta
Priemyselná 4
918 43 TRNAVA
e-mail: djedinak@truni.sk

Využití interaktivních metod ve výuce matematiky

Marika Kafková

Abstract. *The article deals with the project called Global School aiming for including modern methods into teaching of mathematics. The main characteristic feature of the Global School is the cooperation of pupils of diferent schools where the pupils communicate with one another exclusively via internet.*

Obr. 1 – Žáci při práci v Globální škole

Úvod

Interaktivní výuka je moderní vyučovací proces, při němž současně spolupracují studenti a pedagogové. Důležitou charakteristikou tohoto procesu je vztah mezi uvedenými účastníky, který je založen na principu partnerství a spolupráce, kdy student se stává aktivním subjektem, ovlivňující průběh a podobu procesu.

Základní matematické vědomosti hrají důležitou roli v budoucím životě každého člověka, a proto je nutné výuku matematiky na školách určitým způsobem vylepšovat a zdokonalovat. Zeptáme-li se žáků, jak je matematika baví, odpověď je většinou stejná: „Matyka je nudná a nezáživná“. Žáci také často nevědí a neumí si představit, k čemu jim matematické znalosti budou v životě dobré. Matematika je stále ještě na většině základních, ale i středních škol vyučována standardním způsobem. Učitel je ten, jenž rozdává příkazy, úkoly, nařizuje, napomíná a nutí žáky k určité činnosti. Žáci sedí v lavicích, stojí na opačné straně „barikády“, a proto se snaží dané úkoly a příkazy plnit. Probírají-li se např. objemy těles v prostoru, žáci se většinou naučí potřebné vzorečky a pak řeší jeden příklad za druhým. Příklady jsou nejčastěji typu: *Je dán válec o rozměrech… Vypočti, jaký je objem válce.* Málokdy je žákům předložena úloha z dané problematiky, která je zaměřena na příklad z praxe. Žáci se tak nemusí příliš zamýšlet nad zadaným úkolem, matematika jim připadá nezáživná, a tak ji obvykle řadí do skupiny neoblíbených předmětů. Seberealizace a především kreativita žáků ve výuce tak představuje jen malou roli. Lze říci, že určitá transformace českého školství od stereotypu k tvořivé a zábavné činnosti žáků probíhá velmi pomalu.

Globální škola

O interaktivní výuku matematiky, charakterizovanou úzkou spoluprací žáků různých základních a středních škol usiluje projekt zvaný *Globální škola*, který vznikl v minulém roce na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity. V rámci Globální školy je vytvářena řada projektů a příkladů, při jejichž řešení mohou žáci uplatnit nejen své dosavadní matematické znalosti a dovednosti, ale jsou i nevědomky seznámeni např. s pojmem „spoluzodpovědnost“ za správné výsledky. Učí se komunikovat se svými vrstevníky prostřednictvím internetu a formou vhodných příkladů či projektů se učí vnímat realitu okolního světa. Snaží se samostatně pracovat s počítačovými programy, mají možnost vymýšlet si svá vlastní řešení a tyto pak dále konzultovat se svým virtuálním spolužákem. Způsob práce a průběh řešení daných úkolů žáky umožňuje na druhé straně učitelům blíže nahlédnout do způsobu jejich myšlení a tak je i lépe pochopit. Učitel má možnost zjistit, jak se žák umí vypořádat s nestandardním úkolem, kolik času potřebuje na správné řešení, zda je schopen příklad vyřešit sám, jak dokáže komunikovat se svým okolím apod.

Na tomto projektu Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity kooperuje s Přírodovědeckou fakultou Masarykovy univerzity v zastoupení Doc. RNDr. Eduarda Fuchse, CSc. a doktorandky Mgr. Mariky Kafkové (vede a vyhodnocuje činnosti žáků jedné z virtuálních tříd), kteří jsou rovněž členy řešitelského kolektivu.

Díky *Globální škole* jsou žáci do jisté míry seznámeni s metodou e-learningu. Matematické příklady a projekty, které jsou žákům předkládány, vycházejí víceméně z praxe, přičemž důležitou charakteristikou daných projektů je propojení matematiky s ostatními předměty. Příklady jsou vybírány tak, aby byly zábavné a motivující pro další studium matematiky.

Cílem projektu je, aby žák byl schopen:

- chápat svět v souvislostech,
- nahlížet na problémy z více než jednoho úhlu pohledu,
- spolupracovat se svými kolegy,
- předkládat svá řešení a obhájit si svůj názor,
- být vstřícný k jiným názorům a odlišným řešením,
- vyhledat si potřebné informace,
- využít dosavadních znalostí,
- orientovat se v informačních technologiích, které jsou nedílnou součástí dnešní moderní doby.

Realizace

Jak už bylo zmíněno výše, jedná se o spolupráci žáků různých škol, přičemž komunikace mezi nimi probíhá přes internetové prostředí - tzv. spolupráce „na dálku“.

Základním prvkem v *Globální škole* je virtuální třída, která se skládá z virtuálních lavic, v nichž žáci pracují na přidělených příkladech. Žáci i učitelé škol, které projeví zájem o tento projekt, získají zaregistrováním do *Globální školy* své uživatelské jméno a heslo, pod kterým se přihlašují do systému. Poté jsou tedy vytvořeny třídy skládající se ze žákovských skupin, resp. „lavic“. V každé „lavici“ sedí žáci z různých škol. Komunikace mezi sousedy probíhá pouze prostřednictvím webových stránek *Globální školy*. Jednotlivé „lavice“ pak řeší uložené příklady, přičemž jedna z důležitých podmínek pro splnění příkladů je, že žáci musí spolupracovat a komunikovat mezi sebou, tzn. že na řešení se musí podílet oba. Vzhledem k tomu, že žáci zatím nemají možnost řešit dané úkoly ve shodném čase, je vytvořen ke každému z nich elektronický „sešítek“, do něhož žáci zapisují své nápady a návrhy řešení. Elektronický „sešítek“ umožňuje nejen vzájemnou komunikaci mezi žáky, ale zároveň slouží i pro možnou pozdější pedagogickou analýzu. Každá „lavice“ si může vybírat, v jakém pořadí chce úkoly řešit a určovat si své tempo. Žáci svá řešení mohou odeslat ke kontrole pouze tehdy, jestliže na řešení spolupracovali oba a oba jsou přesvědčeni o jejich správnosti. Poté jeden z žáků označí úkol jako zodpovězený a tímto způsobem dává aviso virtuálnímu učiteli[13], že jsou s příkladem hotovi. Žáci vidí pouze uspořádání všech lavic, resp. jakýsi zasedací pořádek. Sledovat jednotlivá řešení příkladů jim je umožněno pouze ve své „lavici“, kdežto virtuální učitel má možnost nahlížet do všech lavic. Virtuální učitel je v pozici rádce, který pomáhá, upřesňuje, kontroluje a schvaluje řešení úkolů a tím zajišťuje zpětnou vazbu.

Díky webovému prostředí Plone, jež *Globální škola* využívá, se žák může kdykoliv a kdekoliv (ve škole, popř. doma) přihlásit pomocí svého uživatelského jména a hesla, otevřít si svoji virtuální třídu, lavici a vybrat si ze seznamu úloh příklad, který se rozhodl řešit. Zobrazené úkoly jsou buď nové, rozpracované a nebo jsou již zodpovězené. Zda-li je konkrétní úkol správně vyřešen, tzn. zodpovězen a tedy schválen, vidí žáci na obrazovce přímo u daného příkladu. Pokud žáci odešlou příklad k ohodnocení a virtuální učitel zjistí, že řešení příkladu správné není, vrátí příklad žákům k dopracování. V „sešítku“ pak každý vidí nejen návrhy řešení svých spolužáků, na něž může okamžitě reagovat, ale také případný komentář od virtuálního učitele.

Ve školním roce 2005/2006 řešili žáci např. úlohy následujícího znění:

- Sjíždění vodopádů

  Jak se sjíždějí vodopády? Člověka uzavřou do pevné bedny vyrobené „přesně na míru" a vhodí bednu do řeky nad vodopádem. Když to dobře dopadne, pod vodopádem jej z bedny vytáhnou...

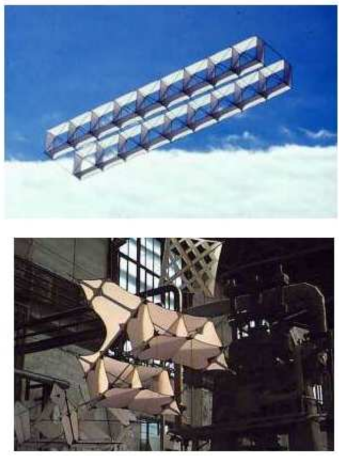
  Máte za úkol provést výpočty pro výrobu bedny pro svého spolužáka z lavice. Bedna musí přesně odpovídat jeho postavě, tak aby v ní mohl stát. Rozhodněte se, zda vytvoříte bednu tvaru kvádru nebo válce. Rozměry si u spolužáka zjistěte (a pošlete mu rozměry své). Vypočítejte objem a povrch takové bedny. Výsledky měření a výpočet napište do řešení úlohy. Jako následný úkol spočítejte, kolik litrů vzduchu zůstane v bedně, jestliže se do ní spolužák vsouká (počítejte s tím, že kolik kg člověk váží, tolik litrů má objem). Jak dlouho by člověk v takové bedně přežil, pokud spotřebuje 7 litrů vzduchu za minutu? Na tyto otázky můžete odpovědět společně.

Obr. 2 Vodopád

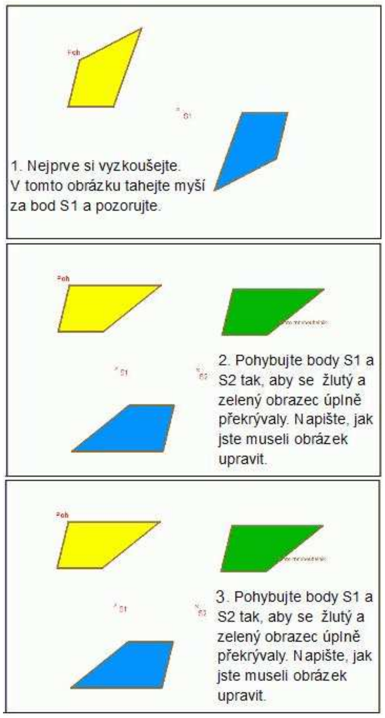
[13] Virtuální učitel je osoba, která kontroluje a uznává řešení jednotlivých úkolů.

- Závěsné draky

  Létání na velkých zavěšených dracích je jistě vzrušující. Ovšem velice důležitá je přesná výroba součástí takového draka, tak aby se přesně překrývaly.
  Budete výstupní kontrolou výroby velkých létacích draků - budete kontrolovat, zda jsou díly shodné a drak dobře poletí. Na **této stránce** si spustíte aplety s pohyblivými obrázky (lze s nimi hýbat myší). Splňte úkoly popsané u obrázků dole.
  Až Část 1 a Část 2 vyřešíte, vložte dokument a popište v něm, jak jste museli umístit body S1, S2 nebo vrcholy, aby se obrazce překrývaly. Celá lavice zodpovídá za řešení, to znamená že můžete své odpovědi postupně vylepšovat a teprve nakonec (kdy už si myslíte, že je řešení úplné) zaškrtnout v zelené nabídce **stav: odpovězeno**.



Obr. 3 Výroba draků



Obr. 4 Animace příkladu

Na těchto a dalších úlohách pracovali např. žáci 1. ročníku Gymnázia v Brně a žáci kvarty Gymnázia v Nymburce. Z těchto žáků byly utvořeny buď smíšené „lavice“ nebo „lavice“ skládající se jen z dívek či jen z chlapců. Práce na zadaných příkladech nebyla začleněna do hodin matematiky, žáci řešili příklady ve svém volném čase, což mělo za následek menší aktivitu, než jsme očekávali. Z devětadvaceti vzniklých lavic velmi dobře pracovala šestina, přičemž se jednalo o 4 dívčí a jednu smíšenou lavici. V dalších několika lavicích byl skutečně aktivním pouze jeden ze dvou žáků, a proto jim vzhledem ke stanoveným pravidlům nebyly příklady uznány. Ostatní lavice byly buď pasivní, nebo se zapojovali jen zřídka.

Podle dosavadního průběhu je zřejmé, že když projekt *Globální škola* nebude časem zapojen do vyučovacího procesu např. jako výběrový předmět s alespoň dvěma hodinami měsíčně, bude vždy velmi těžké motivovat žáky k nějaké činnosti.

V druhé polovině školního roku byly žákům předloženy dva rozsáhlejší projekty, na které měli k dispozici několik měsíců. Na tomto projektu spolupracovali už nejenom žáci výše zmíněných škol, ale také např. žáci z primy Gymnázia v Ostravě.

Žáci si nejprve vybrali projekt, na kterém chtěli pracovat a poté byli utvořeny „firmy" skládající se minimálně ze čtyř osob, které měly za úkol daný projekt vyřešit. Jeden z projektů byl nazván „Sportovní areál". Na webové stránky byl žákům vložen popis projektu s cílem jednotlivých firem. Protože se jednalo o dlouhodobější a rozsáhlejší úkol, bylo jeho řešení usnadněno tím, že byl rozdělen do pěti fází, z nichž každá jasně definovala postup řešení.

Cílem žáků bylo vytvořit plán moderního sportovního areálu, resp. plán rozvržení jednotlivých objektů v areálu, pro který jistá obec s příhodným názvem Sporťákov vyčlenila přilehlou louku o určitých rozměrech a zároveň definovala své představy, ze kterých by se měl areál sestávat. Žáci si mohli nadefinovat navíc i další objekty a s nimi související služby, které mají v areálu důležitou a nepostradatelnou funkci. Jednotlivé firmy si nejprve měly vymyslet název firmy, popřípadě vytvořit si své logo a název sportovního areálu. Poté následovalo určení objektů a služeb nutných pro zajištění „běhu" areálu. K tomu sloužilo i stanovení důležitých údajů o sportovních objektech, správných rozměrech hřišť, použitých materiálech až po komplexní vybavení sportovních objektů. Všechny tyto údaje měly být sepsány do komentáře předloženého s návrhem areálu.

S výsledky své práce žáci, resp. „firmy" vystoupí na malé konferenci, která se uskuteční v říjnu 2006 na Pedagogické fakultě v Českých Budějovicích, kde budou jednotlivé projekty vyhodnoceny a poté vybrán jeden pro „realizaci"...

Literatura

[1] Kafková, M., Využití prostředí Plone ve výuce matematiky, Sbor. Plone konf., 1. vyd., JČU v Českých Budějovicích: Milota, J., Kašpar, J., 2006, ISBN 80-7040-859-6

[2] Binterová, H., Milota, J., Vaníček, J., Globalschool – virtuální prostředí pro výuku matematiky na ZŠ formou e-learningu, Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep. 13 (2005),

ISSN 1214-4681

[3] http://globalschool.jcu.cz/

Adresa autora:
Mgr. Marika Kafková
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno
Česká republika
e-mail: maja.k@email.cz

Platforma e-learningowa w pracy z młodzieżą uzdolnioną do matematyki

Henryk Kąkol

Abstract. *The aim of this paper is to give possibility of using linear combination of the equations for the plane curves to solve some problems of analytic geometry.*

W procesie nauczania matematyki można wyróżnić następujące komponenty:

- kształtowanie pojęć matematycznych,
- rozwiązywanie zadań,
- prowadzenie rozumowań matematycznych,
- kształtowanie języka matematycznego.

Jednym z najważniejszych składowych tego procesu jest rozwiązywanie zadań. Służą one bowiem jako środek do utrwalania zdobytych wiadomości, wyrabiają określone sprawności i umiejętności, wyrabiają umiejętność stosowania definicji i twierdzeń, pomagają sprawdzać postępy w nauce i wyniki nauczania (kolokwia, sprawdziany, egzaminy), z drugiej strony za ich pomocą kształtuje się i definiuje pojęcia matematyczne, uczy się prowadzenia rozumowań matematycznych, dowodzenia, kształci się język matematyczny, pokazuje się zastosowania matematyki, kształci się wyobraźnię. Są one ważnym czynnikiem aktywizującym, stymulują niejednokrotnie rozwój zainteresowań uczniów. Pokazują, czym naprawdę jest matematyka, bowiem jak pisze Z. Krygowska [2]: *Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań.*

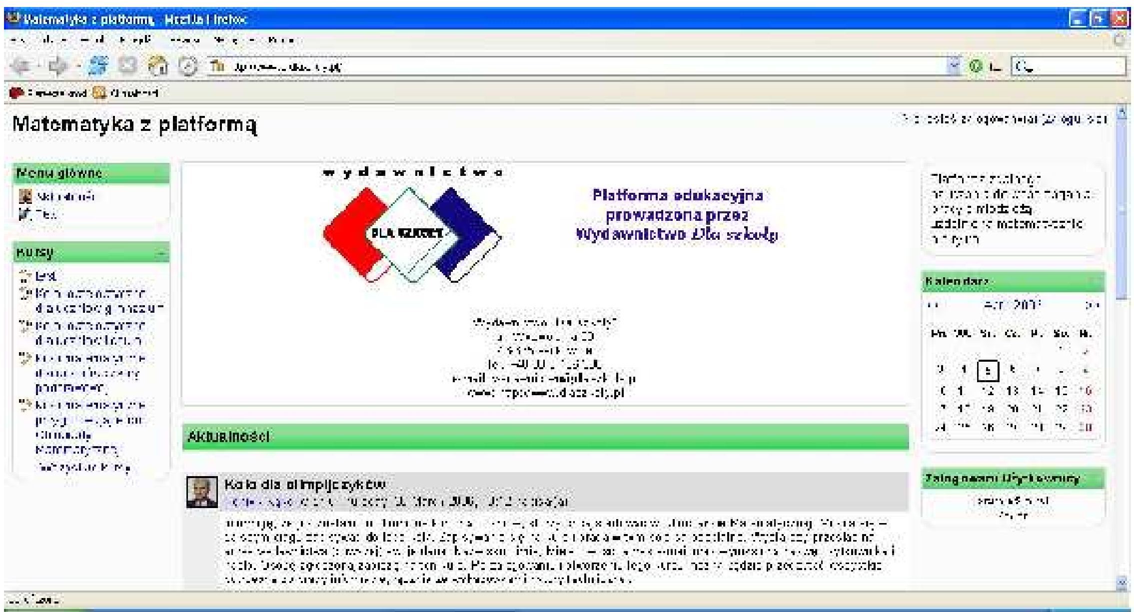
Wśród wielu zadań, które rozwiązujemy w trakcie uczenia się matematyki, można wyróżnić różne ich typy [2]. Jednak najczęściej występującymi zadaniami w nauczaniu szkolnym są zadania:

- Ćwiczenia - wymagające od uczniów sprawności rachunkowych, opanowania reguł wykonywania działań, rachunku pamięciowego. Służą zatem do utrwalania i zmechanizowania określonych operacji. Rozwiązuje się je przy małym zaangażowaniu twórczym ucznia
  i nikłym wykorzystaniu teorii.
- Zwykłe zastosowanie teorii - do ich rozwiązywania potrzeba więcej zróżnicowanych czynności, samodzielności, więcej różnorodnych elementów teorii, a w szczególności stosowania definicji i twierdzeń. Rozwiązując takie zadania postępuje się zgodnie
  z pewnym znanym sposobem rozwiązywania podobnych zadań, według pewnego znanego algorytmu.
- Problemy - zadania, których rozwiązania nie uzyska się na danym poziomie nauczania bez pewnej pomysłowości, bez szczypty choćby matematycznej wyobraźni, bo do ich rozwiązywania nie wystarcza ani wiedza, ani sprawność techniczna, ani nawet doświadczenie
  w rozwiązywaniu typowych zadań.

Jaką rolę w nauczaniu matematyki spełniają zadania – problemy? W jakim celu rozwiązujemy takie zadania? Po co nauczyciel ich używa w praktyce szkolnej? Odpowiedź wydaje się prosta. Pozwalają one odkrywać uczniów o umysłach cechujących się niestandardowym sposobem podchodzenia do rozwiązywania zadań, cechujących się pewnym błyskiem w znajdywaniu pomysłu na rozwiązanie zdania, jednym słowem - pozwalają wyszukiwać uczniów uzdolnionych matematycznie. Niejednokrotnie uczniowie rozwiązujący takie zadania zaczynają interesować się matematyką, a tym samym zmieniają swój stosunek uczuciowy do niej. Jednak największą ich zaletą jest fakt, że stanowią one doskonały materiał do rozwijania
i kształtowania aktywności matematycznych. Podczas ich rozwiązywania uczniowie uczą się uogólniania, posługują się analogiami, prowadzą rozumowania matematyczne itp. [1].

Jak pokazuje praktyka szkolna zadania – problemy nie często goszczą na lekcjach matematyki. Dzieje się tak z wielu powodów. Już choćby z najbardziej prozaicznego. Braku czasu, bowiem na rozwiązywanie takich zadań potrzeba jest mnóstwo czasu. Nie wszyscy uczniowie myślą i pracują w tym samym tempie, nie wszyscy z nich potrafią brać czynny udział w rozwiązywaniu takich zadań. Rozwiązywanie takich zadań na forum klasy powoduje u wielu uczniów zjawisko tzw. facytilacji społecznej [5]. Z tych też powodów zadania te rozwiązuje się na kółkach matematycznych. I tu pojawia się kolejny problem. Możliwość jednoczesnego spotkania się z uczniami, a w szczególności, gdy zdecydujemy się na prowadzenie szkolnego koła matematycznego, nie mówiąc już o kołach międzyszkolnych.

Wszystkich tych niedogodności możemy uniknąć gdy do tego procesu włączymy platformę e-learningową [3], [4]. Próbę taką podjąłem prowadząc ogólnopolskie koła matematyczne na platformie e-dlaszkoly.pl (rys.1).



Rys. 1

Prowadzone tam są cztery różne koła.

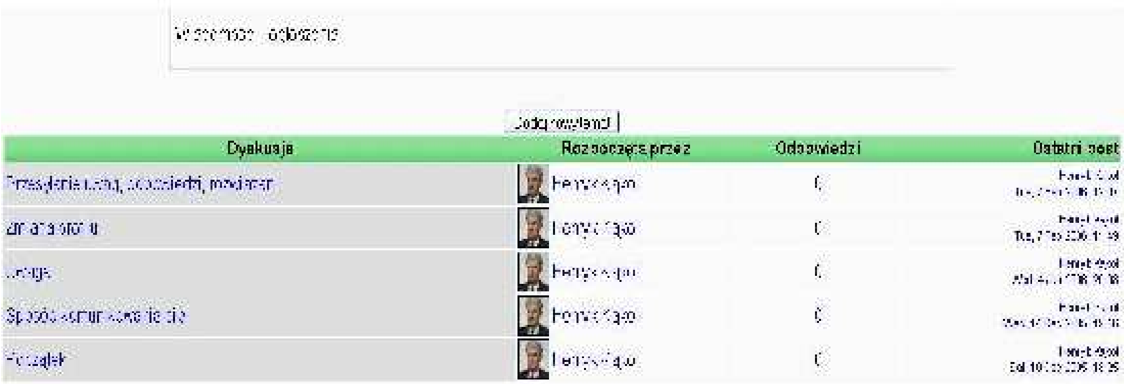
- Koło dla uczniów szkół podstawowych.
- Koło dla uczniów gimnazjum.

- Koło dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.
- Koło dla uczniów przygotowujących się do Olimpiady Matematycznej.

Do kół tych może zapisać się każdy, nie trzeba wnosić żadnej opłaty. Po zalogowaniu się do odpowiedniego koła uczestnik ma do przeczytania informacje zarówno natury technicznej, jak i merytorycznej (rys. 2).

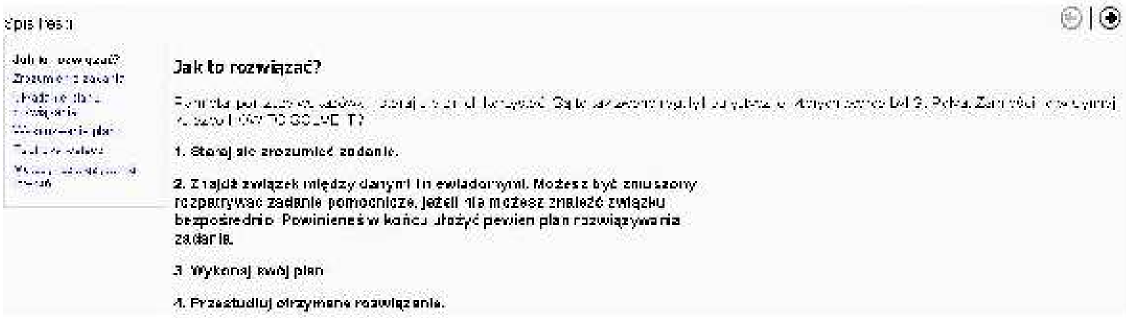
Rys. 2

W **Forum aktualności** (rys. 3) uczestnik może przeczytać o różnych problemach technicznych związanych z pracą na platformie: o sposobach komunikowania się na forum wszystkich uczestników koła, o sposobie komunikowania się tylko z prowadzącym koło lub z wybranym uczestnikiem, jak pisać teksty, jak pisać teksty matematyczne, jak zamieszczać rysunki, załączniki i co ważne; jak zamieścić swoje zdjęcie.



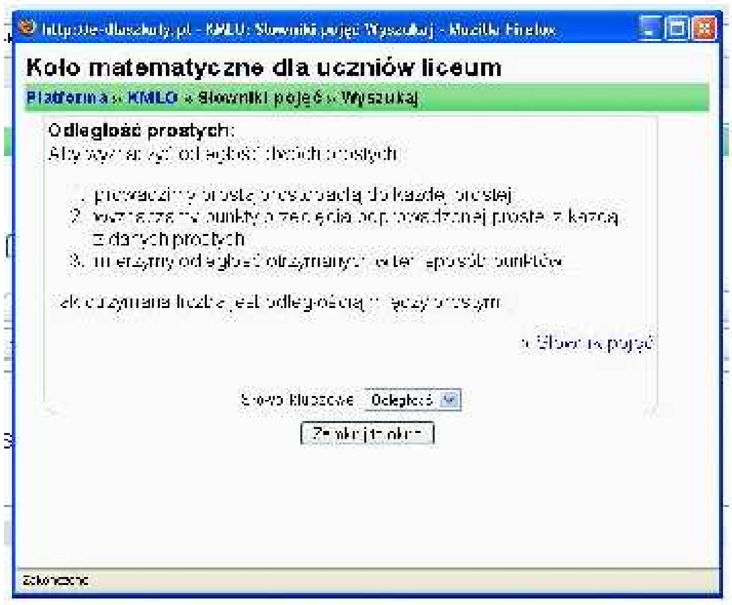
Rys. 3

W module **Teoria** (rys. 4) zawarte są wiadomości i wskazówki, między innymi heurystyczne z książki G. Polya, które mogą pomóc uczestnikom koła w rozwiązywaniu konkretnego problemu.



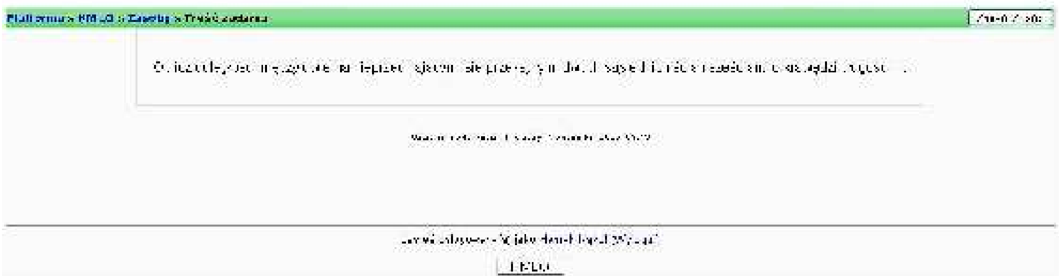
Rys. 4

W module **Słownik** (rys. 5)uczestnik koła może znaleźć te pojęcia i definicje, które z jednej strony występują w zadaniu, z drugiej zaś strony w danym momencie rozwiązujący ich nie pamięta lub nie spotkał się z nimi.



Rys. 5

W kolejnym module **Treść zadania** (rys. 6) uczestnik koła ma możliwość zapoznania się
z treścią aktualnie rozwiązywanego zadania.



Rys. 6

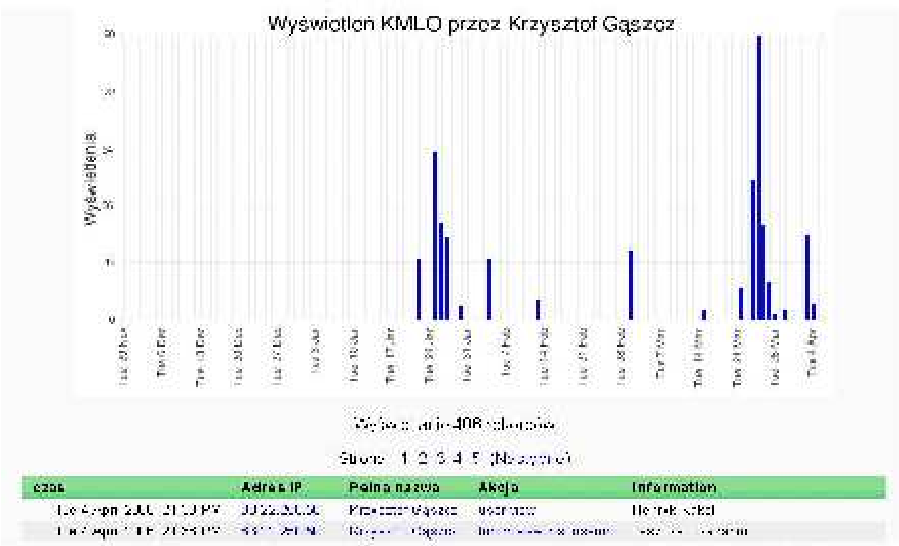
W kolejnym module **Uwagi, spostrzeżenia i pytania** (rys. 7) uczestnicy zamieszczają swoje rozwiązania, wątpliwości, spostrzeżenia.

Rys. 7

Jest to najważniejsze miejsce na platformie, a jednocześnie najbardziej interesujący dla nauczyciela zbiór wypowiedzi, uwag, pytań, rozwiązań. Tutaj odbywa się prawdziwa dyskusja o różnych sposobach rozwiązywania zadań, dyskusja w dowolnym czasie, na ogół dyskusja rozpoczęta przez uczestnika koła i między uczestnikami. Nauczyciel włącza się do dyskusji w tych momentach, które uzna za stosowne (poprawianie błędów, udzielanie heurystycznych wskazówek itp.).

Zadania są wyświetlane kolejno, po rozwiązaniu poprzedniego, które w dalszym ciągu jest dostępne uczestnikom kursu.

Prowadzący koło w tym systemie ma bardzo dużo narzędzi ułatwiających jego prowadzenie: przygotowywanie materiałów w różnych postaciach, w tym animacji, filmów, interaktywnych tekstów, sprawdzianów elektronicznych. Może też śledzić pracę wszystkich uczestników koła (rys. 8).



Rys. 8

Wśród wielu zalet, jakie posiada ta nowa forma pracy z młodzieżą uzdolnioną do matematyki, należą takie jak:

- zmuszanie uczestników do czytania,
- umożliwianie indywidualnego tempo pracy,
- uczestnicy mogą pracować o dowolnej porze dnia i nocy,
- zapobieganie zjawisku facylitacji społecznej,
- natychmiastowa pomoc w przypadku napotkania trudności i to możliwa z trzech źródeł,
- uczestnicy znają się nawzajem (nazwisko i zdjęcie),
- forum dyskusyjne uczy porozumiewania się, dyskusji, jednym słowem: komunikowania się.

Do wad takiego systemu pracy niektórzy autorzy zaliczają:

- brak kontaktu z grupą, z nauczycielem,
- samotność,
- posiadanie umiejętności posługiwania się komputerem,
- posiadanie dostępu do Internetu.

Myślę, że czas na pełniejszą analizę jeszcze nie nadszedł. Dopiero sprawdzanie tej nowej formy w praktyce szkolnej ukaże jej wszystkie zalety, jak i też ograniczenia , a także wady. Jedno wydaje się pewne. Jest to inna, nowa formą pracy, którzy burzy tradycyjne sposoby uczenia się – nauczania, a nauczyciel prowadzący takie koło musi co najmniej raz dziennie pracować na platformie.

Literatura

[1] Kąkol, H., Ratusiński T., , Rola komputera w rozwiązywaniu matematycznych zadań, Dydaktyka Matematyki, nr 26, 2004.

[2] Krygowska, A. Z., Zarys dydaktyki matematyki, część 3, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.

[3] Leżański J., *Platforma e-learningowa jako narzędzie wspomagające proces uczenia się – nauczania matematyki* (część I), Matematyka i Komputery nr 22, 2005.

[4] Leżański J., *Platforma e-learningowa jako narzędzie wspomagające proces uczenia się – nauczania matematyki* (część II), Matematyka i Komputery nr 23, 2005.

[5] Zajonc R. B., *Social facilitation*, Sciens 149, 1965.

Adresa autora:
Prof. Dr hab. Henryk Kąkol
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: henkakol@ap.krakow.pl

The computer model of temperature fluctuations

Adam Kiersztyn, Justyna Próchniak

Abstract. *In this note we propose a method of analysis of changes of temperatures based upon Markov chains theory. We also describe some problems arising during the creation of the computer programme designed for simulation of the behaviour of air temperature which was written on the basis of our approach. The discussed problems are presented in a manner comprehensive for high school students.*

Introduction

The aim of this article is to present without a complicated mathematical background the possible way of teaching high school students how to use certain more advanced tools of probability, e.g. Markov chains, as an analytical instrument, helpful in a common practice. Therefore we do not concentrate here on theoretical construction of Markov chains, but instead we try to illustrate the use of Markov chains for the modeling of changes of the air temperature. Firstly, we assume that the pupils are already familiar with the notion of probability and random variable, at least on an intuitive level. This assumption is compatible with educational program of higher schools in Poland. Secondly, we assume basic knowledge of some language of programming. The second assumption is necessary, because in order to simulate the changes of temperature we use a computer programme. Although we presuppose basic skills in computer science, we are not going to teach the computer programming, but to explain some rules according to which the machine works. The rules of operation of the mentioned computer application are described below.

Description of the basic model

The first fact that we have to mention is observation of some regularity in temperature changes. Indeed, it happens rather rarely that the considerable growth and next an unexpected fall of air temperature during successive days is observed. When we notice the above-mentioned dependence, we propose the pupils to find the distribution of temperature changes. To specify the simplest method of approach to the problem, let us take into consideration the following three states: E which means the lack of changes, G the growth of temperature, and F corresponding to fall of temperature. On the basis of the former experience we try to fill up Table .

Table 1: The proposed probabilities of transitions

States	G	E	F
G	$1/6$	$1/2$	$1/3$
E	$1/4$	$1/2$	$1/4$
F	$1/3$	$1/2$	$1/6$

The above mentioned table presents the probabilities of transitions from various states to another states. For example, the number in the cell of intersection of the second column and the second row specifies how often two consecutive days characterized by the growth of temperature occur. In turn the number which is placed in the intersection of the fourth row and third column describes how often after the day with the decrease of temperature the lack of temperature change is observed. Note also that whatever is the last state, the system have to pass in the next step to either state G, E, or F, therefore the sum of probabilities in each row of our matrix should be equal to 1.

It is clear that transition probabilities are chosen here in an arbitrary way suggested by intuition, thus they need not reflect the real situation. At this stage of considerations it should be pointed out the role played by historical observations. Namely, instead of finding probabilities the statistical data can be used. The dependence between the obtained in this way positive integers and transition probabilities is quite obvious: to evaluate probabilities we only have to divide every value from the table by the sum of numbers in the corresponding row.

Thus, for our purposes we do not use a typical matrix containing transition probabilities of the considered Markov chain, but we apply the matrix consisted of frequencies, expressed in terms of positive integers. It is motivated by the next part of our research, namely the use of table of frequencies is much more efficient and easier in computer implementation. Besides, by using integer numbers instead of real numbers one can reduce remarkably the volume of computer memory needed.

Moreover, it turns out that replacing the values of temperature registered in particular days by means of its differences noticed between consecutive observations leads to more effective method of programming. In addition, the storage of this kind of information is more convenient, and next it is easier to retrieve and to assign particular data to the corresponding states.

Table 2: The substitution of differences for the growth and fall of temperature

Temperature	10,5	12,2	11,3	13,6	14	13,8	11,7	12,1
Difference of temperature		1,7	-0,9	2,3	0,4	-0,2	-2,1	0,4

The problem of quantization

It is easy to see that the above described set of states is not detailed enough, so the received results do not give us too much information and are not satisfactory. Therefore instead of three states some more precise statements about the temperature are required. On the other hand, we cannot store to lengthy information, and in consequence we cannot distinguish too many various states, say the values of temperature which differs only by a small fraction of degree, because then the transition frequencies matrix would be to large. Having this in mind, we introduce the following states: G_k - the growth of temperature with the strength k, F_k - the fall of temperature with the strength k, and $E = E_0$ - the equilibrium of temperature, where $1 \leq k \leq n$, and n is a fixed positive integer.

Now we want to specify the number of states and their ranges in the computer program. It is desirable to have symmetry of ranges of particular states. For example, the range of state G_2 should differ from state F_2 only by sign. As a result we define the default state ranges as well as the total number of states and present them in Table .

Table 3: Default numbers of states and the corresponding data intervals.

State	Number of states				
	3	5	7	9	11
G_5					$[7 ; \infty)$
G_4				$[6 ; \infty)$	$[5 ; 7)$
G_3			$[5 ; \infty)$	$[4 ; 6)$	$[3 ; 5)$
G_2		$[4 ;\infty)$	$[2,5 ; 5)$	$[2 ; 4)$	$[0,5 ; 3)$
G_1	$[2 ;\infty)$	$[1 ; 4)$	$[0,7 ; 2,5)$	$[0,5 ; 2)$	$[0,2 ; 0,5)$
E_0	$(-2 ; 2)$	$(-1 ; 1)$	$(-0,7 ; 0,7)$	$(-0,5 ; 0,5)$	$(-0,2 ; 0,2)$
F_1	$(-\infty ; -2]$	$(-4 ; -1]$	$(-2,5 ; -0,7]$	$(-2 ; -0,5]$	$(-0,5 ; -0,2]$
F_2		$(-\infty ; -4]$	$(-5 ; -2,5]$	$(-4 ; -2]$	$(-3 ; -0,5]$
F_3			$(-\infty ; -5]$	$(-6 ; -4]$	$(-5 ; -3]$
F_4				$(-\infty ; -6]$	$(-7 ; -5]$
F_5					$(-\infty ; -7]$

With this definition of the set of states we are able to determine the direction of temperature changes and their strength.

Implementation of the described method

Taking into consideration the above described theoretical sketch of an application of Markov chains used in order to modeling the temperature fluctuations we start to create a suitable computer program. First we have to choose the data structure to store the transition matrix of our Markov chain. Likewise mentioned before, we do not use the traditional matrix containing transition probabilities, but we replace it with the matrix of frequencies. On the basis of the uniform distribution we choose the state to which the system passes in the next step. The choice of it is based on randomizing by means of computer a number which is not greater than the sum of all values within a given row. Then we qualify this number to appropriate state taking into account total numbers of various transitions. For instance, suppose that a fixed row of the transition matrix is given in Table .

Table 4: Exemplary row in the transition matrix

States	F_2	F_1	E_0	G_1	G_2
E_0	21	43	87	46	13

The numbers appearing in the above table can be interpreted as follows: during the whole examined history the system passed 21 times from the state E_0 to state F_2, 43 times to state F_1, and so on. During modeling of the temperature fluctuations our program choose in random way some number from the range $[1, 210]$. Let us assume that this number is equal to 97. It is easy to check that the next state is again E_0, because we have $21 + 43 < 97 < 21 + 43 + 87$. Obviously, for a large number of observations made each element of the transition matrix is a non-zero one. However, if we include successive changes of the transition matrix according to observed temperature fluctuations, then we conclude that the considered Markov chain is not stationary.

Further improvement of the model and statistical inference

Let us consider in short the possible improvement of our model. It appears that we can do this by specifying states on the basis of a larger number of notations of temperature made during few consecutive days.

Example giving, for $n = 4$ the state can be described by a sequence $G_1F_1E_0G_2$, which provides the following information: 4 days earlier the growth of temperature with strength 1 was noted, 3 days ago there was fall of temperature with strength 1, 2 days ago the lack of temperature change was noticed, while during the last observation the growth of temperature with strength 2 was registered. Clearly, if the sequence $G_1F_1E_0G_2$ is treated as a single state, then in the next step the process can pass merely to the state of the form $F_1E_0G_2A$, where A belongs to the set $\{G_k, E_0, F_k$ for $k = 1, 2, ..., n\}$.

In such a case it is necessary to define new structure of data, because the use of the traditional square transition matrix is inconvenient in view of its large size. Our transition matrix is now rare in the sense that it contains a lot of elements which are equal to zero. Intuitively we conclude that for such data structure instead of a table rather a vector of numbers which includes the name of a state and frequencies of transitions to the other states is more suitable. Owing to this modification of data we get considerable reduction of the minimal computer memory needed for the treatment of it.

One of the main aspects of programming is to provide suitable input data given in an appropriate structure. The best source of information concerning temperature are the meteorological institutions. After preparation of the computer application and initiation of a suitable input data we can start the simulation of temperature fluctuations.

Then we usually ask the following question: is our model indeed close to the real state? We give the answer to that question when we draw a comparison of the model and the real state. The easiest method relies on consideration of the last several observations and the prognosis. For the comparison of the model and empirical data we may use various statistical methods.

The simplest measure of distance between the empirical data and theoretical prognosis is the average of absolute differences and variance of differences. The next measure that can be used for investigations of efficiency of the proposed model is Linnemann's leaning coefficient. The strength of fitness of a model to empirical data may be expressed also by Wold's coefficient.

Analyzing the simulated behaviour of the temperature from the point of view of the described above goodness of fit coefficients we see that in the most cases the predicted and observed values are well–compatible. However, likewise in the most probabilistic considerations or statistical inference, the constructed model does not furnish a method valid in 100%, and it cannot be applied for the long period of time prognosis.

References

[1] Kiersztyn A., An Application of Markov Chains in the Analysis and Computer Modelling of a Financial Market, Scientific Bulletin of Chełm, in print.

[2] Walpole R.E., Introduction to Statistics, 3rd ed. Macmillan Publishing Co., New York, 1982.

[3] Kotowska I., Problemy estymacji parametrów łańcucha Markowa na podstawie makrodanych, Przegląd Statystyczny 1977, nr 1.

[4] Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1967.

Authors' address:
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Catholic University of Lublin
Al. Racławickie 14
P.O. Box 129
20-950 Lublin
Poland
e-mail: Adam.Kiersztyn@kul.lublin.pl, justynap@kul.lublin.pl

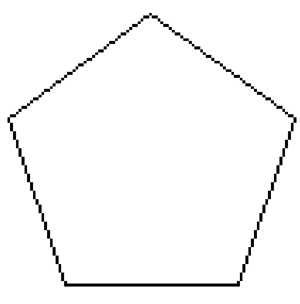
Strategie přeformulování problému

Jan Kopka

Abstract. *Matematikové při řešení problémů používají celou řadu strategii. Článek se zabývá strategií přeformulování problému a jejím speciálním případem strategií přeformulování problému do jiného jazyka. Uvedené problémy a jejich řešení jsou použitelné ve školské matematice.*
Klíčová slova: problém, strategie řešení problému, strategie přeformulování problému, strategie vyjádření problému v jiném jazyce, pravidelný pětiúhelník, zlatý řez, celá část racionálního čísla, neorientovaný graf.

Říká se, že matematika není „divácký sport“. Je třeba ji pěstovat aktivně, přičemž řešení problémů a zkoumání je rychlý a účinný způsob, jak žákům a studentům ukázat, co je matematika. Problémy se ve školské matematice vyskytují od počátku, jsou v ní i dnes a budou v ní jistě i v budoucnu. Důvodů pro jejich zařazování je mnoho, např. motivování, objasňování idejí, procvičování, ospravedlňování výuky matematiky, přezkušování znalostí, rekreace (aktivní odpočinek) atd. My se však v další části chceme pouze zlehka dotknout vkládání problémů s cílem rozvíjet schopnost žáků a studentů problémy řešit. To je také jeden z hlavních cílů výuky matematiky.

Pokud matematikové řeší problémy, používají při tom určité strategie. Tyto strategie jsou vlastně nástroje, které jim pomáhají při hledání cesty k cíli. Těchto strategií je celá řada. Vyjmenujme zde několik těch nejzákladnějších. Mezi výzkumné strategie můžeme zařadit: pokus – omyl, pokus – ověření – korekce, systematické experimentování. Z dalších strategií uveďme alespoň tyto: analogie, zobecnění, specializace, konkretizace, cesta zpět, vypuštění podmínky, určení bližšího cíle, využití náčrtku (geometrická cesta), sestavení rovnice či soustavy rovnic (algebraická cesta), opakování určitého postupu. Více se čtenář o těchto strategiích může dočíst např. v [2] nebo [3]. My se zde budeme zabývat ještě jinou užitečnou strategií, která se nazývá **přeformulování problému**.



Obr. 1

V tomto článku nebudeme příliš teoretizovat. Z praktických důvodů budeme vše ukazovat na příkladech použitelných ve školské matematice. Strategie přeformulování problému není nikterak nová. Abychom o tom čtenáře přesvědčili, začneme příkladem až z antického Řecka a to dokonce ze samotných počátků tohoto období, tj. z doby pythagorejců. Matematici pythagorejské školy byly mistry ve využívání této strategie.

Možná víte, že jejich znakem byl pravidelný pětiúhelník (viz obr.1). Byl to znak tajné moudrosti (viz knížka [4] od prof. Vopěnky). Dokonce i ve středověku, tedy mnohem později, byl pětiúhelník znakem různých čarodějů, i když pravděpodobně netušili, jakou moudrost a jakou tajnost tento znak představuje.

Ale vraťme se do starověku. Je samozřejmé, že pythagorejci chtěli svůj znak, tedy pravidelný pětiúhelník, zkonstruovat. Nedařilo se jim to až do chvíle, dokud neobjevili jeho skryté tajemství. V pravidelném pětiúhelníku je důmyslně ukryt poměr zlatého řezu a to takto: Je to poměr délky úhlopříčky a strany.

Tak byl původní problém zkonstruování pravidelného pětiúhelníka přeformulován na problém nový (viz schéma).

Problém 1: Sestrojte pravidelný pětiúhelník.

Přeformulování

Problém 2: Sestrojte zlatý řez.

Pokud umíme sestrojit zlatý řez, pak konstrukce pravidelného pětiúhelníka je již triviální záležitostí..

Řešení problému 1 tak velmi názorně demonstruje použití strategie přeformulování problému. Toto řešení však demonstruje i **strategii určení bližšího cíle**. Konstrukce zlatého řezu je bližším cílem pro původní cíl, kterým je konstrukce pravidelného pětiúhelníka. Při řešení problému se však využívá i strategie **grafického znázornění** (viz níže).

Protože problematika kolem pravidelného pětiúhelníka je velmi zajímavá, odbočíme a věnujeme ji trochu delší poznámku. Vložíme do ní i něco o zlatém řezu pro případ, že s ním čtenář není příliš obeznámen.

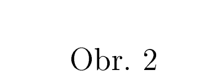
Poznámka o pravidelném pětiúhelníku

Co je zlatý řez?

Nechť je dána úsečka délky u. Bod Z dělí tuto úsečku na dvě kratší úsečky mající délky x a y, pro něž platí:

$$u/x = x/y.$$

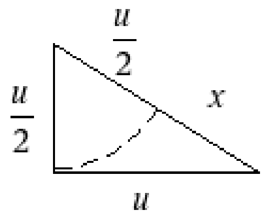
Bod Z se nazývá *zlatý řez* a číslo u/x se nazývá *poměr zlatého řezu.*



Obr. 2

Jak Řekové konstruovali zlatý řez?

Odpovědět na tuto otázku znamená ukázat, jak pro danou úsečku délky u konstruovali bod Z. Využili k tomu pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami u a $u/2$ (viz obr. 3) Pokud od přepony odečetli úsečku délky $u/2$, dostali úsečku délky x(viz obr. 3 a 2). Je vidět, že Řekové používali při konstrukci čistě geometrickou cestu.



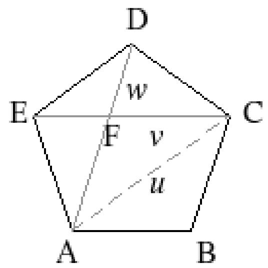
Obr. 3

Pokud spočítáme délku úsečky x, dostaneme:
$x = \frac{u(\sqrt{5} - 1)}{2}$ a přibližně $x = 1{,}618\ u$

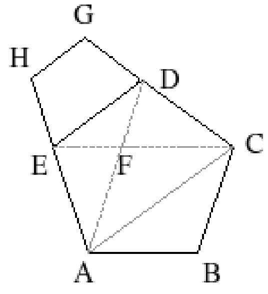
Jak se zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku vyskytuje?

Na obr. 4 a) je pravidelný pětiúhelník mající stranu délky v a plně jsou v něm vyznačeny jeho dvě úhlopříčky. Je zřejmé, že čtyřúhelník ABCF je kosočtverec se stranou v. Na obr. 4 b) je stejný pravidelný pětiúhelník a dále je zde vyznačen menší pravidelný pětiúhelník EFDGH se stranou délky w. Protože všechny pravidelné pětiúhelníky jsou navzájem podobné, je podobný i pětiúhelník se stranou v a menší pětiúhelník se stranou w. Pokud v obou pětiúhelnících vytvoříme poměr délek úhlopříčky a strany, dostaneme:

$$u/v = v/w,$$



a)



b)
Obr. 4

Skutečně tedy platí to, co jsme již výše uvedli: délka úhlopříčky ku délce strany jsou v poměru zlatého řezu. Navíc průsečík libovolných dvou úhlopříček nevycházejících ze stejného vrcholu je zlatým řezem každé z nich.

Citujme z knížky [4] prof. Vopěnky: V pravidelném pětiúhelníku je tedy uvedeným způsobem ukryt poměr, považovaný za nejkrásnější ze všech poměrů. . . . Znak pravidelného pětiúhelníka je znakem moudrosti, neboť v sobě krásu skrývá, ale nevystavuje ji na odiv.

Pravidelný pětiúhelník je však také znakem tajemství. Jaké to bylo tajemství? Řekové si pravděpodobně položili následující otázku:

Která dvě přirozená čísla jsou v poměru zlatého řezu?

Odpověď: Taková dvě přirozená čísla neexistují.

Důkaz (sporem): Nechť m je nejmenší přirozené číslo pro nějž existuje přirozené číslo n takové, že m/n je poměr zlatého řezu. Pak ale platí, že $m/n = n/(m-n)$. Číslo n je však menší než číslo m, a tak dostáváme spor.

Důsledek: Úhlopříčka a strana pravidelného pětiúhelníka jsou nesouměřitelné[14].

Toto bylo podle prof. Vopěnky nejhlubší tajemství pythagorejské školy ukryté v jejich znaku.

Ale: I úhlopříčka a strana čtverce jsou nesouměřitelné. Důkaz je však trochu složitější než u pravidelného pětiúhelníka.

Ten, kdo objevil nesouměřitelnost úhlopříčky a strany ve čtverci byl pythagorejci proklet, protože znesvětil jejich znak. Nejhlubším tajemstvím pravidelného pětiúhelníka byla pro pythagorejskou školu právě nesouměřitelnost jeho úhlopříčky a strany. Teď musela toto tajemství utajovat.[15]

Tím naše poznámka končí.

Nyní uvedeme druhý příklad. Je převzat z knížky [1]. Než však vyslovíme problém 3, připomeneme čtenáři pojem, který se v něm bude vyskytovat. Je to *celá část racionálního čísla* x, kterou značíme $[x]$. Definujeme ji jako největší celé číslo y takové, že je menší nebo rovné číslu x. Např. $[2/5] = 0$, $[16/3] = 5$, $[4] = 4$.

Problém 3: Nechť p a q jsou nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že platí:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2} \tag{1}$$

Aby bylo trochu jasnější, o co v tomto problému jde, zvolíme nejprve zcela náhodně nějaký konkrétní příklad (strategie konkretizace): Zvolíme-li čísla $p = 5$ a $q = 7$, jsou tato čísla nesoudělná a podle zadaného vzorce prý platí, že pokud sečteme termy na levé straně formule (1), dá se tento výsledek rozložit způsobem popsaným na pravé straně této formule. Pro naší volbu dostaneme:

$$\left[\frac{5}{7}\right] + \left[\frac{2.5}{7}\right] + \left[\frac{3.5}{7}\right] + \left[\frac{4.5}{7}\right] + \left[\frac{5.5}{7}\right] + \left[\frac{6.5}{7}\right] =$$

$$= 0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12 = \frac{4.6}{2} =$$

$$= \frac{(5-1)(7-1)}{2}$$

Čtenář si může podobný výpočet udělat ještě např. pro $p = 11$ a $q = 9$ (zvolená čísla jsou opět nesoudělná) či pro další náhodnou konkretizaci, aby lépe pronikl do dané problematiky. Vhodné by bylo, kdybyste za čísla p a q zvolili i čísla soudělná, např. 6 a 8, abyste viděli, že v tomto případě formule (1) neplatí. V tom případě

[14] Neexistuje délková jednotka taková, aby délka úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníka byly jejími přirozenými násobky.

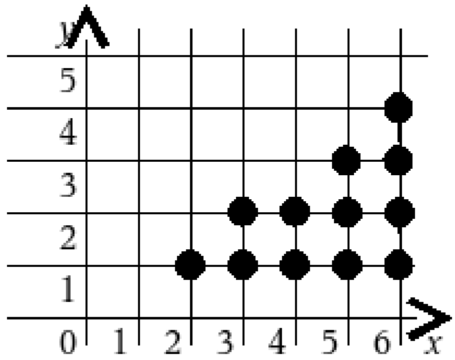
[15] Více se čtenář může dočíst o problematice vložené do této poznámky právě v knížce [4].

by bylo potřeba nahradit rovnost ostrou nerovností. (Jakou?) Zdůvodnění i této vaší správné odpovědi najdete v následujícím textu.

Zdá se, že důkaz uvedené číselně – teoretické věty nebude snadný. Pokud si však uvědomíme, že termy $\left[\frac{ip}{q}\right]$ můžeme interpretovat v souřadnicové soustavě dimenze 2, situace se podstatně změní. Interpretaci můžeme provést takto:

Jestliže p, q jsou nesoudělná čísla, pak $\left[\frac{ip}{q}\right]$ představuje počet bodů s celočíselnými souřadnicemi $(i,\ y)$, kde $0 < y < ip/q$pro všechna $i = 1, 2, 3, \ldots, q$-1.

Aby bylo to, co jsme právě napsali zřejmější, vraťme se opět k první výše uvedené konkretizaci. Položili jsme $p = 5$ a $q = 7$. Pokud budeme např. term $\left[\frac{4.5}{7}\right]$ interpretovat pomocí bodů, dostaneme množinu bodů $(i,\ y)$, kde $i = 4$ a y jsou celá čísla, pro něž platí: $0 < y < 4.5/7$, tzn. $y = 1, 2$. Hledanou množinou bodů je tak množina $\{[4, 1], [4, 2]\}$. Pokud takovouto interpretaci uděláme pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a získané body znázorníme v kartézském grafu, dostaneme "trojúhelník" na obr. 5:



Obr. 5

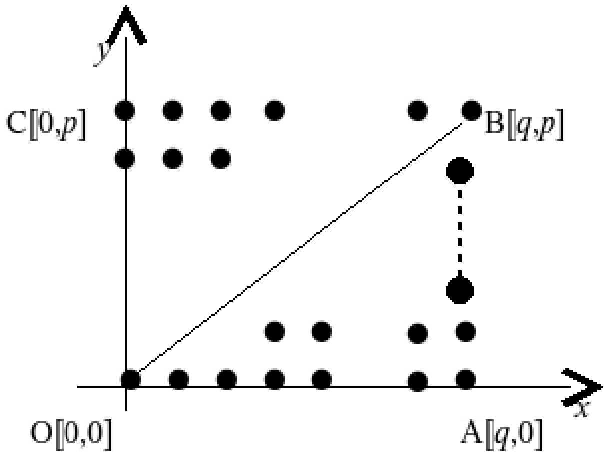
Nás nyní zajímá, kolik bodů získaný „trojúhelník“ má. Tento výpočet však již popíšeme obecně.

Problém 4: Určete počet bodů, které dostanete výše popsanou interpretací levé strany formule (1).

Řešení: Pokud budeme interpretovat levou stranu vztahu (1) v souřadnicové soustavě, dostaneme vnitřní body s celočíselnými souřadnicemi trojúhelníka O[0, 0], A [q, 0], B[q, p] (viz obr. 6). Tento trojúhelník doplníme na obdélník OABC tak, že úsečka OB je jeho úhlopříčkou. Na této úhlopříčce neleží žádný z původně vyznačených bodů, protože čísla p, q jsou nesoudělná. Nyní nás bude zajímat, kolik vnitřních bodů s celočíselnými souřadnicemi tento obdélník má. Je jich zřejmě $(p-1)(q-1)$. Původní trojúhelník OAB má proto $\frac{(p\ -\ 1)(q-1)}{2}$ vnitřních bodů s celočíselnými souřadnicemi. To je však pravá strana formule (1). Tím důkaz končí.

Poznamenejme ještě, že pokud jsou přirozená čísla p a q soudělná, pak na úsečce OB leží alespoň jeden náš bod s celočíselnými souřadnicemi. V obdélníku OABC pak tento bod počítáme dvakrát. Dostáváme tak na levé straně rovnosti (1) ostře větší číslo než na straně pravé. Pomocí interpretace jsme tak zjistili, že pokud bychom vypustili podmínku o nesoudělnosti čísel p a q, museli bychom ve formuli (1) nahradit symbol „=“ symbolem „$\geq$“.

Ale vraťme se ke strategiím. Problém 3 jsme tak převedli pomocí kartézské soustavy souřadnic na problém 4, tj. do geometrie a tam jsme ho vyřešili. Použili jsme nejen strategii **přeformulování problému**, ale i **strategii grafického znázornění**.



Obr. 6

Čtenáři je jistě známo, že klasické problémy geometrie (trisekce úhlu, rektifikace kružnice, atd.) byly pomocí analytické metody přeformulovány do algebry a tam vyřešeny. Autor se také přizná k tomu, že před lety přeformuloval některé netriviální věty z teorie grup do teorie orientovaných grafů a tam se mu je podařilo dokázat. To však již silně překračuje rámec tohoto článku.

Závěr: Snad si čtenář při řešení výše uvedených problémů uvědomil, jak plodná může být strategie přeformulování problému. Přece však na konci našeho pojednání upozorníme na jednu skutečnost. Mezi přeformulováním prvního a třetího problému je poměrně velký rozdíl. První problém jsme přeformulovali na problém zcela jiný, neboť jsme si uvědomili, co v sobě pravidelný pětiúhelník skrývá, a proto náš plán zněl následovně: Jestliže se nám podaří sestrojit zlatý řez úsečky, pak dokážeme sestrojit pravidelný pětiúhelník. Konstrukce zlatého řezu byla vlastně bližším cílem pro sestrojení pravidelného pětiúhelníka. V případě třetího problému se nám podařilo přeformulovat původní problém na nový problém, který byl s původním problémem ekvivalentní. Daný problém jsme vlastně vyjádřili v jazyce jiné matematické teorie. Tuto strategii můžeme nazvat **Strategie vyjádření problému v jiném jazyce**. Tuto strategii můžeme považovat za speciální případ obecnější strategie zvané přeformulování problému. Čtenář si jistě uvědomil, že i při řešení problému 3 jsme využili strategii grafického znázornění. Uvedená řešení navíc demonstrují, že matematikové při řešení problémů většinou používají více strategií, z nichž však některá může být „hlavní“. V našich řešeních byla tou hlavní strategií právě strategie přeformulování problému.

O různých strategiích není potřeba ve škole příliš hovořit, je však třeba je na konkrétních problémech či lépe řečeno na řešení těchto problémů soustavně trénovat. To však dokáže především takový učitel, který o těchto strategiích něco ví a hlavně, který je má dostatečně procvičené a dokáže je proto používat v praxi. Stručně řečeno: *Učitel by měl mít tyto strategie v krvi a od něj by tyto strategie měly přecházet při praktickém používáním do krve jeho studentů.*

Literatura

[1] Cofmann, J.: What to solve? Oxford, Oxford University Press, 1991.

[2] Kopka, J.: Hrozny problémů ve školské matematice. Ústí nad Labem, UJEP, 1999.

[3] Kopka, J.: Výzkumný přístup při výuce matematiky. Ústí nad Labem, UJEP, 2004.

[4] Vopěnka, P.: Rozpravy s geometrií. Praha, Panorama, 1989.

Adresa autora:
Prof. RNDr. Jan Kopka, CSc.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Jana Evangelisty Purkyně
České mládeže 8
Ústi nad Labem
e-mail: kopkaj@sci.ujep.cz

Analýza žiackych interpretácií a riešení difúznej úlohy o kockách

Ivana Kovárová

Abstract. *Fuzzy problems may be classified to non-standard problems. Fuzzy problems develop pupils' creativity and critical reading of text. In this paper we present the results of an analysis of pupils' solutions of one fuzzy word problem.*

Difúzne slovné úlohy možno zaradiť medzi neštandardné úlohy v matematike. Slovnými úlohami sa zaoberajú publikácie [1], [2] a [3]. Proces riešenia difúznej úlohy je zhodný s procesom riešenia štandardnej slovnej úlohy. V úrovni uchopenia situácie však žiaci interpretujú úlohu rôzne. Preto difúzne úlohy by sa dali definovať ako slovné úlohy, ktorých zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi. Problematika difúznych úloh nie je doteraz podrobne rozpracovaná. V posledných rokoch sa jej venujú Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc. so spolupracovníkmi na PedF UK v Prahe. V [4] sa zaoberajú rozmanitosťou žiackych riešení ale skúmajú ich z hľadiska učiteľa a jeho edukačného štýlu. Vo výskume ako nástroj použili „vágne formulovanú“ slovnú úlohu. Zaujímavé úlohy podobného štýlu sú dostupné i na osobnej stránke prof. Hejného [5].

V spolupráci s ôsmimi učiteľkami sme zadali žiakom sériu troch difúznych úloh. Spolu sa zúčastnilo 322 riešiteľov v pätnástich triedach (od piateho ročníka ZŠ po prvý ročník SPŠ). Chceli sme zistiť postoje žiakov i učiteľov k riešeniu týchto úloh. V tomto článku sa zaoberáme žiackymi interpretáciami jednej zo zadaných úloh. Úloha mala dve rôzne zadania, výber konkrétneho zadania sme ponechali na učiteľky.

A. Koľko kvádrov vieš poskladať z dvanástich rovnakých kociek?

B. Koľko kvádrov vieš poskladať z dvanástich kociek s rovnako veľkou hranou?

Vo väčšine tried zostala voľba na žiakoch. Rozdiel videli len v dĺžke a zrozumiteľnosti vety, nie v rôznych výkladoch zadaní. Jedna z učiteliek, ktorá predložila len zadanie B, svoju voľbu komentovala slovami: „Túto úlohu som si vybrala, pretože ma zaujímalo, či sa nájdu žiaci, ktorí budú hľadať kváder s rovnako veľkou hranou.“ Jej predpoklad sa splnil. Medzi riešiteľmi sa našli aj žiaci, ktorí sa nad kvádrom s rovnako veľkými hranami zamysleli. Rozdielnosť zadaní sme predpokladali v tom, že zadanie B pripúšťa rôznosť kociek. Ani jeden žiak nerozlíšil kocky z hľadiska ich zafarbenia alebo materiálu. Zadanie úlohy vyvolalo žiacke otázky, na ktoré učiteľky nemohli odpovedať. Napríklad:

1. Kocky sú rovnaké alebo len rovnako veľké?

2. Musím použiť všetky kocky na jeden kváder alebo na viac kvádrov?

3. Môžu mi aj zvýšiť kocky?

4. Vzniknuté kvádre majú byť rôzne alebo rovnaké?

5. Je kocka kváder?

6. Otočením jedného kvádra dostanem iný kváder alebo ten istý?

Keď majú žiaci riešiť úlohu, ktorej zadanie je nejednoznačné, zväčša sa uspokoja s riešením jedného pochopenia, nad iným sa veľmi nezamýšľajú. Zo školy sú zvyknutí, že každá informácia v zadaní je potrebná k riešeniu. Tiež je zvykom jednoznačné zadanie úlohy, ktoré sa dá pochopiť len jedným spôsobom. Keď difúznu úlohu vyriešia v jednej interpretácii, považujú ju za vyriešenú. Riešenia sme rozdelili do skupín podľa spôsobu pochopenia. Na základe riešení sme sa pokúsili interpretovať pôvodné zadanie. Interpretácia je v našom ponímaní preformulované pôvodné zadanie tak, aby už úloha nebola difúzna. Získali sme päť obhájiteľných interpretácii (obmeny pôvodného zadania).

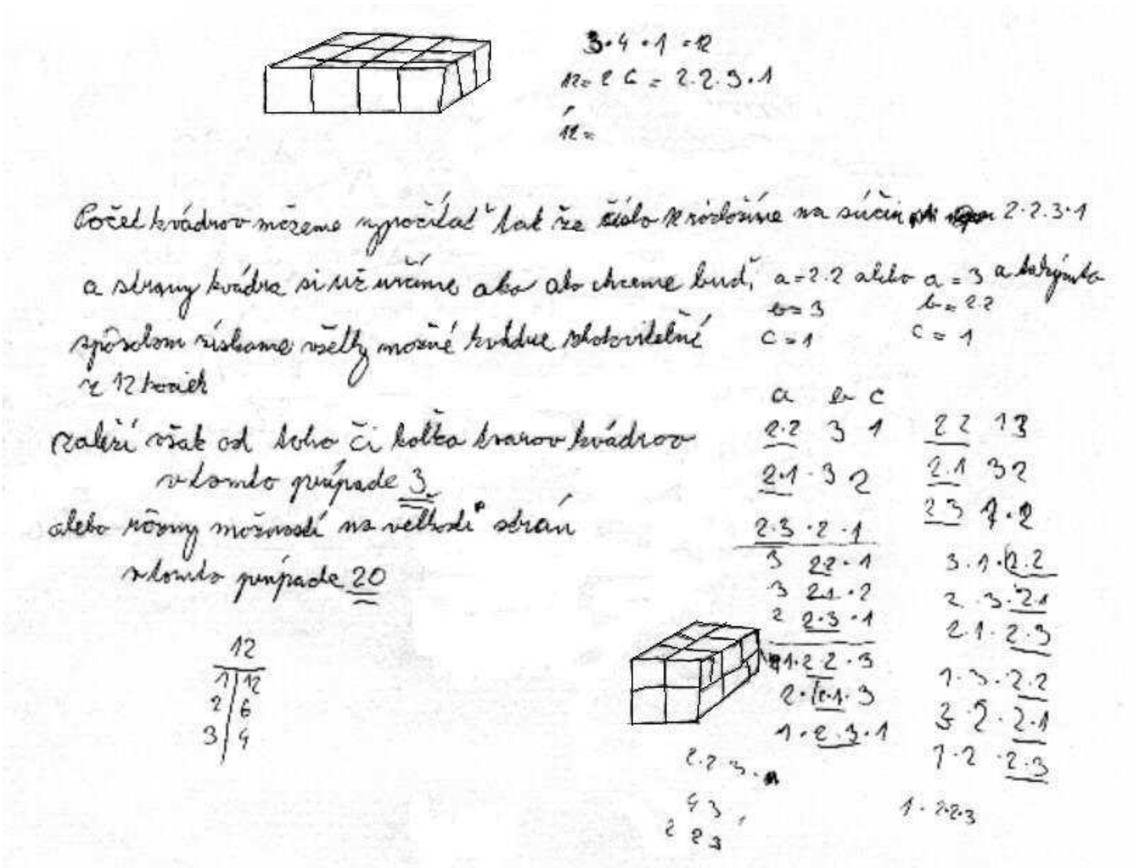
1. Koľko existuje rôznych kvádrov z práve dvanástich rovnakých kociek?

Takúto úlohu riešilo 16,8% žiakov, pričom jej úspešnosť bola skoro 80%. V tomto pochopení sa vyskytli dve metódy riešenia:

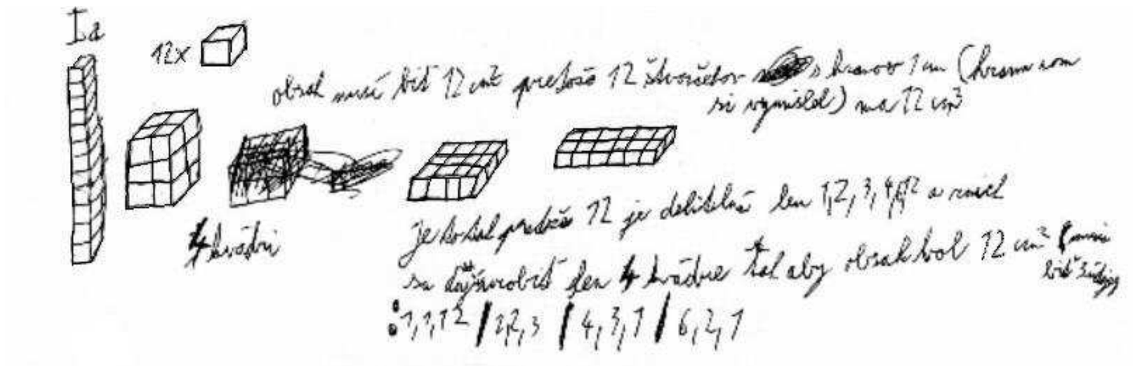
- metóda pomocou rozkladu čísla 12 na súčin prvočísiel
- metóda pomocou náčrtu možností tvarov kvádrov

a našli sa žiaci, ktorí dané metódy skombinovali.

Metóda rozkladu čísla na súčin prvočísiel bola spoľahlivejšia, pretože týmto postupom častejšie objavili i možnosť 2x2x3 (pri grafickom riešení bola táto možnosť zriedkavo objavená).



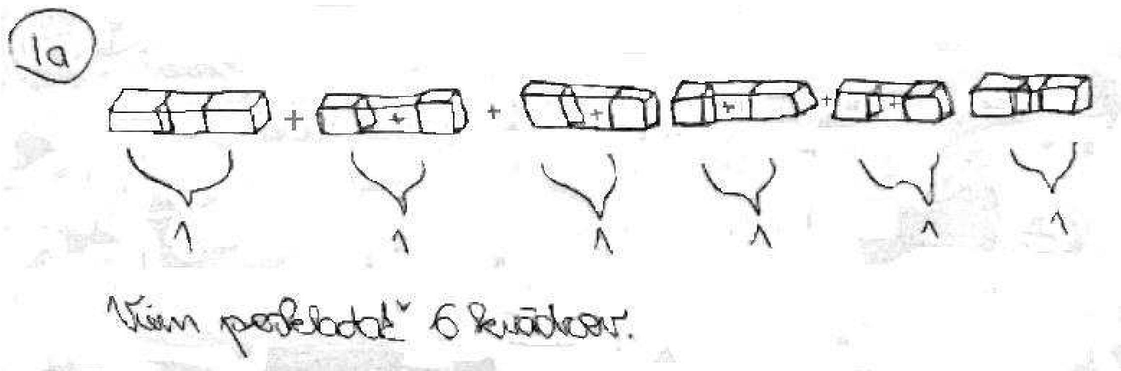
Žiak riešil úlohu pomocou rozkladu čísla 12 na súčin prvočísiel. Táto metóda bola často použitá v riešeniach žiakov vyšších ročníkov. Riešiteľ deviateho ročníka sa zaoberá i otázkou rotácie kvádrov. Udal dve odpovede a ich rôznosť aj slovne vysvetlil. Písomná argumentácia je vo všeobecnosti v riešeniach zriedkavá.



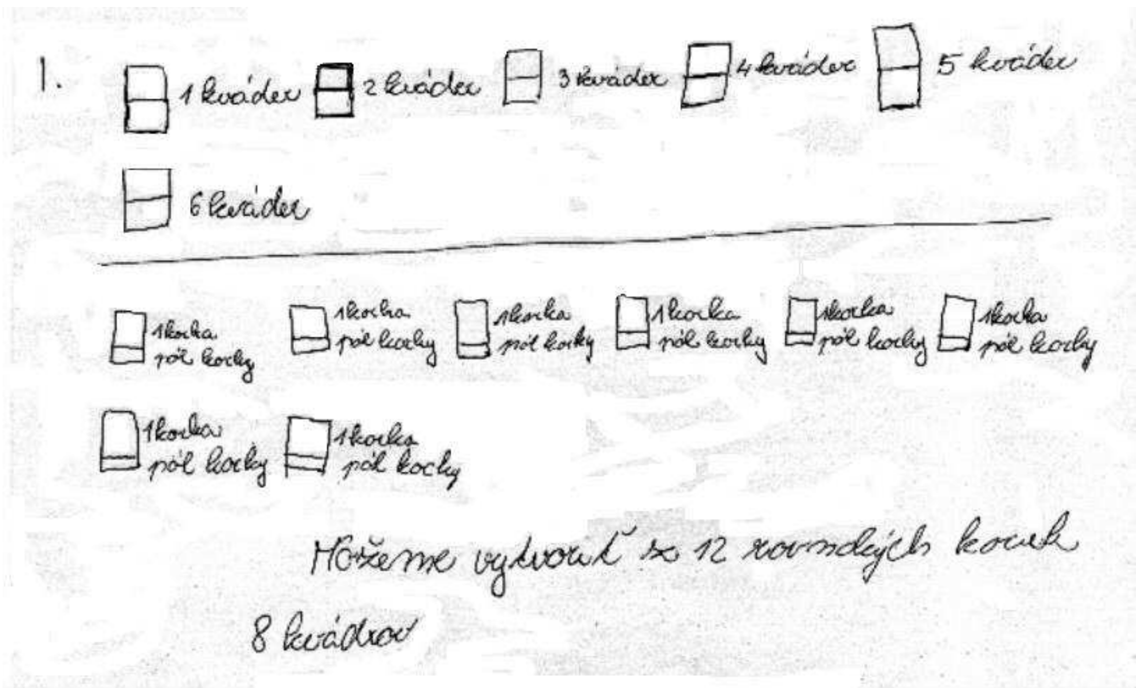
Riešenie žiaka ôsmeho ročnía je kombináciou viacerých metód. Zvláštnosťou je využitie objemu na odôvodnenie rozkladu na prvočísla.

2. Najviac koľko rovnakých kvádrov sa dá poskladať z práve dvanástich rovnakých kociek?

Túto úlohu riešilo 28% žiakov s úspešnosťou vyššou ako 95%.



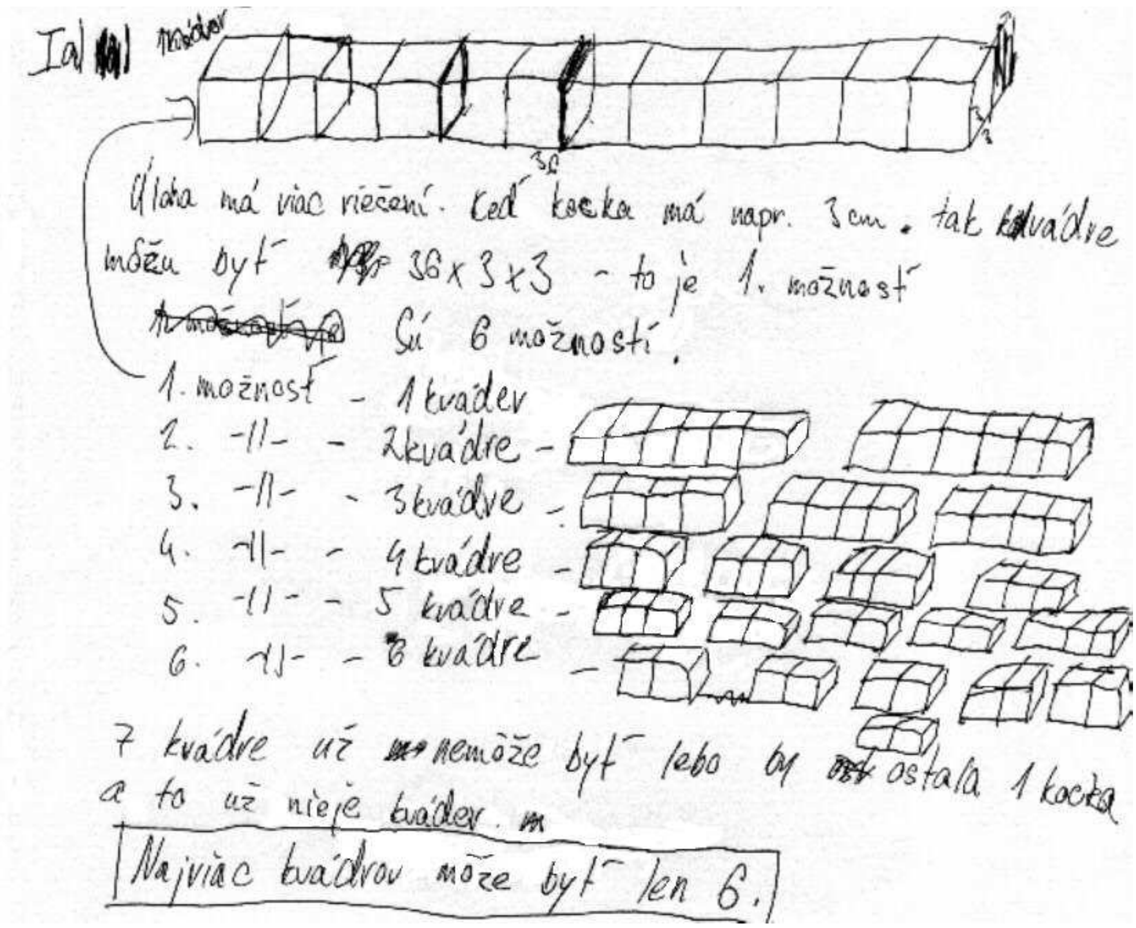
Postup spájania kociek použila žiačka siedmeho ročníka, podobne ako väčšina riešiteľov pri tejto interpretácii. Riešenie bolo zväčša grafické, často doplnené o výpočet 12:2=6.



Uvedené riešenie siedmačky je jedným z troch riešení, v ktorých sa riešitelia zaoberali myšlienkou rezania kociek. V snahe vytvoriť viac kvádrov ako len šesť, kocky rezali a spájali, čím sa im podarilo vytvoriť osem kvádrov. Nad možnosťou rozrezania kociek na viac častí, čím by mohli vytvoriť ľubovoľne veľa rovnakých kvádrov, sa už nezamýšľali.

3. Použitím dvanástich rovnakých kociek boli postavené rovnaké kvádre. Aké môžu byť tieto kvádre?

Takúto úlohu riešilo 15,5% žiakov s úspešnosťou 36%. Toto pochopenie je úzko späté s predchádzajúcim, je len doplnené o výpočty 12:3=4, 12:4=3, 12:6=2, 12:12=1. Žiaci si uvedomili, že 2 nie je jediný deliteľ čísla 12.



Tento riešiteľ ôsmeho ročníka má ako jediný v riešení spomenuté miešanie rôznych kvádrov. Ak by sa tejto myšlienke hlbšie venoval, riešil by úlohu: Koľko existuje rôznych skupín kvádrov, ktoré sú vytvorené použitím práve dvanástich kociek?

4. Koľko existuje rôznych kvádrov obsahujúcich maximálne dvanásť rovnakých kociek?

Takto modifikovanú úlohu riešilo 3,1% žiakov. Úspešnosť doriešenia bola nulová, pretože samotné riešenie je veľmi zdĺhavé.

5. Pôvodná formulácia zadania: „Koľko kvádrov vieš poskladať ...“ umožňuje i napríklad obhájiteľnú odpoveď: „1“.

Zadanie sa pýta riešiteľa na subjektívny stav. Ak vie riešiteľ poskladať len napr. kváder 1x2x6, odpovedá správne. Zadanie by malo znieť: „Koľko kvádrov sa dá poskladať...“[16]

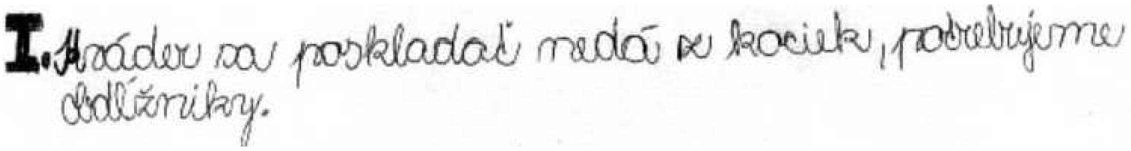
6. Len necelé 2% žiakov sa pokúšalo úlohu riešiť viacerými spôsobmi.

Nad možnosťou viacerých interpretácii úlohy sa zamyslelo málo žiakov, zväčša z vyšších ročníkov. Predchádzajúce štyri interpretácie sa dajú rozdeliť do dvoch skupín. Prvú tvoria interpretácie číslo 1 a 4. Rozdiel medzi nimi je len v tom, či použiť alebo nepoužiť všetky kocky. V druhej skupine sú interpretácie číslo 2 a 3. Uvažuje sa v nich nad skupinami rovnakých kvádrov. Keď sa riešiteľ zamýšľal nad viacerými interpretáciami, tak len v rámci jednej skupiny.

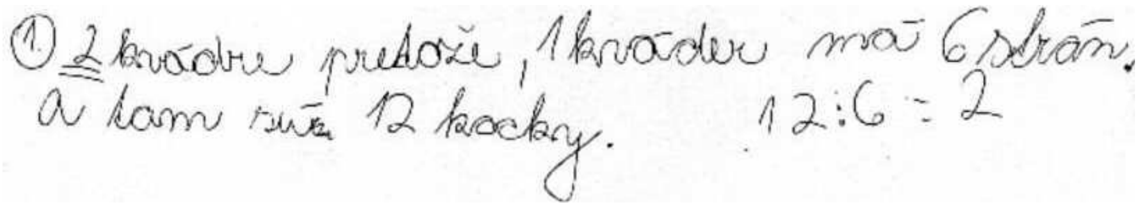
[16]Táto interpretácia bola pridaná až po recenzii pôvodného príspevku doc. RNDr. Trenklerom, CSc.

7. Úlohu neriešilo 7,8% žiakov, pričom viac ako polovicu tvoria piataci. Pravdepodobne to je spôsobené tým, že pojem kvádra ešte nemajú osvojený.

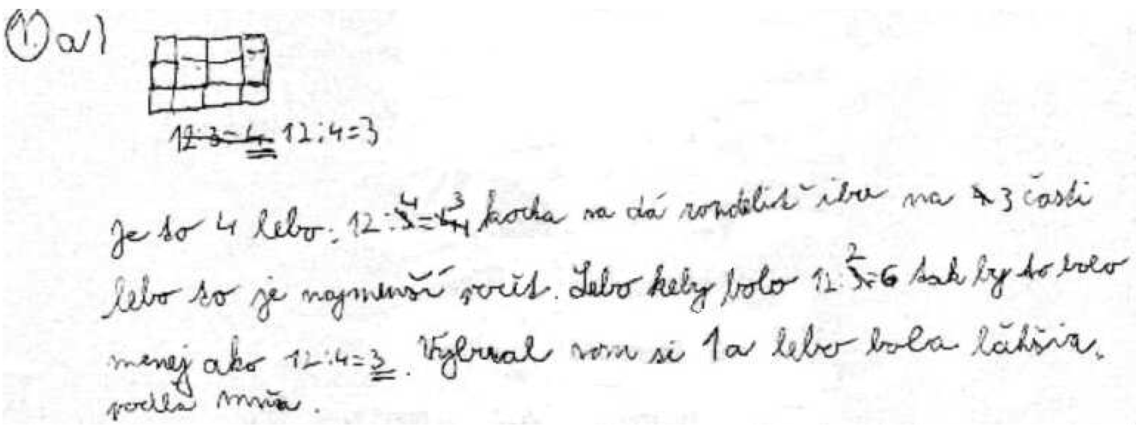
8. 27% riešiteľov úlohu riešili zle.



Z tohto riešenia (i z mnohých iných) je zrejmé, že niektorí žiaci nerozlišujú medzi útvarmi v rovine a telesami v priestore. Mýlia si tiež objem s obsahom.



Rovnaký problém vidíme aj v tomto riešení, je tu zamenený pojem stena a hrana. Je samozrejmé, že aj smer, ktorým sa žiak uberá je nevhodný.



Z tohto riešenia je zrejmé, že žiak netuší ako by sa dopracoval ku správnemu výsledku. Pokúša sa neuvážene kombinovať vstupné číselné údaje pomocou možných počtových operácii.

Z analýzy riešení vyplynulo, že najčastejšia a aj najúspešnejšia interpretácia uvedenej úlohy bola: „Najviac koľko rovnakých kvádrov sa dá poskladať z práve dvanástich rovnakých kociek?“

Difúzne úlohy a „uvedomelá“ práca s nimi na hodinách matematiky sú jednou z metód, ktorými sa môžu rozvíjať niektoré matematické kompetencie žiakov (napríklad argumentácia, kritické čítanie textu, zvýšenie odborného sebavedomia). Domnievame sa, že pri tomto type úloh je najdôležitejšia diskusia. Vždy po vyriešení úlohy žiakmi je nutné zadanie rozobrať a rozdiskutovať ktoré interpretácie sú obhájiteľné oproti pôvodnému zadaniu a ktoré už nie. Považujeme za vhodné sa tejto problematike i naďalej venovať. Tiež odporúčame i učiteľom v praxi, aby sa ich pokúsili zaradiť do zoznamu používaných úloh na hodinách matematiky.

Literatúra

[1] Hejný, M., Michalcová, A.: Skúmanie matematického riešiteľského postupu, Bratislava 2001

[2] Pólya, G.: How to solve it, Princeton University Press in Penguin Books, 1990

[3] Novotná, J.: Analýza řešení slovních úloh, Praha, 2000

[4] Hejný, M.: Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu, Zborník príspevkov Pytagoras 2005

[5] http://userweb.pedf.cuni.cz/kmdm/katedra/pracovnici/hejny.htm#G

Adresa autora:
Mgr. Ivana Kovárová
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika
Jesenná 5
041 54 Košice

Nekonečné rady v stredoškolskej matematike

Jana Krajčiová

Abstract. *This article describes one experiment made in time of explaining the lesson Infinete geometric series. It says on suitability of gradualized learnig with corespondence to historical development of given concept.*

V období, keď sa deti predškolského a mladšieho školského veku učia počítať, s veľkou obľubou sa pretekajú, ktoré z nich vie počítať „do viac“. Je fascinujúce pozorovať prváčika, ktorý sa naučil počítať v škole do sto, ako nástojčivo kladie otázku: „Do koľko budem vedieť počítať v 2. triede?“. A neuspokojí sa s odpoveďou, že „do veľa“, chce počuť konkrétne číslo. V tom čase u dieťaťa ešte nie je rozvinutá predstava ani len potenciálneho nekonečna.

O niečo neskôr už pri pretekoch „Kto povie väčšie číslo?“ vie povedať číslo sto, tisíc, milión, milión milónov, atď. a súťaž prestane byť zaujímavou, lebo nikdy neskončí. Objaví **potenciálne nekonečno**: ku každému číslu vie zostrojiť ešte väčšie.

Aplikujúc biologický princíp, podľa ktorého ontogenéza (individuálny vývoj) kopíruje fylogenézu (historický vývoj), na rozvoj myslenia, môžeme povedať, že rozumová abstrakcia šesťročného dieťaťa je na úrovni gréckeho matematického myslenia, v ktorého ponímaní je nekonečno chápané iba potenciálne, ako možnosť ísť ďalej.

Ak je potrebné primäť študentov k pozornosti, stačí začať rozprávať o nekonečne (napr. o Zenónových apóriách alebo o rôznych typoch nekonečna). Jednou z tém stredoškolskej matematiky, ktorá umožňuje rozvíjať pojem nekonečna, sú nekonečné rady (preberané spravidla v 3. ročníku gymnázia v rámci tematického celku Postupnosti a rady). Tu žiaci pracujú už s nekonečnom aktuálnym. V rámci tohto učiva sme uskutočnili v septime Gymnázia v Košiciach, Alejová 1 v školskom roku 2003/2004 nasledovný experiment.

Cieľ experimentu:

1. Vhodným zaradením odhadových úloh do vyučovacieho procesu kopírovať fylogenézu rozvoja pojmu aktuálne nekonečno.
2. Presvedčiť sa o tom, že pojmy, s osvojením ktorých majú študenti väčšie problémy (v našom prípade je to pojem nekonečný rad), aj v histórii čakali dlhý čas na matematické spracovanie.
3. Vhodným zaradením odhadových úloh do vyučovacieho procesu motivovať študentov.

Experiment prebiehal v niekoľkých fázach časovo rozvrhnutých tak, aby ontogenéza rozvoja pojmu nekonečný rad kopírovala jeho fylogenézu:

1. fáza: Oboznámenie študentov so Zenónovými apóriami.
2. fáza: Matematizácia Zenónovej apórie s názvom Dichotómia.
3. fáza: Vypĺňanie zadaní s odhadovými úlohami študentmi.

1.fáza: Oboznámenie študentov so Zenónovými apóriami.

Priebeh:
Na jednej z hodín matematiky (asi dva týždne pred začiatkom tematického celku Postupnosti a rady) sme spolu so študentmi hovorili o Zenónových apóriách (bola to jedna z hodín, na ktorej študenti chceli vedieť niečo o nekonečne, chceli vedieť dokonca jeho definíciu).

Dichotómia (letiaci šíp) (tento text je zmesou dvoch pôvodných verzií): Šíp je vzdialený od terča 1m, teda po vystrelení má prejsť dráhu dlhú 1m. Najprv musí prejsť polovicu dráhy, potom polovicu zo zvyšnej polovice, potom opäť polovicu z úseku, ktorý ešte ostal, potom… Toto rozprávanie sa nikdy neskončí, preto šíp do terča nikdy nedoletí.

Historické pozadie:
Pri prvom stretnutí so Zenónovými apóriami si človek povie, že sú to vtipné nezmysly. Vyvrátiť ich nie je vôbec problém. Stačí, tak ako to urobil Diogenes, trafiť šípom do terča, a tak experimentálne dokázať, že apória Dichotómia je nepravdivá. Polarita rozumového a zmyslového, nastolená eleatmi, je prítomná v histórii matematiky dodnes. V dejinách prešlo celé tisícročie od formulovania Zenónových apórií (5. storočie p.n.l.) po ich vyriešenie (Nicole Oresme, 14. storočie). My sme na hodinách matematiky túto dobu skrátili na 2+4 týždne.

Postoj študentov:
Uveďme aspoň jednu (Mišovu) reakciu:

„To je blbosť.“.

Študenti sa k týmto apóriam postavili podobne ako Diogenes. Vnímali rozpor medzi rozumovým a zmyslovým chápaním problému (svedčí o tom aj Mišova reakcia), no nevedeli ho vyriešiť. Náš zámer bol splnený – nasadili sme im chrobáka do hlavy a nechali sme ho tam šarapatiť dva týždne, kým sme sa k tomu problému vrátili opäť. Je potrebné podotknúť, že celý rozhovor netrval dlhšie ako 8 minút, takže naozaj išlo len o „nasadenie chrobáka do hlavy“ bez hlbšej diskusie.

2.fáza: Matematizácia Zenónovej apórie s názvom Dichotómia.

Priebeh:
Táto fáza prebiehala na úvodnej motivačnej hodine k tematickému celku Postupnosti a rady (asi dva týždne po 1. fáze a štyri týždne pred 3. fázou – začiatkom učiva o nekonečných radoch).

1. Najprv sme žiakom položili takúto otázku: „Ak sčítame nekonečne veľa čísel, môže byť súčet konečný (konkrétne reálne číslo)?“. Nechali sme študentov, aby každý sám podľa svojho úsudku zodpovedal na otázku, učiteľ ich názory nekomentoval.
2. Nato sme sa opäť vrátili k Zenónovým apóriam, a to k apórii prvej – dichotómii a spoločne sme ju zmatematizovali.
3. V závere sme sa vrátili k 1. otázke a spoločne sme sa zhodli na odpovedi.

Historické pozadie:
Otázka, ktorú sme položili študentom, by za čias Zenóna vôbec nebola možná. Je totiž postavená tak, že jej formulácia pracuje s aktuálnym nekonečnom. V jej predpoklade (Ak sčítame nekonečne veľa čísel,…) pracujeme s nekonečným

množstvom čísel, na ktoré sa pozeráme ako na celok. A, ako sme už skôr spomínali, starí Gréci pracovali iba s nekonečnom potenciálnym.

Postoj študentov:

Ad 1. Iba dvaja z 18 prítomných študentov odpovedali na položenú otázku (či môže byť súčet nekonečne veľa čísel konečný) kladne a ako dôvod svojej odpovede jeden z tých dvoch (Lukáš) uviedol:

„Na sústredení som niečo o tom počul.“.

(Bol to viacnásobný účastník matematických sústredení.) Väčšina bola presvedčená o tom, že súčet nekonečného počtu čísel nemôže byť konečný.

Ad 2. V triede bolo všetko pripravené na to, aby nastala etapa nabúravania vžitých predstáv. Najprv sme si spoločne (pomocou vhodne kladených otázok) zmatematizovali Zenónovú apóriu. – dichotómiu, a to nasledovne:

1m sa rovná polovici z jedného metra ($\frac{1}{2}m$) plus polovica zo zvyšku ($\frac{1}{4}m$) plus polovica zo zvyšného úseku ($\frac{1}{8}m$) plus...

Teda dostávame rovnosť

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$.

Názorná predstava (ako aj už spomínaný Diogenov experimentálny dôkaz) ich presvedčovala o tom, že vyššie uvedená rovnosť ja pravdivá.

Ad 3. Už tušili, že odpoveď na úvodnú otázku je kladná. Nastala fáza očakávania, ako sa to bude vyvíjať ďalej, ako si s tým matematika poradí. Na konečné rozuzlenie si budú musieť študenti (v súlade s historickým vývojom) ešte štyri týždne počkať.

3. fáza: Vypĺňanie zadaní s odhadovými úlohami študentmi.

Priebeh:

Sme na hodine matematiky, ktorej cieľom je:

1. precvičovanie počítania limít využijúc vzorce pre výpočet súčtu prvých n členov geometrickej postupnosti,
2. motivácia pojmu nekonečný rad – odhadnutie súčtu nekonečne veľa sčítancov (v náväznosti na prvé dve fázy experimentu).

Spomínané ciele sme chceli dosiahnuť týmto spôsobom:

Ad 1. Študenti riešili (do zošitov aj na tabuľu) nasledujúce úlohy.

1. Vypočítajte:
$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^{(n-1)}}) =$
2. Vypočítajte:
$\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{1}{2^{(n-1)}}) =$

Ad 2. Po vyriešení predchádzajúcich dvoch limít žiaci dostali zadanie, v ktorom mali odhadovať nekonečné súčty.

Čas na vypracovanie bol 20 minút.

Každý žiak pracoval samostatne.

Zadanie vyzeralo nasledovne (v zátvorkách uvádzame správne odpovede):

V 1. až 7. úlohe odhadnite, či súčty nekonečne veľa čísel sú konečné alebo nekonečné. Ak sú konečné, odhadnite tento súčet. Načrtnite myšlienku, ktorá vás viedla k výsledku.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots =$ [1]
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots =$ [$\frac{2}{3}$]
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots =$ [2]
4. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots =$ [∞]
5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots =$ [∞]
6. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots =$ [∞]
7. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots =$ [$\frac{3}{2}$]

Postoj študentov (analýza riešení s odhadovými úlohami):
Fakt, že nie všetci študenti triedy boli účastní na všetkých fázach experimentu (z dôvodu chrípkovej epidémie v čase experimentu) sa neskôr javil ako výhoda. Úspešnosť žiakov prítomných na predchádzajúcich hodinách bola vyššia ako u chýbajúcich študentov.

Záver: Autor článku sa domnieva na základe popísaného experimentu, ale aj iných skúseností z vyučovacích hodín, že má veľký význam, keď sa žiaci s učivom oboznamujú postupne. Problematika má postupne nahlodávať ich predstavy, čím získajú viacej skúsenosti a to im neskôr pomôže k hlbšiemu pochopeniu učiva.

Literatúra

[1] Š. Znám, L. Bukovský, M. Hejný, J. Hvorecký, B. Riečan: *Pohľad do dejín matematiky*, ALFA, Bratislava, 1986.

[2] M. Hejný a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990.

[3] M. Zelina: *Tvorivosť v matematike*, metodický materiál, Bratislava, 1990.

[4] K. Devlin: *Jazyk matematiky*, Argo a Dokořán, Praha, 2002.

[5] G. W. Leibniz: *Theodicea*, OIKOYMENH, Praha, 2004.

[6] R. Péterová: *Hra s nekonečnem*, Mladá fronta, Praha, 1973.

[7] J. Šedivý a kol.: *Matematika pre 3. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1991.

[8] Rozhledy matematicko-fyzikální, Praha.

Adresa autora:
Gymnázium Košice
Alejová 1
e-mail: jana.krajciova@pobox.sk

Integrácia matematického softvéru Derive do vyučovacieho procesu na stredných školách

Ingrida Kraslanová

Abstract. *This article describes teaching of goniometry at upper secondary school by using mathematical software Derive. We present some example of lesson in computer room dealing with graphs of goniometric functions* $y = a.\sin(b.x+c)+d$, $y = a.\cos(b.x+c)+d$, $a, b, c, d \in R, a \neq 0, b \neq 0$.

V predloženom článku sa pokúsime stručne opísať našu skúsenosť s experimentom realizovaným na strednej škole v Bratislave v školskom roku 2005/2006, v rámci ktorého sme v experimentálnej triede zaviedli počítačom podporované vyučovanie. Počas trvania experimentu prebiehalo vyučovanie matematiky na delených hodinách v počítačovej učebni vybavenej 15 počítačmi. So žiakmi experimentálnej skupiny sme prebrali učivo: *Grafy zložených goniometrických funkcií* $y = a.\sin(b.x + c) + d, y = a.\cos(b.x + c) + d$. Predtým, ako uvedieme stručný opis prvých dvoch po sebe nasledujúcich vyučovacích hodín, vysvetlíme význam dvoch pojmov vyskytujúcich sa v článku, pochádzajúcich z Brousseauovej teórie didaktických situácií.

- **Analýza a priori** – v rámci nej sa snažíme odpovedať na otázky:

  1. *Aké miesto v matematickom poznaní žiaka na danej úrovni zastáva zadanie úlohy?* Jedná sa o popis matematického poznatku, upresnenie, či je nový alebo starý.
  2. *Aké miesto v ponúkanom didaktickom scenári zaujme riešenie úlohy?*

     Učiteľ rozhodne, kedy je vhodný moment na zadanie úlohy, zopakovanie známych a definovanie nových pojmov, aké pomôcky a materiály sa na hodine použijú, predvída čas potrebný na riešenie, formu očakávanej odpovede, problémy a námietky žiakov,...
  3. *Popis aktivít žiakov na dvoch úrovniach:*

     - lokálna úroveň – analýza možných žiackych aktivít na explicitnej úrovni (vstup žiakov do danej úlohy, využitie kalkulačky, počítača, popis úlohy a jej požadované riešenia – výpočty, dôkazy, grafy,...) i na úrovni implicitnej (berie sa ohľad na prostriedky, aké má žiak k dispozícii na prípadnú kontrolu riešení úloh – kalkulačka, graf,...)

     - globálna úroveň – určí sa náročnosť, úroveň prínosu, možnosť zovšeobecnenia úlohy, analyzuje sa iniciatíva zo strany žiaka
  4. *Analýza očakávaní učiteľa* – zaujímajú nás očakávané postupy v danej činnosti

- **Analýza a posteriori** – je rozčlenená na dve časti:

  1. *Popis efektívneho riadenia v triede a posteriori* - snažíme sa pozorovať, ako učiteľ riadi rozličné fázy upresnené v analýze a priori, spôsob, akým sa na žiakov obracia, akým žiaci pracujú, aké úvahy učiteľ využíva, aké sú prechody medzi výkladom a prácou žiakov,...

2. *Analýza a posteriori efektívnych aktivít žiakov* - súčasťou tejto analýzy by mala byť i kvalitatívna analýza, porovnanie žiackych riešení s cieľmi a riešeniami očakávanými učiteľom, analyzujeme, akých chýb sa žiaci pri riešení dopustili (faktografické chyby, numerické, logické, formálne, ...) (Bereková - Földesiová - Regecová et al., 2003)

1. experimentálna vyučovacia hodina

Analýza a priori vyučovacej hodiny

Pred prvou experimentálnou vyučovacou hodinou študenti nepoznajú pojem zložená goniometrická funkcia a podľa ich slovných výpovedí sa doposiaľ nestretli s programom Derive, teda nepoznajú ani jeho prostredie. Z uvedených dôvodov bude cieľom vyučovacej hodiny naučiť žiakov pracovať so spomenutým programom. Keďže hovoríme o pomerne bohatom programe, ktorý možno využívať v rôznych oblastiach matematiky, my sa spoločne so študentmi zameriame iba na funkcie a nastavenia súvisiace s našou problematikou. Aktivita, záujem i šikovnosť študentov na hodinách matematiky sa v počítačovej učebni môže prejaviť úplne odlišne, preto je náročné predvídať, koľko sa na hodine stihne prebrať. Ak sa žiaci naučia pracovať s programom pomerne rýchlo (tzn. ak zvládnu nastaviť diely na súradnicových osiach, zadať predpis funkcie a následne načrtnúť jej graf, rovnakou farbou zobraziť popis grafu danej funkcie, graf priblížiť, vzdialiť, trasovať, či vymazať,...), druhú časť hodiny môžeme venovať novému učivu. Zavedieme pojem zložená funkcia a preberieme s nimi vplyv parametra a. Počítačová učebňa je vybavená aj tabuľou, ktorá nám umožní zaznamenať nadpis učiva, predpisy funkcií všeobecné i konkrétne,... Študenti budú mať k dispozícii pracovné listy, do ktorých si budú písať poznámky a prekresľovať grafy funkcií z obrazovky počítača. Tieto listy budú môcť študenti využiť aj ako učebný text pri príprave na hodiny matematiky.

Priebeh hodiny

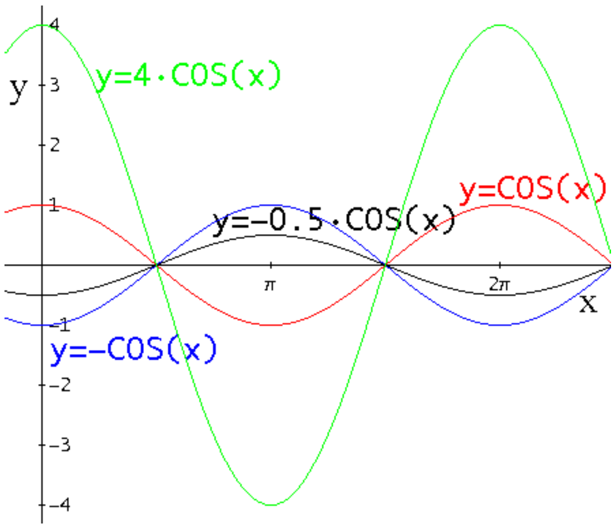
V prvej časti hodiny sme študentov oboznámili s prostredím matematického softvéru Derive, predviedli sme im, ako funguje, naučili sa používať pre nás podstatné a potrebné funkcie a v prípade potreby meniť nastavenia (farbu grafu, textu, polohu stredu súradnicovej sústavy,...).

V druhej časti hodiny sme študentom vysvetlili pojem zložená goniometrická funkcia $y = a.\sin(b.x + c) + d$, $y = a.\cos(b.x + c) + d$, $a, b, c, d \in R, a \neq 0, b \neq 0$ a stihli sme sa venovať i vplyvu parametra a na goniometrické funkcie. Žiakom sme rozdali pracovné listy a ich úlohou bolo vypracovať ich, t.j. pomocou počítača nakresliť grafy daných funkcií (viacero grafov do jedného obrázka, pričom každý graf mal byť načrtnutý inou farbou, súhlasnou s farbou predpisu funkcie) a prekresliť ich do pracovného listu, vyplniť v ňom tabuľku.

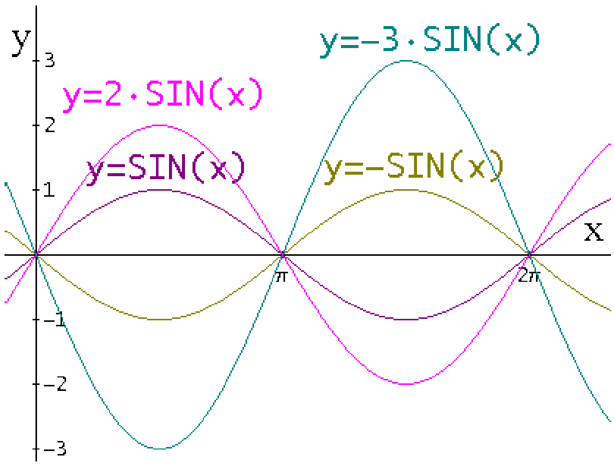
Úlohy:

1. $f_1 : y = \sin x$, $f_2 : y = -\sin x$, $f_3 : y = 2.\sin x$, $f_4 : y = -3.\sin x$ (Obr. 1)
2. $g_1 : y = \cos x$, $g_2 : y = -\cos x$, $g_3 : y = -0.5.\cos x$, $g_4 : y = 4.\cos x$ (Obr. 2)

Keď mali študenti na obrazovke znázornené všetky štyri grafy z prvej či druhej úlohy, vyzvali sme ich, aby ich porovnali, aby určili ich obory hodnôt a zároveň sa pokúsili zistiť, čo presne spôsobuje spomínaný parameter a. Na konci hodiny sme spoločne so žiakmi vyslovili záver – ako vplýva parameter a na tvar grafu funkcie $y = a.\sin x$, resp.: $y = a.\cos x$.



Obr. 1



Obr. 2

Analýza a posteriori vyučovacej hodiny

Nakoľko boli študenti na hodine veľmi šikovní, stihli sme ich oboznámiť so základnými funkciami softvéru Derive, následne im vysvetliť pojem zložená goniometrická funkcia a prebrať vplyv parametra a. Hodina prebehla podľa plánu, len študenti boli zo začiatku menej disciplinovaní, čo môže súvisieť so zmenou učebne. Po vyzvaní si program otvorili a súčasne s naším výkladom sa učili s programom pracovať. V tejto fáze hodiny javili študenti veľký záujem o dianie. Niektorí boli pomalší, nestíhali a veľa sa pýtali. Mali sme však aj študentov, ktorí si s každou úlohou ľahko poradili, v programe sa zorientovali veľmi rýchlo, zisťovali ďalšie funkcie programu, poprípade pomáhali susedom, ktorí boli „stratení". V skupine študentov, ktorí sa s programom rýchlo „skamarátili", sa nachádzali predovšetkým študenti, ktorí na hodinách matematiky obzvlášť nevynikali. Základné funkcie i nastavenia programu zvládli bez väčších komplikácií. Kým študenti preskúmavali prostredie softvéru Derive, my sme sledovali, čo sa deje na monitoroch. Ak to bolo potrebné, študentom sme pomohli, usmernili sme ich, prípadne sme im poukazovali, na čo slúžia jednotlivé ikony na lište. Potom dostali študenti pár minút na to, aby sa s programom „pohrali", aby si zopakovali, čo sa naučili. Nakoľko sa nám javilo, že študenti zvládli všetko, čo sme od nich očakávali, v ďalšej časti hodiny sme preberali nové učivo. Študenti kreslili pomocou počítača grafy funkcií, ktorých predpisy boli uvedené v pracovných listoch, pričom mali tendenciu sa predbiehať, kto bude hotový ako prvý. Na naše otázky ohľadom oboru hodnôt či periódy zadaných funkcií vedel odpovedať takmer každý vyvolaný študent. Horšie to bolo s formuláciou tvrdenia týkajúceho sa vplyvu parametra a na graf funkcie. Tu sme museli študentom trocha pomôcť, usmerniť ich, i keď niektoré ich odpovede vystihli podstatu nastoleného problému. Študenti sa v grafoch zobrazených na obrazovke počítača orientovali veľmi dobre, vďaka farebnému rozlíšeniu bol obrázok názorný a prehľadný.

2. experimentálna vyučovacia hodina

Analýza a priori vyučovacej hodiny

Na predošlej hodine sa študenti oboznámili s programom Derive a prebrali sme s nimi i vplyv parametra a. V úvode druhej experimentálnej hodiny plánujeme zadať študentom zopár príkladov, vďaka ktorým si zopakujú vplyv parametra a na grafy funkcií a zároveň si pripomenú aj prácu s programom Derive. V ďalšej časti hodiny sa pokúsime prebrať vplyv parametrov b, c, d na grafy funkcií $y = a.\sin(b.x+c)+d$, $y = a.\cos(b.x+c)+d$.Predpisy daných funkcií pre jednotlivé parametre budú uvedené v pracovných listoch, ktoré bude mať k dispozícii každý študent. Študentov vyzveme, aby pomocou počítača načrtli grafy funkcií, určili ich periódu a obor hodnôt, aby získaný graf zloženej funkcie porovnali s grafom funkcie $y = \sin x$, resp. $y = \cos x$ a následne sa na základe tejto komparácie pokúsili vysloviť záver týkajúci sa vplyvu konkrétneho parametra na grafy príslušných zložených funkcií. Podľa skúseností z predchádzajúcej hodiny predpokladáme, že študenti budú pracovať s nasadením, že budú snaživí a aktívni, vďaka čomu by sme mali stihnúť prebrať vplyv všetkých troch parametrov. Študenti budú pracovať pri počítačoch samostatne.

Priebeh hodiny

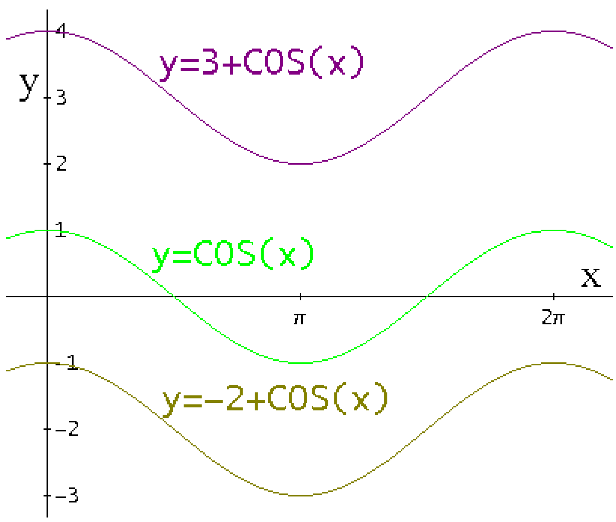
Úlohy na preopakovanie učiva:

1. $k_1 : y = \sin x$, $k_2 : y = -4.\sin x$

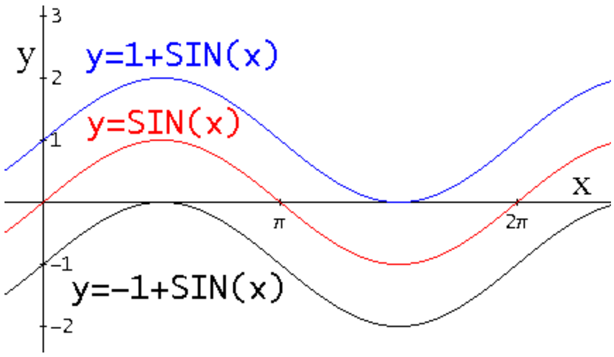
2. $l_1 : y = \cos x$, $l_2 : y = 5.\cos x$

Ďalšia časť vyučovacej hodiny bola rozdelená na tri časti, v ktorých sme sa postupne venovali parametrom d, c, b (v nezmenenom poradí) vystupujúcim v predpise zložených goniometrických funkcií: $y = a.\sin(b.x+c)+d$, $y = a.\cos(b.x+c)+d$.

a/ Vplyv parametra d



Obr. 3

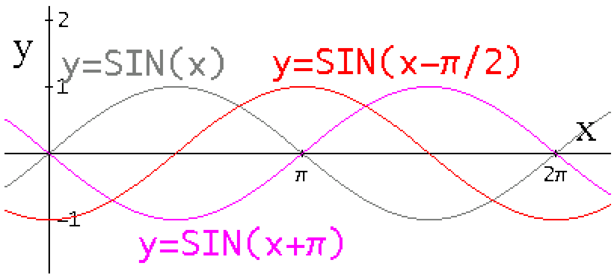


Obr. 4

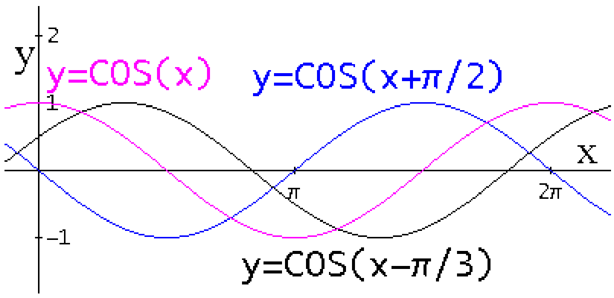
1. $f_1 : y = \sin x,\ f_2 : y = 1 + \sin x,\ f_3 : y = -1 + \sin x$ (Obr. 3)
2. $g_1 : y = \cos x,\ g_2 : y = -2 + \cos x,\ g_3 : y = 3 + \cos x$ (Obr. 4)

b/ Vplyv parametra c

3. $h_1 : y = \sin x,\ h_2 : y = \sin(x + \pi),\ h_3 : y = \sin(x - \pi/2)$ (Obr. 5)



Obr. 5

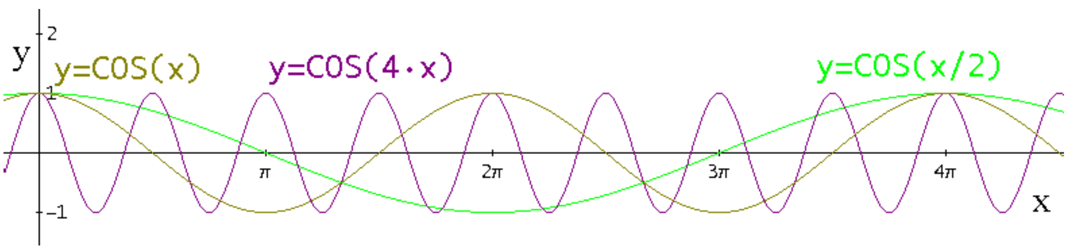


Obr. 6

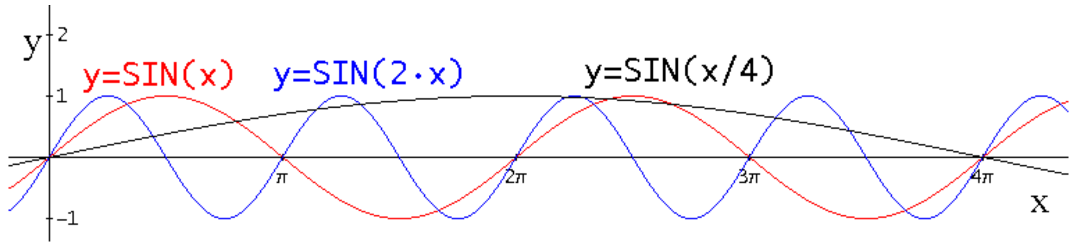
4. $k_1 : y = \cos x,\ k_2 : y = \cos(x + \pi/2),\ k_3 : y = \cos(x - \pi/3)$ (Obr. 6)

c/ Vplyv parametra b

5. $m_1 : y = \sin x,\ m_2 : y = \sin(2x),\ m_3 : y = \sin(x/4)$ (Obr. 7)
6. $l_1 : y = \cos x,\ l_2 : y = \cos(x/2),\ l_3 : y = \cos(4x)$ (Obr. 8)



Obr. 7



Obr. 8

Analýza a posteriori vyučovacej hodiny:

Prvých pár minút vyučovacej hodiny, počas ktorých sme sa venovali opakovaniu, sme zistili, že študenti od poslednej hodiny nezabudli pracovať s programom Derive, a že je väčšej časti skupiny jasné, ako ovplyvňuje parameter a graf funkcie. Ostatní študenti si učivo pripomenuli a ozrejmili vyriešením prvých dvoch úloh určených práve na opakovanie. Pri preberaní nového učiva sa študenti najskôr trocha bavili so susedmi, ale po upozornení sa začali sústrediť, zvedavo a so záujmom riešili nastolený problém. Vplyv parametrov c, d si uvedomili veľmi rýchlo, dokonca aj záverečné tvrdenie sa im podarilo spoločnými silami sformulovať. Chvíľku sme sa museli pozastaviť nad smerom vodorovného posunu spôsobeného parametrom c, pretože veľká časť skupiny automaticky predpokladala, že zápornému znamienku zodpovedá posun vľavo, keďže na číselnej osi sú záporné čísla vľavo od nuly. Keď sme študentov vyzvali, aby si pozornejšie všimli grafy na obrazovke a vysvetlili si, prečo ide o opačný posun, zdalo sa nám, že si vzniknutý problém ujasnili. Presunuli sme sa na parameter b. Počas kreslenia grafov a určovania periódy funkcií sa nevyskytli žiadne ťažkosti. Tie nastali v momente, keď mali študenti vysloviť záver a pokúsiť sa nájsť všeobecný vzťah vyjadrujúci dĺžku periódy zloženej funkcie v závislosti od hodnoty parametra b. Ku vzťahu $T = 2\pi/b$ sa dopracovali iba najšikovnejší študenti a po dôkladnejšom preskúmaní grafov s nimi súhlasili aj ostatní. Počas hodiny bola v triede dobrá pracovná atmosféra. Pri sebe sediaci študenti si navzájom pomáhali, či už v prípade komplikácií s programom alebo nejasností týkajúcich sa matematiky. Medzi niektorými študentmi sme spozorovali súťaživosť a dokonca aj zvýšenie sebavedomia.

Experiment, ktorého dve konkrétne vyučovacie hodiny sme v článku predstavili, prebiehal v dvoch fázach (v školskom roku 2004/2005 a 2005/2006). V rámci neho sme študentov experimentálnej aj kontrolnej skupiny na záver otestovali. Dôsledná kvalitatívna a podrobná kvantitatívna analýza ako i štatistické vyhodnotenie sú momentálne vo fáze spracovania. Až na základe konkrétnych finálnych výsledkov a ďalších experimentov budeme kompetentní posúdiť pozitívny i negatívny vplyv integrácie počítača do vyučovacieho procesu.

Literatúra

[1] BEREKOVÁ, H. – FÖLDESIOVÁ, L. – REGECOVÁ, M.: *Slovník teórie didaktických situácií, 2. časť.* In: Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, No 5, Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2003, s. 113-121.

[2] BROUSSEAU, G.: *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers, AH Dordrecht, The Netherlands, 1997.

[3] BRISUDOVÁ, Z. – SLAVÍČKOVÁ, M.: *Problems with using calculators on mathematical lessons.* Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Isue 6, Comenius University, Bratislava 2006, p. 19-31.

Adresa autora:
PaedDr. Ingrida Kraslanová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: ingrida.kraslanova@gmail.com

Výsledky maturantov z matematiky v rámci externej časti maturitnej skúšky z matematiky vyššia úroveň A v roku 2006

Janka Kurajová Stopková

Abstract. *The present article provides information about the Mathematics test, Level A, in Slovak final exam at secondary schools. We present the overall results in Mathematics and we mention the index of difficulty and items classification by the Target Demands on Knowledge and Abilities in Mathematics.*

Úvod

V dňoch 4. – 7. apríla 2006 sa konala externá časť maturitnej skúšky (ďalej EČ MS) v predmetoch **matematika**, anglický jazyk, francúzsky jazyk, nemecký jazyk, ruský jazyk, španielsky jazyk a taliansky jazyk. Cieľom externej časti maturitnej skúšky je priniesť porovnateľné výsledky pre žiakov z celého Slovenska.

Pre EČ MS v predmete matematika boli pripravené testy dvoch úrovní. Žiaci si mohli vybrať, či budú písať test vyššej úrovne A (maturitná skúška je odporúčaná maturantom všetkých typov stredných škôl so študijnými odbormi, ktorí sa pripravujú na maturitnú skúšku z matematiky na vyššej úrovni, alebo základnej úrovne B (maturitná skúška je odporúčaná maturantom všetkých typov stredných škôl so študijnými odbormi, ktorí sa pripravujú na maturitnú skúšku z matematiky na základnej úrovni).

Charakteristika meracieho nástroja

Test z matematiky vyššia úroveň A obsahoval 30 testových položiek: 10 položiek s výberom odpovede, 20 položiek s tvorbou krátkej odpovede.

Dizajn testu bol taký, že ako prvé nasledovali testové položky s tvorbou krátkej odpovede a následne testové položky s výberom odpovede zo 4 - 5 alternatív odpovede.

Za správnu odpoveď získal žiak 1 bod, za nesprávnu (alebo ak neodpovedal) 0 bodov. Vytvorené boli dva varianty testu (č. 2014, č. 2030), ktoré sa líšili poradím položiek, resp. pri položkách s výberom odpovede poradím jednotlivých alternatív odpovede.

Na vypracovanie testu externej časti mali žiaci 120 minút. V tabuľke 1 sme uviedli obsahovú štruktúru testu.

Odpovede testov externej časti maturitnej skúšky zapisovali žiaci do odpoveďových hárkov, ktoré boli následne skenované (testové položky s výberom odpovede aj s tvorbou krátkej odpovede). Test z matematiky vyššia úroveň A mal celkovo výbornú reliabilitu (KR-20 = 0,847) ako aj oba jeho varianty.

Tabuľka 1: Obsahová štruktúra testov z matematiky EČ MS

Tematický celok	Počet položiek v teste	
	Úroveň A	**Úroveň B**
Základy matematiky	7	8
Funkcie	7	7
Planimetria	7	7
Stereometria	5	4
Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika	4	4

Metódy spracovania dát a štatistické metódy

Riešenia úloh testu EČ žiaci zapisovali do samoprepisovacích odpoveďových hárkov. Originál bol zaslaný na centrálne spracovanie, kópia zostala v škole. Odpoveďové hárky boli zoskenované a takto získané dáta boli ďalej elektronicky spracované. Po spracovaní odpoveďových hárkov sme v rámci kontroly kvality dát vykonali procedúry súvisiace s jednotlivými premennými: *kontrola úplnosti naskenovania dát, kontrola kódu školy, kontrola označenia variantov testu (kódov testov), kontrola kódu žiaka*[17] *a jeho duplicitnosti v databáze, kontrola chýbajúceho označenia pohlavia žiaka, kontrola prepojenia kódu a pohlavia žiaka, kontrola chýbajúceho uvedenia známky žiaka*[18]*,kontrola bodovania,kontrola správnosti kľúčov odpovedí.* Cieľom uvedených kontrolných procedúr bolo vyčistiť dáta, zvýšiť ich validizáciu a prispieť k zvýšenej hodnovernosti a reliabilite spracovaných výsledkov. Výsledky prvej fázy spracovania dát sme sumarizovali vo forme kontrolných protokolov pre jednotlivé testy, ktoré umožňujú kedykoľvek verifikovať proces spracovania dát. Výsledky boli vyhodnotené v štatistickom systéme SPSS 13.00. Na spracovanie výsledkov maturitnej skúšky a položkovej analýzy testov boli použité metódy štatistickej deskripcie, inferencie a vecnej signifikancie rozdielov. V deskriptívnych častiach boli použité absolútne a relatívne početnosti, priemer, štandardná odchýlka, štandardná chyba priemeru, intervaly spoľahlivosti, štandardná chyba merania. Pre výpočet reliability testov bol použitý vzorec KR-20, pretože všetky úlohy boli hodnotené binárne.

Testovaná populácia

V rámci externej časti maturitnej skúšky v roku 2006, test z matematiky vyššia úroveň A písalo na 230 školách v SR 3 648 žiakov[19]. Medzi testovanými žiakmi prevládali žiaci z bratislavského kraja (16,8 %). Išlo predovšetkým o žiakov gymnázií (92,5 %) a žiakov zo štátnych škôl (89,6 %). Tento test si zvolilo viac chlapcov (59,3 %) ako dievčat. Medzi testovanými žiakmi bolo 50,5 % žiakov, ktorí mali na polročnom vysvedčení z matematiky v 4. ročníku známku 1. V tabuľke 2 sme uviedli údaje o počte škôl a testovaných žiakov rozdelených podľa krajov, v tabuľke 3 podľa typu školy.

[17] Kód žiaka obsahuje rodné číslo žiaka. Databáza však neobsahovala meno a priezvisko žiaka.

[18] Klasifikačný stupeň žiaka v 1. polroku 4. ročníka z predmetu, v rámci ktorého písal test externej časti maturitnej skúšky 2006.

[19] Tento počet predstavuje 29,4 % žiakov z celkového počtu žiakov, ktorí písali test z matematiky bez ohľadu na úroveň v roku 2006. Test z matematiky základná úroveň B písalo 8 783 žiakov s celkovou úspešnosťou 56,9 %.

Tabuľka 2: Počet škôl a žiakov podľa kraja

		Školy		Žiaci	
		počet	%	počet	%
Kraj	BA	38	16.9%	613	16.8%
	TT	19	8.3%	454	12.4%
	TN	19	8.3%	363	10.0%
	NR	28	12.2%	376	10.3%
	ZA	30	13.0%	504	13.8%
	BB	32	13.9%	493	13.5%
	PO	32	13.9%	379	10.4%
	KE	32	13.9%	466	12.8%
	Spolu	230	100.0%	3648	100.0%

Medzi rokmi 2004 – 2005 klesal počet testovaných žiakov z matematiky vyššia úroveň A: v roku 2004 počas generálnej skúšky Novej koncepcie maturitnej skúšky test písalo 6 786 žiakov z 228 škôl zatiaľ čo v roku 2005 to bolo 2 637 žiakov z 179 škôl.

Naopak medzi rokmi 2005 – 2006 počet maturantov z matematiky vyššia úroveň A mal rastúcu tendenciu.

Tabuľka 3: Počet škôl a žiakov podľa typu školy

		Školy		Žiaci	
		počet	%	počet	%
Typ školy	GYM	190	82.6%	3376	92.5%
	SOŠ	29	12.6%	223	6.1%
	ZSŠ	8	3.5%	42	1.2%
	SOU	3	1.3%	7	0.2%
	Spolu	230	100.0%	3648	100.0%

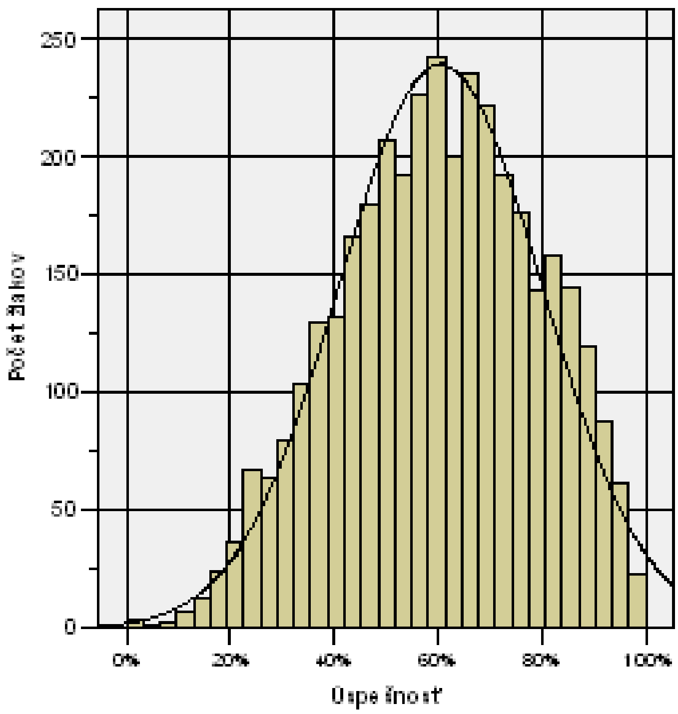
Celkové výsledky žiakov z matematiky vyššia úroveň A

Priemerná úspešnosť v teste celkovo bola 60,4 %.[20] Hranicu 33 % priemernej úspešnosti nedosiahlo 298 žiakov. Žiaci, ktorí písali variant testu č. 2 014 dosiahli priemernú úspešnosť 60,4 % a žiaci, ktorí písali variant č. 2 030 dosiahli priemernú úspešnosť 60,5 %. Oba varianty testu z matematiky vyššia úroveň A boli z hľadiska obťažnosti testových položiek porovnateľné.

Graf 1: Histogram rozdelenia úspešnosti žiakov

Žiaci dosiahli pri riešení testových položiek s tvorbou krátkej odpovede priemernú úspešnosť 60,2 % a pri riešení testových položiek k výberom odpovede priemernú úspešnosť 60,8 %. Veľmi pozitívnym javom je to, že test z matematiky vyššia úroveň A bol z hľadiska obťažnosti jednotlivých častí podľa typu položiek homogénny.

[20] Na porovnanie uvádzame, že žiaci v teste z matematiky vyššia úroveň A dosiahli počas generálnej skúšky Novej koncepcie maturitnej skúšky (GS NKMS) v roku 2004 priemernú úspešnosť 42,4 % a počas maturitnej skúšky v roku 2005 priemernú úspešnosť 83,6 %.



Tabuľka 4: Psychometrické charakteristiky testu z matematiky vyššia úroveň A

	Test M06A
Počet testovaných žiakov	3648
Maximum	100.0
Minimum	0.0
Priemer	60.4
Štandardná odchylka	19.6
Intervalový odhad úspešnosti populácie - dolná hranica	22.2
Intervalový odhad úspešnosti populácie - horná hranica	98.9
Štandardná chyba priemernej úspešnosti	0.3
Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť - dolná hranica	59.8
Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť - horná hranica	61.1
Štandardná chyba merania pre úspešnosť	7.7
Intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka	15.0
Cronbachovo alfa	0.847

Žiaci gymnázií dosiahli pri riešení testových položiek s tvorbou krátkej odpovede priemernú úspešnosť 61,9 % a pri riešení testových položiek k výberom odpovede priemernú úspešnosť 62,3 %. Žiaci ostatných stredných škôl (SOŠ, SOU, ZSŠ) dosiahli pri riešení testových položiek s tvorbou krátkej odpovede priemernú úspešnosť 40,2 % a pri riešení testových položiek k výberom odpovede priemernú úspešnosť 42,0 %.

Žiaci gymnázií dosiahli v teste z matematiky vyššia úroveň A priemernú úspešnosť 62,0 % a ich výsledky boli lepšie ako žiakov ostatných stredných škôl (priemerná úspešnosť 40,8 %).

Žiaci prešovského kraja dosiahli v teste z matematiky vyššia úroveň A priemernú úspešnosť 67,1 % a ich výsledky boli lepšie ako národný priemer (60,4 %).

Medzi výsledkami chlapcov (priemerná úspešnosť 62,0 %) a dievčat (priemerná úspešnosť 58,2 %) sme nezistili vecne významné rozdiely.

Vybrané výsledky položkovej analýzy

Obťažnosť testových položiek sme hodnotili na základe porovnateľnosti variantov testov, zo zástupného variantu č. 2014. Medzi veľmi ľahké položky v teste z matematiky vyššia úroveň A patrila položka uvedená v príklade č. 1, ktorá dosiahla priemernú úspešnosť 80,1 %. Položka patrila do tematického okruhu *stereometria* – téma 4.5 *telesá*.

Príklad č. 1:

Koľko farby potrebujeme na natretie reklamného pútača v tvare valca s polomerom podstavy 0,45 m a výškou 2,5 m (podstavy <u>nenatierame</u>), ak spotreba farby na 1 m^2 je 0,2 kg? Výsledok uveďte v kilogramoch s presnosťou na dve desatinné miesta.

Medzi stredne obťažné položky v teste z matematiky vyššia úroveň A patrila položka uvedená v príklade č. 2 (priemerná úspešnosť 46,8 %, položka patrila do tematického okruhu *základy matematiky* – téma 1.4 *rovnice, nerovnice a ich sústavy*) a v príklade č. 3 (priemerná úspešnosť 50,0 %, položka patrila do tematického okruhu *funkcie* – téma 2.3 *mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia*).

Príklad č. 2:

Nájdite také reálne číslo k, pre ktoré sústava $\begin{array}{rrrl} x & +\ y & +\ z & = 1 \\ x & -\ y & +\ kz & = 2 \\ 2x & -2y & -2z & = 1 \end{array}$ troch rovníc s neznámymi x, y, z nemá riešenie.

Príklad č. 3:

Ktoré z nasledujúcich tvrdení o extrémoch funkcie $f : y = \frac{2x-6}{x-1}$ definovanej na intervale $\langle 2\,;\ 3\rangle$ je pravdivé? *Pomôcka: Načrtnite si graf funkcie f.*

A. Funkcia f na $\langle 2\,;\ 3\rangle$ nadobúda minimum pre $x = 2$ a maximum pre $x = 3$.
B. Funkcia f na $\langle 2\,;\ 3\rangle$ nadobúda maximum pre $x = 2$ a minimum pre $x = 3$.
C. Funkcia f na $\langle 2\,;\ 3\rangle$ nadobúda maximum, ale nenadobúda minimum.
D. Funkcia f na $\langle 2\,;\ 3\rangle$ nadobúda minimum, ale nenadobúda maximum.
E. Funkcia f na $\langle 2\,;\ 3\rangle$ nenadobúda ani maximum ani minimum.

Medzi stredne obťažné položky v teste z matematiky vyššia úroveň A patrila položka uvedená v príklade č. 4, ktorá dosiahla priemernú úspešnosť 46,8 % (položka patrila do tematického okruhu *planimetria* – téma 3.2 *analytická geometria v rovine*).

Príklad č. 4:

Na priamkach určených rovnicami $3x - 5y + 15 = 0$ a $3x - 5y + 6 = 0$ leží dvojica rovnobežných strán štvorca. Určte s presnosťou na dve desatinné miesta obsah tohto štvorca.

Záver

Po zhodnotení všetkých skúmaných vlastností testových položiek, sme žiadnu nenavrhli na zmenu bodovania. Test z matematiky vyššia úroveň A bol pre maturantov v roku 2006 stredne obťažný. Celkovo môžeme zhodnotiť, že kvalita testu z matematiky vyššia úroveň A sa oproti 2 predchádzajúcim meraniam maturantov v rámci externej časti maturitnej skúšky výrazne zvýšila. Na základe položkovej analýzy môžeme povedať, že v teste bolo(i) 10 testových položiek s obťažnosťou viac ako

50 %, 3 testové položky boli pre žiakov veľmi ľahké, 18 testových položiek, v ktorých sme zistili rozdiely v obťažnosti pre žiakov rozdelených podľa typu školy, 4 testové položky, v ktorých sme zistili rozdiely v obťažnosti pre chlapcov oproti dievčatám, 11 testových položiek s neriešenosťou viac ako 10 %. Test neobsahoval položky s vysokou neriešenosťou. Nízka neriešenosť položiek vypovedá o tom, že žiaci mali dostatok na vypracovanie jednotlivých častí testu.

Literatúra

[1] *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky úroveň A.* Bratislava : ŠPÚ, 2004.
URL:http://www.statpedu.sk/buxus/docs/Maturita/Cielove_poziadavky/CP_MATEMATIKA_A.pdf (27.6.2006)

[2] KURAJOVÁ STOPKOVÁ, J.: *Externá časť maturitnej skúšky 2006. Záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň A.* Bratislava : ŠPÚ, 2006

[3] RINGLEROVÁ, V. – ZELMANOVÁ, O.: *Analýza úspešnosti, položiek a variantov testu z matematiky MAA 2005. Externá časť maturitnej skúšky.* Bratislava : ŠPÚ, 2005

[4] ZELMANOVÁ, O. – SKLENÁROVÁ, I.: *Analýza úspešnosti, položiek a variantov testu z matematiky MAA 2004 GS NKMS.* Bratislava : ŠPÚ, 2004

Adresa autora:
PaedDr. Janka Kurajová Stopková
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
830 00 Bratislava
e-mail: janka.stopkova@statpedu.sk
www.statpedu.sk

Zastosowanie materiałów elektronicznych do wspierania kursu rachunku prawdopodobieństwa (The application of electronic materials to back up probability theory course)

Jarosław Leżański

Abstract. *In Teacher Training College in Bielsko-Biała we teach among others future mathematic teachers. There is an experiment going on in our College. In this experiment the probability theory course for future mathematic teachers is being backed up by electronic materials provided via the Internet. E-learning platform extends the communication opportunities and offers a wide access to educational materials available there. This paper presents the way of using e-learning platform to back up probability theory course. The content available on the platform show the presented material in a new way, which limits its passive reception and make the user an active participant of the course. The materials present a different approach to the proofs in a mathematical text. Instead of a static (ready) proof there is an interactive proof. The each part of material contains an interactive module Check Yourself which allows self-control of user.*

Referat

W Kolegium Nauczycielskim w Bielsku-Białej kształcimy między innymi przyszłych nauczycieli matematyki. W naszym Kolegium prowadzony jest eksperyment polegający na wspieraniu kursu rachunku prawdopodobieństwa przy pomocy materiałów elektronicznych dostarczanych za pośrednictwem Internetu.

Eksperyment został przygotowany w oparciu o wykorzystanie darmowego oprogramowania głównie Open Source. W naszych działaniach wykorzystujemy platformę e-learning'ową Moodle. Narzędzie to umożliwia nam zarówno dostarczanie opracowanych materiałów studentom biorącym udział w eksperymencie jak również monitorowanie sposobu ich wykorzystania, dokumentowanie pracy oraz dostęp do narzędzi komunikacyjnych umożliwiających porozumiewanie się zarówno w trybie synchronicznym jak i asynchronicznym.

Materiały edukacyjne w formie elektronicznej dostarczane za pośrednictwem Internetu to niewątpliwie najbardziej atrakcyjna i mająca największe możliwości forma związana z wykorzystaniem technologii w edukacji oraz z nauczaniem na odległość. Jednakże od samego początku liczni autorzy wskazywali na słabości i zagrożenia jakie niesie ten typ edukacji. Przypomnę tu najczęściej wskazywane.([1], [3])

Słabości:

- Opór wobec pracy z komputerem;
- Konieczność przygotowania materiałów w formie multimedialnej (kosztowne bo czasochłonne i pracochłonne).

Z kolei najpoważniejsze zagrożenia to:

- Reakcja emocjonalna w sytuacji zmiany;
- Przywiązanie do tradycyjnej formy zajęć;

- Utrudnienia w budowaniu relacji społecznych.

Mówiąc o słabościach i zagrożeniach nie wolno pominąć silnych stron i korzyści, które wynikają ze stosowania takiej formy.

Silne strony to:

- Dostęp do zasobów bez względu na miejsce i czas;
- Pełna funkcjonalność.

Możliwości:

- Odciążenie od sprawdzania testów;
- Indywidualizacja nauczania;
- Zapobieganie facylitacji społecznej.

Facylitacja społeczna ([2], [4]) to zjawisko badane przez psychologów społecznych polegające na tym, że rzeczy trudnych i nowych łatwiej uczyć się w samotności, a zagadnienia opanowane lepiej doskonalić w grupie.

Obecność obserwatorów wpływa na nasze emocje. Jeżeli przed audytorium wykonujemy zadanie, które dla nas jest proste szansa na sukces rośnie. Zadania skomplikowane, lub takie, które są dla nas nowością wykonywać będziemy gorzej niż w samotności.

Zjawiska tego rodzaju należy brać pod uwagę planując wspieranie nauczania przy pomocy platformy e-learning'owej. Psychologia społeczna wyjaśnia to zjawisko napięciem wynikającym z obecności innych osób, które mogą oceniać nasze działania. Łącząc ze sobą materiały elektroniczne i tradycyjne formy zajęć możemy wykorzystać to zjawisko jednocześnie eliminując jego negatywne strony.

Należy tak planować przebieg nauczania aby pierwsze zetknięcie z nowym materiałem następowało za pomocą materiałów udostępnionych na platformie e-learning'owej a więc w samotności natomiast doskonalenie umiejętności powinno odbywać się podczas zajęć prowadzonych w grupie.

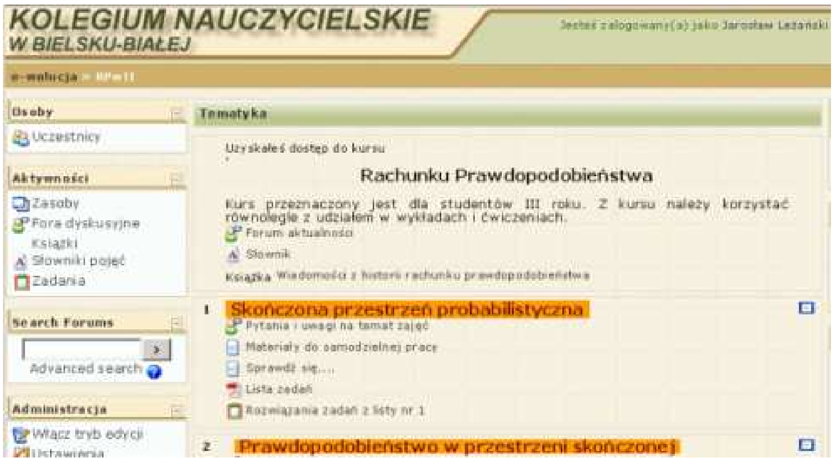
Łącząc ze sobą tradycyjne narzędzia ze wspierającymi je materiałami i możliwościami komunikacyjnymi platformy e-learning'owej można osiągnąć wielorakie korzyści.

W prowadzonym eksperymencie staramy się uniknąć słabości i zagrożeń jednocześnie wykorzystując możliwości i silne strony. Z tego powodu nie stosujemy w czystej formie nauczania zdalnego ale blended learning czyli łączymy formy charakterystyczne dla tradycyjnego nauczania jak wykłady i ćwiczenia z materiałami dostarczanymi za pośrednictwem Internetu. Nie chodzi tu o mieszanie i komponowanie różnych sposobów nauczania, ale koncentrujemy się na efektach dydaktycznych.

Dostarczane studentom materiały mają strukturę modułową. Każdy moduł zawiera:

- Materiały do samodzielnej pracy;
- Interaktywne narzędzie umożliwiające samokontrolę - "Sprawdź się";
- Standardową listę zadań;
- Forum dyskusyjne umożliwiające wymianę poglądów dotyczących prezentowanego materiału.

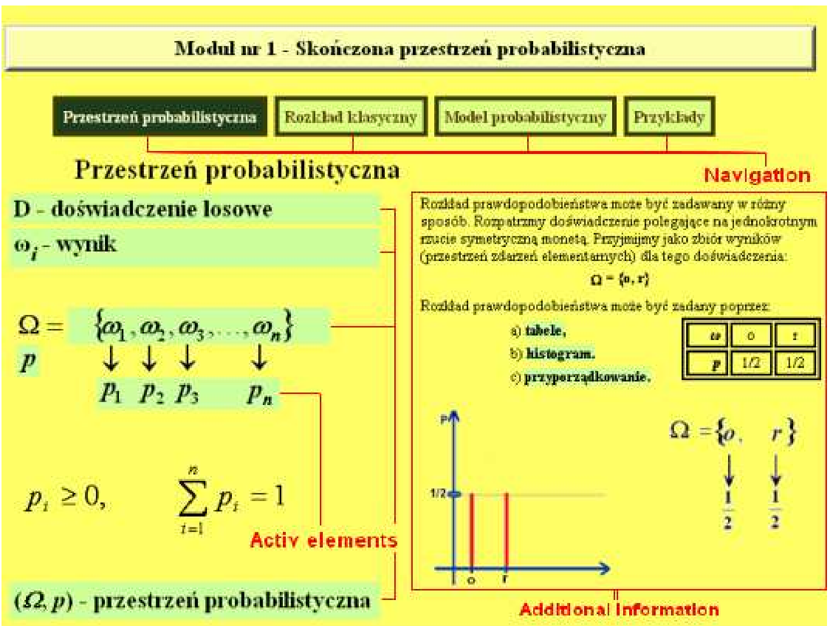
Oprócz tego kurs wzbogacony został o słownik pojęć oraz elektroniczną książkę o historii rachunku prawdopodobieństwa.



(Rysunek 1 – Struktura modułu)

Listy zadań są udostępniane w postaci plików PDF. Fora dyskusyjne, słownik oraz elektroniczna książka o historii rachunku prawdopodobieństwa stanowią wykorzystanie odpowiednich składników dostarczanych przez platformę Moodle. Materiały do samodzielnej pracy oraz narzędzie umożliwiające samokontrolę zostały skonstruowane przy użyciu DHTMLa.

Staramy się aby materiały dostarczane studentom miały kilka istotnych cech:



(Rysunek 2 – Materiały do samodzielnej pracy)

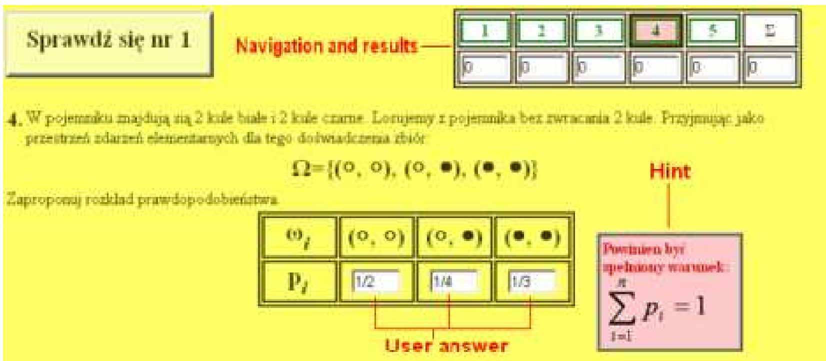
- Materiały umieszczone na platformie nie stanowią dłuższych fragmentów tradycyjnych książek przetransponowanych na format elektroniczny. Na wyświetlonej przez użytkownika stronie nie widać od razu całego dostępnego tekstu. Objaśnienia i dodatkowe uwagi stają się widoczne po umieszczeniu kursora myszy na odpowiednich symbolach czy też pojęciach wyróżnionych przy pomocy tła. Pozwala to ogarnąć jednym spojrzeniem najważniejsze treści występujące w danym fragmencie. Taka struktura stwarza nowe możliwości mogące z jednej strony wspierać proces lektury tekstu matematycznego, a z drugiej ułatwia zrozumienie treści w nim zawartych;

- Wprowadzane pojęcia są ilustrowane możliwie dużą ilością różnorodnych całościowych przykładów Nie tylko statycznych jak w tradycyjnych podręcznikach ale także dynamicznych;

- Materiały zawierają interaktywne wskazówki, wspierające ich użytkownika w rozumieniu danego zagadnienia i rozwiązywaniu zadań;

- W materiałach w inny sposób prezentowane są zawarte w tekście matematycznym dowody. W miejsce statycznego (gotowego) dowodu umieszczane są dowody interaktywne. Tekst dowodu pokazuje się stopniowo i zawiera luki, które uczący się powinien uzupełnić aby zapoznać się z dalszymi fragmentami. Jeżeli nie potrafi tego zrobić może skorzystać z odpowiedniej pomocy. Kolejny krok dowodu zostanie wyświetlony dopiero po poprawnym uzupełnieniu luki. Uzupełnianie poszczególnych kroków nie jest zbyt trudne, powinno natomiast spowodować zatrzymanie użytkownika na prezentowanym kroku, wspomagając zrozumienie tego co w danym kroku dowodowym jest zawarte. Poprawne uzupełnienie tekstu uprawdopodabnia, że został on przez uczącego się zrozumiany. Wydaje się, że taki sposób lektury dowodu zmusza do aktywności, a tym samym zapobiega mechanicznemu przechodzeniu do kolejnych kroków, jednocześnie pozwalając na szybszą lokalizację źródeł ewentualnych trudności i wskazanie sposobów ich eliminacji;

- Materiały zawierają elementy dynamiczne takie jak animacje czy symulacje, które lepiej niż statyczne ilustracje pomagają zrozumieć omawiane treści.

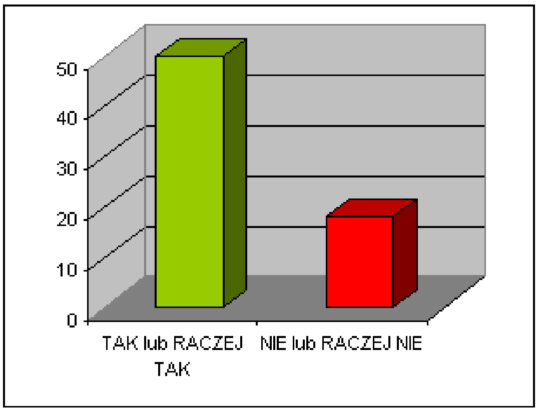


(Rysunek 3 – Sprawdź się)

Do każdej części materiałów dołączony jest interaktywny moduł "Sprawdź się" umożliwiający samokontrolę użytkownikowi. Są to zestawy zadań o charakterze testowym. Zadania w części "Sprawdź się" nie są zbyt trudne i sprawdzają znajomość podstawowych faktów, oraz umiejętność posługiwania się algorytmami omawianymi w danym module. Po rozwiązaniu każdego z zadań w tej części uczący się otrzymuje natychmiastową informację zwrotną zawierającą ewentualne wskazówki, które umożliwiają usunięcie ewentualnych braków, jeżeli takie zostały ujawnione. W pełni poprawne rozwiązanie wszystkich zadań w tej części podnosi samoocenę uczącego się co do kompetencji w radzeniu sobie z materiałem omawianym w danym module. Tym samym podnosząc efektywność pracy na zajęciach w grupie. Praca z zadaniami w części "Sprawdź się" jest indywidualną pracą każdego korzystającego z naszych materiałów i nikt inny nie ma wglądu w jej rezultaty. Element "Sprawdź się" może być przez uczącego się wykorzystywany wielokrotnie w dowolnym czasie. Z tym, że przy każdym wejściu poszczególne zadania w zestawie są losowo wybierane z pewnej grupy.

Na zakończenie chciałbym zaprezentować odpowiedzi jakich udzielili studenci biorący udział w eksperymencie na kila pytań, które im postawiliśmy po zakończeniu kursu.

Na pytanie: Czy zajęcia z innych przedmiotów matematycznych powinny być wspierane podobnymi kursami na platformie e'learningowej?

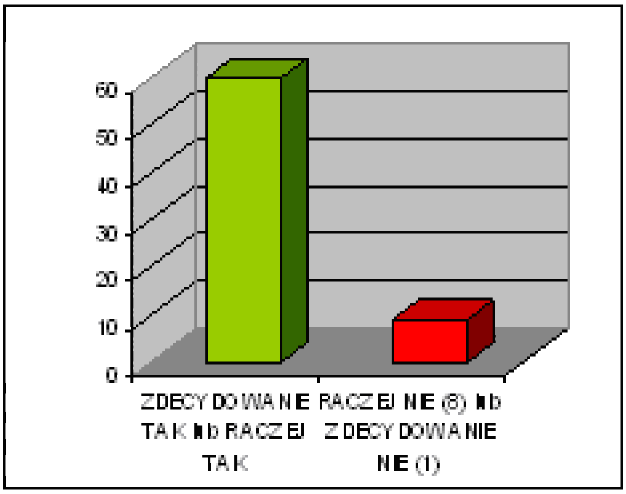


(Rysunek 4 – Czy zajęcia z innych przedmiotów matematycznych powinny być wspierane podobnymi kursami?)

Odpowiedziało 68 osób z tego 50 udzieliło odpowiedzi tak lub raczej tak.

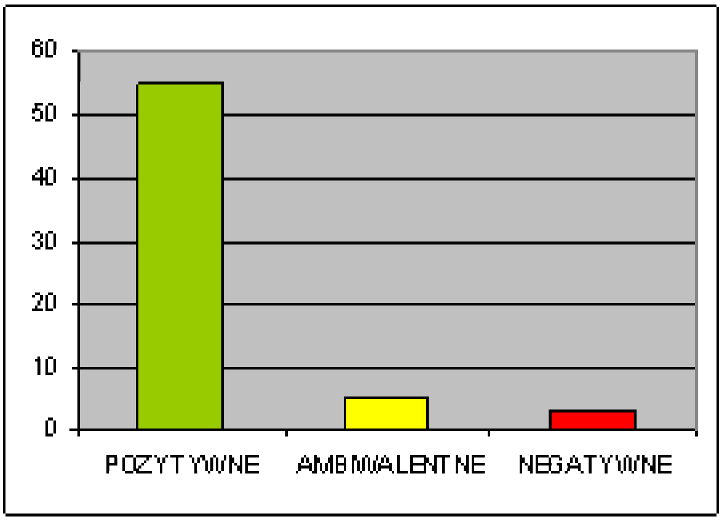
Na pytanie: Czy wiadomości i przykłady zawarte w materiałach pozwalają na opanowanie materiału?

Odpowiedziało 69 osób z tego 60 osób udzieliło odpowiedzi tak lub raczej tak.



(Rysunek 5 – Czy zajęcia z innych przedmiotów matematycznych powinny być wspierane podobnymi kursami?)

Na pytanie: Co myślisz o formie prezentowania dowodów w materiałach do kursu rachunku prawdopodobieństwa?



(Rysunek 6 – o myślisz o formie prezentowania dowodów?)

Odpowiedziało 63 osoby z tego 55 osób udzieliło odpowiedzi pozytywnych, 3 osoby udzieliły odpowiedzi negatywnych a 5 ambiwalentnych.

Te wyniki zachęcają nas do rozwijania naszego kursu i dalszego doskonalenia udostępnianych materiałów.

Literatura

[1] ŻOCHOWSKI, D.: *Informatyka w służbie edukacji - sytem edukacyjny wobec rozwoju technologii informatycznych.* SGH, Warszawa 2004.

[2] HYLA, M.: *Przewodnik po e-learningu.* Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2005.

[3] red. TANAŚ, M.: *Pedagogika @ środki informatyczne i media.* Wyższa Szkoła Pedagogiczna ZNP w Warszawi, Warszawa - Kraków 2005.

[4] ARONSON, E. – WILSON, T. D. – AKERT, R. M. *Psychologia Społeczna Serce i umysł* Zysk i S-ka Wydawnictwo, Poznań 1997.

Adresa autora:

Mgr. Jarosław Leżański
Kolegium Nauczycielskie
w Bielsku - Białej
ul. Krakowska 30
43-300 Bielsko-Biała
e-mail: jarekl@kn.bielsko.pl

Zisťovanie účinnosti vyučovania matematiky a norm referenced a criterion referenced úlohy

Anna Macurová, Dušan Macura, Stanislav Balčák

Abstract. *V príspevku je návrh na využitie súborov úloh rozlišujúcich (NR) a overujúcich (CR) a na vyjadrenie vedomostnej úrovne žiakov stredných škôl v matematike a na zistenie účinnosti vyučovania vo vybraných tematických celkoch.matematiky.*

Úvod

Výber úloh na overovanie účinnosti vyučovania matematiky a vedomostnej úrovne žiakov v matematike na stredných školách je mimoriadne zložitá pedagogická činnosť. Okrem pedagogických skúseností je nevyhnutné pri úlohách určených na hodnotenie účinnosti vyučovania matematiky a vedomostnej úrovne žiakov v matematike dodržiavať zásady, ktoré súvisia s rozsahom pozorovaného učiva. Súbory úloh, prostredníctvom ktorých navrhujeme zisťovať účinnosť vyučovania a vedomostnú úroveň žiakov, sú vyberané na základe pravidiel pre zostavovanie neštardandizovaných testov. Existujú učitelia matematiky, ktorí sa rozhodujú pri zaraďovaní úloh overujúcich vedomostnú úroveň žiakov v matematike na základe skúseností, počtu odučených hodín a intuitívne a menej je hodnotená pomocou úloh osvojených žiakmi účinnosť vyučovania matematiky.

Charakteristika úloh

Podľa interpretácie výkonov žiakov sú to

NR (norm – referenced) rozlišujúce zostavy

a

CR (criterion – referenced) overujúce zostavy úloh.

Rozlišujúce NR súbory úloh vyjadrujú výkon žiaka v porovnaní so spolužiakmi.

Overujúce CR súbory úloh vyjadrujú výkon žiaka v množstve osvojeného učiva.

Účel navrhnutých súborov úloh

Uvažujeme o súboroch úloh pre žiakov stredných škôl.

Do vyučovacieho procesu je vhodné ich ako celky zaradiť až po prebratí, resp. po zopakovaní príslušného tematického celku.

Rozsah učiva, ktorý pokrývajú jednotlivé súbory úloh, zodpovedá vzhľadom na vybrané tematické celky základným vedomostným požiadavkám, ktoré sú kladené na žiakov v rámci prípravy na maturitnú skúšku z matematiky.

Úlohy riešia žiaci na osobitných listoch alebo podľa charakteru úlohy zapisujú odpovede, rozhodnutia do učiteľom pripravených listov.

Forma úloh v súboroch

V pripravených NR a CR súboroch sa vyskytujú požiadavky presahujúce rámec základného učiva, pričom **sa ponecháva na učiteľoch, ktorými úlohami bude**

overovať účinnosť svojho vyučovania a ktoré využije ako kritérium rozlíšenia účinnosti vyučovania.

Úlohy sú vyberané tak, aby overili vedomosti po stránke zapamätania, porozumenia a riešenia úloh. Ak by boli súbory úloh zamerané na základné učivo, ktoré by mal ovládať každý žiak, rozlišujeme formu úloh, ktorá je dichotomická, t.j. vyskytujú sa úlohy s výberom odpovede, alebo štrukturalizované úlohy so širokou odpoveďou, prípadne produkčné a doplňovacie úlohy. V súboroch sa môžu vyskytovať úlohy **otvorené** aj **zatvorené**, t.j. úlohy, keď odpoveď tvorí žiak alebo pri zatvorených úlohách vyberá správnu odpoveď z niekoľkých ponúkaných možností. Pri **otvorených štrukturalizovaných** úlohách sú žiaci upozornení, aké matematické úkony, prípadne algoritmy musia pri riešení úloh dodržiavať. Úlohy **otvorené so stručnou odpoveďou produkčné** sú tie, kde sa vyžaduje stručná, veľmi krátka odpoveď, t. j. slovo, veta, definícia, číslo, symbol. Úlohy **otvorené so stručnou odpoveďou doplňovacie** majú tvar neúplnej vety, kde sa má odpoveď doplniť. Úlohy **zatvorené s výberom odpovede** (polytomické úlohy) ponúkajú žiakom viacej odpovedí, z ktorých má žiak vybrať správnu odpoveď. (Optimálny počet odpovedí je 5). Pri **zatvorených priraďovacích úlohách** žiaci priraďujú korešpondujúce pojmy. Pri **zatvorených usporiadacích úlohách** sa vyžaduje usporiadať skupinu prvkov podľa určitého hľadiska.

Nevyskytujú sa **zatvorené dichotomické úlohy,** ktoré sú vo forme tvrdení, pri ktorých má žiak posúdiť: áno – nie, správne – nesprávne.

Nevyskytujú sa **otvorené neštrukturalizované** úlohy so širokou odpoveďou, pri ktorých je ťažké posúdiť objektívne odpovede (mali by sa vyskytovať zriedkavo).

Pre učiteľov je najzdĺhavejšia fáza v súvislosti s prípravou súborov úloh vyjadrenie validity (obsahovej validity, kritériovej, pojmovej) a reliability. Reliabilita je ukazovateľom presnosti a spoľahlivosti merania dosiahnutých vyučovacích výsledkov zvoleným súborom úloh. Meranie je reliabilné vtedy, ak pri viacnásobnom meraní toho istého objektu získame zhodné výsledky. (Aby súbor úloh, test, bol validný, musí byť vysoko reliabilný. Ale vysoká reliabilita nezaručuje, že súbor úloh je validný.)

Úlohy v súboroch nie sú vždy rovnocenné. Niektorým úlohám sa prikladá väčší význam. Aby boli zahrnuté tieto odlišnosti vo význame, prideľujú sa úlohám váhy významu. Ak súbor obsahuje viac ako 10 úloh, prideľovanie váh významu zbytočne komplikuje vyhodnocovanie.

Skórovanie úloh súborov

Jednotlivé úlohy súborov sa neznámkujú, ale bodujú. Prideľovanie bodov jednotlivým úlohám sa nazýva skórovanie. Pri objektívnych úlohách sa používa binárne skórovanie, pri ktorom sú len dve možnosti

- 1 bod za správnu odpoveď
- 0 bodov za nesprávnu, neúplnú alebo vynechanú odpoveď.

V otvorených úlohách so širokou odpoveďou sa používa zložené skórovanie. **Úlohám sa prideľuje viacej bodov ako jeden a to za každý samostatne a správne uvedený pojem, definíciu, vzorec a za každý samostatný krok v riešení úlohy po jednom bode.**

Počas klasifikácia súborov úloh môžeme použiť

1. Arbitrárny postup – vopred sa stanoví kľúč prevodu skóre súboru úloh na známky. Určí sa najnižšie skóre, ktoré sa ešte považuje za úspešný výsledok, je to minimálne, prijateľné skóre, hraničné.

2. Štatistický postup – skóre dosiahnuté v súbore úloh sa neporovnáva s vopred stanoveným kritériom, ale s ostatnými výkonmi (strednou hodnotou skóre) dosiahnutou v tomto súbore úloh.

Časová dĺžka riešenia úloh obsiahnutých v súboroch úloh môže byť 40 až 80 minút. Ak predkladané súbory úloh majú charakter výstupnej kontroly k istému tematickému celku, čas, ktorý bude žiakom poskytnutý na riešenie úloh vyplýva z organizácie vyučovacieho procesu.

Ukážky súborov úloh

FUNKCIE F_1

1. Priraďte k predpisu funkcie v stĺpci (a) názov odpovedajúcej funkcie zo stĺpca (b):

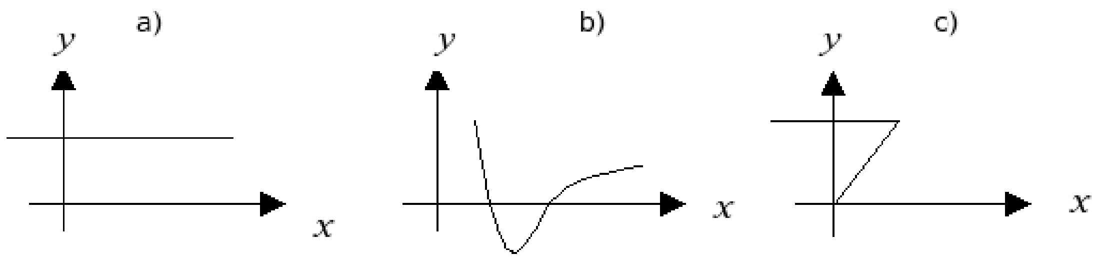
   (a) $y = -6x^2$
   $y = 3x$
   $y = \frac{6}{x}$
   $y = x + 4$

   (b) kvadratická funkcia
   racionálna funkcia
   lineárna funkcia
   mocninová funkcia

2. Napíšte všeobecný predpis funkcie

   (a) kvadratickej
   (b) logaritmickej
   (c) sínus

3. Ktorý graf nie je grafom žiadnej reálnej funkcie



4. Uveďte tri rôzne funkcie, ich predpis a graf.

5. Načrtnite grafy funkcií

   (a) $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$,
   (b) $y = (0,2)^x$.

6. Uveďte, pre ktoré $x$platí:

   (a) $x^3 > x^4$,
   (b) $x^{0,4} < x^{0,5}$.

7. Vypočítajte $f(0)$, ak $f : y = x + b$, $a, b \in R$.

8. Určte, pre ktoré $x \in R$ je $f(x) = 0$, ak $f : y = x^2 - 2x + 3$.

9. Definičný obor funkcie $f : y = \log_3 (\log_3 x^2)$ je

   (a) $(0, \infty)$,
   (b) $(1, \infty)$,
   (c) $(2, \infty)$,
   (d) $(3, \infty)$,
   (e) žiadna z možností nie je správna.

10. Rozhodnite, ktorá odpoveď z možností a) až c) je správna pre hodnotu funkcie $f : y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$, keď $x = -\frac{\pi}{4}$.

    (a) Pre $x = -\frac{\pi}{4}$ nie je funkcia definovaná.
    (b) Funkčná hodnota je kladná.
    (c) Funkčná hodnota je záporná.

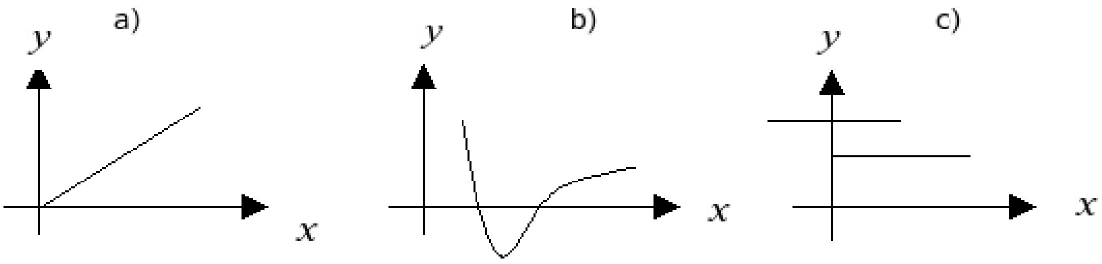
FUNKCIE
F_2

1. Priraďte k predpisu funkcie v stĺpci (a) názov odpovedajúcej funkcie zo stĺpca (b):

   (a) $y = -6x^2$
   $y = \log(3x)$
   $y = \cos(2x)$
   $y = x + 4$
   (b) logaritmická funkcia
   goniometrická funkcia
   lineárna funkcia
   kvadratická funkcia

2. Napíšte všeobecný predpis funkcie

   (a) lineárnej funkcie
   (b) racionálnej funkcie



(c) kosínus

3. Ktorý graf nie je grafom žiadnej reálnej funkcie

4. Uveďte príklad rastúcej funkcie, predpis a graf.

5. Načrtnite grafy funkcií

   (a)
   (b) $y = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^x$,
   (c) $y = 2^x$.

6. Uveďte, pre ktoré x platí

   (a) $x^{\frac{1}{2}} > x^2$,
   (b) $x^{0,1} < x^{0,2}$.

7. Vypočítajte $f(0)$, ak $f : y = ax + b$, $a, b \in R$.

8. Určte, pre ktoré $x \in R$ je $f(x) = 0$, ak $f : y = \frac{x-1}{x+3}$.

9. Definičný obor funkcie $f : y = \log_3(\log_3 x^2 - 1)$ je

   (a) $(0, \infty)$,
   (b) $(1, \infty)$,
   (c) $(2, \infty)$,
   (d) $(3, \infty)$,
   (e) žiadna z možností nie je správna

10. Rozhodnite, ktorá odpoveď z možností a) až c) je správna pre hodnotu funkcie $f : y = \frac{1}{\cos x}$, keď $x = -\frac{\pi}{4}$.

   (a) Pre $x = -\frac{\pi}{4}$ nie je funkcia definovaná.
   (b) Funkčná hodnota je kladná.
   (c) Funkčná hodnota je záporná.

Záver

Vo väčšine prípadov sa úlohy zadávajú v písomnej forme. Najlepšie je, ak každý žiak má k dispozícii kópiu úloh a odpovede zapisuje priamo na pridelený list. Ak to nie je možné, riešenia úloh a odpovede píše žiak na samostatný hárok. Niekedy môžu byť úlohy zapísané na tabuli alebo premietnuté spätným projektorom.

Ak žiak nemôže sedieť samostatne, je potrebné vypracovať viacej variantov rovnakého súboru úloh, aby sa zabránilo vzájomnému ovplyvňovaniu spracovania úloh bezprostredne susediacimi žiakmi. Varianty musia byť rovnocenné, a to nielen po stránke obsahovej, ale i po stránke obtiažnosti jednotlivých úloh.

Úlohy určené do súborov a rôznych zostáv je vhodné dať posúdiť odborníkom a učiteľom, ktorí dobre poznajú obsah učiva, možnosti i schopnosti žiakov, ako aj teóriu testovania a majú aj praktické skúsenosti s takýmto hodnotením žiakov.

Literatúra

[1] MACURA, D.: *Prijímacie skúšky, príklady a ich riešenia.* FHPV PU Prešov, 1999, s. 85.

[2] BALČÁK, S.: *Návrh didaktického testu z predmetu strojárska technológia.*, FVT TU, Košice, 2001, 40 s.

[3] MACURA, D.-MACUROVÁ, A.: *NR a CR súbory matematických úloh pre stredné školy.* Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, 2003, s. 44.

Adresa autorov:
PaedDr. Anna MACUROVÁ, PhD.
Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky
Fakulta výrobných technológií
Technickej univerzity v Košiciach so sídlom v Prešove
e-mail: macurova.anna@fvt.sk

Mgr. Dušan MACURA, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta humanitných a prírodných vied
Prešovskej univerzity v Prešove
e-mail:macura@unipo.sk

Ing. Stanislav BALČÁK
Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky
Fakulta výrobných technológií
Technickej univerzity v Košiciach so sídlom v Prešove
e-mail:balcak@condornet.sk

O intuicyjnym rozumieniu pojęcia odległości

JOANNA MAJOR

ABSTRACT. *This paper presents some remarks on understanding of distance by the pupils and the students.*

Prowadząc badania dotyczące rozumienia przez uczniów i studentów pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej zwróciłam uwagę, że badani wiążą pojęcie wartości bezwzględnej z pojęciem odległości [4]. Interesującym wydawało się zatem sprawdzenie jak uczniowie rozumieją odległość, która na początkowych etapach edukacji matematycznej jest kształtowana intuicyjnie (etap przeddefinicyjny).

Z oczywistych powodów w szkole podstawowej i gimnazjum nie podaje się definicji odległości, którą poznają dopiero uczniowie klas matematycznych szkoły średniej czy osoby studiujące na kierunku matematyka[21].

Z pojęciem odległości każdy z nas spotyka się od dzieciństwa. Posługujemy się tym pojęciem do opisywania zależności zachodzących pomiędzy obiektami otaczającej nas rzeczywistości. Warto tu wspomnieć, że każde: *Pojęcie w sensie logiki jest czym innym niż pojęcie w znaczeniu psychologicznym. W ostatnim przypadku pojęcie jest przeżyciem, aktem czyjejś świadomości, a więc ma charakter indywidualny i osobisty... Natomiast w przypadku pierwszym stoimy wobec sytuacji zobiektywizowanej; nośnikiem pojęcia jest – w uproszczeniu – zapis (tekst, nazwa, znak), a więc środki zmaterializowane w języku i dostępne obiektywnie* [2]. Jak zauważa J. Konior: *Bliższe i dalsze otoczenie, z którym jednostka wchodzi w kontakt od wczesnego dzieciństwa, stanowi punkt wyjścia jej rozwoju i źródło wszelkiego poznania. Na drodze najpierw zmysłowych doznań poznawczych, a później rozumowych przeżyć poznawczych powstają zaczątki tzw. pojęć potocznych, będących zasadniczym składnikiem wiedzy określanej również jako wiedza potoczna* [3].

Czynnikami które pobudzają i podtrzymują proces kształtowania się w umyśle pojęć potocznych są utrwalane i wzbogacane doświadczenia oraz stopniowo opanowywany język potoczny. Nagromadzone w okresie przedszkolnym doświadczania wykorzystywane są w toku kształcenia pojęć matematycznych. Zdobyte doświadczenia są głównym składnikiem „matematycznej prawiedzy” którą dysponuje dziecko rozpoczynają swą szkolną edukację.

Jak już wspomniano wcześniej pojęcie odległości nie jest przedmiotem rozważań w szkole podstawowej czy gimnazjum. Pojawia się ono na lekcjach matematyki niejako „przy okazji”. Uczniowie posługując się tym pojęciem bazują na intuicyjnym znaczeniu terminu.

W dalszej części artykułu opiszę fragment wyników badań prowadzonych wśród 10 uczniów zainteresowanych matematyką. Uczniowie ci uczęszczali do różnych gimnazjów w Krakowie i jego okolicach, byli też uczestnikami zajęć koła matematycznego,

---

[21] *Metryką w niepustym zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\varrho : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$, spełniające warunki:*

1. $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *dla dowolnych* $x, y \in X$*;*
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ *dla dowolnych* $x, y \in X$*;*
3. $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ *dla dowolnych* $x, y, z \in X$ *(warunek trójkąta).*

Liczbę $\varrho(x, y)$ nazywamy odległością punktów x i y. Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną (zob. [1]).

które prowadziłam[22]. W badanej grupie uczniów znalazły się 2 osoby uczęszczające do drugiej klasy gimnazjum, pozostałe osoby to uczniowie trzeciej klasy. Uczniowie w chwili prowadzenia badań mieli 14-15 lat.

Prowadząc badania prosiłam uczniów m. in. o zapisanie odpowiedzi na następujące polecenie: **Wyobraź sobie sytuację, w której musisz opowiedzieć koleżance lub koledze co to jest odległość. Zapisz jak objaśniłbyś znaczenie tego terminu**.

Poniżej zaprezentuję fragmenty prac uczniów gimnazjum, w których charakteryzują oni odległość.

- *Odległość to jest odcinek, droga zawarta między dwoma punktami, odległość zawsze wyrażona jest w liczbach naturalnych;*
- *Odległość to przestrzeń między różnymi obiektami, na osi określona lub nieokreślona ilość jednostkowych odcinków;*
- *Można powiedzieć, że odległość jest to odcinek na prostej ograniczony punktami położonymi w dwóch miejscach;*
- *Odległość jest to długość między punktami;*
- *Odległość to jest miara dalekości z tego do tamtego.*

Z wypowiedzi uczniów wynika, że kojarzą oni odległość z drogą jaką należy przebyć od punktu do punktu, bądź z przestrzenią między punktami lub też z odcinkiem, ewentualnie z jego długością. Jeden badany kojarzy odległość z liczbą.

Interesującym, a zarazem zaskakującym dla mnie faktem było spostrzeżenie, że pojęcie odległości jest podobnie charakteryzowane, „definiowane" przez studentów studiów matematycznych, a więc osoby o dość dużym doświadczeniu matematycznym. Prowadząc zajęcia w grupach studentów I i III roku matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie poprosiłam każdą z osób o pisemną odpowiedź na podane wyżej polecenie. Warto nadmienić tu, że zarówno studenci I jak i III roku poznali w czasie zajęć na studiach, a więc przed prowadzonymi badaniami, definicję przestrzeni metrycznej. Zagadnienia związane z pojęciem odległości były przedmiotem rozważań na zajęciach z analizy matematycznej, w których uczestniczyły badane osoby. Analizując odpowiedzi stwierdziłam, że studenci nauczycielskiego kierunku studiów matematycznych określają odległość jako:

- *najkrótszy odcinek między punktami* — 1 osoba;
- *długość odcinka między punktami* — 2 osoby;
- *liczbę wyrażającą długość odcinka* — 1 osoba;
- *najkrótszą drogę między punktami* — 4 osoby;
- *liczbę rzeczywistą* — 2 osoby;
- *liczę dodatnią* — 3 osoby;
- *liczbę nieujemną* — 1 osoba;
- *liczbę kilometrów między miastami* — 2 osoby;
- *funkcję spełniającą warunki* 1-3 *z definicji metryki* (por. przypis 21 ze strony 196) — 10 osób;

[22]Koło organizowane jest przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Nauk, przy współpracy z Centrum Młodzieży im. dr H. Jordana w Krakowie.

- *funkcję przypisującą dwóm elementom liczbę rzeczywistą* — 1 osoba;
- *drogę przebytą z jednego punkt do innego* — 4 osoby.

Studenci kojarzą więc pojęcie odległości z sytuacjami życiowymi, w których np. dla kierowcy samochodu odległość to liczba kilometrów do przebycia. Niektórzy badani kojarzą odległość z najkrótszą drogą np. między miastami, zaś najkrótsza droga kojarzy im się z odcinkiem. Niewielu studentom odległość kojarzy się z pojęciem matematycznym, gdzie odległość dwóch punktów jest pewną liczbą nieujemną. Można powiedzieć, że podawane przez studentów określenia wskazują, że większość z nich myśląc o pojęciu odległości nie odwołuje się do poznanej w czasie studiów definicji, ale podobnie jak młodsi uczniowie do „pierwotnego" intuicyjnego (często niezgodnego z matematycznym) znaczenia pojęcia odległość. Wart zaznaczenia jest też fakt, że nie zauważyłam znaczącej zmiany myślenia o pojęciu odległości u studentów starszych w porównaniu z myśleniem o tym pojęciu studentów I roku matematyki.

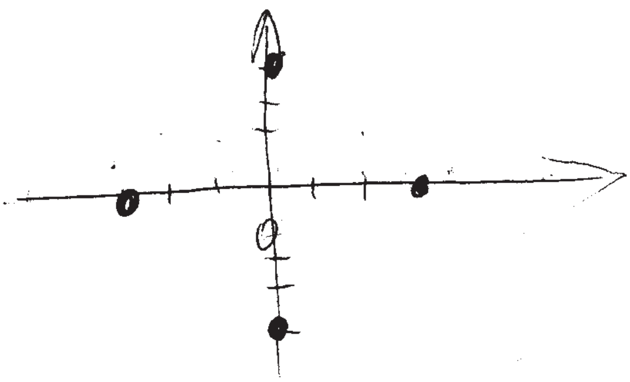
Wyniki prowadzonych przeze mnie badań ukazały również, że uczniowie gimnazjum potrafią w pewnych sytuacjach poprawnie posługiwać się pojęciem odległości.

W dalszej części omówię odpowiedzi uczniów rozwiązujących następujące zadanie 1.

a) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu 0 dokładnie o 3 jednostki.
b) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(0,0)$ dokładnie o 3 jednostki.
c) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu 0 o mniej niż 3 jednostki.
d) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(0,0)$ o mniej niż 3 jednostki.
e) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu 2 dokładnie o 1 jednostkę.
f) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(2,2)$ dokładnie o 1 jednostkę.
g) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu 1 o dokładnie lub mniej niż 3 jednostki.
h) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(1,1)$ o dokładnie lub mniej niż 3 jednostki.
i) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu 1 o więcej niż 2 jednostki.
j) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(1,1)$ o więcej niż 2 jednostki.
k) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu -1 dokładnie o 3 jednostki.
l) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(-1,-1)$ dokładnie o 3 jednostki.
m) Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od punktu 2 dokładnie o 0 jednostek.
n) Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty odległe od punktu $(2,2)$ dokładnie o 0 jednostek.

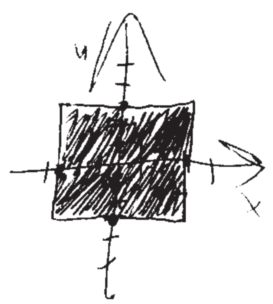
Na podstawie analizy odpowiedzi do zadania 1 stwierdziłam, że badani są w stanie poprawnie wskazać na osi liczbowej wszystkie punkty odległe od danego o pewną (o mniej, nie więcej, niemniej, więcej) liczbę jednostek.

Świadczy o tym fakt, że każdy badany poprawnie rozwiązał zadania 1a, 1c, 1e, 1g, 1i, 1k i 1m. Wskazywanie punktów odległych od danego punktu o ustaloną (o mniej, nie więcej, niemniej, więcej) liczbę jednostek w układzie współrzędnych większości uczniów sprawiało już trudności. Tylko jeden uczeń poprawnie rozwiązał zadania 1b, 1d, 1f, 1h, 1j, 1l i 1n. Pozostali uczniowie nie poradzili sobie z rozwiązaniem tych zadań. Na przykład trzej badani odpowiadając na pytanie 1b wskazywali punkty o następujących współrzędnych: $(-3,0)$; $(3,0)$; $(0,3)$ i $(0,-3)$. Jeden z tych uczniów po poprawnym rozwiązaniu zadania 1a przystępując do rozwiązywania zadania 1d powiedział: *to chodzi o punkty na osiach, o współrzędnych mniejszych od trzech, tj. odległych od osi o trzy jednostki, tak jak w poprzednim zadaniu 1c.* Badany zaznaczył przy tym cztery punkty.



Inni badani pracujący nad zadaniem, którzy podali nieprawidłowe rozwiązanie, zaznaczali w układzie współrzędnych punkty (x, y), których współrzędne spełniają warunek $x \in [-3,3]$ i $y \in [-3,3]$.

Oto rozwiązanie jednego z uczniów.



Podobne błędy, do podanych wyżej, popełniali uczniowie rozwiązując każde z pozostałych zadań (tj. zadania 1d, 1f, 1h, 1j, 1l oraz 1n). Można przypuszczać, że osoby, które przedstawiały błędne rozwiązania, dokonały niewłaściwego uogólnienia. Uczniowie po poprawnym rozwiązaniu zadania w przypadku jednowymiarowym, bez żadnej refleksji nad poprawnością wyniku, podali rozwiązanie dla przypadku dwuwymiarowego. Nie dostrzegli oni popełnionego przez siebie błędu, pomimo iż podczas badań, podczas rozmów prowadzonych tydzień po rozwiązywaniu przez nich zadań z kwestionariusza badań wykazali się oni znajomością definicji koła i okręgu. Można przypuszczać, iż przyczyną błędów jest niepełna i niedostatecznie ugruntowana wiedza dotycząca pojęć geometrycznych a w tym np. pojęć okręgu i koła. Mamy tu bowiem sytuacje, w której różne pytania i zadania wyzwalają odmienne skojarzenia i reakcje uczniów, które niekiedy pozostają ze sobą w sprzeczności.

Prowadzone przeze mnie badania ujawniły także duże trudności uczniów związane z niemożnością zaakceptowania przez nich, że odległość między dwoma punktami może wynosić 0 oraz z trudnością zaakceptowania, iż można mówić o odległości dwóch punktów pokrywających się. Badani uczniowie gimnazjum twierdzą bowiem, że: *nie można mówić o odległości dwóch punktów, które się pokrywają*; *nie ma czegoś takiego jak odległość między punktami pokrywającymi się*; *nie ma bo nie ma odcinka między* *tymi punktami*; *nie ma żadnej długości między tym punktami.* Zacytowane wypowiedzi badanych zdają się stanowić potwierdzenia sformułowanej wyżej hipotezy.

Ujawnione trudności uczniów związane z rozumieniem pojęcia odległości mogą stanowić punkt wyjścia do rozważań związanych z planowaniem procesu edukacji w szkole podstawowej, gimnazjum i szkole średniej. Bazowanie na pojęciach nieprawidłowo rozumianych w sposób intuicyjny może być przyczyną niezrozumienia innych pojęć. Może mieć to miejsce nawet w przypadku pojęć naukowych, tj. rozwijających się w planowej współpracy ucznia z nauczycielem. Z taką sytuacją mamy do czynienia np. w przypadku wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, której jedna (a zarazem najbardziej popularna) definicja odwołuje się do pojęcia odległości.

Literatura

[1] J. Chmieliński, *Analiza funkcjonalna. Notatki do wykładu*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków, 1999.

[2] J. Konior, Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie w nauczaniu szkolnym, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki tom IV*, Płock, 2002, 11-30.

[3] J. Konior, O roli wiedzy potocznej w szkolnym nauczaniu matematyki, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki tom IV*, Płock, 2002, 47-60.

[4] J. Major, *Uwagi na temat elementów obrazu pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów III roku matematyki*, w: Matematika v škole dnes a zajtra, Zborník 6. ročnika konferencie s medzianárodnou účast'ou, Ružomberok 2006, 171-175.

Adresa autora:
Joanna Major, dr
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Instytut Matematyki
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
E-mail: jmajor@ap.krakow.pl

Vedomosti študentov 3. ročníka matematiky v oblasti elementárnych školských úloh z počtu pravdepodobnosti

Maciej Major

Abstract. *The paper deals with elementary understanding of probability by III year students before their starting learn theory of probability.*

Výsledky, uvedené v tomto článku, sú pokračovaním výsledkov výskumu uskutočneného autorom na 37 študentoch 3. ročníka Akademie Pedagogicznej v Krakowe pred začiatkom ich kurzu pravdepodobnosti. Časť výsledkov tohto výskumu už bola publikovaná v [2].

Cieľom výskumu bolo zistiť ako študenti hodnotia úroveň svojich poznatkov z pravdepodobnosti zo strednej školy a zároveň ukázať, aká je skutočná úroveň ich vedomostí z tejto oblasti matematiky (koľko si pamätajú zo strednej školy). Na druhej strane, výsledky výskumu môžu slúžiť ako kritérium na analýzu výsledkov, ktoré máme v úmysle získať v ďalšom výskume po skonční kurzu pravdepodobnosti. Práca je akýmsi pokračovaním výskumu uskutočneného v Poľsku v rokoch 1986 - 1990 kolektívom pracujúcim v rámci Rezortového programu základných výskumov[23] na tému stav vedomostí a matematickej prípravy študentov učiteľského odboru (pozri [1]).

Študenti vypĺňali dotazník, ktorý obsahoval 8 otázok a úloh.

DOTAZNÍK VÝSKUMU

1. Ohodnoť nasledujúce tvrdenia v rozmedzí od 1 do 10.

   Poznámka: 1 znamená, že s tvrdením vôbec nesúhlasíš, 10 znamená, že s tvrdením úplne súhlasíš.

   a) Počet pravdepodobnosti dobre ovládam zo strednej školy. ......
   b) Počet pravdepodobnosti mi na strednej škole robil problémy. ......
   c) Pojem pravdepodobnosi poznám zo strednej školy. ......
   d) Pojem pravdepodobnosti mi na strednej škole robil problémy. ......
   e) Vlastnosti pravdepodobnosti dobre ovládam zo strednej školy. ......

2. S čím sa ti spája pojem pravdepodobnosti? Napíš svoju odpoveď.
3. Napíš definíciu pravdepodobnosti.
4. Predstav si nasledujúcu situáciu: musíš spolužikovi vysvetliť, čo to je pravdepodobnosť. Napíš, ako by si objasnil(a) význam tohto pojmu.
5. Opíš súvislosti pravdepodobnosti s inými, tebe známymi, pojmami.
6. Napíš, aké použitie pravdepodobnosti v praxi poznáš.
7. Uveď matematické vety týkajúce sa pravdepodobnosti, ktoré poznáš.
8. Uveď príklady 3 úloh (problémov), v ktorých vystupuje pojem pravdepodobnosti a naznač schematický plán ich riešenia.

[23]Resortowego Programu Badań Podstawowych RP. III. 30.

V článku [2] sme prediskutovali výsledky získané analýzou odpovedí na otázky 1, 2, 5 a 6. Uskutočnená analýza odpovedí študentov ukázala, že študenti 3. ročníka matematiky, napriek dosť vysokej mienke o svojich vedomostiach z počtu pravdepodobnosti, majú veľmi slabé asociácie týkajúce sa pojmu pravdepodobnosti, nevidia spojenie pravdepodobnosti s inými matematickými pojmami, a tiež nepoznajú jej použitie v praxi. V tomto článku uvedieme závery získané analýzou odpovedí na otázky 3 a 7.

Ako sme už uviedli, analýza odpovedí študentov na otázku 1 (pozri [2]) ukázala, že respondenti dosť vysoko hodnotili svoje vedomosti (zo strednej školy) z oblasti pravdepodobnosti a uvádzali, že chápu pojem pravdepodobnosti a jeho vlastnosti. Cieľom otázky 3 bolo zistiť, či študenti ovládajú (pamätajú si) školskú definíciu pravdepodobnosti, prípadne, či ju ovládajú skôr intuitívne. Mala teda umožniť kontrolu pravdivosti odpovedí na otázku 1. Otázka 7 sa týka matematických viet z oblasti pravdepodobnosti. Vo výskume sa jednalo o zistenie, či si študenti pamätajú základné vlastnosti pravdepodobnosti. Porovnávacia analýza odpovedí na jednotlivé otázky dotazníka umožnila pozorovanie eventuálnych rozdielov medzi tým, čo študenti skutočne vedia a ich predstavami o svojich vedomostiach.

Po analýze odpovedí študentov na otázku 3 môžeme povedať, že ani jeden z respondentov neuviedol bezchybnú definíciu pravdepodobnosti. Väčšina študentov (24 z 37) na túto otázku neodpovedala vôbec. Najčastejšie uviedli, že si nepamätajú, ostatní napísali iba znak "–" (pomlčka) alebo nechali miesto na odpoveď prázdne. Iba 13 študentov sa aspoň pokúsilo odpovedať na túto otázku. Možno konštatovať, že v niektorých prípadoch sa jednalo o pokusy o tzv. "klasickú definíciu pravdepodobnosti" (Laplaceovu definíciu). Respondenti napísali, že pravdepodobnosť je:

– *pomer počtu možností danej udalosti ku celkovému počtu možností* (2 študenti);
– *pomer výskytu tejto udalosti ku množine všetkých udalostí* (1 študent);
– *pomer* $\frac{\#A}{\#\Omega}$, *kde* $A \subset X$, *pričom* X *je ľubovoľná neprázdna množina udalostí* (1 študent);
– $\frac{P(A)}{\Omega}$, $A \subset \Omega$, Ω — *množina všetkých elementárnych kombinácii,* $P(A)$ — *množina všetkých elementárnych kombiácií množiny* A (1 študent).

V odpovediach niekoľkých študentov možno vidieť spojitosť s axiomatickou definíciou pravdepodobnosti:

– *číslo určujúce hodnotu výskytu danej náhodnej udalosti* (1 študent);
– *súhrn elementárnych udalostí, ktorým je priradená číselná hodnota z množiny* $(0, 1)$ (1 študent);
– *šanca výskytu nejakej udalosti spomedzi všetkých možných udalostí* (1 študent);
– *možnosť nastania udalosti pri losovaní (istá udalosť - pravdepodobnosť sa rovná 1, nemožná udalosť - pravdepodobnosť sa rovná 0)* (2 študenti).

Dvaja študenti sa pokúšali opísať pojem pravdepodobnosti tvrdením:

– *predvídanie určitých udalostí v daných podmienkach*;
– *možnosť výskytu danej udalosti.*

Medzi odpoveďami sa našlo i tvrdenie: *pravdepodobnosť je časť matematiky.*

Citované odpovede ukazujú, že študenti nevedia (nepamätajú si a sami nedokážu vytvoriť) definíciu pravdepodobnosti. Znalosť tohto pojmu je povrchná a v zásade intuitívna. Použitie intuície pri pojme pravdepodobnosti je veľmi všeobecné a často má ďaleko k skutočnému matematickému významu tohto pojmu. Veľmi málo respondentov sa pokúsilo uviesť formálnu definíciu pravdepodobnosti.

Analýzou odpovedí študentov na otázku 7 sa ukázalo, že až 20 respondentov nedokázalo uviesť žiadnu matematickú vetu týkajúce sa pravdepodobnosti. Ostatní študenti uvádzali jednu až tri vety. Najčastejšie uvádzanou bola veta o pravdepodobnosti zjednotenia dvoch udalostí. Buhužiaľ, v mnohých odpovediach chýbali predpoklady a samotné vety boli formulované nesprávne. Študenti písali:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (2 študenti);
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (1 študent);
- $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ (1 študent);
- $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ (1 študent);
- $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) - P(A \cap B)$ (1 študent);
- $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$ (1 študent);

V dvoch dotazníkoch bolo formulované tvrdenie o pravdepodobnosti opačnej (doplnkovej) udalosti:

- $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A) = 1 - P(B)$;
- $P(A) = P(\Omega) - 1$.

Ďalšie formulované vety:

- $P(\Omega) = 1$ (2 študenti);
- $P(A) < 1$ (2 študenti);
- $0 \leq P(A) \leq 1$ (1 študent);
- *Pravdepodobnosť výskytu istej udalosti je* 1 (1 študent);
- *Pravdepodobnosť výskytu istej udalosti je* 1 *a nemožnej udalosti je* 0 (1 študent).

V troch prípadoch študenti uviedli ako vetu vzorec na podmienenú pravdpodobnosť:

- $P(A|B) = P(A) \cup P(B)$;
- $P(A|B) = P(A) \cap P(B)$;
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, *za predpokladu, že* $A \cap B = \emptyset$.

Dvaja študenti uviedli nasledovné tvrdenie:

- $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$,

ktoré nie je pravdivé, keď chýba predpoklad, že pravdepodobnostný priestor je klasický.

Okrem toho študenti ako vety pravdepodobnosti uvádzali:

- *vzorec na výpočet kombinácií* (3 študenti);
- *vzorec na výpočet variácií bez opakovania* (2 študenti);
- *vzorec na výpočet variácií s opakovaním* (2 študenti);

– *vzorec na výpočet permutácií* (2 študenti).

Študenti ako príklad vety písali tiež nasledujúce vety, ktoré však necitovali, iba vymenovali ich názvy:

– *Laplaceova veta* (2 študenti);
– *Bernoulliho veta* (1 študent);
– *Bernoulliho zákon veľkých čísel* (1 študent).

Medzi odpoveďami sa našla aj takáto:

– $P(A) = \emptyset \cap P(B) = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = \emptyset$.

Podrobná analýza citovaných odpovedí nás viedla k formulovaniu nasledujúcich záverov:

1. Študenti neovládajú podstatné vety školskej pravdepodobnosti.
2. Vety kombinatoriky považujú za vety pravdepodobnosti.
3. Vyslovujúc vetu nemajú potrebu formulovať predpoklady, pri ktorých je veta pravdivá. Uspokoja sa s formulovaním samotnej tézy vety.
4. Dokonca si neuvedomujú, že udalosť je množinou a pravdepodobnosť udalosti je číslo. Svedčí o tom nevhodné používanie symbolov "$+$" a "$\cup$" ako aj "$\cdot$" a "$\cap$".

Prevedená analýza potvrdila, že študenti 3. ročníka matematiky napriek tomu, že dosť vysoko hodnotia svoje vedomosti z pravdepodobnosti, majú dosť úbohe poznatky z tejto oblasti. Chápanie pojmu pravdepodobnosti u nich jenoznačne vedie do obyčajného chápania tohto slova. Pravdepodobnosť je väčšinou študentov vnímaná cez prizmu úloh, ktoré riešili na strednej škole. Tie sa v prevažnej väčšine týkajú klasickej pravdepodobnosti. Mnoho študentov začínajúcich kurz pravdepodobnosti má riešenie úloh nerozlučne spojené s výpočtom mocnosti množiny Ω. Podľa našej mienky, na odpovede študentov na otázku 7 mal veľký vplyv dôraz, kladený na strednej škole na použitie kombinatorických vzorcov (na výpočet počtu permutácií, variácií a kombinácií).

Neúplné vnímanie pojmu pravdepodobnosti jednoznačne môže byť zdrojom chýb a problémov v ďalšej etape vzdelávania v oblasti pravdepodobnosti. Sme toho názoru, že mnoho respondentov má nejasný obraz pravdepodobnosti - jednotlivým pojmom nerozumejú a nie sú schopní pomôcť si elemntárnymi matematickými pojmami.

Literatúra

[1] D. Brydak (red.), *Resortowy Program Badań Podstawowych RP. III.30. V1: Diagnoza skuteczności kształcenia nauczycieli matematyki (synteza badań za lata 1986-1990 oraz przykładowe opracowania pod redakcją Dobiesława Brydaka)*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej, Kraków, 1990.

[2] M. Major, *Uwagi na temat wiedzy studentów III roku matematyki w zakresie szkolnych treści rachunku prawdopodobieństwa*, w: Matematika v škole dnes a zajtra, Zborník 6. ročnika konferencie s medzianárodnou účast'ou, Ružomberok 2006, 176-180.

[3] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała, 1997.

[4] *Plany i programy studiów dla kierunku matematyka*, strona internetowa http://www.ap.krakow.pl/mat

Adresa autora:
Maciej Major, dr
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Instytut Matematyki
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: mmajor@ap.krakow.pl

Elektronicky podporované vzdelávanie elementaristov

Marek Mokriš

Abstract. *In the following subscription we are describing the experience with implementing of the electronically supported education for the primary school teachers studying externally. Introductory mathematical discipline in their preparation is being described.*

Dynamický a neustále sa rozvíjajúci spôsob elektronického spracovávania, prenosu a archivácie informácií prenikol do všetkých oblastí ľudskej činností. Do vzdelávania čoraz častejšie vstupujú nové technológie a výrazným spôsobom začínajú ovplyvňovať komunikáciu a interakciu medzi učiteľom a žiakom. V ostatnom období sa do popredia v príprave učiteľov pre primárny stupeň vzdelávania dostáva elektronicky podporované vzdelávanie. Podľa P. Klenovčana (2004, s. 139) môžeme v súčasnej dobe pozorovať pomerne veľký rozmach vyučovacích metód, ktoré sú podporované počítačmi a rôznymi sieťovými systémami. Súhrne sú nazývané ako e-learningové metódy. Sú jednou z alternatív, ktorá by mala zabrániť nežiaducemu znižovaniu úrovne vyučovania.

Podľa P. Hanzela (2004, s. 107-108) e-learning (elektronické vzdelávanie) mnohí autori používajú len na označenie dvoch aktivít:

S – elektronické spracovanie informácií vhodných pre daný vzdelávací proces,

P – prenos informácií pomocou elektronických komunikačných sietí k užívateľovi.

E-learning má oveľa širší význam. Predstavuje kvalitatívne nový prístup k realizácii vzdelávania, ktorý je založený na aplikácii softvérových produktov. Okrem aktivít S a P musí e-learning zvýšiť efektivitu pri:

C – poskytovaní služieb študentom (zákazníkovi),

D – distribúcie produktov a služieb (v smere učiteľ – študent),

A – riadenia vzdelávacieho procesu.

V školskom roku 2005/2006 došlo na PF PU v Prešove k zmene matematickej prípravy učiteľov pre mladší školský vek. Zmena nastala vo filozofií, obsahu, ale aj v metóde štúdia. Študentom prvého ročníka externého štúdia boli sprístupnené online kurzy v prostredí MOODLE a poskytnutá možnosť navštevovať tzv. podporné kurzy, ktorých úlohou bolo eliminovať problémy spojené s e-vzdelávaním zo strany študentov (nedostupnosť Internetu, nedostatočné zručnosti s prácou na Internete a obsluhou PC, atď.). Do podporných kurzov sa zapojilo až 97 % študentov. V MOODLE sa zaregistrovalo 72 študentov zo 119, ale reálne ho využívali len 7.

V tomto príspevku uvedieme bližšiu charakteristiku kurzu Úvod do štúdia matematiky umiestneného v MOODLE, ktorý je prvou matematickou disciplínou v profesijnej príprave učiteľov elementaristov v podmienkach PF PU. Cieľom tohto predmetu je pozitívne ovplyvňovať postoje študentov k matematike, nadväzovať na znalosti z matematiky, ktoré získali na základnej a strednej škole, precizovať matematické vyjadrovanie a vytvárať jednotiaci pojmový systém. Ciele tohto kurzu sme museli prispôsobiť aktuálnej edukačnej realite, ktorá hovorí o klesajúcej úrovni matematických vedomostí. Tá sa prejavuje, podľa V. Jodasa (2004, s.11, podľa Brincková. J –Sobôtková, Ž; 2005), v posledných pätnástich rokoch pri prechode žiakov medzi jednotlivými stupňami škôl a podľa J. Brinckovej a Ž. Sobôtkovej (2005, s. 81) evidujeme aj pokles obľúbenosti matematiky, ktorý je evidentný už vo vyšších ročníkoch ZŠ. Výskum na PF UMB v Banskej Bystrici ukázal, že schopnosti študentov-elementaristov získať, spracovať, vyhodnotiť reálne informácie v texte, v tabuľke, v grafe a v mape nie sú na požadovanej úrovni (Ľ. Gerová – P. Klenovčan, 2006, s. 82). K analogickým záverom dospel aj výskum na PF PU (M. Mokriš, 2006). I. Scholtzová – V. Zeľová (2006, s. 233) uvádzajú, že matematický diktát by mohol byť medzistupňom medzi písomne zadávanou úlohou v škole a situáciami, s ktorými sa žiaci stretávajú v reálnom živote a je pri nich potrebné použiť matematický aparát. E. Šimčíková (2006, s. 263) zdôrazňuje, že okrem odborných poznatkov z matematiky potrebných pre edukáciu na prvom stupni ZŠ potrebuje absolvent aj poznatky z matematiky „pre život“. Na ďalší nežiadúci jav upozorňuje B. Tomková (2005, s. 87): Vyzerá to tak, akoby študentom viac ako objavovanie, hľadanie súvislostí a premýšľanie vyhovovalo memorovanie poznatkov.“. Podľa A. Prídavkovej (2004, s. 210) u budúcich učiteľov matematiky na 1. stupni ZŠ je tiež potrebné rozvíjať schopnosť uvažovať nad matematickou úlohou systematicky. Je to dôležité predovšetkým z toho pohľadu, že takéto schopnosti a zručnosti budú rozvíjať ako učitelia.

Z uvedených dôvodov má obsah predmetu Úvod do štúdia matematiky tieto tematické okruhy:

1. Svet čísel z pohľadu histórie (Zápis číslic a čísel v Egypte, v Grécku a u Slovanov; Rímske číslice a čísla. Pozičný a nepozičný číselný systém. Pôvod arabských číslic),

2. Komunikačný jazyk aritmetiky (Čítanie a zápis čísel. Číselné množiny a intervaly. Čítanie a interpretácia údajov z grafov a tabuliek),

3. Prirodzené číslo, celé číslo, deliteľnosť (Kritéria deliteľnosti. Prvočíslo, zložené číslo. Eratostenovo sito. Slovné úlohy.),

4. Počtové operácie v množine N, Z a ich vlastnosti (Písomné algoritmy – súčasné aj historické),

5. Výroky, rovnice, nerovnice a determinanty riešenia slovnej úlohy (Výroky s údajom o počte. Lineárna rovnica a nerovnica s jednou premennou, rovnica - rovnosť, nerovnica – nerovnosť. Slovné úlohy),

6. Racionálne číslo, počtové operácie v množine Q a ich vlastnosti (Racionálne číslo, zlomok, zložený zlomok, zmiešané číslo),

7. Desatinné číslo, desatinný zlomok, percento, iracionálne a reálne číslo,

8. Komunikačný jazyk a elementárne vzťahy v geometrii (Primitívne a odvodené pojmy v geometrii. Grécka abeceda),

9. Planimetria – rovinné útvary a ich charakteristiky (Rovinné útvary a ich charakteristiky. Obvod a obsah. Jednotky dĺžky a plochy),

10. Stereometria – priestorové útvary a ich charakteristiky (Povrch a objem priestorového útvaru. Jednotky objemu),

11. Matematika pre život - jednotky času, hmotnosti, základy štatistiky,

12. Matematické a nematematické paradoxy (Optické klamy. Nekorektné aplikácie matematických tvrdení. Humor v matematike.).

Úvod do štúdia matematiky sa vyučoval v rozsahu 1 h \ týždeň prednáška a 2h \ týždeň seminár v dennej forme štúdia a pre externých študentov bol v ponuke podporný kurz s dotáciou 12 kontaktných hodín. Predmet bol hodnotený zápočtom a jednou z požiadaviek na udelenie zápočtu bolo úspešné absolvovanie záverečného testu.

V ďalšej časti uvedieme analýzu úloh z testu zameraných na schopnosti študentov vyhodnotiť reálne informácie v texte a prostredníctvom matematického aparátu zaujať k ním stanovisko.

ÚLOHA:[24]

V novinách uverejnili správu: „*Plynárenská spoločnosť zvýšila cenu plynu k 1.1.2005 o 5%. Po zmenách na trhu s ropou ju k 1. februáru znížila o 5%.*“ Hovorca spoločnosti na základe toho tvrdí: „*Cena plynu vo februári bude rovnaká ako pred zdražením, ktoré bolo 1. januára.*“. Posúďte pravdivosť tvrdenia hovorcu plynárenskej spoločnosti a uveďte aspoň jeden matematický argument, ktorý vychádza z uverejnenej správy v novinách, ktorým by ste svoje stanovisko zdôvodnili.

Analýza:

Úloha bola zameraná na problematiku percentuálneho počtu. Zo 104 študentov danú úlohu vôbec neriešilo 29,81 % (31 študentov), 49,04 % (51 študentov) vypracovalo nekorektné riešenie a 21,15 % (22 študentov) úlohu vyriešilo správne s použitím vhodného matematického argumentu.

Najčastejšie nekorektné riešenia:

Ak pripočítame a potom odpočítame od toho istého základu o tú istú hodnotu, nezmení sa základ.
Má pravdu.

No veď keď bola pôvodná cena dajme tomu 100%. Zvýšili ju o 5%. čiže to je 105% a potom ju znova znížili o 5%. je to znova 100%. Je to pravdivé - bude rovnaká

Z analýzy úlohy a na základe záverov z iných výskumov (odvolávame sa na ne v úvodných častiach príspevku) sme dospeli k záveru, že schopnosti študentov korektne aplikovať matematické poznatky v reálnych životných situáciách sú na nedostatočnej úrovni. Neustále klesajúci záujem o učiteľské profesie spôsobuje, že na pedagogické fakulty sa hlásia záujemcovia so skôr negatívnym postojom k matematike. Z týchto dôvodov si myslíme, že prvá matematická disciplína v profesijnej príprave učiteľov pre mladší školský vek by mala byť venovaná vytváraniu pozitívneho vzťahu k matematike a systematizovaniu matematického kurikula nielen strednej, ale aj základnej školy a nezabudnuteľným faktorom by mal byť aplikačný charakter zadávaných úlohy z reálneho života.

[24] Charakteristika ďalších úloh bude uvedená v plnej verzii článku M. Mokriš (2006).

Literatúra

[1] KLENOVČAN, P.: *Príprava budúcich učiteľov 1. stupňa ZŠ s podporou Internetu.* In: Cesty (k) poznávání v matematice primární školy. Olomouc: PF UP, 2004. s. 139 – 141.

[2] HANZEL, P.: *Možnosti elektronickej podpory vzdelávania v príprave učiteľov pre 1. stupeň ZŠ.* In Cesty (k) poznávání v matematice primární školy. Olomouc: PF UP, 2004. s. 107 – 111.

[3] BRINCKOVÁ, J. – SOBÔTKOVÁ, Ž.: *Príprava učiteľov na tvorbu pozitívnych postojov žiakov 2: stupňa ZŠ k matematike.* In História, súčasnosť a perspektívy učiteľského vzdelávania. 2. diel. Banská Bystrica: PF UMB, 2005. s. 81 - 85.

[4] GEROVÁ, Ľ. – KLENOVČAN, P.: *Riešenie praktických situácii a rozvoj matematickej gramotnosti.* In: ACTA UP OLOMUCENSIS – Matematika 2. Olomouc: UP, 2006. s. 78 – 83.

[5] MOKRIŠ, M.: *The inovation of mathematical curriculum in preparation of pre-elementary and elementary teachers.* 13 *th* Polish-Czech-Slovak Mathematical School. Zborník abstraktov z konferencie. Kraków: Pedagogical University of Cracow, 2006. s. 22.

[6] PRÍDAVKOVÁ, A.: *Skúmanie riešiteľských stratégií úloh z matematiky.* In: Cesty (k) poznávání v matematice primární školy. Olomouc: UP, 2004. s. 206-210.

[7] SCHOLTZOVÁ, I. – ZEĽOVÁ, V.: *Matematický diktát – jedna z ciest rozvoja matematickej gramotnosti žiaka primárnej školy.* In: ACTA UP OLOMUCENSIS – Matematika 2. Olomouc: UP, 2006. s. 229-233.

[8] ŠIMČÍKOVÁ, E.: *Matematické kompetencie začínajúceho učiteľa-elementaristu.* In: ACTA UP OLOMUCENSIS – Matematika 2. Olomouc: UP, 2006. s. 262-266.

[9] TOMKOVÁ, B.: *Prečo vítam zmenu programov pri nových formách štúdia?* In: Tradice a perpektívy výchovy a vzdelávání. Olomouc: UP, 2005. s. 86 – 90.

Adresa autora:
Marek Mokriš, Mgr.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta PU v Prešove
Ul. 17. novembra č. 15, 081 16 Prešov
e-mail: mokrism@unipo.sk

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu *Moderné informačno-komunikačné technológie ako prostriedok ďalšieho vzdelávania učiteľov elementaristov v matematike* (MŠ SR KEGA 3/3027/05).

Rôzne spôsoby riešenia netypickej slovnej úlohy deväť až desaťročnými žiakmi

Barbara Nawolska, Joanna Żądło

Abstract. *Text exercises constitute a special kind of problem solving case. The ability to solve such problems can have a practical effect on pupils' general problem solving skills. This ability can be a useful pattern in many difficult situations. This article presents the results of research concerning the ability of pupils aged 9-10 to solve non-standard text exercises.*

Hlavným cieľom riešenia slovných úloh na prvom stupni základných škôl je podnietiť rozvoj tvorivého človeka. Ide najmä o utváranie takých mentálnych dispozícií žiaka, ktoré by prehlbovali nápaditosť, flexibilnosť a originálnosť jeho myslenia, ako aj osobitné, pre matematiku charakteristické zručnosti: analýzu, syntézu, generalizáciu, porovnávanie, klasifikáciu, správne usudzovanie, abstrakciu, utváranie definícií, algoritmizáciu, atď. Spôsob myslenia dieťaťa by mal byť pružný a otvorený. V tomto kontexte je dôležité, „aby riešenie slovnej úlohy bolo úplne samostatné, aby sa žiak popri samotnom myslení a práci učil ako rozpoznať a vyriešiť problém, autonómne skontrolovať postup a ako eliminovať chyby" (Sokołowski 1996, s. 168).

Významnou prednosťou slovných úloh je, že sú jednotlivými prípadmi celej problémovej situácie. Tým, že ich žiak rieši, učí sa, ako si poradiť nielen vo zvláštnom prípade, ale v každej problémovej situácii (bežného života), čím sa buduje určitá paradigma uvažovania.

V najvšeobecnejšom poňatí je *problémovou úlohou* taká *forma úlohy, ktorú podmet nedokáže vyriešiť s pomocou vlastných vedomostí, schopností a návykov* (Kozielecki 1992: s. 119). Aby to dokázal, musí podmet prekročiť hranice svojich aktuálnych dispozícií a experimentovaním nájsť či vygenerovať riešenie a napokon zvážiť jeho opodstatnenie.

Je nutné zdôrazniť:

- problémové úlohy majú vždy podmetový charakter. To, čo predstavuje riešiteľnú úlohu pre jedného človeka, nemusí byť otáznym pre iných, ktorí už automaticky poznajú riešenie. Pre ďalších môže rovnaká situácia radikálne prerastať ich možnosti vysporiadania sa ňou. V tomto kontexte nie je problémovou úlohou pre tretiaka úloha z prvej triedy (je totiž triviálna), ale ani úloha určená žiakom na druhom stupni (pretože sa vymyká tretiackym možnostiam).
- problémové úlohy vyžadujú vedieť využiť a skoordinovať veľa myšlienkových postupov ako napríklad produktívne i reproduktívne myslenie, pamäťové a motorické procesy. Prezentovať riešenie problémových úloh iba ako prejav tvorivého myslenia je neopodstatnené. Ide skôr o reorganizáciu aktuálnych vedomostí, schopností a skúseností. Aby sme si poradili v skutočne problémovej situácii, potrebujeme nielen mnoho vedieť, ale aj dokázať s príslušnými vecami manipulovať. Čím väčším počtom „aktív" podmet disponuje, tým je vačší predpoklad, že sa úspešne dokáže vysporiadať s náročnejšími problémami.

Z metodického hľadiska možno slovné úlohy rozdeliť na:

1. Otvorené, bez prísne vymedzeného charakteru, v ktorých je súbor východiskových informácií neúplny, a preto exituje viacero možných správnych riešení, podobne ako v umeleckej práci či tvorbe rôznych teórií vyučovania. Medzi takéto úlohy patria v matematike napr. hra na obchod alebo úlohy spojené s hľadaním možných otázok v kontexte určitej situácie.
2. Uzavreté, dostatočne vymedzené tak, aby existovalo iba jediné správne riešenie úlohy. Väčšina slovných úloh je práve uzavretými (por. Kozielecki 1992: s. 121,122).

Podľa J. P. Guilforda sa problémové úlohy delia na:

1. konvergentné, majúce jedno správne riešenie;
2. divergentné, pripúšťajúce niekoľko správnych riešení.

Väčšina slovných úloh v učebniciach má konvergentný charakter, čo môže vyvolávať chybnú žiacku predstavu, že vždy existuje iba jedno správne riešenie problémovej situácie i úlohy.

Nie všetky slovné úlohy sú problémovými úlohami, v pravom zmysle vyžadujúcimi tvorivú činnosť. Mnohé z nich (azda väčšina) predpokladajú uplatnenie určitej, deťom známej schémy, a tak sú aj pertraktované. Vzhľadom na to, že problémová úloha sa podstatne viaže na podmet, tá istá úloha nemusí od jednej skupiny žiakov vyžadovať kreatívnu činnosť, u inej si však nárokuje koncepčné uvažovanie.

Okrem predchádzajúcich delení možno úlohy rozčleniť na typické a netypické z hľadiska ich uplatnenia vo vyučovacom procese. Typická úloha má uzavretý a konvergentný charakter. Naopak netypická úloha je zvyčajne otvoreným problémom s viacerými možnými riešeniami. Alebo nemusí mať žiadne riešenie, ak napríklad sú v spore predpoklady zadania úlohy alebo jej cieľ s predpokladmi nesúvisí. Okrem toho medzi netypické úlohy patria aj také, ktorých riešenie nepredpokladá použitie žiakom už známej schémy, ale dieťa musí riešenie samé nájsť – „vytvoriť".

Pretože textové úlohy plnia vážnu úlohu v matematickom vzdelávaní – matematiku sa totiž učíme prostredníctvom riešení úloh –, naším zámerom bolo zistiť práve to, ako si s ich riešením poradia 9- a 10-roční žiaci (v súčasnom systéme vzdelávania v Poľsku to znamená na konci druhého a tretieho ročníka základnej školy po absolvovaní povinného nultého ročníka, resp. materskej škôlky). V rámci výskumu sme vybrali 3 netypické úlohy, ktoré sme dali riešiť 51 žiakom v druhom a 65 v treťom ročníku krakowských základných škôl. Vzhľadom na rámec príspevku sa v nasledujúcom texte budeme zaoberať analýzou iba jednej z úloh, ktorú považujeme za najvhodnejšiu.

Úloha:

Agátka má v pokladničke 6 mincí, spolu za 42 grošov. O aké mince môže ísť?

Ide o netypickú úlohu, pretože jej riešenie nie je jednoznačné. Existujú štyri možnosti ako môže mať 6 mincí spolu hodnotu 42 grošov. Netypickosť tejto úlohy súvisí aj s absenciou známej schémy riešenia (použitie predpisu či rovnice). Práve to môže byť príčinou, pre ktorú si niektorí žiaci nemusia vedieť poradiť s riešením, od iných zasa vyžaduje racionálnu stratégiu usporiadania známych (6 mincí, hodnota 42 grošov) i skrytých faktov (nominálne hodnoty poľských mincí – 1 gr, 2 gr, 5 gr, 10 gr, 20 gr, 50 gr, 1 zł, 2 zł, 5 zł), ako aj schopnosť nájsť vhodný spôsob kódovania všetkých možností. Podmienku úlohy možno matematicky najjednoduchšie formulovať ako rozklad čísla 42 na súčet sčítancov s hodnotami z množiny $\{1, 2, 5, 10, 20\}$. Mince s hodnotami väčšími ako 20 gr nemožno použiť, pretože by bola prekročená požadovaná hodnota 42 gr.

Šesť mincí môže mať spolu hodnotu 42 gr nasledovne:

42	=	10	+	10	+	10	+	10	+	1	+	1
42	=	10	+	10	+	10	+	5	+	5	+	2
42	=	20	+	10	+	5	+	5	+	1	+	1
42	=	20	+	5	+	5	+	5	+	5	+	2

Z analýzy materiálu zozbieraného od 116 žiakov v druhom a treťom ročníku vyplýva, že:

- 3 žiaci správne vyriešili úlohu s uvedením všetkých možností reprezentácie hodnoty 42 gr prostredníctvom 6 mincí;
- 75 vyriešilo úlohu čiastočne, pričom našli 1, 2 alebo 3 možnosti;
- 36 žiakov sa pokúsilo nájsť riešenie úlohy, ale ani jeden nanašiel žiadnu zo správnych možností (iba uvažovali o obsahu úlohy);
- 2 žiaci sa vôbec nepokúsili vyriešiť úlohu; jeden z nich odovzdal nepopísaný list papiera, druhý bez uvedenia dôvodu napísal, že *„Úlohu nie je možné vyriešiť“*.

Podrobný súhrn výsledkov uskutočneného výskumu sa nachádza v nasledujúcej tabuľke:

<table>
<tr><th colspan="2">Spôsoby riešenia</th><th>Počet žiakov v 2. roč.</th><th>Počet žiakov v 3. roč.</th><th>Počet žiakov v oboch roč.</th><th>Spolu</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Správne</td><td>4 možnosti</td><td>–</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2,58</td></tr>
<tr><td>3 možnosti</td><td>2</td><td>11</td><td>13</td><td rowspan="3">75</td><td>11,20</td></tr>
<tr><td>2 možnosti</td><td>2</td><td>11</td><td>13</td><td>11,20</td></tr>
<tr><td>1 možnosť</td><td>27</td><td>22</td><td>49</td><td>42,20</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Chybné</td><td>Σ − počet mincí + nominály +</td><td>7</td><td>8</td><td>15</td><td rowspan="6">36</td><td>12,93</td></tr>
<tr><td>Σ − počet mincí + nominály +</td><td>2</td><td>–</td><td>2</td><td>1,72</td></tr>
<tr><td>Σ − počet mincí + nominály +</td><td>–</td><td>2</td><td>2</td><td>1,72</td></tr>
<tr><td>42 : 6</td><td>7</td><td>5</td><td>12</td><td>10,34</td></tr>
<tr><td>6 + 42</td><td>2</td><td>–</td><td>2</td><td>1,72</td></tr>
<tr><td>„divné“</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2,58</td></tr>
<tr><td>Iné</td><td>nepopísaný papier alebo veta „nemožno vyriešiť“</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1,72</td></tr>
<tr><td colspan="2">Spolu</td><td>51</td><td>65</td><td>116</td><td>116</td><td>100%</td></tr>
</table>

Popis:
Σ označuje súčet hodnôt mincí, + označuje porozumenie predpokladom úlohy, − označuje nedostatočné porozumenie predpokladom; napr. „Σ +, počet mincí +, nominály −“ znamená, že žiak porozumel súčtu 42 grošov, počtu použitých mincí, ale nezvážil možné nominálne hodnoty mincí.

Z predchádzajúcej tabuľky je zrejmé, že medzi počtom druhákov a počtom tretiakov, ktorí správne vyriešili úlohu, je značný rozdiel. Staršie deti častejšie našli viac ako jedno možné riešenie a napokon aj všetky, mladšie boli najúspešnejšie v hľadaní práve jedného správneho výsledku (27 osôb), len nemnohí z nich (4 osoby) objavili ďalšie možnosti, pričom žiadnemu druhákovi sa nepodarilo nájsť úplne riešenie.

Úplne riešenie objavili traja žiaci z tretieho ročníka, ktorí uviedli všetky štyri prípady, v ktorých má šesť mincí hodnotu 42 gr.

Takmer 43 % účastníkov výskumu (27 druhákov a 22 tretiakov) uviedlo jednu správnu odpoveď. Značná časť aktérov (49 zo 116 osôb) buď hľadala, ale nezistila iné možnosti, alebo (čo je pravdepodobnejšie) si riešenie automaticky spájala s jedinou správnou možnosťou. Z toho vidieť, že mnohí žiaci sa už zžili s riešením typických úloh, ktoré majú vždy len jedno riešenie. V situácii, ktorou sa zaoberáme (úloh s väčším počtom správnych odpovedí), činnosť žiakov teda mnohokrát končí nájdením jedného správneho riešenia, pričim deti už nepociťujú potrebu hľadať iné, ďalšie možnosti. Podľa nich proces riešenia úlohy končí uvedením jednej odpovede.

Viac ako jedno, no nie všetky možné riešenia našlo 26 žiakov (13 detí dve a 13 tri správne odpovede). Tieto deti si uvedomovali, že existuje viacero správnych riešení, no napriek tomu sa im nepodarilo nájsť všetky. Pozoruhodné je, že spomedzi nich boli iba 4 druháci a až 22 tretiaci. To môže svedčiť o väčšej schopnosti starších žiakov riešiť netypické úlohy.

Analýza nesprávnych riešemí nepoukazuje na zjavné rozdiely v chybách žiakov druhého a tretieho ročníka. Obe skupiny pri hľadaní riešenia robili podobné chyby:

– až 15 osôb síce dodržalo výšku požadovaného celkového finančného obnosu (42 gr) mincí platnej nominálnej hodnoty, ale zároveň zabudlo na ich určený počet. V týchto prípadoch rozložili číslo 42 na súčet 3, 5 alebo 7 sčítancov:

  Darek: *2 gr + 20 gr + 20 gr = 42 gr. To sú mince 2 gr, 20 gr, 20 gr* [3 mince];

  Jakub: *5 gr, 10 gr, 5 gr, 10 gr, 5 gr, 5 gr, 2 gr* [7 mincí];

  Dawid: *1 gr + 1 gr + 20 gr + 5 gr + 5 gr + 5 gr + 5 gr = 42 gr. Odp. To môžu byť 4 päťgrošovky, 2 mince po 1 gr a 20 gr* [7 mincí];

  Rafał: *10 +10 + 10 + 10 + 2 = 42* [5 mincí];

  Ela: *20 gr + 10 gr + 5 gr + 2 gr + 5 gr = 42 gr* [5 mincí].

– 2 žiaci mali na zreteli požadovaný počet mincí a ich nominálne hodnoty, no zabudli na ich určenú celkovú hodnotu 42 gr, napríklad:

  Adrian: *Môže ísť o mince 20 gr, 10 gr, 5 gr, 5 gr, 2 gr, 2 gr* [spolu 44 gr];

  Wiola: *10, 10, 10, 10, 10, 2* [spolu 52 gr].

– 2 žiaci nerešpektovali nominálne hodnoty poľských mincí a našli rozklad čísla 42 na súčet 6 ľubovoľných sčítancov, napríklad:

  Mateusz: *10 + 8 + 2 + 8 + 2 + 12 = 42 Odp. Môže ísť o mince 10, 8, 2, 8, 2, 12* [8- a 12-grošové mince];

  Kasia: *10 gr + 10 gr + 10 gr + 6 gr + 5 gr + 1 gr = 42 gr* [6-grošová minca].

– až 12 žiaci riešili úlohu tak, že využili typovú schému z aritmetiky a vydelili 42 : 6 alebo:

– odpovedali: *Sú to 7-grošové mince;*

– uskutočnili výpočet bez akéhokoľvek komentára;

– jeden žiak napísal: *Nemám 7-grošové mince* a nič viac;
– zistili, že nájdené číslo sa nezhoduje so skutočnosťou a vzdali sa hľadania iného riešenia.

Do skupiny týchto žiakov je potrebné začleniť ešte jedného (trinásteho), ktorý tvrdil, že úlohu nie je možné vyriešiť, avšak na odovzdanom papieri boli len vygumované výpočty. Ukázalo sa, že šlo o delenie. Žiak asi využil typovú schému aritmetiky, vydelil čísla, a keď si uvedomil, že nemá k dispozícii sedemgrošovú mincu, vygumoval všetky predchádzajúce výpočty a napísal, že úlohu nemožno vyriešiť.

– 2 žiaci sčítali 6 + 42. Aj oni použili schému riešenia typovej úlohy. No napriek tomu nemožno tvrdiť, že sa pokúsili analyzovať obsah úlohy, skôr z textu „vylovili“ dané čísla a uskutočnili s nimi jednu zo štyroch možných a im známych aritmetických operácií. Náhodou sa stalo, že šlo práve o sčítanie, alebo si sčitovanie vybrali ako najmenej náročný a najviac ovládaný výpočet.

  Damian napísal: *6 min + 42 gr = 48 Mincí bolo 48;*

  Monika: *6 + 42 = 46 Agáta má 46 peňazí.*

– 3 žiaci uviedli „divné“ riešenia:

  Kamil napísal: *500 gr + 100 gr + 20 gr + 20 gr + 2 gr = 642 gr. Čiže 642 gr;*

  Natalia odpovedala:

  Môžu to byť 7-grošové mince. Potom uviedla názorný dôkaz: ○○○○○○ · ○○○○○○○ = 42. Možno sa domnievať, že ide o osobitný spôsob zápisu súčinu 6 · 7 = 42.

  Sara zasa nakreslila 6 veľkých kruhov, do každého napísala číslo 1 a vedľa každého z nich skratku zł. Nižšie nakreslila 42 krúžkov, do každého napísala číslo 1 a vedľa skratku gr.

V riešeniach pertraktovanej úlohy sa ukázali značné rozdiely v schopnostiach detí zúčastňujúcich sa výskumu jednak medzi ročníkmi (druhý v porovnaní s tretím), jednak medzi jednotlivými žiakmi z jednej triedy. Iba máloktorí (2,58%) našli úplne správne riešenie netypickej slovnej úlohy – museli totiž súčasne zvážiť zrejmé i nie očividné fakty, vybrať vhodný aritmetický model pre slovnú úlohu a v neposlednom rade tiež racionálne kódovať všetky možnosti. Až 64,60% z celkového počtu detí si poradilo s úlohou len čiastočne. Im sa nepodarilo nájsť všetky správne riešenia, väčšina prišla iba na jednu dobrú odpoveď. Približne 33% úlohu nevyriešilo, pričom polovica z nich síce porozumela zmyslu úlohy, ale urobila také chyby ako: nesprávna hodnota, chybný počet mincí, zlé nominálne hodnoty mincí. Ostatok žiakov obsah úlohy nezviazal so známou situáciou praktického života. Tí riešenie spojili s použitím akejsi matematickej formuly, v ktorej figurovali dané čísla zo zadania úlohy, tak, aby dostali číselnú odpoveď. Nezaujímal ich vzťah získaných výsledkov voči skutočnosti, svoje odpovede nedokázali overiť.

Ako bolo uvedené na začiatku, jedným z cieľov riešení úloh má byť rast tvorivého človeka. Získané výsledky výskumu sa nezdajú byť povzbudivé. Sotva niekoľkí žiaci sa prejavili ako plne kreatívni. Avšak, zdá sa, že ďalší sa takými môžu onedlho stať, pokiaľ ich tvorivosť učiteľ vhodným spôsobom podnieti. Totiž, na prvom mieste sám učiteľ predstavuje postavu tvorivého človeka, a teda je povinný pomáhať žiakom kreatívne riešiť otvorené problémy i netypické úlohy. Znepokojuje, že veľká skupina detí (viac ako 16%) postupovala automaticky, schematicky a bezmyšlienkovito, za čo nepochybne niesie značný diel zodpovednosti sám učiteľ. Vyvstáva otázka, či vôbec ešte existuje šanca zmeniť tento stav, či je možné, aby sa žiaci stali kreatívnymi a schopnými reflexie? Bez radikálnych zmien v spôsobe práce s deťmi však odpoveď nemôže byť kladná.

Literatúra

[1] Czernecka-Holender R., Nawolska B., Urbańska A. (1995) O arytmetycznych zadaniach tekstowych w nauczaniu początkowym matematyki. In: M. Kawka (red.) *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Zeszyt 172, Prace Pedagogiczne XVII, Wczesna edukacja dziecka.* Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, s. 61 – 71.

[2] Kozielecki J. (1992) Myślenie i rozwiązywanie problemów. In: T. Tomaszewski (red.) *Psychologia ogólna.* PWN, Warszawa, t. I, s. 91 – 154.

[3] Sokołowski S. (1996) Jeszcze o zadaniach tekstowych. In: *Życie Szkoły, nr 3*, s. 168 – 171.

Adresa autora:
Barbara Nawolska, dr; Joanna Żądło dr
Akademia Pedagogiczna
Instytut PPiS
ul. Ingardena 4
30-060 Kraków
e-mail: bnawol@ap.krakow.pl
e-mail: joannazadlo@poczta.onet.pl

Statistická analýza číselné hry Sportka

Pavel Novák

Abstract. *This paper presents some notes of statistical analysis of numeric game Sportka.*

Úvod

Historie sázkové hry Sportka má v České republice dlouholetou tradici. První losování proběhlo už v roce 1956 a od této doby došlo jen k několika malým organizačním změnám. První losování probíhala vždy jednou týdně, ze čtyřiceti devíti čísel jich bylo vylosováno šest. Od roku 1965 se losují dva tahy, v roce 1977 přibylo navíc tzv. dodatkové číslo a od roku 1995 probíhá losování dvakrát týdně. Na webu akciové společnosti Sazka jsou dostupné výsledky všech losování.

Zvláštnosti v jednotlivých tazích

Za zvláštnosti budu považovat tahy, ve kterých byly vylosovány skupiny po sobě jdoucích čísel. Například v 43. týdnu roku 2001 byla v 1. tahu vylosována čísla: 9, 25, 26, 27, 44 a 49, byl to tedy tah, ve kterém se objevily tři po sobě jdoucí čísla. Nebo například ve 38. týdnu roku 1962 byla tažena čísla 6, 29, 43, 44, 45 a 46, tedy dokonce čtveřice po sobě jdoucích čísel. Nezajímavý není ani tah 41. týdne roku 1963, tehdy byla losována čísla 1, 2, 4, 44, 45 a 46, jde tedy o tah s jednou dvojicí a jednou trojicí po sobě jdoucích čísel. Jen málokterý sázkař by asi čekal, že v jednom tahu půjde za sebou dokonce pět po sobě jdoucích čísel. To se ale skutečně stalo, například v tahu ze 42. týdne roku 1989 byla vylosována pětice 17, 18, 19, 20, 21 a číslo 26. Uvedené příklady nás motivují k tomu, abychom se ptali po pravděpodobnostech těchto kuriozních tahů.

Právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel v jednom tahu

Zkoumejme tedy například pravděpodobnost, že v daném tahu budou vylosovány právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel. Zajímají nás tedy tahy, jako byl například ten z 32. týdne roku 2001, kdy byla vylosována čísla 2, 20, 29, 30, 45 a 46.

Abychom zjistili pravděpodobnost takovýchto tahů, musíme se nejprve ptát, kolik je všech možných tahů, tedy kolik je způsobů, jak ze čtyřiceti devíti čísel vybrat šest. To je ale zřejmě 6ti členná kombinace ze 49 prvků, tedy:

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Nyní se zaměříme pouze na tahy se dvěma dvojicemi po sobě jdoucích čísel. Pokusme se sestavovat takovéto tahy. Začneme tak, že pevně zvolíme ony dvě dvojice a jedno samostatné číslo. První taková volba je 1–2, 4–5 a 7, zbylé číslo musí být 9 nebo vyšší. Označíme-li toto poslední číslo jako c_6 platí pro něj tedy $c_6 \in \{9, \dots, 49\}$. Tato množina má 41 prvků, k našim pevně zvoleným dvojicím a jednomu číslu najdeme tedy 41 tahů.

V dalším kroku jen posuneme ono pevné samostané číslo a budeme se tedy ptát kolik tahů najdeme k pevně zvoleným číslům 1–2, 4–5 a 8. To jsou takové, pro které $c_6 \in \{10, \dots, 49\}$, je jich tedy stejně jako prvků této množiny, to je 40. Dál bychom postupovali analogicky, pevně zvolené samostatné číslo by bylo 9, pak 10, atd. až 47. Pěkně je to vidět z první buňky následující tabulky. Takto jsme tedy spočítali všechny tahy s dvojicemi 1–2 a 4–5. Je jich tedy $\sum_{i=1}^{41} i$. Následovalo by posunutí druhé dvojice. Zjistili bychom tak, kolik je tahů s dvojicemi 1–2 a 5–6. z druhého řádku naší tabulky je dobře patrné, že takovýchto tahů je $\sum_{i=1}^{40} i$. A analogickou úvahou bychom došli k tomu, že tahů s dvojicemi 1–2 a 6–7 je $\sum_{i=1}^{39} i$, atd, poslední možná volba pro druhou dvojici je 44–45, a dvě samostatná čísla musí být 47 a 49, máme tedy jen jednu možnost, neboli $\sum_{i=1}^{1} i$. Všech tahů, se dvěma dvojicemi, z nichž jedna je 1–2, je tedy součet všech těchto dílčích možností, tedy $\displaystyle\sum_{j=1}^{41}\sum_{i=1}^{j} i$.

Už je asi zřejmé, že v dalším kroku zjistíme, kolik je takovýchto tahů s dvojicí 2–3. Z tabulky je vidět, že je jich $\displaystyle\sum_{j=1}^{40}\sum_{i=1}^{j} i$. Pokud uvážíme všechny možné volby první dvojice, zjistíme, že všech možných tahů, které najdeme výše popsaným postupem je $\displaystyle\sum_{k=1}^{41}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} i$

1–2	4–5	7	$\{9,\dots,49\}$	41 možn.			
		8	$\{10,\dots,49\}$	40 možn.	$\sum_{i=1}^{41} i$		
		⋮	⋮	⋮			
		47	49	1 možn.			
	5–6	8	$\{10,\dots,49\}$	40 možn.			
		9	$\{11,\dots,49\}$	39 možn.	$\sum_{i=1}^{40} i$	$\sum_{j=1}^{41}\sum_{i=1}^{j} i$	
		⋮	⋮	⋮			
		47	49	1 možn.			
	⋮				⋮		
	44–45	47	49	1 možn.	$\sum_{i=1}^{1} i$		$\sum_{k=1}^{41}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} i$
2–3	5–6	8	$\{10,\dots,49\}$	40 možn.			
		9	$\{11,\dots,49\}$	39 možn.	$\sum_{i=1}^{40} i$		
		⋮	⋮	⋮		$\sum_{j=1}^{40}\sum_{i=1}^{j} i$	
		47	49	1 možn.			
	⋮				⋮		
	44–45	47	49	1 možn.	$\sum_{i=1}^{1} i$		
⋮						⋮	
41-42	44–45	47	49	1 možn.	$\sum_{i=1}^{1} i$	$\sum_{j=1}^{1}\sum_{i=1}^{j} i$	

Nyní si ještě musíme uvědomit, že jsme zatím uvažovali tahy typu dvojice–dvojice–číslo–číslo (pokud dodržíme seřazení podle velikostí, tak jako doposud), ale už ne tahy typu např. číslo–dvojice–dvojice–číslo. Máme tedy srovnat do řady prvky takovéto množiny: {číslo, číslo, dvojice, dvojice}. To je čtyřprvková množina, která má dva různé prvky, z nichž každý se dvakrát opakuje. To jsou ale permutace s opakováním. Pro jejich počet platí v našem případě vztah: $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$. Víme-li navíc, že platí následující vztah: $\sum_{k=1}^{41}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} i = \binom{n+2}{4}$, můžeme počet tahů s dvěma dvojicemi spočítat takto:

$$6\sum_{k=1}^{41}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} i = 6\cdot\binom{44}{4} = 814\,506.$$

Existuje tedy 814 506 tahů, které obsahují právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel. Tento počet můžeme samozřejmě odvodit i jinak, velmi pěkné odvození je např. v [1]. Pomůže nám přitom následující představa. Ve sběrnách sportky v Polsku se ve vitríně s 49 čísly oznamuje výsledek losování rozsvícením vylosovaných čísel. Představme si tedy očíslované koule v řadě v pořadí od 1 do 49, a že výsledek je zaznamenáván rozsvícením šesti koulí s vylosovanými čísly Je to, jako by všechny koule byly bílé a po vylosování se zbarvily červeně. v našem případě to znamená, že máme mezi 43 bílých koulí umístit dvě červené dvojice a dvě červené koule, tak aby spolu nesousedily. Umístěme tedy 43 koulí do řady a pokusme se spočítat kolik je takových míst, kde budou dvě červené dvojice a zbylé dvě červené koule odděleny alespoň jednou bílou koulí. Jedno takové místo je na začátku, jedno na konci a pak zbývá ještě 42 míst mezi bílými koulemi. Celkem je tedy 44 takových míst, z nichž máme vybrat čtyři. Máme tedy vybraná čtyři místa, a ještě nám zbývá rozhodnout, kam umístíme samotné koule a kam dvojice. To jsou opět kombinace s opakováním, víme už, že takových možností je šest. Všech tahů se dvěma dvojicemi po sobě jdoucích čísel je tedy:

$$6\binom{44}{4} = 814\,506.$$

Pravděpodobnost, že se v daném tahu objeví právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel je tedy:

$$\frac{6\cdot\binom{44}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{13\,983\,816}{814\,506} = 0{,}0582$$

Porovnejme ještě tento výsledek se skutečnou hodnotou. Máme k dispozici 2511 nedělních tahů Sportky, z nich bylo právě 157 tahů se dvěma dvojicemi. Empirická hodnota této pravděpodobnosti je tedy $\frac{157}{2511} = 0{,}0600$. Je vidět, že tyto dvě hodnoty se liší až v řádech desetin procent.

Losovací zařízení

Jak už bylo řečeno v úvodu, číselná hra Sportka má dlouhou historii a během let se vystřídalo i mnoho losovacích zařízení. Je tedy přirozené ptát se, proč se jich vystřídalo tolik, a zda opravdu všechna zařízení byla spravedlivá, tzn. zda nepreferovala nebo naopak neznevýhodňovala některá čísla. Zaměřme se tedy např. na losovací zařízení, které se používalo v letech 1976–1979. Máme k dispozici historii 208 tahů. Nyní nás budou zajímat četnosti jednotlivých čísel (počty tahů, kdy byla vylosována). Ptejme se, které četnosti mají pravděpodobnost menší než 0,05.

Zřejmě se jedná o Bernoulliho posloupnost nezávislých pokusů. Četnosti, které hledáme musí splňovat podmínku:

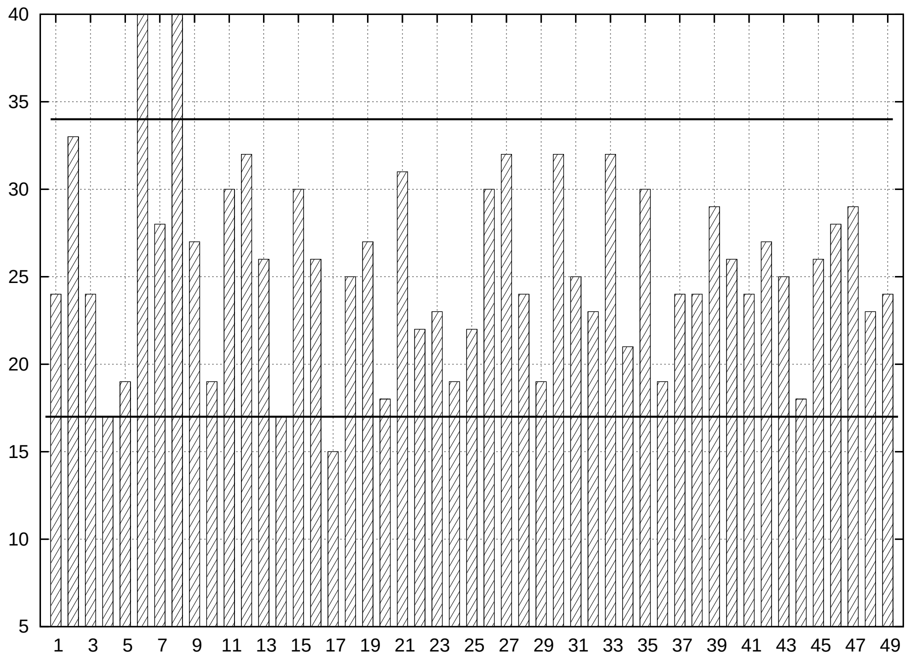
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \le 0{,}05 \tag{2}$$

kde n je počet tahů, které máme k dispozici, tedy $n = 208$, p je pravděpodobnost vylosování každého čísla v jednom tahu. Ve Sportce se losuje šest čísel ze čtyřiceti devíti, tedy $p = \frac{6}{49}$, q je pravděpodobnost opačného jevu, tedy nevytažení daného čísla v jednom tahu. Pro nás je $q = 1 - \frac{6}{49}$. Mezní četnost k_1 pro nás bude největší možné k, pro které je ještě splněna rovnost (2). v našem případě je $k_1 = 17$.

Pro horní odhad (zase na hladině pravděpodobnosti 0,05) musí podobně jako v (2) platit:

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + \binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1} + \ldots + \binom{n}{n}p^n q^0 \le 0{,}05 \tag{3}$$

A mezní četnost k_2 pro nás bude nejmenší možné k, které ještě vyhovuje rovnosti (3). v našem případě je $k_2 = 34$. Všechny četnosti jsou vyneseny v grafu na Obrázku 1. Je vidět, že ne všechna čísla vyhovují. Například číslo 17 bylo ve 208 tazích taženo



Obrázek 1: Graf četností jednotlivých losovaných čísel pro losovací zařízení, které se používalo v letech 1976–1979. silnými linkami jsou vyznačeny maximální a minimální četnost při hladině pravděpodobnosti 0,05. Je vidět, že nevyhovují čísla 4, 14 a 17; 6 a 8.

pouze 15krát, my jsme ale odvodili dolní odhad při pravděpodobnosti 0,05. Je vidět, že tedy toto losovací zařízení úplně spravedlivě nepracovalo. Možná, že právě to bylo důvodem, že se používalo jen čtyři roky.

Literatura

[1] PLOCKI, A.; TLUSTÝ P.; *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé.* Praha: Prometheus, 2006

[2] PLOCKI, A.; *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi.* Krakow: Wydawnictvo Naukowe WSP, 1997, p. 376–78

[3] WICHMANN, B. A.; HILL I. D.; *An efficient and portable number generator.* Aplied Statisticks 31(2), 1982, p. 188–90

[4] PAVELKA, L.; DOLEŽALOVÁ J.; *Pravděpodobnost a statistika.* Ostrava: VŠB, 1999

Adresa autora:
Pavel Novák
KM PF JČU
Jeronýmova 7
370 01 České Budějovice
e-mail: pavel.novak@gmail.com

Bariera oczywistości w początkowym nauczaniu matematyki

Zbigniew Nowak

Abstract. *In education process there is always a great difference in level of knowlage and skills between the teacher and the student. In some circumstances it may lead to the kind of didactic trap, because everyone who already "knows and is able to do" silently accepts a threshold of evidence of these knowlage and skills, beyond whom questions related to teaching are that simple (evident) that there is no need to explain them any more. This threshold is called by the author "a barrier of evidence". The article is about a core of this phenomenon, its symptoms and didactic consequences in primary teaching of Mathematics*

Gdy byłem dzieckiem, mówiłem jak dziecko,
Czułem jak dziecko, myślałem jak dziecko.
Kiedy zaś stałem się mężem, wyzbyłem się
tego, co dziecięce.
Św. Paweł, 1. Kor. 13. 11.

Istota bariery oczywistości

Dla każdego człowieka, a w szczególności dla specjalisty w jakiejś dziedzinie, pewien zakres wiedzy lub umiejętności jest już tak elementarny i banalny, iż w horyzoncie jego świadomości nie pojawia się nawet idea niezrozumiałości i nieumiejętności, a co za tym idzie także konieczności, a nawet możliwości dalszego tłumaczenia. Milcząco przyjmujemy więc istnienie *swego rodzaju* atomów wiedzy i umiejętności, których prawdziwość i oczywistość narzuca się w sensie kartezjańskim[25] *per se.* Porównanie to jest o tyle ciekawe, iż jak poucza teoria i praktyka fizyki XX wieku, atom jako kres prostoty i w budowie i tłumaczeniu świata okazał się barierą pozorną, a droga w głąb materii i ku prostocie zda się nie mieć granicy.

Omawiane zjawisko, w różnym zapewne nasileniu, można zaobserwować w zakresie każdej dyscypliny wiedzy i umiejętności i na każdym etapie ich poznawania. Szczególnie jednak widoczne i istotne jest ono w szkole, edukacja bowiem, niejako z samej istoty rzeczy, jest zawsze spotkaniem „mistrza" i „profana", tego który wie i umie oraz tego, który dopiero musi poznać i się nauczyć, co w pewnych okolicznościach może prowadzić nauczyciela do popadnięcia w swoistą pułapkę dydaktyczną, którą nazwano tu „barierą oczywistości". Będzie ona rozumiana jako:

Zindywidualizowana (subiektywna) i nieświadomie przyjmowana przez uczącego, dolna granica w trudności w rozumieniu jakiegoś zagadnienia lub w wykonywaniu pewnych czynności, poza którą – w jego mniemaniu - rzecz nie wymaga, a nawet nie dopuszcza dalszego objaśniania[26].

[25]Por. Oczywistość (1.) W: A. Podsiad (2001) *Słownik Terminów i Pojęć Filozoficznych,* Kraków, *wyd. PAX, s. 578,579*

[26]Patrz. Z. Nowak (1998) Przygotowanie nauczycieli klas początkowych do dostrzegania i pokonywania bariery oczywistości w nauczaniu. W: I. Adamek (red.) *Idee i strategie edukacji nauczycieli klas I – III i przedszkoli,* Kraków, wyd. WSP, s. 142.

W sposób szczególny na wystąpienie bariery oczywistości i jej negatywne skutki narażona jest edukacja wczesnoszkolna. Wynika to z wyjątkowo wielkiego rozziewu merytorycznego występującego w zakresie wiedzy i umiejętności między małym dzieckiem, a dorosłym specjalistą (różnica ilościowa) oraz przede wszystkim, jak nas poucza psychologia rozwojowa, z konstytutywnie odmiennego sposobu odzwierciedlania świata i jego konceptualizacji przez małe dzieci (różnica jakościowa). O ile bowiem małe dzieci funkcjonują na poziome myślenia przedoperacyjnego, lub co najwyżej konkretnego-operacyjnego, to nauczyciel – na poziomie operacji formalnych[27].

Innym, nie mniej wpływowym czynnikiem, jest swoiste „społeczne obniżenie progu wrażliwości", wynikające z tego, iż *hic et nunc* omawiany zasób wiedzy ma charakter niejako oczywistości społecznej. Nie wszyscy znają się na fizyce jądrowej, ale praktycznie wszyscy umieją czytać, pisać i rachować. Umiejętności te są banalne zapewne już dla nieco starszych dzieci.

Szczególnie narażeni na pułapkę zaistnienia bariery oczywistości są studenci pedagogiki i nauczyciele początkujący w zawodzie. Warunkiem naszego rozumienia siebie nawzajem i porozumiewania jest milcząco przyjmowane założenie o pewnej psychologicznej wspólnocie, wzajemnym podobieństwie spostrzeżeń, wyobrażeń myśli, emocji itd. Powoduje to, iż w sposób oczywisty i konieczny projektujemy na innych swoje własne doświadczenia, przypisujemy im własne sposoby konceptualizacji świata, wyrażania go i przeżywania. Zatraciwszy swą dziecięcość, a nie mając jeszcze życiowych lub zawodowych doświadczeń z małymi dziećmi, studenci są więc skłonni traktować je w sensie mentalnym i sprawnościowym jak rówieśników, przypisując im własne procesy myślowe, emocje, przekonania, język i biegłość manipulacyjną. Potwierdza to w jakimś stopniu każda obserwacja praktyk szkolnych.

Dydaktyczne konsekwencje występowania bariery oczywistości są zawsze negatywne, niemniej szczególnie groźne skutki mogą przynieść w edukacji elementarnej, gdzie niewiedza i niejasności dotyczą niejako fundamentów przyszłego gmachu wiedzy, powodując iż wszystko, co będzie na nich fundowane będzie niejasne i niepewne. Zważywszy ogólnorozwojowe walory nauczania matematyki, jak i to, iż będzie ona podstawą nauczania kilku innych przedmiotów, mamy tu do czynienia z sytuacją podobną do uszkodzeń genetycznych, które im wcześniej nastąpią, tym rozleglejsze i fatalniejsze przynoszą ze sobą skutki.

Poniżej zostaną omówione typowe przykłady występowania bariery oczywistości w edukacji matematycznej małych dzieci i wskazane sposoby radzenia sobie z nią, a co zawsze istotniejsze – jej zapobieganiu.

Przykłady występowania bariery oczywistości w nauczaniu matematyki

Liczba i liczebniki

Liczby naturalne, które jak zwykł mawiać Leopold Kronecker, darował nam dobry Bóg, są niezłym przykładem oczywistości. Ponieważ dzieci artykułują sprawnie i często nawet bez pomyłek liczebniki, skłonni jesteśmy sądzić, iż mają ukształtowane pojęcie liczby, a nieprawidłową sekwencję liczb, czy opuszczenia i powtórzenia składamy na karb pomyłek, do których przecież dziecko ma prawo. Łatwo wykazać, iż dziecko nie tyle ma ukształtowane pojęcie, co zna tylko jego nazwę. Jak więc słusznie stwierdził Terencjusz: *gdy dwóch mówi (lub robi) to samo, to nie jest to samo* (Si duo

[27]Por. J. Piaget, B. Inhelder (1993) *Psychologia dziecka,* Wrocław, wyd. Siedmioróg.

faciunt idem, non est idem), a nauczyciel powinien to przyjąć nie tylko do wiadomości ale i do stosowania.

Działania i formuły matematyczne

Podobnie podchodzimy do pierwszych działań wykonywanych przez dzieci. Dziecko podaje właściwe wyniki dodawania i odejmowania, sądzimy więc, iż są one owocem wykonanej operacji, podczas gdy dziecko reprodukuje zapamiętane obrazy i sekwencje słowne. Dla dorosłego oczywiste i łatwiejsze jest wykonanie działania, dla dziecka zapamiętanie i odtworzenie. Jeżeli nawet efekt jest identyczny, to przecież z punktu widzenia dalszego uczenia się matematyki, nie są to sytuacje porównywalne.

Złudna jest też sama oczywistość matematyzacji świata, kiedy uświadomimy sobie, iż całe jego niepowtarzalne bogactwo i setki tysięcy słów służące do jego opisu dziecko musi sprowadzić do dwóch, a potem czterech działań. Dodajmy, iż bogactwo to nie zawsze musi być zgodne z intuicją. Pewna konkretna czynność np. „zjadł" raz może mieć zgodną z intuicją interpretację jako odejmowanie, ale w setkach innych można ją zapisać jako dodawanie, mnożenie i dzielenie. Jednorodność przykładów może doprowadzić do nieuzasadnionego i błędnego utożsamienia pewnej czynności z jednym tylko działaniem.

Proste zadania z treścią

Szczególnie fatalne skutki przynosi bariera oczywistości w rozwiązywaniu zadań z treścią. Zadania z klasy pierwszej i drugiej są zasadniczo zadaniami jednodziałaniowymi, co w tradycyjnej nomenklaturze określa się jako „zadania proste", co w tym wypadku jest synonimem słowa „łatwe". Jeżeli więc zadanie, z samej nazwy jest łatwe, a dzieci, nim nawet nauczyciel zdoła przeczytać do końca treść, znają wynik, to oczywistą konkluzją jest, iż rozumieją zadania i umieją je rozwiązywać, co nauczyciel chętnie przyjmuje do wiadomości. Jeżeli jednak przyjrzeć się sprawie bliżej, okaże się, iż często dziecko nie zna nawet treści zadania i pytania, a działa wedle ukształtowanego z walna pomocą nauczyciela schematu, wedle którego treść nie jest istotna, nie trzeba jej nawet słuchać, trzeba natomiast wyłowić z niej liczby i dodać, zazwyczaj nie udzielając nawet odpowiedzi. Ponieważ w klasie I albo się dodaje, albo odejmuje, dziecko stosując opisany proceder ma z tego tylko powodu 50% szans na trafienie. Praktycznie znacznie większe, ponieważ jak dowodzą obserwacje praktyki szkolnej, przykłady na dodawanie są zawsze częstsze i liczniejsze niż na odejmowanie.

Nawet, jeżeli metoda ta zawiedzie, bo zadanie było tym razem na odejmowanie, to łatwo jest skorygować (pozornie) błąd podając właściwą formułę, co nauczyciel odbierze jako owoc krytycznej refleksji, ignorując fakt, iż przy dwóch działaniach *tertium non datur.*

Dziecko, któremu udało się kilkakrotnie w ten sposób zgadnąć wynik, i które zapewne zostało dodatkowo pochwalone za szybkość działania, nabędzie przekonania, iż jest to dobry, najlepszy nawet sposób rozwiązywania zadań. Kiedy jednak na dalszych etapach kształcenia wobec komplikacji treści i formuł zgadywanie przestaje być skuteczną metodą rozwiązywania zadań, uczniowie nagle okazują się wobec nich całkowicie bezradni, toteż obserwuje się masową nieumiejętność rozwiązywania zadań przez dzieci w klasach starszych, które stają się ich prawdziwą *piętą Achillesa.*

Schematy działania i konwencje

Matematyka, jak każda inna dyscyplina wiedzy posługuje się pewnymi powszechnie znanymi konwencjami. Tak np. formuły piszemy zazwyczaj horyzontalnie zgodnie z kierunkiem pisma – od lewej do prawej, podobnie kreślimy różne figury geometryczne, tak by ich podstawy, były usytuowane poziomo. Tak jest łatwiej i zapewne ładniej. Na oznaczanie niewiadomej używamy ostatnich liter alfabetu, zwłaszcza litery „x”, która wkrótce staje się dla uczniów synonimem niewiadomej. Okazuje się jednak, iż to, co dla nauczyciela jest oczywistą umową, dla dziecka może stać się konstytutywnym elementem wiedzy. Jakże często dzieci stają bezradne wobec działań zapisanych wertykalnie lub w tabelach, nie mogą rozpoznać figur geometrycznych tylko z tego powodu, iż są nietypowo umieszczone na kartce w stosunku do jej dolnej, poziomej krawędzi, albo nie potrafią rozwiązać równania, gdzie zamiast „x” jest wstawiona inna litera.

Zapobieganie pojawianiu się bariery oczywistości

W kwestii zapobiegania i przezwyciężania występowania bariery oczywistości, bez wątpienia najważniejsze i zapewne najtrudniejsze jest uświadomienie sobie jej istnienia, które ma charakter pewnej nieuchronności. Uwrażliwieni, możemy w przyszłości eliminować sytuacje, w których wystąpiła i uprzedzać tym samym jej możliwe pojawienie się. Jak powiedział kiedyś C. Freinet: *dobry nauczyciel nie tym różni się od złego, że nie popełnia błędów, tylko tym, że stara się je popełnić tylko raz.*

Zapewne najskuteczniejszą nauczycielką jest tu własna, refleksyjna praktyka. Jest to jednak nauka kosztowna, tym bardziej, iż nasze rachunki płacą uczniowie. Dobre skutki w przypadkach rozpoznanych przynosi ich omawianie i analiza. Wielką wartość perswazyjną ma stawianie studentów w sytuacji dziecka lub w sytuacjach analogicznych, ale odpowiednio trudniejszych. Tak zbawienne skutki przynoszą próby kaligraficznego pisania w zeszycie i na tablicy czy zapis liczb i wykonywanie działań w systemach niedziesiątkowych.

Najważniejszą jednak rzeczą prawdziwym i jedynym kluczem do unikania i przełamywania bariery oczywistości jest uparte dążenie do wyrabiania u dzieci nawyku nieskrępowanego pytania zawsze i o wszystko. Jak pisał już bowiem Piotr Abelard: *Pierwszym kluczem mądrości jest wytrwałe i częste stawianie pytań.* Dzieci muszą kształcić się w przeświadczeniu, iż nie ma złych i głupich pytań, a brak jest, co najwyżej wiedzy by na niektóre z nich odpowiedzieć. Ubolewać należy, iż jedną z pierwszych rzeczy, jakich się dzieci dowiadują o nauce i szkole, jest spostrzeżenie, że nie należy mieć wątpliwości, zadawać pytań, czemukolwiek się dziwić. Truizmem jest twierdzić, iż potakiwanie przez uczniów nauczycielowi, może być źródłem jego satysfakcji zawodowej tyle łatwej, co złudnej i krótkotrwałej.

Konkludując powyższy wywód wypada więc stwierdzić, iż głównym problemem w występowaniu bariery oczywistości i jej przezwyciężaniu jesteśmy my sami, nasze poczucie wiedzy i wyższości intelektualnej, niepamięć problemów własnego dzieciństwa. Nauczyciel powinien więc w sobie pielęgnować postawę zdziwienia, nie przyjmowania niczego za oczywiste. W swoich „Zapiskach autobiograficznych” Albert Einstein pisze, że tym, co być może przesądziło o jego sukcesie było przechowanie dziecięcego dziwienia się rzeczom, które większość z nas stając się dorosłymi zaczyna uważa za oczywiste[28]. Gdyby tak było w istocie, to dziecięce zdziwienie, stawiające nas w obliczu konieczności uświadomienia sobie rzeczy na pozór oczywistej i przemyślenia

[28]Einstein A. (1996) *Zapiski autobiograficzne,* Kraków, Wydawnictwo Literackie, s. 14.

jej tak, by móc ją uprościć i wytłumaczyć, może być tyle owocne dydaktycznie dla uczniów, co ubogacające nauczyciela i świat dorosłych w ogóle.

Adresa autora:
Dr Zbigniew Nowak
Akademia Pedagogiczna
Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
ul. Ingardena 4
30-060 Kraków
e-mail: amadeusz56@o2.pl

Možnosti využitia manipulatívnych činností pri výklade geometrických vzťahov

Hana Omachelová

Abstract. *Playing is a typical activity of children. Suitable implemented manipulating activities in explanation can also have an effect as a play. The article treats of possibility to use different manipulating activities in explanation of geometric terms and relations. It also describes the method of modeling the geometric relations using paper folding. The article contains description of a lesson that was based on the "paper folding method" and applied in the* 6^{th} *class of primary school.*

Kľúčové slová: výklad, manipulatívne činnosti, prekladanie papiera, štvorec, obdĺžnik, uhly, uhlopriečky, medzipredmetové vzťahy

Úvod

Dá sa povedať, že vo vyučovacom procese sa striedajú tri fázy:

- výklad
- upevňovanie vedomostí
- precvičovanie učiva

Zaujímavé úlohy väčšinou učitelia volia na úvodné motivovanie žiakov ešte pred výkladom nových pojmov. Takisto aj pri upevňovaní vedomostí a pri precvičovaní učiva sa častejšie nájde priestor na rôzne zaujímavé matematické hádanky a hlavolamy. Ale ako je to s výkladom? Ako môžeme túto dôležitú fázu realizovať pre žiakov čo najzaujímavejšou formou? Akým spôsobom sa dajú zaviesť nové matematické pojmy a vzťahy medzi nimi tak, aby si ich žiaci osvojili čo najrýchlejšie a s čo „najmenšou námahou“?

Škola a hra

Myšlienka „škola hrou“ je nám dobre známa a mali by sme sa ňou čo najčastejšie riadiť. Hra je jednou z najtypickejších činností dieťaťa – žiaka. Ďalšou typickou činnosťou žiaka je učenie sa. J. Brincková [1,s. 9] hovorí, že „učenie je výsledkom činnosti a prostredníctvom činnosti sa vyvíja“. Ako jednu z možných činností, pomocou ktorých sa dajú rozvíjať geometrické predstavy žiakov menuje „materiálovú činnosť (manipulácia s objektmi, so stavebnicou, kartičkami, plastelínou, vystrihovačkami,...)“. Práve takéto rôzne manipulatívne činnosti majú veľmi blízko ku hre a je vhodné ich do vyučovacieho procesu čo najčastejšie zaraďovať.

Práca s predmetnými modelmi zohráva aj podľa V. Sýkoru [4,s. 68] dôležitú úlohu v pojmotvornom procese geometrických poznatkov. Spomínaný autor poukazuje na možnosť modelovať priamku, bod, úsečku, uhol, trojuholník, mnohouholník a množstvo ďalších pojmov pomocou prekladania papiera. Nás táto metóda zaujala, pretože skladanie papiera a vytváranie origami je obľúbenou činnosťou žiakov. Tu sa nám naskytla možnosť vniesť podobnú prácu aj do vyučovania matematiky.

Metódu „prekladania papiera“ sme odskúšali v šiestom ročníku ZŠ pri výklade učiva o obdĺžniku, štvorci a ich vlastnostiach. V nasledujúcom texte sa pokúsime popísať priebeh vyučovacej hodiny a reakcie žiakov na túto pre nich doposiaľ novú metódu.

Štvorec, obdĺžnik a prekladanie papiera

V učive o rovnobežníkoch sme vyhradili jednu vyučovaciu hodinu obdĺžniku, štvorcu a ich vlastnostiam. Naším cieľom bolo vysvetliť žiakom nasledujúce vlastnosti štvorca a obdĺžnika a dokázať ich pomocou prekladania papiera:

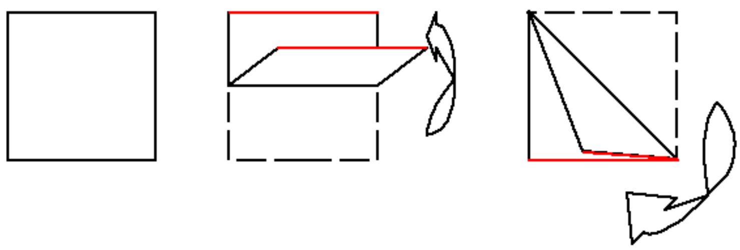
1. štvorec je *pravouhlý* rovnobežník, ktorého všetky strany sú *zhodné*
2. všetky vnútorné uhly každého štvorca sú *pravé*
3. každý štvorec má *dve navzájom zhodné uhlopriečky*
4. uhlopriečky každého štvorca sú navzájom *kolmé, zhodné a rozpoľujú sa*
5. obdĺžnik je rovnobežník, ktorého každý *vnútorný uhol* je *pravý* a ktorého každé dve susedné strany sú rôzne dlhé.
6. uhlopriečky každého obdĺžnika sú navzájom *zhodné, rozpoľujú* sa, ale *nie sú navzájom kolmé*

Žiakom sme rozdali vopred pripravené štvorce, ktoré sme vystrihli zo štvorčekového papiera. Štvorčekový papier sa nám zdal vhodný aj preto, lebo sme mohli využiť jeho pravouhlú sieť a jeho jednotlivé dieliky môžu poslúžiť aj ako jednotky dĺžky.

Ako vidíme, vo vetách ide o dôkazy zhodnosti dĺžok (strán, uhlopriečok,...), zhodnosti uhlov a o veľkosť uhlov a kolmosť (pravý uhol). Ako príklad uvedieme dôkaz vlastnosti 1 a dôkaz vlastnosti 4. Ostatné vlastnosti sa dajú dokázať analogicky.

V.1: štvorec je *pravouhlý* rovnobežník, ktorého všetky strany sú *zhodné*

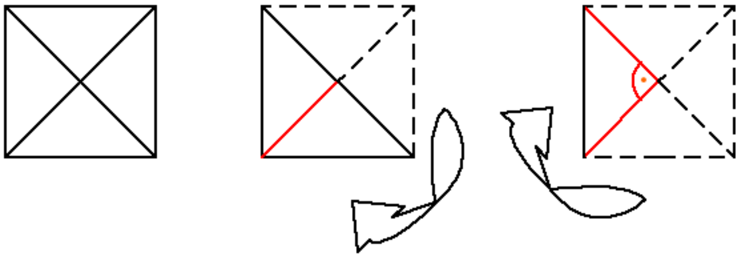
Dôkaz: Prvú časť vety – štvorec je *pravouhlý* (pojem rovnobežník už žiaci poznali vopred) môžeme dokázať buď odmeraním veľkosti vnútorných uhlov uhlomerom, alebo štvorec priložíme k predmetu, o ktorom vieme, že má pravý uhol (list papiera), alebo môžeme využiť pravouhlú štvorcovú sieť, z ktorej je štvorec vystrihnutý. Zhodnosť strán sa dá overiť buď odmeraním pomocou pravítka, alebo spočítaním štvorcov štvorcovej siete popri stranách štvorca, alebo prekladaním – štvorec preložíme tak, že všetky strany sa nám prekryjú, alebo sa prekryjú najskôr protiľahlé strany a potom susedné strany (obr.1). Žiakom pritom naznačíme princíp tranzitívnosti zhodnosti dvoch navzájom susedných a dvoch protiľahlých strán.



Obr.1: Dôkaz zhodnosti strán štvorca

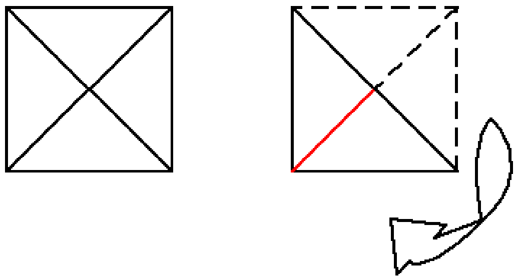
V. 4: uhlopriečky každého štvorca sú navzájom *kolmé, zhodné a rozpoľujú sa*

Dôkaz: To, že sú uhlopriečky navzájom kolmé znamená, že zvierajú pravý uhol. Pojem kolmosti už žiaci poznajú. To že kolmosť platí pre uhlopriečky štvorca jednoducho dokážu pomocou skladania - štvorec prekladáme pozdĺž uhlopriečok až kým sa všetky uhly zvierané uhlopriečkami neprekryjú (Obr. 2). Tým dokážeme, že uhly uhlopriečok sú zhodné. A keďže ide o štyri zhodné uhly, ktoré rozdeľujú rovinu, musia mať veľkosť 90 $^\circ$.



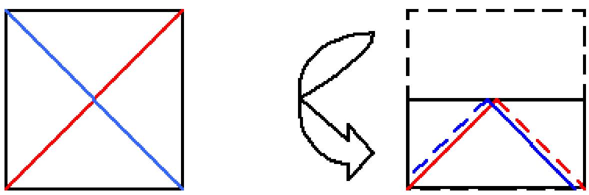
Obr. 2: Uhlopriečky štvorca sú navzájom kolmé

Pri rozpoľovaní sa uhlopriečok použijeme podobný postup. Štvorec preložíme cez priesečník uhlopriečok a vidíme, že sa prekryjú obe polovice uhlopriečky. To zopakujeme aj pre druhú uhlopriečku (Obr.3).



Obr. 3: Uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú

Pri dôkaze zhodnosti uhlopriečok musíme preložiť štvorec cez stred tak, aby sa uhlopriečky navzájom prekryli tak ako na obr. 4 (poznámka: je dobré, ak si žiaci predtým jednotlivé uhlopriečky farebne vyznačia – každú inou farbou).



Obr. 4: Dôkaz zhodnosti uhlopriečok

Dôkazy vlastností obdĺžnika sú podobné. Jediným rozdielom bude dôkaz časti vlastnosti 6 – uhlopriečky obdĺžnika nezvierajú pravý uhol. Pokiaľ označíme priesečník uhlopriečok ako bod S, potom vrcholové uhly pri vrchole S nevieme na seba preložiť tak, aby sa všetky navzájom prekryli – ako to bolo u štvorca.

Skladanie papierových štvorcov a obdĺžnikov žiaci videli skôr ako hru. Pri takejto činnosti má učiteľ okrem toho možnosť často opakovať pojmy, ktoré si žiaci majú osvojiť. Na spomínanej vyučovacej hodine sme sa pokúsili overiť, do akej miery si žiaci preberané učivo osvojili. Dali sme im krátky test, niekoľko otázok, na ktoré mali odpovedať len ÁNO – NIE. Otázky zneli:

1. Uhlopriečky štvorca zvierajú uhol 90°.
2. Obdĺžnik je pravouhlý rôznobežník.
3. Uhlopriečky obdĺžnika zvierajú pravý uhol.
4. Všetky vnútorné uhly štvorca sú pravé.
5. Uhlopriečky štvorca nie sú zhodné.

Väčšina žiakov odpovedala na všetky otázky dobre. Len asi dvaja – traja žiaci odpovedali správne na 2 a menej otázok. Dokonca žiak, ktorý bol podľa učiteľov tzv. „problémové dieťa“ a niekoľkokrát prepadol, odpovedal správne až na 4 otázky z piatich, čo považujeme za veľký úspech.

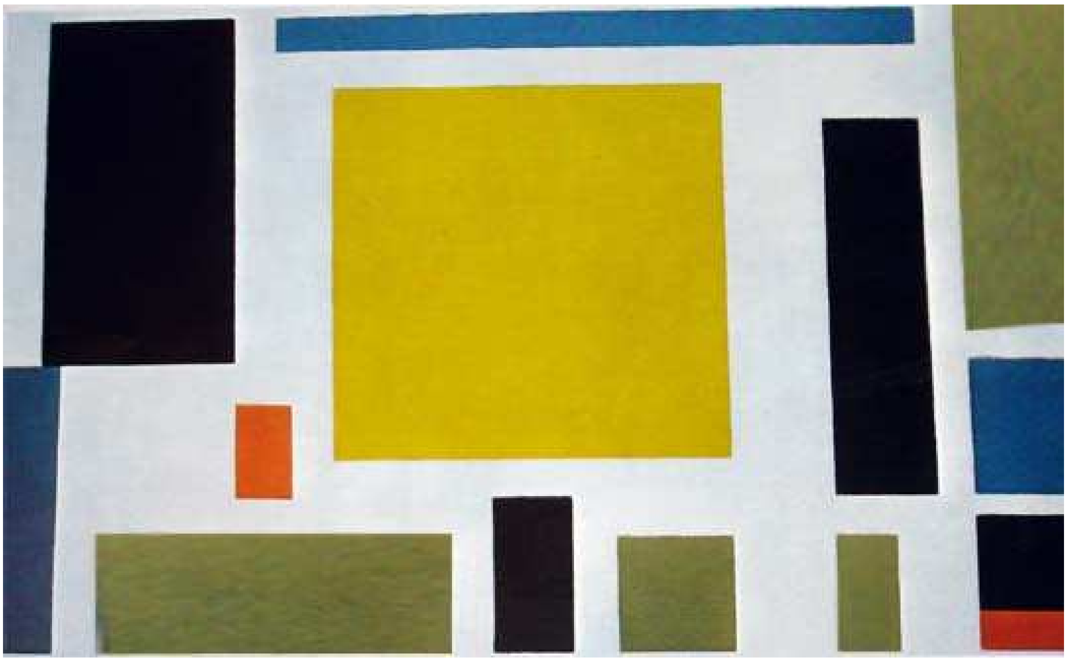
Metóda skladania papiera sa nám teda pri výklade vlastností štvorca a obdĺžnika osvedčila. Odporúčame ju využívať aj pri zavádzaní iných geometrických predstáv. Žiakov práca bavila, pokladali ju skôr za hru ako za učenie.

Trochu medzipredmetových vzťahov na záver

Na záver vyučovacej hodiny, ktorú sme tu opísali zostalo pár minút času. V rámci medzipredmetových vzťahov sme mali pripravené ukážky z dejín umenia ([3], str.227-233), pri ktorých sme si ukázali, že štvorcami a obdĺžnikmi sa nezaoberá len matematika, ale aj umenie (geometrická abstrakcia). Na otázku, či sa z geometrických útvarov dá robiť umenie, žiaci jednohlasne odpovedali: „Nieee“. O to väčšie bolo ich prekvapenie. Zastavili sme sa pri obraze „Krava“(Obr.5) od Thea van Doesburga. Na otázku, koľko zelených štvorcov je na ňom namaľovaných, žiaci hneď odpovedali, štyri. A to bol opäť chyták, až do konca hodiny treba aktívne počúvať! Štvorec je len jeden, ostatné sú obdĺžniky. Samotný názov obrazu bol pre žiakov prekvapením, a takýmto veselým zistením sa hodina skončila.

Nemenej významný bol aj výchovný moment vyučovacej hodiny, kedy boli žiaci prinútení do určitej miery spolupracovať. Hoci každý žiak mal svoj kus papiera, ktorý skladal, našli sa aj chvíle, kedy sa musel poradiť so spolusediacim, ako treba čo poskladať a dokázať. O to väčšia bola ich radosť, keď aj bez pomoci učiteľa dokázali objaviť geometrické zákonitosti.

Práve takéto hodiny, pri ktorých žiakom podáme učivo zaujímavou formou, často veľmi blízkou hre, sú silným motivačným a aktivizujúcim prvkom nielen pre žiakov, ale aj pre učiteľa.



Obr. 5: Obraz „Krava“ (Museum of Modern Art, New York) od Thea van Doesburga (1883-1931).

Literatúra

[1] Brincková, J.: Tvorivé dielne 2 zamerané na didaktické hry v geometrii ZŠ. Banská Bystrica, Pedagogická fakulta UMB, 2001.

[2] Omachelová, H.: Zámerné pestovanie priestorovej predstavivosti u žiakov 5. a 6. ročníka ZŠ. Diplomová práca. Banská Bystrica, Pedagogická fakulta UMB, 2005.

[3] Pijoan, J.: Dejiny umenia 9. Bratislava, Ikar, 2000.

[4] Sýkora, V.: Geometrie překládaného papíru. In: *Dva dny s didaktikou matematiky – Sborník příspěvků ze semináře katedry matematiky a didaktiky matematiky.* Praha, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2000, s. 68-70.

[5] Šedivý, O. a kol.: Matematika pre 6. ročník základných škôl (2. časť). Bratislava, SPN, 1999.

Adresa autora:
Mgr. Hana Omachelová
Katedra matematiky PF UMB
Ružová 13
974 11 Banská Bystrica
e-mail: homachelova@pdf.umb.sk

Rôzne pohľady na algoritmy základných operácií.

Edita Partová

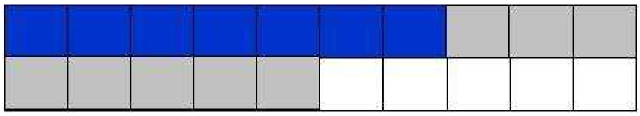
Abstract. *Paper deals with different approaches of teaching algorithms of arithmetical operations, with special emphasis to use different types of counters.*

Úvod

Jednou z kľúčových tém, v učebných osnovách matematiky, na 1. stupni ZŠ sú algoritmy základných operácií. Ciele vyučovania tohto celku sa však menia s meniacim sa technickým rozvojom. Ešte v sedemdesiatych rokoch 20. storočia by nikto nepochyboval o nutnosti pohotového používania písomného počítania, hoci už existovali kalkulačky. Nečakane rýchly rozvoj techniky umožnil rozšírenie kalkulačiek, ale aj osobných počítačov v každej oblasti ľudskej činnosti. Počítanie na papieri vystriedalo počítanie elektronické. Tejto zmene sa musí prispôsobiť aj vyučovanie matematiky. Odborná literatúra v súčasnosti uvádza trojaké algoritmy základných operácií: pamäťové, elektronické a písomné. Rôzne algoritmy vyžadujú rôzne východiskové poznatky a žiak si môže zvoliť algoritmus operácie podľa toho, ktoré poznatky ovláda bezpečne. Pamäťové algoritmy vyžadujú znalosť základných spojov, rozklad jednociferného čísla na súčet, desatinný rozklad, vlastnosti operácie. Písomné algoritmy vyžadujú predovšetkým zápis podľa stanoveného pravidla (zápis uplatňuje desatinný rozvoj), základné spoje, zriedkavejšie sa uplatňujú vlastnosti operácie. Elektronické algoritmy predpokladajú stláčanie tlačidiel na elektronických počítadlách v presne určenom poradí. Výhodné je poznať základné spoje a pravidlá zaokrúhľovania, čo umožňuje rádovo odhadnúť výsledok. Keďže na kalkulačke nemôžeme sledovať priebeh počítania je nutná kontrola výsledkov, k čomu je potrebné poznať vzťahy medzi jednotlivými operáciami V tomto príspevku sa budeme venovať len algoritmom sčítania a odčítania.

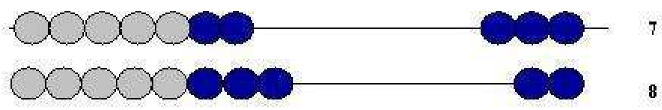
Konštrukcia základných spojov sčítania

Dá sa predpokladať, že súčty jednociferných čísel vnikli na základe modelovania pomocou drobných podmetov neskôr na počítadlách. Historické zdroje ukazujú, že v rôznych krajinách, sa používali rôzne počítadlá a tie ovplyvnili aj spôsob počítania, ktorý pretrval aj pri počítaní bez počítadla. Na Slovensku, ale dá sa povedať, že v celej strednej Európe je najrozšírenejšie stovkové guľôčkové počítadlo, na základných školách sa používa aj dvadsiatkové. Sčítanie a odčítanie na tomto počítadle využíva usporiadanie guľôčok po 10 v jednom rade a predpokladá znalosť všetkých rozkladov desiatky na dva sčítance a rozklady jednociferných čísel. Na obrázku 1 je ukážka základného spoja sčítania s prechodom cez desiatku: $7 + 8 = 15$. Počítadlo znázorňuje štandardný postup pre sčítanie: $7+8=7+(3+5) = (7+3)+5 = 10+5=15$, pričom je zvýraznený spôsob rozkladu čísla 8 tak, aby sa uľahčilo počítanie. Tento postup vyžaduje aj znalosť asociatívneho zákona pre sčítanie.



obrázok 1

Niektoré počítadlá sú vyrobené tak, že v každom rade je 5 a 5 guľôčok zafarbených inou farbou. Táto farebnosť nie je samoúčelná, umožňuje znázorniť ďalší možný postup počítania. Ak ide o sčítanie dvoch jednociferných čísel väčších ako 5, môžeme postupovať takto: $7+8 = (2+5) +(5+3) = 2+ (5 + 5) + 3 = 2 + 10 + 3 =$
$= 10 + 2 +3=10+5=15$. Rozložili sme číslo 7 na 5+2 a číslo 8 na 5+3. Sčítali sme 5+5, (čo je jeden z najľahších základných spojov) a potom 2+3, čo je už spoj bez prechodu cez desiatku. Obrázok 2 znázorňuj tento rozklad, ktorý pracovne nazývame päťkový rozklad.

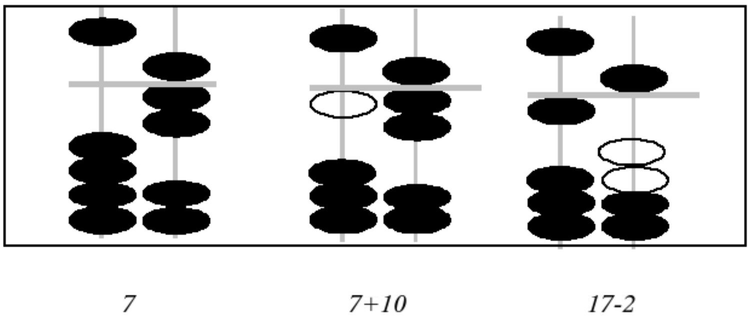


obrázok 2

V ázijských krajinách sa používa iný druh guľôčkového počítadla: rádové počítadlo. Skladá sa z bambusových tyčí s guľôčkami, ktoré sú upevnené v ráme. Stredná vodorovná tyč delí počítadlo na dve časti a slúži na vyznačenie čísel na počítadle. Gulôčky v hornej časti majú hodnotu 5, v dolnej časti majú hodnotu 1. V rôznych stĺpcoch sa vyznačujú číslice rôznych rádov.(pozri obr. 4) Na čínskom suan pan počítadle sú v každom rade 2 päťhodnotové a 5 jednohodnotových guliek, z čoho vyplýva, že tzv. spoje s prechodom tu majú rôzne úrovne. Napríklad úlohu 3 + 4 = 7, ktorú my riešime prisunutím štyroch guliek k trom, na suan pan riešime takto: najprv prisunieme 3 jednohodnotové guľôčky k strednej priečke, ale už nemôžeme pridať ďalšie 4, preto úlohu riešime pridávaním jednej päťhodnotovej guľôčky a odoberaním 1 jednohodnotovej. Matematicky by sme mohli vyjadriť : 3 + 4 = 3 + 5 - 1. Spoj 7 + 8 = 15 sa rieši rozkladom na 5+x s tým, že na tomto počítadle môžeme zameniť 2 päťky za 1 desiatku a 5 jednotiek za 1 päťku. Čínsky abakus sa dostal do Japonska, a časom sa zmenil na Soroban, ktorý obsahuje v hornej časti rámika jednu päťhodnotovú a v dolnej štyri jednohodnotové guľôčky na každej tyči. Základný spoj 7 +8 =15 riešime metódou nahradenie jedného sčítanca desiatkou: 7 + 8 =7 + 10 -2 =17 - 2=15, teda číslo 8 nahradíme číslom 10, lebo 7+10 ľahko sčítame. Mali sme pripočítať len 8, čo je menej ako sme pridali, teda rozdiel musíme ešte odčítať. K tomu, aby sme zistili koľko musíme ešte odčítať od výsledku 17 musíme zistiť rozdiel 10 - 8 (obr. 3). Znázornenie tohto postupu je na našich počítadlách komplikovaný, až nelogický Na sorobane však je jediným možným spôsobom riešenia úlohy: 7+8=15. Ilustrácia je na obrázku 4, kde pohybujúce sa guľôčky sú znázornené bielou farbou.

$$7 + 8 = (7+10) - 2 = 17 - 2 = 15$$
$$7 + 10 = 17$$
$$8 + 2$$

obrázok 3

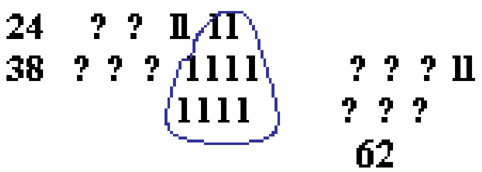


obrázok 4

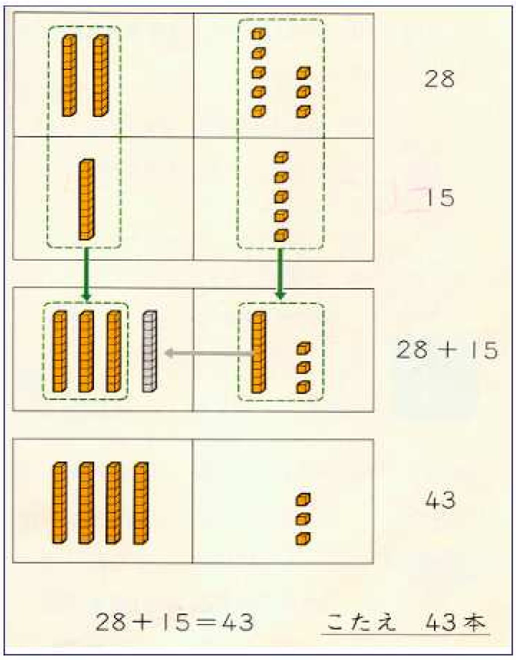
Algoritmy sčítania

Moderná pedagogika preferuje význam porozumenia pred memorovaním, preto aj moderné metódy vyučovania matematiky sa sústreďujú na porozumenie javov a postupov.

Tradičné vyučovanie algoritmov číselných operácií bolo zamerané na precvičovanie algoritmov viacnásobným opakovaním, a porozumenie bolo považované skôr za sprievodný jav ako za cieľ. Porozumenie v elementárnej matematike sa často dosiahne pomocou modelovania a znázornenia. Už od historických dôb sa používali počítadlá na modelovanie matematických výpočtov. Na obrázku 5 je ilustrácia sčítania v starovekom Egypte (24+38), kde vidíme zoskupovanie jednotiek po 10 a nahradenie znakom desiatky. Napriek tomu, že egyptská číselná sústava nebola pozičná (tým sa líši od našej desiatkovej sústavy), princíp zoskupovania používame aj dnes pri konštrukcii postupu sčítania.



obrázok 5

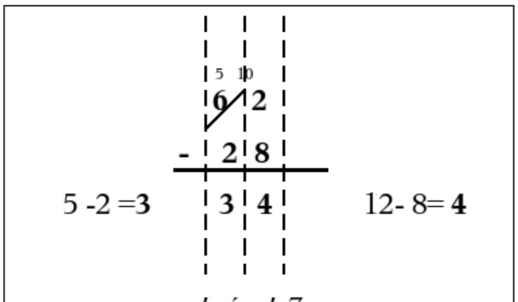


obrázok 6

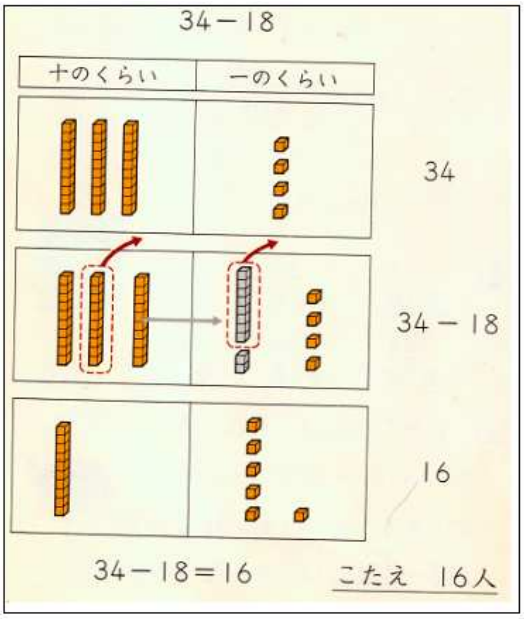
Ďalšia ukážka je z japonskej učebnice a znázorňuje postup sčítania $28 + 15 = 43$ (obr.6). Na modelovanie sa tu používa súprava kociek, tyčiniek a dosiek, zostavená tak, že 1 tyčinka sa skladá z 10 malých kociek a jedna doska z desiatich tyčiniek. Aj v tomto prípade používame zamieňanie 10 jednotiek nižšieho rádu za jednu jednotku vyššieho rádu. Rozdiel medzi dvoma modelmi je v tom, že na obrázku 6 je tyčinka skutočne desaťkrát väčšia ako jedna kocka. Obrázok ukazuje zároveň aj problém znázornenia dynamického modelu na papieri. Postup je znázornený v troch fázach. Tento model je vhodný na prácu so skutočnými predmetmi. Učiteľ by nemal považovať modelovanie za stratený čas, naopak skutočné počítanie prebieha práve počas konštrukcie modelu sčítania.

Algoritmy odčítania

Pochopenie algoritmov odčítania často vystupuje ako prvý problém počas matematického vzdelávania. Žiaci pochopia pojem odčítania spravidla v situáciách, kde ide o odoberanie, ale ďalšie aspekty operácie sú väčšinou osvojené povrchne napr. odčítanie v situáciách dopočítania alebo porovnávania rozdielom. Ani vlastnostiam odčítania sa nevenuje patričná pozornosť. Prílišná snaha dosiahnuť, aby žiaci čo najskôr počítali podľa algoritmu vedie k opakovaniu predvedeného algoritmu bez hlbšieho porozumenia. Ak žiakom dáme možnosť narábať s vhodnými pomôckami, napr. počítadlami, sami by mohli objaviť algoritmus odčítania. Je možné, že ten sa bude líšiť od algoritmu, ktorý používa učiteľ, ale pre žiaka bude významnejší, pretože ho ovláda bezpečne. Pri modelovaní by sa učiteľova činnosť mala obmedziť na riadenie a kontrolu aktivity žiakov. Samozrejme žiak len vtedy môže objaviť nový postup, ak má dostatočné predchádzajúce poznatky o operácií. Spomenieme aspoň vlastnosť zachovania rozdielu : a - b = (a + c) - (b + c). V súčasných učebniciach matematiky sa prezentujú rôzne algoritmy odčítania, čo malo podporiť voľbu najvhodnejšieho algoritmu pre žiaka. Skutočnosť je taká, že žiaci sa učia všetky postupy, naviac musia si ich pamätať podľa rozprávkových postáv (nie podľa podstaty algoritmu). Jednotlivé postupy potom používajú podľa zadania v pracovnom zošite, alebo podľa inštrukcie učiteľa. Uvedieme niekoľko postupov odčítania s prechodom cez desiatku, ktoré by žiaci mohli sami objaviť.



obrázok 7



obrázok 8

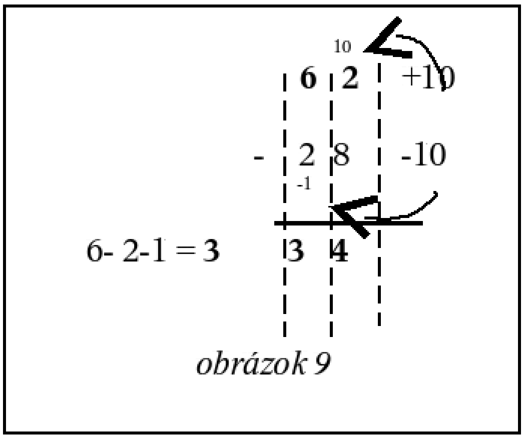
a) Odčítania rozmieňaním

Podobne ako pri sčítaní aj pri odčítaní je často užitočné rozmeniť 1 desiatku na 10 jednotiek. Nasledujúci postup vhodne využíva tento rozklad.

$2-8$ nedá sa, preto si rozmeníme 1 jednotku vyššieho rádu na 10 jednotiek nižšieho rádu: $2 + 10 = 12$. Na mieste desiatok zostalo 5 jednotiek. Odčítame $5 - 2 = 3$. Modelovanie postupu vidíme na obrázku 8.

b) Odčítanie pripočítaním nuly

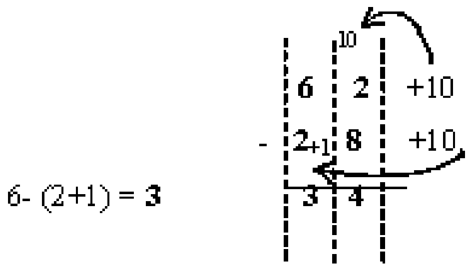
Tento postup sa často považuje za totožný s využívaním zachovania rozdielu pri rovnakom zväčšení dvoch čísel. Teraz ide o pripočítanie a následne o odčítanie desiatky, teda o pripočítanie nuly. 2 - 8= nedá sa riešiť, preto použijeme pravidlo: k číslu 62 pripočítame číslo 10 (jednotiek) a od čísla 28 odčítame to isté číslo, 1 (desiatku). Teraz odčítame:12- 8=4



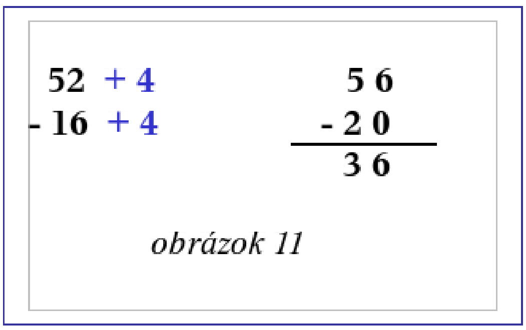
obrázok 9

c) Zväčšiť obidve čísla o 10 jednotiek

Iný prístup k odčítaniu s prechodom cez desiatku je založený na vyššie uvedenej vlastnosti odčítania. Na obrázku 10 je ukážka písomného odčítania 62-28. Podľa štandardného postupu máme odčítať 2 - 8, čo sa nedá riešiť, preto použijeme pravidlo: pripočítame k číslu 62 číslo 10 jednotiek a k číslu 28 to isté číslo, 1 desiatku. Teraz už riešime: 12- 8= 4. V čísle 28 pripočítame k desiatkam 1 desiatku, a odčítame 6-3=3. Tento postup sa najčastejšie používa vo vyučovaní, ale pri vysvetľovaní princípu sa často vyskytujú chyby aj v učebniciach.



obrázok 10



obrázok 11

Na tom istom princípe je založený postup znázornený na obrázku 11. Namiesto desiatky sme pripočítali k obom číslam 4, tak aby sme druhé číslo (16) doplnili na celú desiatku. Tento postup sa dá veľmi názorne modelovať pomôckou znázornenou na obrázkoch 6 a 8.

Elektronické algoritmy

Elektronické počítanie v 21. storočí je realita, ktorú moderné vyučovanie musí akceptovať, a využívať pre didaktické ciele. Na jednej strane sčítanie a odčítanie na kalkulačke vyžaduje len zapamätanie postupu, ktorý je rovnaký pre všetky operácie na rozdiel od pamäťových a písomných algoritmov. Na druhej strane počítajúci musí urobiť skúšku správnosti ak chce mať istotu, že výsledok je správny. Pri ostatných algoritmoch potreba skúšky správnosti nie je tak evidentná, lebo žiak má možnosť kontrolovať každý krok algoritmu. Ak počítame na kalkulačke môžeme kontrolovať len výsledok, najjednoduchšie pomocou inverznej operácie. Narastá význam vzťahov medzi operáciami, ale aj vlastnosti operácií a rádový odhad výsledku. Napríklad pri výpočte rozdielu 50000-18000, úlohu nahradíme úlohou 50-18. Výsledok je približne 30 a podľa analógie výsledok pôvodnej úlohy je približne 30 000. Treba upozorniť na presnosť odhadu. Pri odhade na stovky vznikne chyba 50, ale pri odhade na desaťtisíce odchýlka môže byť až 5000. Príkladom na pozorovanie závislosti môže byť nasledujúca úloha: vypočítaj a pozoruj výsledky: 6-2, 7-3, 8-4, 9-5, 10-6, 11-5.

Záver

Nové technické pomôcky prinášajú nové postupy počítania, umožňujú aj nový pohľad na známe algoritmy alebo podporujú ich zefektívnenie. Učitelia musia neustále hľadať postupy počítania, a požívať pomôcky, ktoré sú pre nové generácie žiakov príťažlivé.

Literatúra

[1] HEJNÝ, M. a kol. .: *Teória vyučovania matematiky 2.*, SPN, Bratislava, 1988.ISBN 80-80-01344-3

[2] IFRAH,G.: *The universal history of numbers*,John Wiley and Sons,New York,2000.ISBN0-471-39340-1

[3] MOLDAVAN, C.: *Culture in the Curriculum:Eriching Numeration and Number Operations,* Teaching Children Mathematics,8/4 2001, PP.238-242.

[4] KAMII,C., LEWIS,B.A, LIVINGSTON,S.J.: *Children Inventing their own Procedures,* Arithmetics Teacher, 41/4 1993, 200-203.

Adresa autora:
Univerzita Komenského v Bratislave
Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a informatiky
Račianska 59
8133 Bratislava
email: partova@fedu.uniba.sk

Konstruktivizmus ve vyučovaní matematice

Jaroslav Perný

Abstract. *V souvislosti s transformací našeho školství, kde za základní jsou považovány kompetence žáků, vyvstává potřeba změn ve výuce. Jednou z možností je konstruktivismus ve vyučování matematice, kdy žák nepřejímá hotové poznatky, ale sám si je vytváří. V příloze jsou ukázky takového přístupu.*

Klíčová slova: *konstruktivismus, kompetence, aktivita, poznatky, řešení problémů, aplikace*

Úvod

V současné době dochází v ČR i SR k transformaci školství, která reaguje na současné potřeby společnosti, zejména v souvislosti se vstupem do Evropské unie a s výzkumy prováděnými OECD. Základními dokumenty pro tyto změny jsou Národní program rozvoje vzdělávání v ČR, tzv. Bílá kniha a Národný program výchovy a vzdelávania SR spolu s koncepcií „Milénium.

V tomto dokumentu jsou za základní považovány klíčové kompetence žáků, což znamená odklon od encyklopedického reprodukování poznatků k vytváření schopností tyto poznatky získávat a používat v praxi. To klade zvýšené nároky na stávající učitele, zejména na jejich kompetence a měly by tomu odpovídat i změny v přípravě budoucích učitelů.

Kompetence žáka – *souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění, zejména pro vytváření způsobilostí přesahujících do mimoškolního prostředí.*

Kompetence učitele – *soubor profesních dovedností a dispozic, kterými by měl být vybaven učitel, aby mohl efektivně vykonávat své povolání a to jak v oblasti odborné předmětové, tak i didakticko-metodické a pedagogicko-psychologické.*

V současné době humanizace vzdělávání zaznívá i ve světě obava, že matematika jako učební předmět může být na školách zrušena. Otázkou je, jak by pak žáci získali kompetence charakteristické a specifické pro vzdělávání v matematice. Materiály OECD uvádějí následující:

1. Matematické myšlení *(pochopení matematických pojmů)*
2. Matematická argumentace *(zdůvodňování a dokazování)*
3. Matematické modelování *(„matematizace“ reality a vytváření struktur)*
4. Vymezení problému a jeho řešení *(strategie a metody)*
5. Znakové reprezentace a jejich transformace *(znázornění objektů)*
6. Symbolika a technické dovednosti *(tzv. „matematická kultura“)*
7. Komunikace *(vyjádření a předávání informací)*

Velký význam zde mají i informační a komunikační technologie využívané ve vyučování matematiky, jako např. správné použití výukových programů pro matematiku, ve kterém jsou mezi školami i učiteli značné rozdíly.

Jednou z možností jak tyto žádoucí změny realizovat v matematice a tím posílit její pozici je konstruktivní přístup v jejím vyučování, kterému je v posledních 10 letech ve světě věnována značná pozornost. Ten vychází z myšlenek konstruktivismu jako směru v psychologii a sociálních vědách druhé poloviny 20. století.

Co je konstruktivistický přístup?

Konstruktivismus pedagogický *vychází ze spojení konstruktivismu kognitivní-ho a sociálního a prosazuje, aby se ve výuce využívalo řešení konkrétních životních problémů, tvořivého myšlení, práce ve skupinách, manipulace s předměty, názorných pomůcek, či interaktivních počítačových programů.*

Aktivními propagátory myšlenek konstruktivismu v naší didaktice matematiky jsou zejména M. Hejný a F. Kuřina, kteří uvádějí, že „matematické poznatky nelze žákům přenést, lze přenést pouze příslušné informace, ale poznatek si musí každý žák vnitřně vytvořit".

Pokud je vyučování matematiky prováděno transmisivně, tj. předáváním hotových poznatků a instrukcí, je to cesta sice poměrně rychlá, může snad rozvíjet paměť, ale neorientuje se na porozumění, nedává podněty k tvořivosti a může snadno vést k formalismu. Může nastat paradoxní situace, že „žák umí řešit úlohu, aniž by jí rozuměl." Řeší ji nápodobou, analogií, často formálně, ale pokud dostane jiný neznámý problém, neumí ho řešit.

Při konstruktivistickém přístupu je žák motivován k aktivitě, k poznávání tím, že jsou mu předkládány problémy a problémové situace jejichž řešením si sám poznatky a poznatkovou strukturu vytváří. Podstatnou složkou aktivita žáka je hledání souvislostí, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Přitom využívá svých zkušeností získaných v běžném životě i ve škole, což zejména tam vyžaduje prostředí a učitele podněcující tvořivost. Značný význam má také komunikace ve třídě s žáky a učitelem i využití dalších medií.

Toto formulovali M. Hejný a F. Kuřina v tzv. „Desateru konstruktivismu":

1. Aktivita *– matematiku chápeme především jako specifickou lidskou aktivitu, nikoli jen jako její výsledek, který se obvykle formuluje do souboru definic, vět a důkazů.*

2. Řešení úloh *– podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Popsaný proces může probíhat v matematice samé nebo v jiné oblasti lidského poznání.*

3. Konstrukce poznatků *– poznatky, nejen matematické, jsou nepřenosné. Přenosné jsou pouze informace. Poznatky vznikají individuálně v mysli poznávajícího člověka.*

4. Zkušenosti *– vytváření poznatků se opírá o informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. U žáků zkušenostmi z reálného života i z příležitostí nabízených ve škole.*

5. Podnětné prostředí *– základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost. Nutným předpo-kladem je tvořivý učitel, dostatek podnětů a příznivé sociální klima třídy.*

6. Interakce *– ačkoli je konstrukce proces individuální, přispívá k jeho rozvo-ji sociální interakce ve třídě (diskuse, formulace, argumentace . . .).*

7. ***Reprezentace a strukturování*** *– pro konstruktivistický přístup k vyučování je charakteristické pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturace matematického světa.*

8. ***Komunikace*** *– pro konstruktivistické vyučování v matematice má značný význam komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.*

9. ***Vzdělávací proces*** *– vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek. První je porozumění matematice, druhé je zvládnutí matematického řemesla, třetí jsou aplikace. Matematiku učíme jejím provozováním.*

10. ***Formální poznání*** *– vyučování transmisivní (předávání informací), nebo instruktivní (předávání návodů) umožňuje reprodukci poznatků, někdy bez porozumění, které se rychle zapomínají a takové poznání je pseudopoznáním, vede k formalismu.*

Jaké je místo konstruktivistického přístupu ve výuce na základní škole?

V. Spilková v příspěvku *Kdo je to učitel a jak má být vzděláván?* uvádí:

„Východiskem současných proměn celoevropského učitelského vzdělávání jsou proměny v pojetí učitelské profese. Učitel je chápán jako facilitátor žákova vývoje a učení, který se snaží dotáhnout každého žáka k jeho osobnímu maximu, uvádí do věcí, pomáhá mu se orientovat, podněcuje ho, vybavuje pocitem kompetence, sebedůvěry, že je ten, kdo umí, kdo dokáže...“

„V tomto pojetí se výrazně zvyšuje učitelova odpovědnost za dítě a výsledky jeho učení v nejširším slova smyslu, rostou nároky na schopnosti učitele analyzovat vlastní činnost, argumentovat své pojetí práce, diskutovat a spolupracovat s kolegy, rodiči i širším sociálním okolím.“

B. Kosová v publikaci *Rozvoj osobnosti žiaka* doporučuje:

„Pro rozvoj personálních a sociálních kompetencí žáků by učitel měl tolerovat (zájmy, potřeby, odlišnosti), podporovat (samostatnost v myšlení a jednání, vztah k poznání, spolupráci), vyžadovat (disciplinu a odpovědnost, hodnocení a sebehodnocení), očekávat a tvořit podmínky (pro otevřenou komunikaci) a odmítat (atmosféru strachu, slepou poslušnost a průměrnost)“.

Možnou odpovědí na tyto výzvy je právě konstruktivistická koncepce přípravy učitelů, která představuje klíčové teoretické východisko současných proměn učitelského vzdělávání. Je zde kladen důraz na osobnostní růst, na proces aktivního konstruování a tvořivého osvojování učitelské profese na základě vlastní činnosti, vlastních zkušeností a prožitků, sebepoznávání a objevování studentů ve spolupráci s učiteli a ostatními studenty.

Podle V. Spilkové

*„**Konstruktivistický přístup** ke vzdělávání znamená radikální obrat v nahlížení na procesy učení, na smysl školy, cíle školního vzdělávání, na role učitele a žáka, na pojetí vhodných vyučovacích a učebních strategií.“*

*„**Učení** je chápáno jako proces objevování, konstruování a rekonstruování poznatků, postojů, dovedností, hodnot na základě vlastní činnosti a dosavadní zkušenosti žáků s pomocí učitele a v kooperaci se spolužáky. Klade se důraz na porozumění a schopnost použití poznatků k řešení problémů v situacích reálného života, na posilování odpovědnosti žáků za vlastní učení se ap.“*

Rozvíjení tvořivosti a poznávání pomocí konstruktivistických přístupů je založeno na dvou základech. Prvním je rozdělení poznávacích procesů na konvergentní a divergentní, druhým je rozdělení postupů řešení problémů na algoritmické a heuristické. I když je matematika svým charakterem disciplinou, která při poznávání a řešení problémů využívá spíše konvergentní procesy a algoritmické postupy, přesto se zejména při seznamování s ní a jejím „objevování", které probíhá právě na základní škole, výrazně využívají divergentní přístupy a jsou uplatňovány heuristické postupy a tvořivé činnosti. Je to nejen proto, aby žáci lépe chápali matematiku, měli ji rádi a byli silněji motivováni, ale i proto, aby se formovaly matematické schopnosti, které mohou být základem pro tvořivé řešení životních a pracovních problémů. V tomto smyslu nejsou konvergence a divergence, resp. algoritmus a heuristika opozita, ale spíše procesy aditivní a simultánní.

Řešení problémů je komplexní činnost využívající postupy algoritmické, heuristické a činnostní. Z toho vyplývá, že ve výuce matematiky by měl učitel uplatňovat problémy blízké reálnému životu, kde se tyto procesy střídají.

Proč se myšlenky konstruktivismu v naší škole (zatím) nedaří naplňovat?

Již v sedmdesátých a osmdesátých letech 20. století oficiální školské materiály od učitele požadovaly, aby učil tvořivě, rozvíjel logické myšlení žáků, odboural memorování, zvyšoval potřebu žáků po porozumění apod.

Dnes jsou naše znalosti o možnostech změnit kvalitu vyučování daleko rozsáhlejší, ale jejich pronikání do škol je velice pomalé. Domnívám se, že někteří učitelé nejsou na tyto konstruktivistické přístupy k vyučování připraveni. Souvisí to i s dosavadním způsobem prověřování žákovských kompetencí, např. při přijímacích zkouškách na střední školy. Učitelé dají přednost přímé přípravě žáků na tyto zkoušky před náročnějším „kultivováním" jejich matematického myšlení.

Ukazují se dvě hlavní příčiny tohoto jevu. První tkví v setrvačnosti školského systému, druhá v určité apatii společnosti směrem k významu školy pro vlastní vývoj. Zkvalitňování vyučování je totiž bytostně závislé na kvalitě učitele a společnost zatím nedokáže pro jejich náročnou profesi a přípravu vytvořit patřičné podmínky.

To do určité míry potvrzuje již zmíněný příspěvek V. Spilkové:

„Strategie přípravného a dalšího vzdělávání učitelů patří k bílým místům ve vzdělávací politice a nejméně řešeným otázkám v celkovém kontextu transfor-mace českého školství. Neexistuje základní koncepční materiál, který by v jako standard formuloval požadavky na kvalitu absolventů učitelství a rámcově vymezil jejich přípravu. Není to konkretizováno ani ve zmíněné Bílé knize, což spolu s autonomií vysokých škol způsobilo živelný až chaotický vývoj. Navíc, pravděpodobně v souvislostí s požadavky akreditace a snahy konkurovat „oborovým" fakultám, dochází na pedagogických fakultách k dalšímu posilování oborové složky studia na úkor profesní, což situaci spíše zhoršuje."

Jak směrovat studenty-budoucí učitele ke konstruktivismu ve výuce?

Je známo, že edukační styl, který si učitel vytvoří v prvních letech svého pedagogického působení, je více ovlivněn vzory pedagogů, kteří budoucího učitele učili, než teorií, kterou mu nabídne vysoká škola.

Je proto třeba, aby se studenti i při svém studiu na fakultě setkávali s konstruktivistickým přístupem, aby jim byl umožněn prožitek z vlastního vytváření nových poznatků metodami a formami, které budou sami využívat při výuce svých žáků. Při výkladu bychom měli vysokoškolskou matematiku propojovat s tou, kterou budou budoucí učitelé učit. Při seminářích studentům nepředkládat hotové poznatky, ale vést je k tomu, aby je sami odhalovali.

Jsou to např. heuristické a badatelské metody problémového vyučování, metoda zkoumání při řešení problémů (propagovaná prof. J. Kopkou), projektové vyučování, apod.

V kurzech vysokoškolské přípravy předmětů matematika a didaktika matematiky snažím, aby studenti učitelství mohli uplatnit a dále rozvíjet svou tvořivost jako významnou profesní kompetenci učitele, aby si mohli osvojit principy konstruktivistického přístupu k výuce matematiky.

Jsou to např. semestrální práce studentů, kde jako téma mohou volit buď matematickou pohádku nebo projekt. Projekt může být matematický, ale většinou integruje matematiku s dalšími předměty. Matematická pohádka slouží k motivaci, kdy matematické úlohy nebo matematické poznatky jsou žákům předkládány v netradičním „hávu“. Některé texty bývají i veršované.

Často se stává, že tento projekt či pohádka studenta natolik zaujme, že přeroste v diplomovou práci, včetně praktické realizace s žáky. Některé zvláště zdařilé a technicky kvalitní práce byly přímo přijaty do tisku pro učitelskou veřejnost. *(„Po stopách Robinsona Crusoe“, „Lesní hrátky s matematikou“).* Jiné byly velmi úspěšné v republikovém kole SVOČ *(„Matematická soutěž s Křemílkem a Vochomůrkou“, „Projekt – prostorová představivost“, „Geometrické hry pro utváření představivosti žáků na 1. stupni ZŠ“).*

Ukázky projektů a pohádek studentů a problémové úlohy pro studenty jsou v příloze.

Závěr

Zpráva České inspekce v prosinci 2004 konstatuje poměrně dobrou kvalitu výuky matematiky na 1. stupni ZŠ a znepokojující situaci na 2. stupni a výše. To potvrzují i naše výzkumy, které ukazují, že matematika na 1. stupni ZŠ je většinou druhý nejoblíbenější předmět po tělesné výchově, ale její oblíbenost v páté a zejména ve vyšších třídách klesá. Jistě to souvisí i s rostoucí obtížností matematiky, ale také se zde používanými metodami a formami práce, které někdy přestávají být ve vyšších třídách aktivizující a konstruktivistické.

Literatúra

[1] Burešová, J., Pilařová, R.,: *Semestrální práce.* TU Liberec, 2000, 2002.

[2] Hejný, M, Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2001.

[3] Kosová, B.: *Rozvoj osobnosti žiaka.* Rokus, Prešov 2000.

[4] Perný, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* TU Liberec 2004.

[5] Spilková, V.: *Kdo je to učitel a jak má být vzděláván?* Konference PedF UK Praha 2005.

Příloha:

MPP1 ***Burešová Jana (2.st. ZŠ):*** **O nenasytné osožravé přímce**

Bylo jednou jedno Osově souměrné království v rovině, kde žily jen osově souměrné geometrické útvary. Vládl zde král Čtverec se ... osami souměrnosti, spolu s královnou Rovnostranný trojúhelník, která měla ... osy souměrnosti. Všichni dvořané, obdélníky se ... osami souměrnosti, i poddaní, rovnoramenné trojúhelníky s ... osou souměrnosti, se měli spolu rádi a žili šťastně.

Náhle se v království objevila nenasytná a zlá osožravá přímka. Ačkoliv přímka vede od ... do ..., rozhodla se být ještě delší, a tak začala krást geometrickým útvarům království jejich osy souměrnosti. V království nastal zmatek, z osově souměrných útvarů, např.: ... nebo ..., se stávaly nesouměrné obecné geometrické útvary.

Zlá novina o nenasytné osožravé přímce se dostala i na královský zámek. Král Čtverec vyhlásil, že kdo zlou přímku přemůže, dostane tučnou odměnu. První se přihlásil statný rovnoramenný lichoběžník, s ... osou souměrnosti, ale než se stačil rozhlédnout, sebrala mu přímka jeho osu souměrnosti a byl z něho obecný nesouměrný lichoběžník. Další odvážlivec byl kosočtverec se ... osami souměrnosti, ale i ten byl brzy přímkou obelstěn a okraden o osy souměrnosti, takže se z něj stal nesouměrný ... .

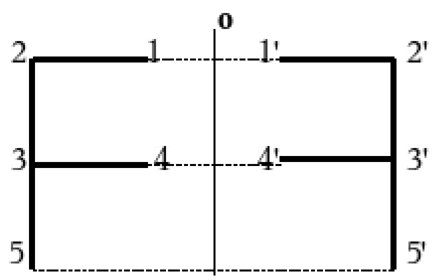
Až nakonec se objevil cizí udatný princ, který se dal do boje s přímkou. Vždy když mu nenasytná přímka sebrala osu souměrnosti, nabídl ji další. Měl jich tolik, že to přímka vzdala a odešla pryč z tohoto království.

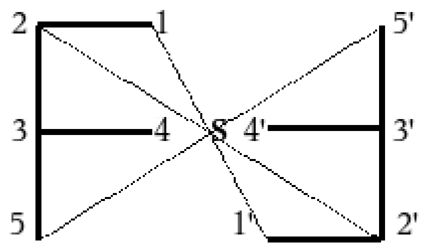
Jakým rovinným geometrickým útvarem byl udatný princ?

MPR1 ***Pilařová Radka (2.st.ZŠ):*** **Souměrnosti**

Projekt: Didaktická hra a soutěž

Aktivita: Žáci jsou vyzváni, aby napsali na tabuli hůlkovým písmem abecedu velkých písmen bez čárek a háčků. Učitel navrhne její rozdělení na dvě skupiny, hranatá (A,E,F,H,...) a oblá (B,C,D,...). Pak vybere jedno písmeno z hranatých (např. F) a dva z žáků provedou zobrazení tohoto písmene v osové, resp. středové souměrnosti na tabuli, ostatní žáci do sešitu. (viz obr.)





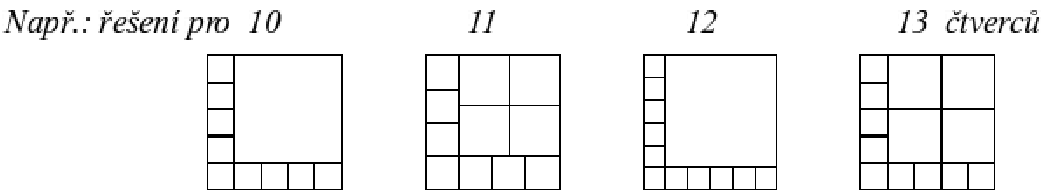
Pak si žáci rozdělení do skupin po 4 vylosují lístek se dvěma 4 písmennými jmény, rozdělí si mezi sebou písmenka a zobrazí je u prvního jména v osové souměrnosti a u druhého jména ve středové souměrnosti. Skupina, která zobrazí písmena správně a nejrychleji vítězí.

Nabízené dvojice jmen: NELA - EMIL, HANA - IVAN, ZITA - ALAN, NINA - ALEX, ZINA - ILEK, ANNA - KLEM, LENA – MIKA.

PÚ1 ***Problémová úloha pro studenty:*** **Dělení čtverců na čtverce**

Pokuste se postupně rozdělit čtverec na 1, 2, 3, ... až 16 čtverců (nemusí být stejně velké). Lze získat všech 16 možností?

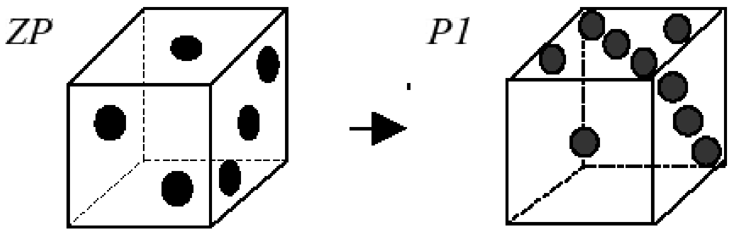
Lze čtverec rozdělit na jakýkoliv počet čtverců vyšších než 16?
Je možno tuto hypotézu dokázat?



PÚ2 ***Problémová úloha pro studenty:*** **Odvalování hrací kostky**

Zkoumejte „Odvalování hrací kostky" jako algebraickou strukturu, kde množinou jsou pohyby při odvalení hrací kostky a operací je skládání odvalení. Pro popis pohybů lze využít permutace. Pokud stěny hrací kostky označíme hodnotami, které mají a stanovíme pořadí stěn horní (H), přední (Ř), pravá (P), levá (L), zadní (Z) a dolní (D), pak např. odvalení ze základní polohy ZP dopředu přes dolní přední hranu do polohy P1 se dá popsat pomocí permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$



Označte pohyby dopředu na jih (J), dozadu sever (S), doprava východ (V), doleva západ (Z), bez pohybu identita (I) a skládání (?).

Zkoumejte vlastnosti této algebraické struktury, např. úplnost, komutativnost, neutrální prvek apod.

Zkoumejte, jakému zákrytovému pohybu krychle odpovídají jednotlivá odvalení a jejich skládání, např.

Odvalení JV odpovídá permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

která je rotací kostky kolem *tělesové úhlopříčky určené vrcholy CE o úhel +120*^{0}. *Označíme* R_{CE}^{+120}.

Adresa autora:
Pedagogická fakulta
Technická univerzita v Liberci
Hálkova 6
461 17 Liberec
e-mail: jaroslav.perny@tul.cz

Geometrická prezentácia pravdepodobnostného priestoru a pravdepodobnosť udalosti ako obsah útvaru

Adam Płocki

Abstract. *We propose a process of visualization of a discrete probability space and a process of its construction. Probability can be viewed as a measure of extent.*

In our case probability is presented as a volume.

Diskrétny pravdepodobnostný priestor a na útvar nanesená sieť ako jeho geometrická prezentácia

Definícia 0-1.. Nech $s \in \mathbb{N}_2$ a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$. *Rozdelením pravdepodobnosti na množine* Ω nazývame každú nezápornú funkciu $p: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ takú, že $p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \cdots + p(\omega_s) = 1$.
Ak $p(\omega_1) = p(\omega_2) = p(\omega_3) = \cdots = p(\omega_s) = \frac{1}{s}$, tak funkciu p nazývame *klasickým rozdelením pravdepodobnosti na množine* Ω.

Definícia 0-2.. Predpokladajme, že Ω je ľubovoľnou s-prvkovou množinou ($s > 1$) a že p je rozdelením pravdepodobnosti na tejto množine. Nech $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$. Uvažujme o funkcii $P : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, pričom pre $A \in \mathcal{Z}$

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{ak } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{ak } A = \{\omega\}, \\ \displaystyle\sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{ak } A \text{ je aspoň dvojprvkovou množinou.} \end{cases}$$

Trojica $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, ktorá týmto spôsobom vznikla z dvojice (Ω, p), je pravdepodobnostným priestorom v zmysle axiomatickej definície pravdepodobnostného priestoru (pozri [9], s. 124). Takú trojicu alebo dvojicu (Ω, p) – čo je ekvivalentné – nazývame *diskrétnym pravdepodobnostným priestorom.* Ak sú všetky hodnoty funkcie p kladné, tak dvojicu (Ω, p) nazývame *netriviálnym pravdepodobnostným priestorom.* Ak p je klasickým rozdelením pravdepodobnosti na množine Ω, potom dvojicu (Ω, p) nazývame *klasickým pravdepodobnostným priestorom.*

V tomto článku sa zaoberáme iba dvojicami (Ω, p), v ktorých je množina Ω konečná. Takéto dvojice nazývame *konečné pravdepodobnostné priestory.*

Definícia 0-3.. Nech $\mathcal{F}$ označuje súbor útvarov v rovine, ktoré majú obsah. Ak $A \in \mathcal{F}$, potom $m_2(A)$ označuje obsah útvaru A a $int(A)$ jeho vnútro. Predpokladajme, že $S = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$, pričom $s \in \mathbb{N}_2$ a platí, že
(i) $F \in \mathcal{F}$ a $0 < m_2(F) < +\infty$,
(ii) $\forall j \in S: \ [F_j \subset F \wedge F_j \in \mathcal{F} \wedge m_2(F_j) > 0]$,
(iii) $\forall j, k \in S: \ [j \neq k \Longrightarrow int(F_j) \cap int(F_k) = \emptyset]$,
(iv) $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_s = F$.
Množinu $\Omega = \{F_j : j \in S\}$ nazývame *sieťou nanesenou na útvar* F a jej prvky (útvary F_j) *okami* tejto siete.

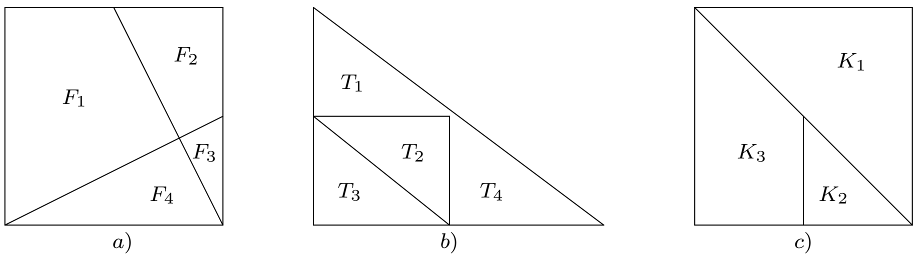
Definícia 0-4.. Nech množina $\{F_j : j \in S\}$ je sieť nanesená na útvar F s kladným obsahom. Funkcia $p : \{F_j : j \in S\} \longrightarrow (0, +\infty)$, pričom

$$p(F_j) = \frac{m_2(F_j)}{m_2(F)} \quad \text{pre} \quad j \in S, \tag{4}$$

je rozdelením pravdepodobnosti na množine $\Omega = \{F_j : j \in S\}$. Dvojicu (Ω, p) nazývame *diskrétnym pravdepodobnostným priestorom generovaným sieťou nanesenou na útvar* F.

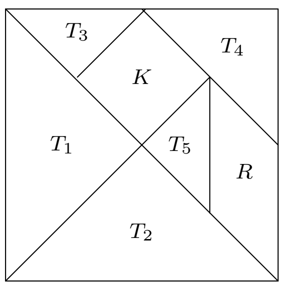
■ Na obrázku 1 sú tri pravdepodobnostné priestory generované sieťami nanesenými na tri útvary s kladným obsahom. Pravdepodobnostný priestor generovaný sieťou nanesenou na štvorec na obrázku 1c) je dvojicou (Ω_c, p_c), pričom

$$\Omega_c = \{K_1, K_2, K_3\} \text{ a } p_c(K_1) = \tfrac{1}{2}, \;\; p_c(K_2) = \tfrac{1}{8}, \;\; p_c(K_3) = \tfrac{3}{8}\ .$$

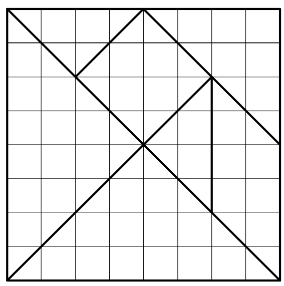


Obr. 1. Útvary s nanesenými sieťami ako prezentácia konečných pravdepodobnostných priestorov

Inšpiráciou takejto geometrickej idey tvorenia (konštruovania) netriviálnych diskrétnych pravdepodobnostných priestorov boli detské skladačky, z ktorých najznámejšou je tangram (por. [1] a pozri obrázok 2).



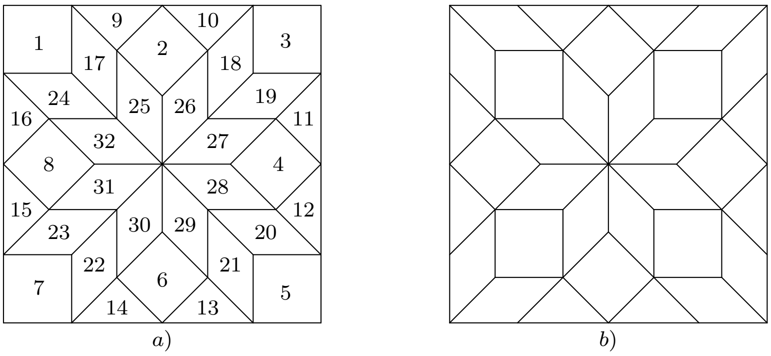
Obr. 2. Tangram so siedmymi tanami



Obr. 3. Obsahy tanov

■ Tangram z obrázku 2 vznikol nanesením siete na štvorec. Okami tejto siete sú: trojuholníky T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, štvorec K a rovnobežník R. Tieto oká sa nazývajú *tany*. Ak východiskový štvorec má obsah 1, potom funkcia p_T, ktorá každému tanu priraďuje jeho obsah, je rozdelením pravdepodobnosti na množine $\Omega_T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, K, R\}$. Dvojica (Ω_T, p_T) je teda netriviálnym diskrétnym prevdepodobnostným priestorom. Určenie funkcie p_T je geometrickou úlohou. Obrázok 3 poskytuje nápovedu jednej z idey jej riešenia.

■ Na obrázku 4 sú dve skladačky, ktoré vznikli rozrezaním štvorca na 32 častí. Pozrime sa na každú z týchto skladačiek ako na sieť nanesenú na jednotkový štvorec. Určiť pravdepodobnostné priestory generované týmito sieťami v podstate znamená vypočítať obsahy niektorých útvarov, a teda ide o geometrickú úlohu.



Obr. 4. Dve skladačky ako niektoré verzie tangramu

V uvedenom kontexte to znamená, že na určenie netriviálneho diskrétneho pravdepodobnostného priestoru stačí na jednotkový štvorec naniesť sieť, ktorej okami sú útvary s kladným obsahom.

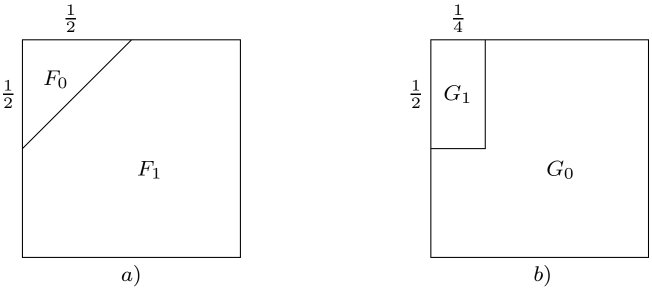
Ekvivalencia útvarov vzhľadom na rozklad a ekvivalencia pravdepodobnostných priestorov

Definícia 0-5.. Pravdepodobnostné priestory (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) sa nazývajú *ekvivalentnými*, ak existuje bijekcia g z množiny Ω_1 na množinu Ω_2 taká, že

$$\forall \omega \in \Omega_1 \ \forall \overline{\omega} \in \Omega_2 : \ [\overline{\omega} = g(\omega) \Longrightarrow p_2(\overline{\omega}) = p_1(\omega)] \, .$$

O bijekcii g budeme hovoriť, že *určuje ekvivalenciu* a že *zachováva pravdepodobnosť.*

■ Je možné dokázať, že dva pravdepodobnostné priestory generované dvoma sieťami nanesenými na štvorce na obrázku 4 sú ekvivalentné.



Obr. 5. Dva ekvivalentné pravdepodobnostné priestory ako geometrické objekty

■ Dva pravdepodobnostné priestory generované sieťami na obrázku 5 sú ekvivalentné. Bijekcia, ktorá určuje túto ekvivalenciu, je funkcia g z množiny $\{F_0, F_1\}$ na množinu $\{G_0, G_1\}$, pričom

$$g(F_j) = G_{1-j} \text{ pre } j = 0, 1.$$

Dva klasické pravdepodobnostné priestory (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) sú ekvivalentné vtedy a len vtedy, ak množiny Ω_1 a Ω_2 majú rovnakú mohutnosť.

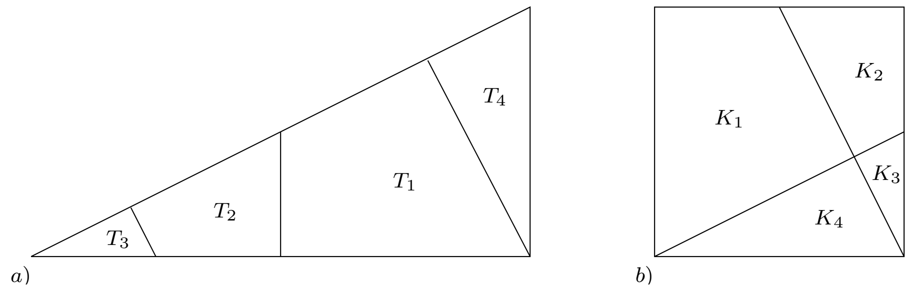
Definícia 0-6.. Nech $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ a $s \in \mathbb{N}_2$. Hovoríme, že útvar F so sieťou $S_F = \{F_j : j \in S\}$ a útvar G so sieťou $S_G = \{G_k : k \in S\}$ sú *ekvivalentné vzhľadom na rozklad*, ak existuje bijekcia g z množiny S_F na množinu S_G taká, že pre každé $j \in S$, ak $G_j = g(F_j)$, tak oko G_j je obrazom oka F_j v zhodnom zobrazení (izometrii), ktoré je otočením, posunutím, alebo ich zložením.

■ Útvarmi ekvivalentnými vzhľadom na rozklad sú trojuholník T so sieťou $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ a štvorec K so sieťou $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ na obrázku 6. Bijekciou je v tomto prípade funkcia g z množiny $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ na množinu $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, určená predpisom

$$g(T_j) = K_j \quad \text{pre} \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

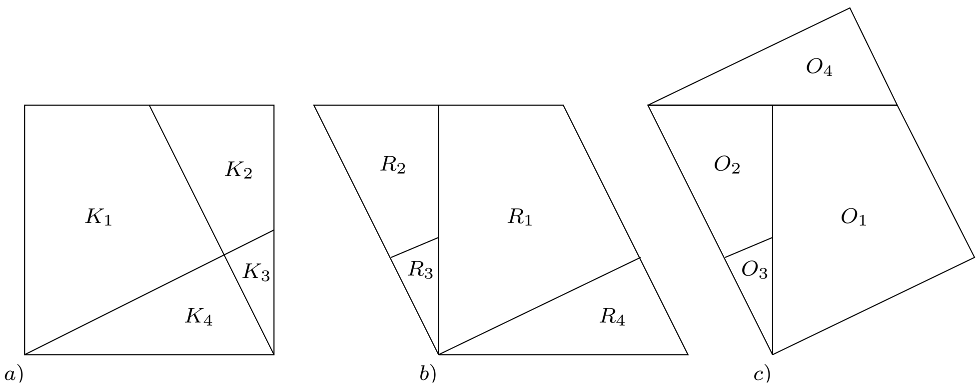
Dôkaz tohto faktu je geometrickou úlohou. Ideu matematickej argumentácie môžu žiakovi napovedať konkrétne manipulácie s modelmi týchto útvarov. Ide o rozrezanie modelu trojuholníka podľa čiar siete a skladanie štvorca z takto získaných ôk.

■ Dva štvorce so sieťami na obrázku 4 sú útvarmi ekvivalentnými vzhľadom na rozklad.



Obr. 6. Trojuholník T so sieťou a štvorec K so sieťou ako útvary ekvivalentné vzhľadom na rozklad

Ak dva útvary so sieťami sú ekvivalentné vzhľadom na rozklad, potom pravdepodobnostné priestory generované sieťami nanesenými na útvary sú ekvivalentné.



Obr. 7. Štvorec K so sieťou, rovnobežník R so sieťou a obdĺžnik O so sieťou ako útvary ekvivalentné vzhľadom na rozklad

■ Na obrázku 7 sú tri útvary so sieťami, každé dva z nich sú ekvivalentné vzhľadom na rozklad. Každý zo spomínaných útvarov so sieťou generuje diskrétny netriviálny pravdepodobnostný priestor. Každé dva z týchto priestorov sú ekvivalentné. Určenie každého z týchto priestorov ako dvojicu (Ω, p) je geometrickou úlohou na výpočet obsahu niektorých útvarov.

Diskrétny náhodný pokus a jeho stochastický model

□ [DISKRÉTNY NÁHODNÝ POKUS] *Diskrétnym náhodným pokusom* nazývame experiment (reálny alebo pomyselný), o ktorého priebehu i výsledku rozhoduje iba náhoda, pričom množina možných výsledkov tohto experimentu je konečná alebo spočítateľná a pre každý výsledok je možné určiť *a priori* pravdepodobnosť s akou sa experiment skončí týmto výsledkom. (pozri [3], s. 16 – 17 a tiež [6], s. 13).

Na vyučovacích hodinách sa zaoberáme reálnymi náhodnými pokusmi, pretože žiak také pozná z rôznych hier, s takými sa stretáva v kontexte rôznych činností spojených s losovaním prvku z niektorej množiny (vyčítanka pred naháňačkou, losovanie jednej osoby zo súboru s osôb pomocou zápaliek, atď.) Na hodinách geometrie v základnej škole sa hovorí o liste papiera alebo doske stola ako o obdĺžniku, futbalová lopta sa nazýva guľou a zápalková krabička je príkladom kvádra. Tieto konkrétne objekty umožňujú správne porozumieť podstatným vlastnostiam (už) matematických objektov ako obdĺžnik, guľa alebo kváder.

■ Pomyselným diskrétnym náhodným pokusom je hod symetrickou mincou. Hod konkrétnou mincou (a takou hádže žiak vo svojich hrách) je reálnym náhodným pokusom. Diskrétnymi náhodnými pokusmi sú:
— n-násobný hod mincou,
— opakovanie hodu mincou tak dlho až padne rub,
— opakovanie hodu mincou tak dlho až rub padne trikrát za sebou,
— n-násobný hod kockou,
— opakovanie hodu kockou tak dlho až prvý krát padne šestka (takýmto náhodným pokusom sa začína hra „Človeče, nehnevaj sa“).

□ [STOCHASTICKÝ MODEL DISKRÉTNEHO NÁHODNÉHO POKUSU] Diskrétny pravdepodobnostný priestor (Ω, p) nazývame *stochastickým modelom diskrétneho náhodného pokusu* δ (alebo kratšie *stochastickým modelom pokusu* δ), ak Ω je množinou všetkých možných výsledkov pokusu δ, pričom funkcia p každému výsledku priraďuje pravdepodobnosť s akou sa pokus δ môže skončiť týmto výsledkom (por. [7], s. 26 a 37).

Stochastickým modelom diskrétneho náhodného pokusu je klasický pravdepodobnostný priestor vtedy a len vtedy, ak všetky výsledky tohto náhodného pokusu sú rovnako pravdepodobné.

■ [STOCHASTICKÝ MODEL LOSOVANIA GULE Z URNY U] V urne U sú štyri biele gule, tri červené a jedna zelená. Losovanie gule z tejto urny U je náhodným pokusom δ_U s troma možnými výsledkami:

ω_b: `vylosovaná guľa bude biela`,

ω_c: `vylosovaná guľa bude červená`,

ω_z: `vylosovaná guľa bude zelená`.

Stochastickým modelom tohto losovania δ_U je dvojica (Ω_U, p_U), pričom

$$\Omega_U = \{\omega_b, \omega_c, \omega_z\} \quad \text{a} \quad p_U(\omega_b) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2},\ p_U(\omega_c) = \tfrac{3}{8},\ p_U(\omega_z) = \tfrac{1}{8}.$$

Pravdepodobnostné priestory (Ω_U, p_U) a (Ω_c, p_c), t. j. pravdepodobnostný priestor generovaný sieťou na obrázku 1c), sú ekvivalentné. Bijekcia, ktorá určuje túto ekvivalenciu, je funkcia $g : \Omega_U \longrightarrow \Omega_c$, pričom

$$g(\omega_b) = K_1, \quad g(\omega_c) = K_3 \quad \text{a} \quad g(\omega_z) = K_2.$$

Pravdepodobnostné priestory pripomínajú hotové „obleky“. Počet pravdepodobnosti ako časť matematiky sa zaoberá ich tvorbou, t. j. ich „šitím“, nezávisle od toho či sú, alebo nie sú modelmi nejakých náhodných pokusov. Pre daný náhodný pokus sa z tejto „kolekcie oblekov“ vyberá „oblek, ktorý sedí“. Takto postupujú technici, ekonómovia, sociológovia, ktorí v svojich výskumoch používajú stochastické metódy (ide o fázu matematizácie v procese používania matematiky.) Ale najčastejšie pre daný náhodný pokus sa „oblek, ktorý sedí“ (a teda jeho stochastický model) „šije na mieru“. Toto „šitie na mieru“ (ako je ukázané v [6] a [9]) môže byť široko chápanou matematickou aktivitou.

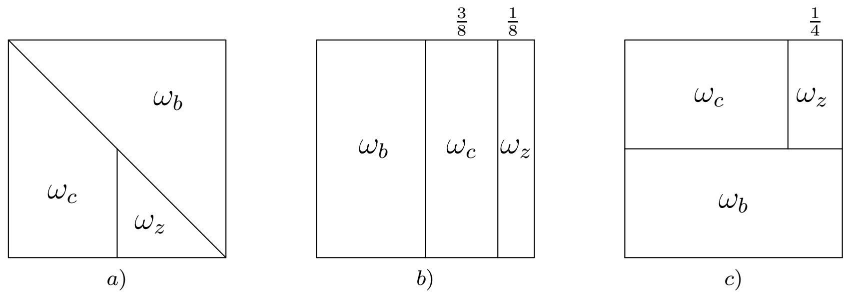
Tangram pravdepodobnostného priestoru ako jeho geometrická prezentácia

Pravdepodobnosť priradená výsledku diskrétneho náhodného pokusu je niektorou mierou tohto výsledku, ktorú môžeme interpretovať (a súčasne vizualizovať) ako obsah.

□ [TANGRAM PRAVDEPODOBNOSTNÉHO PRIESTORU] Nech (Ω, p) je netriviálny pravdepodobnostný priestor. Prvky množiny Ω intrepretujme ako oká siete nanesenej na štvorec s obsahom 1 (alebo kratšie jednotkový štvorec) takým spôsobom, že pre každé $\omega \in \Omega$, číslo $p(\omega)$ je obsahom oka ω. Jednotkový štvorec s takto nanesenou sieťou nazývame *tangram pravdepodobnostného priestoru* (Ω, p).

Ak dvojica (Ω, p) je pravdepodobnostný priestor generovaný sieťou nanesenou na jednotkový štvorec, potom je tento štvorec so sieťou súčasne tangramom tohto pravdepodobnostného priestoru.

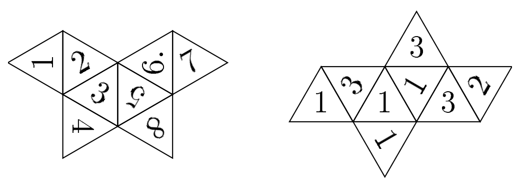
■ Štvorec so sieťou na obrázku 1*c*) je tangramom pravdepodobnostného priestoru (Ω_c, p_c) generovaného touto sieťou. Na obrázku 8 je tangram pravdepodobnostného priestoru (Ω_U, p_U), čiže stochastického modelu losovanie gule z urny U.



Obr. 8. Tri tangramy pravdepodobnostného priestoru (Ω_U, p_U)

Každý netriviálny pravdepodobnostný priestor (Ω, p) môžeme predstaviť pomocou jeho tangramu. Tento tangram je geometrickou prezentáciou tohto priestoru (pozri [10]) a súčasne didaktickým prostriedkom, ktorý umožňuje vizualizáciu takých abstraktných pojmov počtu pravdepodobnosti ako udalosť a jej pravdepodobnosť.

■ [TANGRAM STOCHASTICKÉHO MODELU HODU KOCKOU $K_{1\to 8}$] Uvažujme o kocke $K_{1\to 8}$, na ktorej stenách sú rozmiestnené čísla od 1 do 8 (jej telesová sieť je vľavo na obrázku 9). Výsledkom hodu takouto kockou je číslo na hornej stene po hode kockou (padnuté číslo).

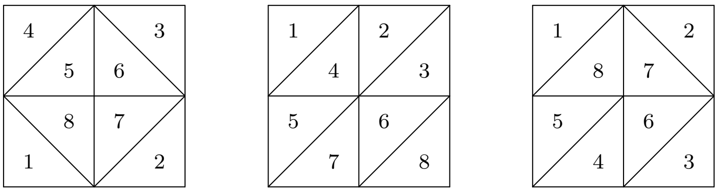


Obr. 9. Siete dvoch osemstenných kociek: $K_{1\to 8}$ a $K_{11112333}$

Stochastickým modelom hodu kockou $K_{1\to 8}$ je pravdepodobnostný priestor (Ω_K, p_K), pričom

$$\Omega_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ a } p_K(j) = \tfrac{1}{8} \text{ pre } j \in \Omega_K.$$

Tri tangramy tohto klasického pravdepodobnostného priestoru (Ω_K, p_K) sú na obrázku 10.



a) b) c)

Obr. 10. Tri tangramy stochastického modelu hodu kockou $K_{1\to 8}$

■ Na obrázku 9 vpravo je sieť kocky $K_{11112333}$. Stochastickým modelom hodu touto kockou $K_{11112333}$ je pravdepodobnostný priestor (Ω_8, p_8), pričom

$$\Omega_8 = \{1,2,3\} \quad \text{a} \quad p_8(1) = \tfrac{4}{8},\ \ p_8(2) = \tfrac{1}{8},\ \ p_8(3) = \tfrac{3}{8}.$$

Pravdepodobnostné priestory (Ω_8, p_8) a (Ω_c, p_c) (t. j. priestor generovaný sieťou na obrázku 1c) sú ekvivalentné. Bijekciou, ktorá určuje túto ekvivalenciu, je funkcia $g : \Omega_c \longrightarrow \Omega_8$, pričom

$$g(K_j) = j \quad \text{pre} \quad j = 1,2,3.$$

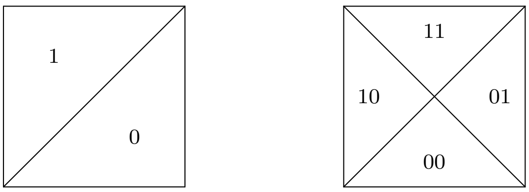
So spomínaným konštruovaním tangramu pravdepodobnostného priestoru generovaného sieťou nanesenou na útvar s kladným obsahom sa môžu spájať konkrétne operácie na modeloch útvarov a sietí. Takéto konrétne činnosti, pripomínajúce skladanie puzzle, môžu inšpirovať myšlienkové operácie, podieľajúce sa na konštrukcii tangramu ako matematického objektu.

Stochastické modely náhodných pokusov uskutočňovaných pomocou mince a ich tangramy

■ [STOCHASTICKÝ MODEL HODU MINCOU] Výsledky hodu mincou kódujme číslicami:
0: `padne líce`,
1: `padne rub`.
Stochastickým modelom hodu mincou je pravdepodobnostný priestor (Ω_M, p_M), pričom

$$\Omega_M = \{0,1\} \quad \text{a} \quad p_M(0) = p_M(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Tangram stochastického modelu hodu mincou, t. j. pravdepodobnostného priestoru (Ω_M, p_M), je na obrázku 11a).



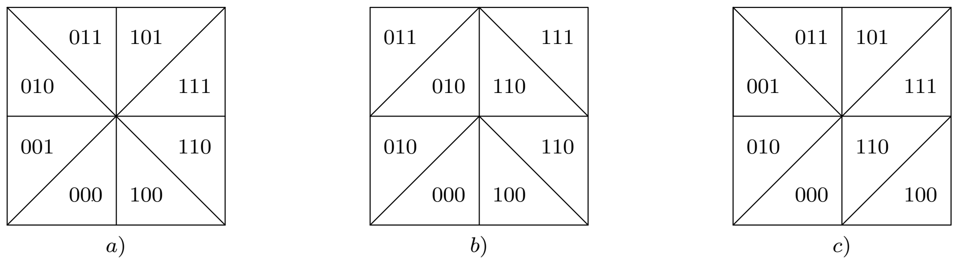
a) b)

Obr. 11. Tangramy stochastického modelu hodu mincou a modelu dvojnásobného hodu mincou

■ [STOCHASTICKÝ MODEL n-NÁSOBNÉHO HODU MINCOU] Výsledkom n-násobného hodu mincou je n-členná variácia množiny $\{0,1\}$. Jej j-ty člen je výsledkom j-teho hodu. Všetkých výsledkov tohto náhodného pokusu je 2^n a všetky sú rovnako pravdepodobné (vyplýva to z faktu, že v každom hode sú líce a rub rovnako pravdepodobné). Stochastickým modelom n-násobného hodu mincou je teda klasický pravdepodobnostný priestor (Ω_{nM}, p_{nM}), pričom

$$\Omega_{nM} = \{0,1\}^n \quad \text{a} \quad p_{nM}(\omega) = \tfrac{1}{2^n} \quad \text{pre každé} \quad \omega \in \{0,1\}^n.$$

Tangram stochastického modelu dvojnásobného hodu mincou je na obrázku 11*b*).



Obr. 12. Tri tangramy stochastického modelu trojnásobného hodu mincou

Tri tangramy stochastického modelu trojnásobného hodu mincou sú na obrázku 12. Každý z nich je útvarom so sieťou ekvivalentným vzhľadom na rozklad s každým tangramom na obrázku 10. Z toho vyplýva, že trojnásobný hod mincou je možné simulovať hodom kockou $K_{1\to 8}$.

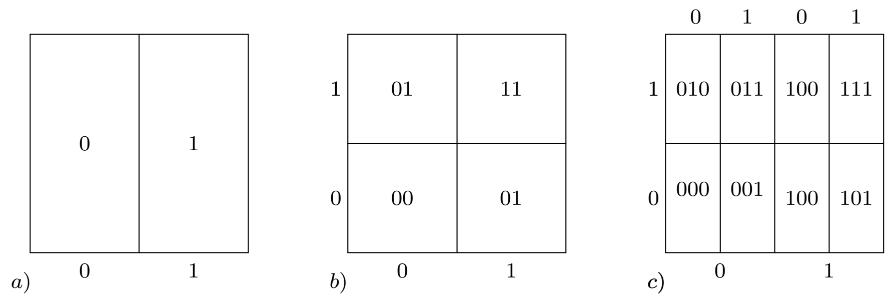
Nech g je funkcia z množiny $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (t. j. množiny výsledkov hodu kockou $K_{1\to 8}$) na množinu $\{0,1\}^3$ (t. j. na množinu výsledkov trojnásobného hodu mincou) určenou nasledovne:

k:	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(k)$:	001	010	011	100	101	110	111	000

.

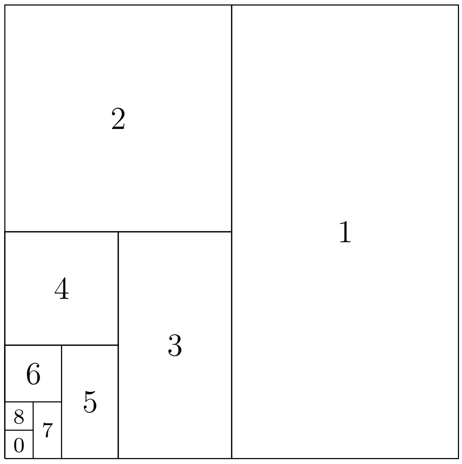
Táto funkcia g určuje ekvivalenciu dvoch pravdepodobnostných priestorov: stochastického modelu hodu kockou $K_{1\to 8}$ a stochastického modelu trojnásobného hodu mincou. Je súčasne „slovníkom“ na preklad výsledku hodu kockou $K_{1\to 8}$ na výsledok trojnásobného hodu mincou. Ak výsledkom hodu kockou $K_{1\to 8}$ je číslo k, potom povieme, že výsledkom trojnásobného hodu mincou je $g(k)$.

Tangram stochastického modelu náhodného pokusu, ktorý prebieha vo viacerých etapách, môžeme tvoriť delením jednotkového štvorca v etapách. Predpokladajme, že vertikálne čiary delenia zodpovedajú nepárnym etapám, horizontálne párnym. Pri takomto predpoklade tangram stochastického modelu hodu mincou a tiež stochastických modelov dvoj- a trojnásobného hodu mincou majú tvar ako na obrázku 13.



Obr. 13. Tangramy stochastických modelov: hodu mincou, dvoj- a trojnásobného hodu mincou ako výsledky delenia jednotkového štvorca po etapách

■ Nech $s \in \mathbb{N}_2$. Náhodný pokus δ_1^s je opakovaním hodu mincou tak dlho, až padne rub, ale ak po s hodoch rub nepadne ani raz, potom sa pokus končí. Je to náhodný pokus s náhodným počtom etáp. Ak rub padne prvý raz v n-tom hode, pričom $n \leqslant s$, potom taký výsledok označujeme (kódujeme) číslom n $(n = 1,2,3,\dots,s)$. Ak rub nepadne v žiadnom z s hodov mincou, potom taký výsledok pokusu δ_1^s označme číslom 0.



Obr. 14. Tangram stochastického modelu náhodného pokusu δ_1^8

Výsledok n je osobitným výsledkom n-násobného hodu mincou, a teda jeho pravdepodobnosť sa rovná $\frac{1}{2^n}$, čiže $(\frac{1}{2})^n$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots, s$. Výsledok 0 je osobitným výsledkom s-násobného hodu mincou, a teda jeho pravdepodobnosť sa rovná $\frac{1}{2^s}$, čiže $(\frac{1}{2})^s$. Stochastickým modelom náhodného pokusu δ_1^s je preto pravdepodobnostný priestor (Ω_1, p_1), pričom $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots, s\}$ a

$$p_1(n) = (\tfrac{1}{2})^n \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots, s \quad \text{a} \quad p_1(0) = (\tfrac{1}{2})^s.$$

Na obrázku 14 je tangram stochastického modelu náhodného pokusu δ_1^8.

Tangram pravdepodobnostného priestoru a pravdepodobnosť udalosti v tomto priestore ako obsah útvaru

■ Uvažujme o náhodnej hre, ktorej sa zúčastňujú dvaja hráči H_1 a H_2. Hráči striedavo hádžu mincou a víťazí ten, kto prvý hodí rub. Ak rub nepadne v žiadnom z prvých s hodov mincou, tak sa hra končí remízou. Predpokladajme, že hráč H_1 hádže mincou prvý (má teda právo prednosti). Všimnime si, že v tejto hre sa uskutočňuje náhodný pokus δ_1^s.

Hráč H_1 zvíťazí vtedy a len vtedy, ak nastane udalosť

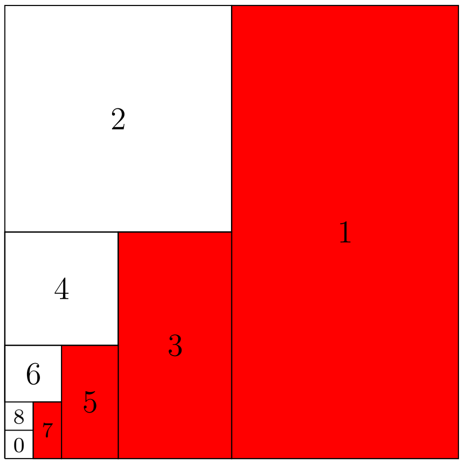
$A = \{$*rub padne prvý raz v nepárnom hode mincou*$\}$.

Hráč H_2 zvíťazí vtedy a len vtedy, ak nastane udalosť

$B = \{$*rub padne prvý raz v párnom hode mincou*$\}$.

Rozhodnutie o tom, či je uvedená hra spravodlivá, vedie k výpočtu pravdepodobnosti udalosti A a B v pravdepodobnostnom priestore (Ω_1, p_1), a teda v stochastickom modele náhodného pokusu δ_1^s.

Nech $s = 8$. Na obrázku 15 je tangram stochastického modelu náhodného pokusu δ_1^8. Tmavé oká (oká označené číslami $1, 3, 5, 7$) reprezentujú výsledky priaznivé udalosti A, biele oká (označené číslami $2, 4, 6, 8$) reprezentujú výsledky priaznivé udalosti B.



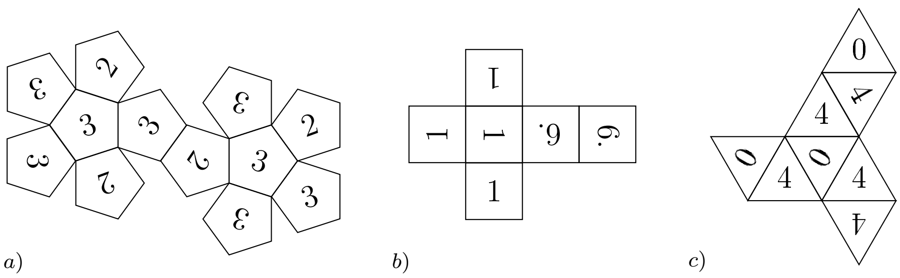
Obr. 15. Tangram stochastického modelu pokusu δ_1^8 a množina tmavých ôk ako udalosť A

V uvedenej geometrickej prezentácii pravdepodobnostného priestoru (Ω_1, p_1) je udalosť A množinou tmavých ôk, a teda niektorým geometrickým útvarom. Pravdepodobnosť udalosti A je obsahom tohto útvaru. Udalosť B ako množina bielych ôk je iným útvarom a pravdepodobnosť udalosti B je jeho obsahom. Z obrázka 15 je zrejmé, že obsah tmavého útvaru je dvakrát väčší ako obsah bieleho útvaru, čiže $P(A) = 2 \cdot P(B)$.

Obrázok 15 je vizualizáciou nielen pravdepodobnostného priestoru (Ω_1, p_1) (ako stochastického modelu náhodného pokusu δ_1^8), ale aj niektorých udalostí a predovšetkým ich pravdepodobností (ako šancí hráčov na víťazstvo v náhodnej hre). Tento obrázok je osobitným prostriedkom argumentácie.

Uvedená náhodná hra nie je spravodlivá. Hráč H_1 má dvakrát väčšie šance na víťazstvo než hráč H_2. Právo prednosti je tu pre hráča H_1 výhodou. Formulácia týchto uzáverov je *fázou interpretácie* v procese riešenia niektorého mimomatematického problému (ide o spravodlivosť náhodnej hry). Riešenie tohto problému je súčasne ilustráciou procesu aplikácie matematiky. Toto riešenie sa skladalo z troch etáp:
— *fáza matematizácie*, t. j. konštruovanie stochastického modelu pokusu, ktorý hráči uskutočňovali v hre;
— *fáza výpočtu*, t. j. spočítavanie (v tomto prípade pomocou geometrických prostriedkov) pravdepodobnosti udalosti A a B – to bola už čisto matematická úloha;
— *fáza interpretácie*, t. j. formulovanie úsudkov vzťahujúcich sa na východiskovú mimomatematickú situáciu, ktoré vyplývajú z fázy výpočtu.
Viac o organizácii týchto troch fáz procesu používania matematiky na príkladoch stochastiky je možné nájsť v knihe [6].

■ Na obrázku 16 sú siete troch kociek: dvanásťstnenej K_{12}, šesťstennej K_6 a osemstennej K_8.

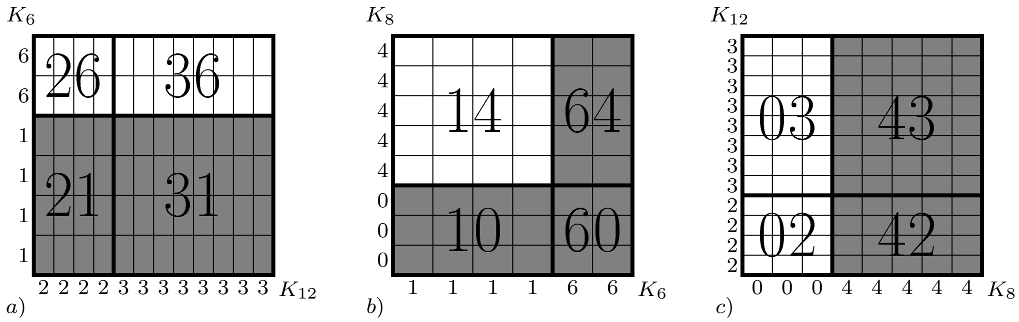


Obr. 16. Siete troch kociek

Hod každou z týchto kociek je náhodným pokusom. Jeho výsledkom je padnuté číslo, t. j. číslo na hornej stene kocky po hode. Kocky K_{12}, K_6 a K_8 sú rekvizitou v nasledujúcej náhodnej hre. Každý z dvoch hráčov má svoju kocku, na pokyn každý hádže svojou kockou a zvíťazí ten, komu padne väčšie číslo.

Dokážeme, že v takejto hre kocka K_{12} dáva hráčovi väčšiu šancu na víťazstvo, než kocka K_6 dáva jeho súperovi. Kocka K_{12} je teda *lepšia* než kocka K_6. Tento fakt symbolicky zapisujeme $K_{12} \gg K_6$. Prostriedkom argumentácie je obrázok 17. Ide o geometrické prostriedky organizácie *fázy výpočtov*.

Uvažujme o troch pravdepodobnostných priestoroch:
— $(\Omega_{12-6}, p_{12-6})$, ktorý je modelom hodu dvomi kockami: K_{12} a K_6.
— (Ω_{6-8}, p_{6-8}), ktorý je modelom hodu dvomi kockami: K_6 i K_8,
— $(\Omega_{8-12}, p_{8-12})$, ktorý je modelom hodu dvomi kockami: K_8 i K_{12},
Obrázok 17 predstavuje protokol z konštrukcie tangramov týchto troch pravdepodobnostných priestorov.



Obr. 17. Tri tangramy troch pravdepodobnostných priestorov a udalosti ako útvary

Predpokladajme, že v uvedenej hre jeden z hráčov hádže kockou K_{12} a jeho súper kockou K_6. Tmavý útvar na obrázku 17*a*), t. j. množina tmavých ôk tangramu – sú to oká 21 a 31, predstavuje udalosť

$A = \{$*na kocke* K_{12} *padne väčšie číslo než na kocke* $K_6\}$.

Pravdepodobnosť tejto udalosti je obsahom tmavého útvaru.

Biely útvar na obrázku 17*a*), t. j. množina bielych ôk tangramu – sú to oká 26 a 36, predstavuje udalosť

$B = \{$*na kocke* K_6 *padne väčšie číslo než na kocke* $K_{12}\}$.

Obsah tmavého útvaru je väčší ako obsah bieleho útvaru, a teda $P(A) > P(B)$, čiže hráč hádžuci kockou K_{12} má v opísanej hre väčšie šance na víťazstvo ako jeho súper hádžuci kockou K_6. Takže kocka K_{12} je „lepšia“ než kocka K_6, čiže $K_{12} \gg K_6$.

Z obrázka 17*b*) vyplýva, že $K_6 \gg K_8$, z obrázka 17*c*) zas vyplýva, že $K_8 \gg K_{12}$. V prípade kociek K_{12}, K_6 a K_8 platí

$$K_{12} \gg K_6 \quad \text{a} \quad K_6 \gg K_8, \quad \text{a} \quad K_8 \gg K_{12}.$$

Relácia $\gg$ na množine kociek $\{K_{12}, K_6, K_8\}$ nie je teda tranzitívna. Medzi týmito kockami neexistuje „najlepšia“. Pre každú z týchto kociek medzi dvoma ostávajúcimi existuje ku nej kocka „lepšia“.

V tejto argumentácii je prezentáciou pravdepodobnostného priestoru jeho tangram, udalosť je množinou ôk tangramu, a teda niektorým útvarom, pravdepodobnosť udalosti je obsahom tohto útvaru.

Netranzitívnosť relácie $\gg$ na množine kociek $\{K_6, K_8, K_{12}\}$ je paradoxom. Tento matematický fakt môže mať v realite nasledujúcu interpretáciu. Predpokladajme, že hráčovi je ponúknuté právo prednosti pri výbere svojej kocky v opísanej hre. Jeho súper vyberie svoju kocku z dvoch ostatných. Z netranzitívnosti relácie $\gg$ vyplýva, že využívanie práva prednosti v popísanej situácii nie je pre hráča racionálnym rozhodnutím.

Záver

V práci je ukázané:
— ako inšpirovať preklad matematických faktov zo symbolického jazyka matematiky do ikonického jazyka a opačne,
— ako do stochastickej argumentácie začleniť geometrické prostriedky,
— ako výpočet pravdepodobnosti udalostí možno zameniť za výpočet obsahu geometrických útvarov.

Literatúra

[1] Brincková J., *Tangram – Didaktická hra v geometrii*, DONY, Bratislava 1996.

[2] Cundy H. M., Rollet A. P., *Modele matematyczne*, PWN Warszawa 1967.

[3] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1987.

[4] Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6 (1986).

[5] F. Kuřina, *Jak myśl uczynić widzialną*, Dydaktyka Matematyki 20 (1998) (s. 73 – 88).

[6] A. Płocki, *Dydaktyka stochastyki – rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako nowy element kształcenia matematycznego i ogólnego*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.

[7] Płocki A., *Pravdepodobnost okolo nás. Stochastika v úlochách a problémoch*, Katolicka univerzita, Ružomberok 2004.

[8] Płocki A., *Przestrzeń probabilistyczna w trzech fazach rozwiązywania problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa – trudności i błędy*, Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej, t. 9, Kielce 2002 (s. 111 – 132).

[9] A. Płocki, *Stochastyka dla nauczyciela – rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi“*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.

[10] Płocki A., *Tangramy a pravděpodobnostni prostory*, University of South Bohemia Mathematics Report, České Budějovice 2005, ser. 14 (s. 161 – 166).

[11] Płocki A., *Ziarnista przestrzeń probabilistyczna w stochastyce dla nauczyciela – dydaktyczne osobliwości*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, 2006 (s. 205 – 228).

[12] P. Tlustý, *Sprawiedliwe i niesprawiedliwe gry stochastyczne*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I, Krakow 2002 (s. 177 – 183).

[13] Zamorska M., *Tangram w klasie VIII*, Nauczyciele i Matematyka 20, 1996.

[14] Zimmermann W., Cunningham S., *Visualization in Teaching and Learning*, MAA 1986.

Prof. Dr hab. Adam Płocki
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Poland
e-mail: adplocki@ap.krakow.pl

Problémy študentov matematiky s pochopením pojmov určitý a neurčitý integrál

Zbigniew Powązka

Úvod

V rokoch 2002 - 2005 boli na Akademii Pedagogicznej v Krakove realizované výskumy na vzorke študentov prvých troch ročníkov zamerania matematika. Výskum bol venovaný pochopeniu základných pojmov matematickej analýzy. Výskumy preukázali viaceré ťažkosti, chyby a falošné predstavy spojené s týmito pojmami. V tejto práci predstavíme a výsledky výskumov v oblasti integrálneho počtu a nadviažeme na prácu Gunčaga [4]. Pojmami spojitosti a diferencovateľnosti sa zaoberá práca Gunčaga/Powązka [5].

Výskumnými nástrojmi boli

- sondážna anketa dotýkajúca sa ťažkostí študentov súvisicich s pojmom integrovateľnosti funkcie,
- test jednorázového výberu obsahujúci teoretické zadania,
- písomné práce, v ktorých študenti riešili kalkulatívne úlohy,
- rozhovory s vybranými študentmi.

Výskumná metóda spočívala v analýze výsledkov hore uvedených činností (pozri [7]) s cieľom zistenia úrovne osvojenia a porozumenia integrovateľnosti funkcie a jej súvis s inými pojmami matematickej analýzy.

Pojem integrovateľnosti funkcie sa počas kurzu matematickej analýzy na Akademii Pedagogicznej v Krakove prvýkrát objavuje na konci prvého ročníka štúdia a v tejto etape sa objavuje aj definícia primitívnej funkcie. Pred koncom druhého ročníka štúdia je spracovaná problematika integrálneho počtu funkcie viac premenných. Tretí ročník je zameraný na krivkové a plošné integrály. Kurz matematickej analýzy je ukončený teóriou miery, pojmom integrálu vzhľadom na mieru a v súčasnosti aj Lebesguovým integrálom.

Definícia Riemanovho integrálu funkcie jednej premennej na intervale $\langle a, b\rangle$ je formulovaná klasicky pomocou pojmu normálnej postupnosti delenia intervalu a existencie limity postupnosti aproximatívnych súčtov, ktorá nezávisí od výberu normálnej postupnosti delenia intervalu ako aj výberu bodov z intervalov delenia v príslušnom integrálnom súčte. Môžeme tiež skúmať Darbouxov dolný a horný integrál. V tomto smere sa ukazuje súvis medzi existenciou integrálu ako aj merateľnosti príslušnej množiny v zmysle Jordana. Pri tomto spôsobe vyučovania je prirodzené použiť pojem integrovateľnosti funkcie pre funkcie viac premenných.

Psychológovia a odborníci v oblasti teórie vyučovania matematiky kladú dôraz na fakt, že počas preberania uvedených pojmov sa tvoria v mysli študenta obrazy a predstavy týchto pojmov. Tieto predstavy sa často nezhodujú s uvedenými pojmami. Špirálovitá koncepcia vyučovania, založená na návrate k preberaným pojmom na rôznych úrovniach zovšeobecnenia, sa môže určitým spôsobom pričiniť o zväčšenia adekvátnosti obrazu pojmu so samotným pojmom. Tento proces je zvyčajne pomerne zdĺhavý. O tom, či sa naozaj tento proces realizoval, sa môžeme dozvedieť vďaka výskumu aspektov učenia, do ktorých Nowak v [10] zaraďuje: verbálne vedomosti, intelektuálne techniky, poznávacie stratégie, motorické schopnosti a techniky. Autorka, citujúc Lompschera [8] tvrdí, že verbálne vedomosti sa skladajú zo štyroch navzájom prepojených častí. Patrí k nim: poznanie faktov, spôsob konania, prepisov konania ako aj kritériá hodnotenia. Nižšie uvedená úloha poukazuje na to, že spôsoby konania sú rýchlejšie osvojené študentmi ako definície alebo tvrdenia.

Úloha 1.

Pri preberaní tematických celkov primitívna funkcia, neurčitý integrál a metódy jeho výpočtu, sme zadali študentom nasledovnú úlohu: *Určte všetky reálne hodnoty parametra m , pre ktoré primitívna funkcia k funkcii $f(x) = x^2 - x + m - 1, x \in R$, spĺňa jednu z uvedených vlastností:*

a) obsahuje inflexný bod,

b) je rastúcou funkciou na svojom definičnom obore,

c) neobsahuje lokálne extrémy.

Najväčšia skupina zo vzorky 30 študentov, ktorí riešili uvedenú úlohu, najprv určila neurčitý integrál funkcie f a následne využívala aparát diferenciálneho počtu na skúmanie monotónnosti, extrémov ako aj inflexných bodov funkcie. Až pri rozhovore so študentami, ktorí riešili túto úlohu, sa ukázalo, že výpočet neurčitého integrálu bolo zbytočné, keď využijúc definíciu primitívnej funkcie uvedené zadanie vedenie k skúmaniu danej kvadratickej funkcie f s parametrom m.

V tejto súvislosti si môžeme položiť otázku, prečo študenti riešili uvedenú úlohu pomocou výpočtu primitívnej funkcie. Príčinou môže byť to, že skúmaní študenti si lepšie zapamätali metódy integrovania, vypočítali veľa kalkulatívnych úloh integrálneho počtu a neuvažovali, že použijúc definíciu primitívnej funkcie a príslušné tvrdenia diferenciálneho počtu mohli zjednodušiť svoj postup.

Výsledky výskumov

Ako už sme uviedli v prvej časti, pojmy integrálneho počtu vytvárajú v mysli študenta svoj obraz. Obrazom rozumieme poznatkovú štruktúru, pravidlá, schémy, stratégie manipulácie s nimi, intuitívne predstavy, fakty, vlastnosti prijaté ako pravdivé v dôsledku logickej analýzy, pamäťové a formálne vedomosti (pozri [14], [13], [1], [2], [12], [9]). Postupujúc podobne ako Major v [9] opíšeme niektoré prvky pochopenia pojmu integrovateľnosti funkcie, ktoré sme získali výskumom študentov. Musíme však zobrať do úvahy, že tieto prvky súvisia nielen s porozumením tohto pojmu, ale aj s jeho vlastnosťami. Problémy sa prejavia počas práce s aplikáciami pojmu a ich väčšina súvisí s rozdielom medzi pojmom a jeho obrazom v mysli študenta. Preto Pawlik v [11] konštantuje, že sa ľahšie objavia chyby a falošné úvahy študentov. V tejto časti článku charakterizujeme ťažkosti, ktoré sa objavili u študentov.

V ankete bola študentom položená otázka, ktorú z nasledujúcich štyroch definícií

- neurčitého integrálu,

- integrálu ako funkcie hornej hranice integrovania,

- Riemannovho integrálu ľubovoľnej ohraničenej funkcie,

- Riemannovho integrálu ľubovoľnej spojitej funkcie

považujú za najjednoduchšiu. Za najjednoduchšiu považovali študenti prvú definíciu, štvrtá definícia bola pre nich druhá najjednoduchšia. Druhú a tretiu definíciu považovali študenti za najťažšiu. Tieto výsledky ukazujú, že študenti preferovali využívanie algoritmov pred teoretickým zdôvodňovaním spojeným s dôkazmi tvrdení.

Úloha 2.

Jedna z testových otázok mala nasledovné znenie: *Nech* $f : \langle a, b\rangle \to R$ *a súčasne nech* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, x \in \langle a, b\rangle$. *Dokážte, ktoré z uvedených tvrdení sú pravdivé:*

a) Ak funkcia f *je integrovateľná, tak funkcia* F *je diferencovateľná.*

b) Ak funkcia f *je integrovateľná, tak funkcia* F *je spojitá.*

c) Ak funkcia F *je diferencovateľná, tak funkcia* f *je spojitá.*

d) Ak funkcia F *je diferencovateľná, tak funkcia* f *je monotónna.*

Vyše 38 % študentov zo skúmanej vzorky vybralo nesprávnu odpoveď. Z toho vyplýva, že uvedení študenti nerozumejú pojmu integrálu ako funkcie hornej hranice integrovania. Toto chápanie integrálu je dôležitým nástrojom matematickej analýzy pre charakterizovanie vlastností podintegrálnej funkcie f. Pritom odpoveď *b)* je správna, ale odpoveď *a)* je nesprávna. Nesprávnu odpoveď *a)* uviedlo 26 % študentov. Platí totiž, že ak funkcia f je spojitá, tak funkcia F je diferencovateľná.

Úloha 3.

Táto testová úloha bola zameraná na pochopenie definície Riemannovho integrálu: *Daná je funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to R$. *Dokážte, ktoré z uvedených tvrdení je pravdivé:*

a) Funkcia f *je integrovateľná v zmysle Riemanna na intervale* $\langle a, b\rangle$ *práve vtedy, keď je* f *spojitá na tomto intervale.*

b) Ak funkcia f *je spojitá na intervale* $\langle a, b\rangle$ *, tak funkcia* f *je integrovateľná v zmysle Riemanna na tomto intervale.*

c) Ak funkcia f *je integrovateľná v zmysle Riemanna na intervale* $\langle a, b\rangle$ *, tak je spojitá na tomto intervale.*

d) Ak funkcia f *je integrovateľná v zmysle Riemanna na intervale* $\langle a, b\rangle$ *, tak je monotónna na tomto intervale.*

32 % študentov zo skúmanej vzorky vybralo niektorú z nesprávnych odpovedí *a), c), d)*. Z príkladov 2 a 3 vyplýva, že študenti nevedeli využiť svoje doterajšie vedomosti a aplikovať ich pri riešení úloh. Ďalej nenašli vzájomné vzťahy medzi preberanými pojmami. Vo svojich odpovediach študenti využili nasledovné prvky intuitívnych predstáv integrovateľnosti funkcie, pričom vedeli nájsť aj ich aplikácie (pozri tab. 1)

Tabuľka 1

Por. č.	Aplikácie použité študentmi	Počet odpovedí
1	Obsah rovinného útvaru	56
2	Objem priestorového útvaru	47
3	Dĺžka rovinnej krivky	43
4	Objem a povrch rotačného priestorového útvaru	10
5	Povrch priestorovej plochy	6
6	Konvergencia funkcionálnych radov	10
7	Rozvoj funkcie do Fourierovho radu	2
8	Výpočet primitívnej funkcie	6
9	Aplikácie vo fyzike	4
10	Integrál ako funkcia hornej hranice integrovania	1

Respondenti využili všetky aplikácie, s ktorými sa stretli počas vyučovania. Z počtu odpovedí vyplýva, že mohla nastúpiť zámena aplikácií integrálneho počtu funkcie jednej premennej s aplikáciami integrálneho počtu funkcie viacerých premenných. U väčšiny študentov sa vyskytli len tri aplikácie integrálneho počtu: obsah, objem a dĺžka krivky. Nemôžeme mať istotu, či pod pojmom objem si študent predstavoval objem priestorového telesa alebo objem telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie jednej premennej. Takisto nemôžeme mať istotu, či pod pojmom obsah si predstavovali obsah rovinného útvaru alebo povrch priestorovej plochy.

V odpovediach študentov sa prejavila ich nepresnosť pri formulovaní vlastných výpovedí. Necítili potrebu presného vyjadrenia toho, čo mali na mysli používajúc pojmy obsah, povrch alebo objem.

Využijúc situačný kontext pojmu integrovateľnosti funkcie, predstavíme témy úloh, ktoré vytvorili študenti. Väčšinu úloh tvorili kalkulatívne úlohy. Tento fakt potvrdzuje to, čo sme už konštatovali v príklade 1, že študenti sa ľahšie naučia metódy výpočtu ako spôsoby dokazovania tvrdení a pochopenie definícií. Preto si môžeme položiť nasledovné otázky: *Akým spôsobom chceme riešiť úlohu?* alebo *Čo vyjadruje jej zadanie?* ako aj *Prečo postupujeme uvedeným spôsobom?*

Niektoré úlohy formulované študentmi boli tak jednoduché, že nevyžadovali použitie integrálneho počtu. Niektoré úlohy boli nasledovné:

- *Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného krivkami:* $y = -x$, $y = 0$, $y = 3x - 2$.
- *Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného súradnicovými osami* x *a* y *a grafom funkcie* $y = -x + 2$.
- *Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie* $y = -x + 2$, $x \in \langle 0, 2\rangle$ *okolo osi* x.

Žiadnu z uvedených úloh nie je potrebné riešiť pomocou integrálneho počtu a vystačia pre ich riešenie poznatky získané na strednej škole alebo na gymnáziu. Ďalšie úlohy vytvorené študentmi boli zaujímavejšie, niekedy vyžadovali riešenie skladajúce sa z niekoľkých častí. Medzi nimi boli úlohy, ktoré vyžadovali použitie určitého aj neurčitého integrálu.

Ďalšia časť ankety bola zameraná na zistenie typov úloh integrálneho počtu, ktoré študenti považujú za problematické. Vo svojich odpovediach uviedli úlohy na:

- vyžadujúce použitie definície Riemannovho integrálu, napr. pri určení limity postupnosti, aproximatívnych súm danej funkcie, ak vedeli, že uvedená funkcia je integrovateľná,

- skúmanie možnosti integrovania funkcionálneho radu člen po člene,
- určenie súčtov istých typov mocninových radov pri použití metódy integrovania radu člen po člene,
- komplikovaných integrálov trigonometrických funkcií,
- skúmanie konvergencie nevlastných integrálov,
- určenie dĺžky rovinnej krivky.

Objavili sa aj všeobecnejšie odpovede, z ktorých niektoré uvádzame:

- *To závisí od funkčného predpisu zadanej funkcie, ktorá vystupuje v úlohe na obsah rovinného útvaru alebo v úlohe na výpočet objemu telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie.*
- *Sú aj také úlohy, z ktorých nie je na prvý pohľad jasné, akým spôsobom je možné ich riešiť.*

Spomedzi niekoľko konkrétnych príkladov uvedieme nasledovný:
Kváder, ktorého spodná podstava je obdĺžnik D, ktorý leží v rovine xy a je ohraničený priamkami $x = c$, $x = d$, $c < d$, $y = e$, $y = f$, $e < f$ *bol zrezaný plochou* $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Autor úlohy zabudol presne formulovať, čo je potrebné určiť. Iste mal na mysli objem vzniknutého telesa. Táto nedokončená úloha poukazuje na to, že samostatné formulovanie úloh študentmi je pre nich dosť náročné. Je preto potrebné rozvíjať u študentov schopnosť presného formulovania úloh, pretože to využijú vo svojej práci so svojimi žiakmi.

Literatúra

[1] Bugajska - Jaszczołt, B.: *O rozumieniu pojęcia kresu zbioru przez uczniów liceum*, In: *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka Matematyki* 23, 2001, s. 51 - 93.

[2] Bugajska - Jaszczołt B., Treliński G.: *Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej* (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), CD – ROM, XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki, 2002.

[3] Fulier, J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy.* Nitra, UKF, 2001

[4] Gunčaga, J.: *Limitné procesy v školskej matematike.* Dizertačná práca, Nitra, UKF, 2004. http://fedu.ku.sk/∼guncaga/publikacie/DizWeb.pdf

[5] Gunčaga, J., Powązka Z.: *Badania nad wykorzystaniem pojęcia ciągłości funkcji do definiowania pochodnej funkcji w punkcie.* Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki (práca pripravená do tlače).

[6] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN 1990

[7] Łobocki M.: *Metody badań pedagogicznych.* Warszawa, PWN, 1984.

[8] Lompscher J.: *Theoretischeund experimentale Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten.* Berlin, Volk und Wissen, 1972.

[9] Major J.: *Uwagi na temat obrazu wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów III roku matematyki*, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, KU, Ružomberok, 2006, s. 171 - 176.

[10] Nowak W.: *Konwesatorium z dydaktyki matematyki.* Warszawa, PWN, 1989. AG, 1988.

[11] Pawlik B.: *Falszywe przekonania dotyczące przkształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki*, In: *Roczniki PTM, Seria V, Dydaktyka matematyki*, č. 28, 2005, s. 365 - 376.

[12] Przeniosło M.: *Images of the limit of a function formed in the course of mathematical studies at university*, In: *Educational Studies in Mathematics*, č. 55, 2004, s. 103 - 132.

[13] Sierpińska A.: *O niektórych trudnościach uczeniu się pojęcia granicy – na podstawie studium przypadku*, In: *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka Matematyki* 4, s. 107 - 167.

[14] Tall D., Winner S.: *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* In: *Educational Studies in Mathematics*, č. 12, 1981, s. 151 -169.

Adresa autora:
Dr Zbigniew Powązka
Instytut matematyki AP Kraków
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: powazka@ap.krakow.pl

Komputer w procesie rozwiązywania problemów matematycznych czyli rola gier komputerowych w nauczaniu matematyki

Tadeusz Ratusiński

Abstract. *Computer sometimes helps pupils with their homework. But usually is being used as "game machine". Pupils use computer for pleasure and entertainment. Maybe we can give them games which can teach them "solving math problem" with fun? In this paper I try to show the example.*

Komputer już na stałe zagościł w naszych domach. Służy do edycji tekstów, wyszukiwania informacji w Internecie, jednak najczęściej wykorzystywany jest do rozrywki. W większości wypadków uczniowie po lekcjach siadają przed nim by się odprężyć przy grach komputerowych. Czy nie można by połączyć przyjemnego z pożytecznym. Czy nie warto by dać uczniom narzędzia, które nawet nieświadomie uczyłoby rozwiązywania matematycznych problemów poprzez zabawę?

Matematyka w dużej mierze kojarzy się z rozwiązywaniem zadań. Nie jest to stwierdzenie bezpodstawne, ponieważ zadania odgrywały, odgrywają i będą odgrywały ogromną rolę w nauczaniu matematyki.

W „Zarysie dydaktyki matematyki" Prof. Anna Zofia Krygowska dokonała następującej klasyfikacji zadań:

- metodologiczne, (uczeń powinien sobie przyswoić typowe elementy metod matematycznych takich jak dowodzenie, klasyfikowanie, uogólnienie, specyfikacja, upraszczanie rozumowania),
- ćwiczenia (zadania te kształtują u ucznia zdolność dobierania poznanych algorytmów postępowania do danej sytuacji),
- zadanie – zwykłe zastosowanie teorii (uczeń rozwiązując zadanie uczy się korzystać z poznanej wiedzy teoretycznej; rozumienie teorii umożliwia mu rozwiązanie zadania),
- problemy (w zadaniach tych kluczową rolę odgrywa tzw. umiejętność myślenia i rozumowania matematycznego),
- gry i zabawy (gry sprzyjają rozbudzaniu aktywności intelektualnej dziecka; mogą też być nośnikami treści matematycznych dzięki czemu stają się ważnym punktem w procesie nauczania matematyki),
- matematyczne niespodzianki (zasada nauczania poprzez zadania tego typu polega na takim sformułowaniu polecenia lub takim doborze danych, by uczeń popełnił błąd w rozumowaniu) [3].

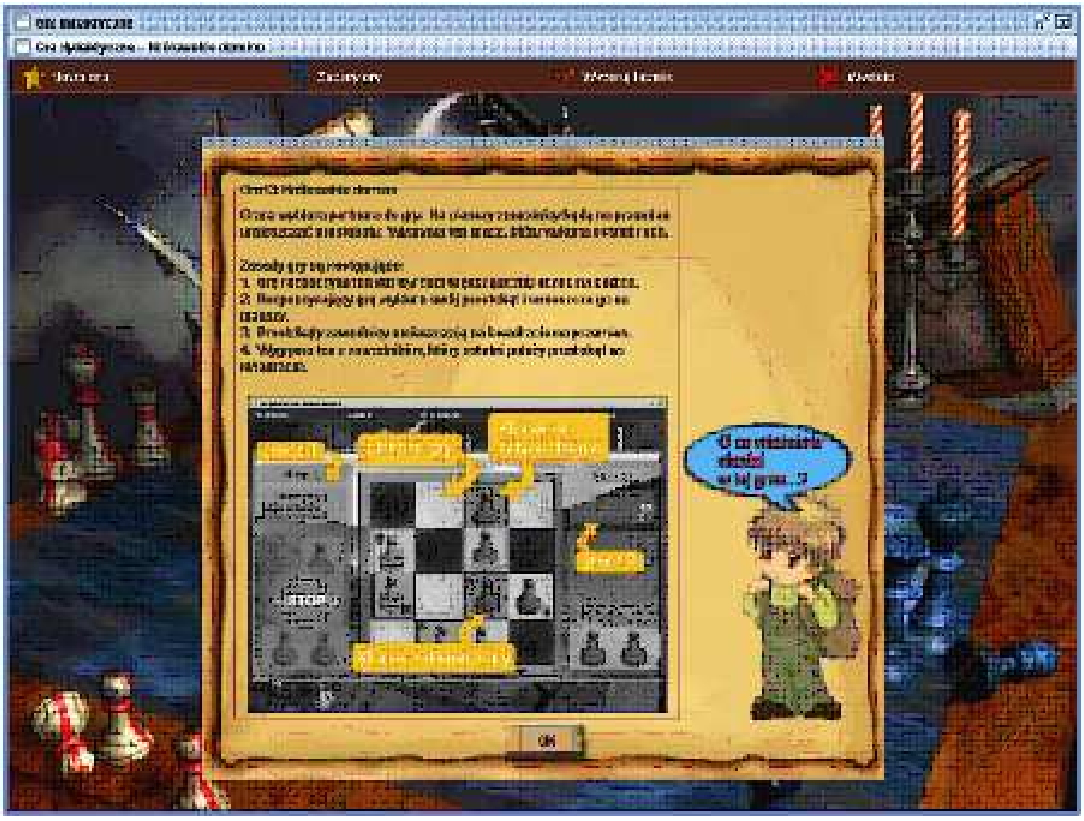
W literaturze istnieje szereg innych klasyfikacji zadań matematycznych [2], [5], [6]. W przeważającej większości tych podziałów gry i zabawy dydaktyczne wyróżniane są jako oddzielny typ zadań, zdolny jednak realizować funkcje pozostałych typów zadań matematycznych. Jest to jedna z podstawowych zalet gier dydaktycznych, które mogą pełnić rolę zadań ćwiczeniowych, problemowych, *prowokujących*, ...

,,Fakt, że gry imitujące prawdziwą walkę wpływają wybitnie na rozwój intelektu, był znany i uznany od dawna, jednak niemal nie wykorzystywany w nauczaniu szkolnym. Dopiero ostatnio, poszukując nowych środków nauczania, dostosowanych do współcześnie stawianych celów kształcenia, odkryto ogromne dydaktyczne walory gier w nauczaniu matematyki" [4]. Wykorzystanie gier i zabaw jest jedną z metod wytwarzania wśród uczniów zainteresowania matematyką, które sprawia, że ich nastawienie do tego *trudnego* przedmiotu staje się pozytywne. Z kolei pozytywne nastawienie jest niezbędnym elementem sukcesu dydaktycznego.

Gry dydaktyczne, jako metody kształcenia znajdują coraz szersze zastosowanie w szkołach. Wykorzystywanie gier w nauczaniu matematyki posiada wiele niekwestionowanych zalet. Bez żadnych wątpliwości można powiedzieć, iż gry spełniają trzy podstawowe funkcje:

- motywującą do podjęcia wysiłku intelektualnego,
- dydaktyczną, uczą pewnych treści i metod matematyki,
- wychowawczą, czyli uczą zasad pracy w zespole [4].

Chciałbym przybliżyć jedną z takich gier, która wykorzystując możliwości komputera dostarcza doskonałego materiału do rozwoju intelektualnego uczniów. ***Królewskie domino*** jest grą z pogranicza gier logicznych i strategicznych. Grą, w której możliwość poszukiwania strategii wygrywającej, wpływa na rozwój logicznego myślenia.



Rys. 1

Przeznaczona jest dla dwóch graczy. Jej główną zaletą jest przyjazny i *miły dla oka* interfejs użytkownika, dzięki któremu gra jest bardzo atrakcyjna pod względem graficznym. Rozgrywce towarzyszy również subtelny motyw muzyczny i rozbudowany system dźwięków.

Po uruchomieniu gry pojawia się ramka z zasadami, które obowiązują w trakcie rozgrywki (rys. 1). Ramka jest wyświetlana tylko przy pierwszym uruchomieniu gry. Potem dostęp do zasad jest możliwy z poziomu menu po wybraniu opcji „Zasady gry". Gdy gracze zapoznają się z zasadami potwierdzają swoją gotowość przejścia dalej przyciskiem „Ok" znajdującym się w dolnej części okna pomocy.

Po ustaleniu kolejności graczy (metodą losowania kostkami) gracz ma możliwość dokonania wyboru motywu graficznego pionków, którymi będzie prowadził rozgrywkę. Ilość dostępnych rodzajów pionków jest niewątpliwie dużą zaletą gry, gdyż sama gra nie będzie dla uczniów zbyt monotonna. Obaj gracze mają możliwość wyboru klocka spośród szesnastu dostępnych motywów (rys. 2).

Rys. 2

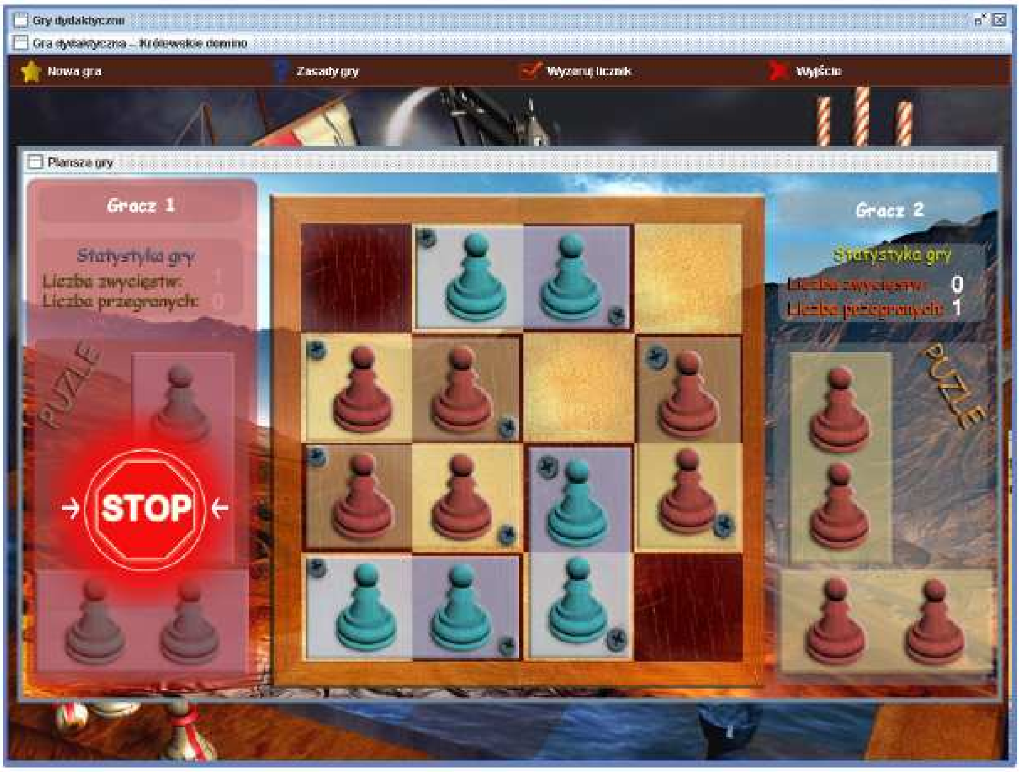
Po akceptacji motywu graficznego pionków gracze dokonują wyboru wielkości planszy oraz rozmiaru kostki (rys. 3).

Wybór spośród czterech dostępnych plansz gry (4x4, 5x5, 6x6 i 7x7) jest równocześnie wyborem stopnia trudności. Im większa plansza tym większa liczba ruchów, które zawodnicy muszą przewidzieć w kolejnych posunięciach. Gracze mają również możliwość wyboru pomiędzy dwu- i trzy-segmentowym pionkiem. Po zatwierdzeniu wyboru gracze przechodzą do właściwej gry (rys. 4).

W oknie gry można wyróżnić trzy główne grupy elementów, które tworzą w rezultacie całą planszę. Po bokach ekranu znajdują się dwa przyborniki obydwu zawodników, w których znajdziemy takie elementy jak klocki: poziomy i pionowy, statystyki gry informujące o liczbie przegranych (wygranych) danego zawodnika oraz etykiety z imionami graczy. Trzecią grupę tworzy kwadratowa szachownica, na którym gracze umieszczają na przemian swoje klocki.

Zasady są bardzo proste. Zawodnicy umieszczają na szachownicy na przemian po jednym ze swoich klocków: pionowy lub poziomy, tak by nie nachodziły na siebie. Gra toczy się do momentu, aż kolejny ruch nie będzie możliwy.

Rys. 3



Rys. 4

Wygrywa ten z zawodników, który wykona swój ruch jako ostatni. Pojawia się wówczas ramka z pucharem informująca o zwycięstwie jednego z graczy (rys. 5).

Na tym etapie dostępne są dwa przyciski, odpowiedzialne za nawigację. Przycisk „Nowa Gra" daje możliwość rozpoczęcia *zabawy* od początku wybierając inne ustawienia rozgrywki, natomiast przycisk „Wyjdź z Gry" powoduje całkowite opuszczenie gry. Zawodnik, który zwyciężył w bieżącej rundzie otrzymuje punkt, który jest dopisywany do liczby zwycięstw widocznej w elemencie „Statystyka gry”. Z kolei *przegrany* otrzymuje punkt, który zostanie dodany do liczby przegranych również widocznej w elemencie „Statystyka gry”.

Rys. 5

Istnieje możliwość wyzerowania stanu zwycięstw i przegranych opcją „Wyzeruj licznik” dostępną z poziomu głównego menu, jak również w każdym momencie rozgrywki zawodnicy mogą opuścić grę lub rozpocząć ją od nowa.

Gra należy do gier strategicznych. Aby mieć pewność wygranej należy odkryć pewną strategię, prowadzącą do zwycięstwa. Zależy ona jednak od wyboru planszy oraz od wielkości kostek do gry (dwu- lub trzy-segmentowych).

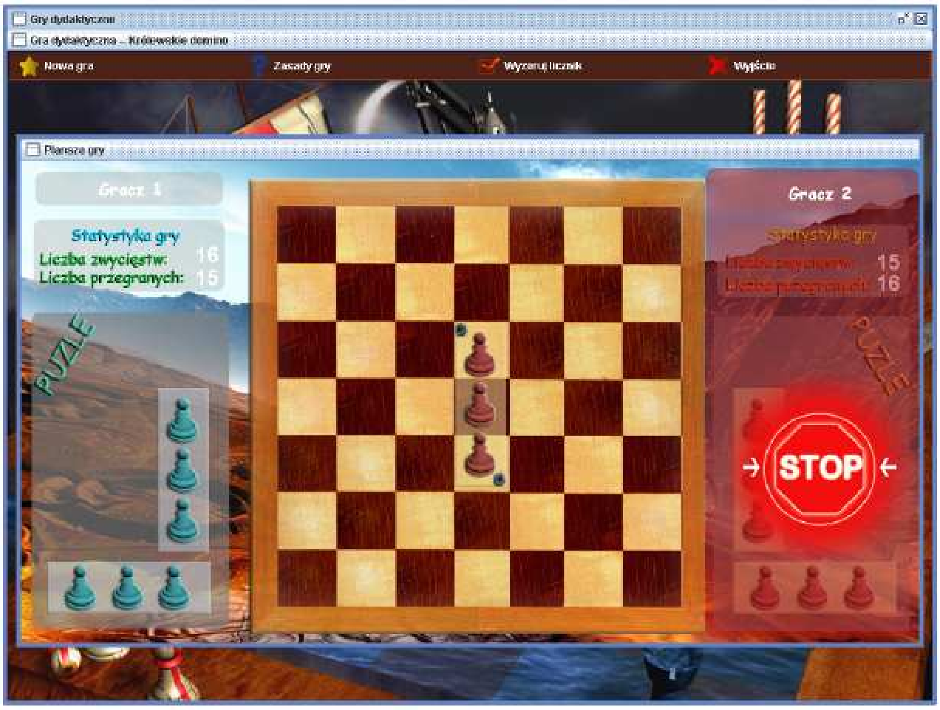
Strategia wygrywająca w przypadku plansz 4x4 oraz 6x6 w połączeniu z kostkami dwu-segmentowymi lub trzy-segmentowymi faworyzuje gracza, który układa kostki jako drugi. Aby wygrać gracz ten musi kłaść swoje klocki *symetrycznie* do kostek przeciwnika względem punktu środkowego szachownicy (rys. 6).

W przypadku plansz 5x5 oraz 7x7 i trzy-segmentowego klocka strategia wygrywająca istnieje dla gracza rozpoczynającego rozgrywkę. Wystarczy, że umieści on swój pierwszy klocek na środku szachownicy (rys. 7), a następne będzie umieszczać *symetrycznie* do klocków przeciwnika względem pola środkowego szachownicy.

W pozostałych konfiguracjach plansz i klocków brak jest jednoznacznej strategii wygrywającej. Gwarantuje to konieczność przewidywania oraz analizowania przez graczy kolejnych posunięć, co przyczynia się do rozwijania logicznego myślenia oraz postaw twórczych.

Już pierwsze próby wykorzystania tej gry pokazały jak jest ona skutecznym narzędziem. W większości wypadków początkowo gra jest dość chaotyczna. Jednak już po kilku rozgrywkach w większości wypadków uczniowie dostrzegają strategię prowadzącą do zwycięstwa. Ponieważ dobór planszy gry dokonywany jest po ustaleniu kolejności w jakiej gracze rozpoczynają rozgrywkę osoba, która poznała wszystkie strategie wie jak należy postępować by wygrać lub co najmniej uniemożliwić stosowanie strategii przeciwnikowi.

Rys. 6



Rys. 7

Zauważyć można, że gra posiada kilka istotnych cech:

- wymaga myślenia strategicznego i logicznego,
- by wygrać należy odkryć pewną strategię,
- ma przyjazną i miłą dla oka grafika,
- posiada ciekawe tło muzyczne,
- ma przyjazny interfejs użytkownika.

Oprawa graficzna i dźwiękowa zwiększa *grywalność*, ale również zaciera granicę pomiędzy treściami matematycznymi i tym co dla gracza jest najważniejsze, czyli satysfakcją i radością wypływającą z samej gry.

„Gry strategiczne wykorzystywane w dydaktyce muszą być zawsze dostosowane do możliwości intelektualnych dziecka i nie są łatwe w stosowaniu. Wymagają od nauczyciela szczególnego wyczucia w kierowaniu ich przebiegiem tak, aby z jednej strony nie wyręczać uczniów w odkrywaniu poszukiwanej strategii, a z drugiej nie zaprzepaszczać walorów motywacyjnych gier np. przez zniechęcenie dziecka do pokonania zawartych w tych grach trudności" [1].

Opisana gra ***Królewskie domino*** jest jedną z kilkudziesięciu gier dydaktycznych opracowywanego pakietu dydaktycznego. Praca nad takim projektem jest bardzo czasochłonna, ze względu na wysiłek jaki trzeba włożyć nie tylko zaprojektowanie samego algorytmu i wykonanie programu, ale również konieczność zadbania o szatę graficzną przyjazną dziecku. Również oprawa muzyczna i dźwiękowa wymaga od autora wiele inwencji. Jednak warto poświęcić tym elementom sporo uwagi i czasu, gdyż okazuje się, że takie gry dydaktyczne mogą z powodzeniem konkurować z komercyjnymi grami rozrywkowymi. Dobrze dopracowana gra edukacyjna może stać się obiektem zainteresowania nawet wymagającego, *rasowego* gracza. Pod przykrywką kolorowej i miłej dla oka grafiki a także ciekawej muzyki i dodatkowych efektów dźwiękowych, w łatwy sposób można *przemycić* mechanizmy odpowiedzialne za kształtowanie logicznego i twórczego myślenia oraz umiejętności odkrywania strategii. Chęć wygranej jest bowiem naturalnym czynnikiem wspomagającym odkrywanie strategii wygrywającej.

Wydaje się, że gry dydaktyczne tego typu są właściwe dla ucznia niezależnie od wieku. Wspomagają bowiem rozwój myślenia, który powinien być podstawowym celem edukacji w szkole. Konieczność realizacji tego celu wynika ze znaczenia jakie ma ono dla współczesnego społeczeństwa. Nie ma bowiem społeczeństwa, które liczyłoby się na arenie międzynarodowej, a które nie posiadałoby w swoich strukturach sprawnych mechanizmów kształtowania myślenia. W tym skomplikowanym procesie zwraca się główną uwagę jednak co najwyżej na myślenie krytyczne, umiejętność dyskusji, analizę oraz logikę. Stanowi to tylko część rzeczywistego procesu myślenia i dlatego powinien on być uzupełniony o myślenie twórcze i strategiczne, aktywne rozpoznawanie problemów, rozwijanie umiejętności planowania oraz nabywanie umiejętności obserwacji. Rozwój myślenia nie jest możliwy we współczesnej szkole bez powszechnego wprowadzenia komputerów, które umożliwiają nauczanie na nowych płaszczyznach niedostępnych dotychczas w procesie nauczania standardowego.

Literatura

[1] Filip, J., Rams, T.: Dziecko w świecie matematyki, Oficyna Wydanicza IMPULS, Kraków 2000.

[2] Kąkol, H.: *Typy zadań*, Oświata i Wychowanie, wersja B 15, 1984, s. 10-12.

[3] Krygowska, A.Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*, część 3, WSiP, Warszawa 1977.

[4] Pieprzyk, H.: Gry i zabawy w nauczaniu matematyki, Oświata i Wychowanie, 22, 1987, s. 5-8.

[5] Polya, G.: *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1993.

[6] Wittman, E.: *Dydaktyka matematyki jako design science*, Dydaktyka matematyki 15, 1993, s. 103-116.

Adresa autora:
Dr Tadeusz Ratusiński
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: ratusita@ap.krakow.pl

O troch zdrojoch a troch súčastiach vyučovania pravdepodobnosti

Beloslav Riečan

Abstract. *Firstly three mathematical levels are considered: elementary, infinitesimal and Kolmogorovian. Secondly three points of view are mentioned: intuitive, technical, and geometric.*

Vyučovanie pravdepodobnosti väčšinou nebýva silnou stránkou našej matematickej výchovy, pokiaľ len nejde o výchovu špecialistov. Pritom aplikácie poukazujú na čoraz väčšiu potrebu stochastického myslenia. Na druhej strane v priebehu stáročí sa formálny opis pravdepodobnostných pojmov ustálil na používaní matematických teórií, ktoré sú viac - menej všeobecne dostupné. Vidím tri úrovne v ich používaní.

Prvou je elementárna úroveň. Pre pochopenie pravdepodobnostných javov a zákonitostí je potrebný určitý stupeň abstraktného myslenia, väčšinou dôležitejší ako znalosť výsledkov elementárnej matematiky. Pekným príkladom sú práce A.Plockého [3].

Druhou je úroveň založená na infinitezimálnom počte (krátko kalkule). V tejto úrovni sú už užívateľovi dostupné prakticky všetky formulácie a výpočty potrebné pre bežné aplikácie. Na druhej strane, otázny je už i dôkaz linearity strednej hodnoty

$$E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E(\xi) + \beta E(\eta),$$

či odvodenie vzorca pre výpočet disperzie

$$E((\xi - E(\xi))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 f(x)dx.$$

Teóriu pravdepodobnosti stavia na spoľahlivý matematický základ až použitie teórie miery (Kolmogorovova teória), ktorá predstavuje tú tretiu úroveň, tretí zdroj.

Lenže vo všetkých troch úrovniach, troch matematických aparátoch, sa zároveň vyskytujú tri myšlienkové pochody.

Prvým je matematická formulácia intuitívne prijatých pojmov. Napr. prečo je nezávislosť opísaná rovnosťou $P(A \cap B) = P(A).P(B)$? Alebo, prečo je vhodné strednú hodnotu spojitej náhodnej premennej charakterizovať ako integrál

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx?$$

Alebo, prečo je vhodné definovať disperziu pomocou rovnosti

$$D(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2)?$$

Druhým je technická stránka, výpočty, ktoré vlastne nevyžadujú stochastickú intuíciu a invenciu. Napr.

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$$

v elementárnej teórii,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = a$$

v teórii kalkulusovej, či

$$\int\limits_{\Omega} \xi dP = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$$

v teórii Kolmogorovovej.

Tretí prístup je geometrický, napr. rovnosť

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

v teórii elementárnej, implikácia

$$\xi \sim N(a, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

v teórii kalkulusovej, či implikácia

$$\xi, \eta \text{ nezávislé} \Rightarrow g \circ \xi, h \circ \eta \text{ nezávislé}$$

v teórii Kolmogorovovej.

Z uvedeného nám vychádza takýto didaktický uzáver: Tak ako zvyčajne nedokazujeme linearitu strednej hodnoty, ale sa na ňu odvolávame, tak by sme mali potlačiť vôbec technickú stránku, a to vo všetkých troch úrovniach. A tým získať priestor na úvahy ideové, na príklady podporujúce stochastické myslenie.

Literatúra

[1] Calda, E. - Dupač, V.: Matematika pro gymnáziá. Kombinatorika,pravděpodobnost, statistika, 4.vyd, Praha, Prometheus (2003).

[2] Hecht, T. - Kalas, J.: Pravdepodobnosť. Štatistika. Učebnica matematiky pre 4.ročník gymnázií a SOŠ. 1.vyd., Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana (2001).

[3] Plocki, A.: Pravdepodobnosť okolo nás. Stochastika v úlohách a problémoch. Katolícka univerzita, Ružomberok (2004).

[4] Riečan, B.: Pravdepodobnosť a štatistika. SPN, Bratislava (1986).

[5] Riečan, B. - Neubrun, T.: Teória miery. VEDA, Bratislava (1992).

[6] Zvára, K. - Štěpán, J.: Pravděpodobnost a matematická statistika. Matfyzpress, Praha (1997), VEDA, Bratislava (2001).

Adresa autora: Department of Mathematics
Faculty of of Natural Science
Matej Bel University
Tajovského 40
974 01 Banská Bystrica
Slovakia
e-mail: riecan@fpv.umb.sk

Dělitelnost a číselné soustavy – demonstrační program

Michal Roháček, Pavel Tlustý

Abstract. *Obsahem příspěvku je informace o programu, který napomáhá nejen při výuce matematiky na ZŠ. Program umožňuje uživateli převody mezi desítkovou soustavou a soustavami o jiném základu, pracovat s počitadlem, zobrazovat zápis čísla podle Egypťanů, Babylóňanů a Mayů nebo ověřovat dělitelnost čísla. Dále ukazuje na některé praktické aplikace dělitelnosti v každodenním životě.*

Úvod

Proč vlastně tento program vznikl? Měl by doplňovat výuku matematiky a informatiky na ZŠ, kde se nyní začínají rozjíždět a definovat rámcově vzdělávací programy. Dosud se totiž učitelé skoro vůbec nevěnovali číselným soustavám o jiném základu než 10, teď mají možnost začít, neboť nejsou tolik svazovány osnovami a také mohou například propojit dějepis s matematikou či informatikou apod.

Cílem práce je přiblížit dělitelnost žákům na ZŠ, ukázat jim řadu usnadňujících kritérií a nebo jim ukázat jiný systém soustavy než desítkový a také na něm například definovat principy aritmetických operací. Program by měl v některých otázkách napomoci. Prostředí se neustále vyvíjí, je laděno a upravováno na základě připomínek uživatelů či při zjištění chyb.

Program je uložen jako exe-soubor, nevyžaduje tedy žádný nákup nového softwaru. Uživatel si ho může stáhnout na stránkách PF JU pod katedrou matematiky či obdržet e-mailem, kontakt miro81@seznam.cz.

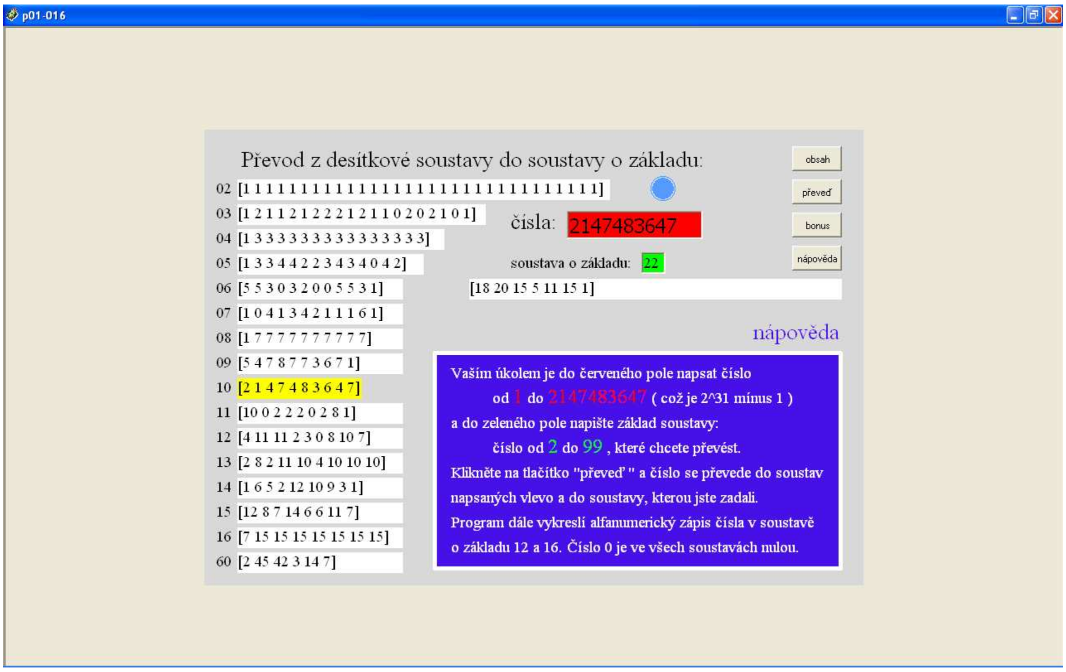
Prostředí

Program je vytvořen v prostředí Imagine Logo, který vznikl v roce 2001 a je nepřímým následovníkem Comenius Loga. Imagine je nová generace prostředí a programovacího jazyka Logo. Byl vyvinut pro žáky, studenty a učitele, kteří chtějí provádět aktivity širokého rozsahu, jako kreslení a animování, prezentace svých projektů na Internetu, tvorba multimediálních aplikací, modelování, vyvíjení projektů a mikrosvětů pro matematiku. Imagine má objektově orientovanou strukturu, podporuje hierarchii objektů a chování a paralelní nezávislé procesy. Hlavním cílem prostředí Imagine je poskytnout studentům, učitelům a tvůrcům pedagogických aplikací lákavý a silný nástroj pro učení (se). Prostředí je kompletně lokalizováno do českého jazyka.

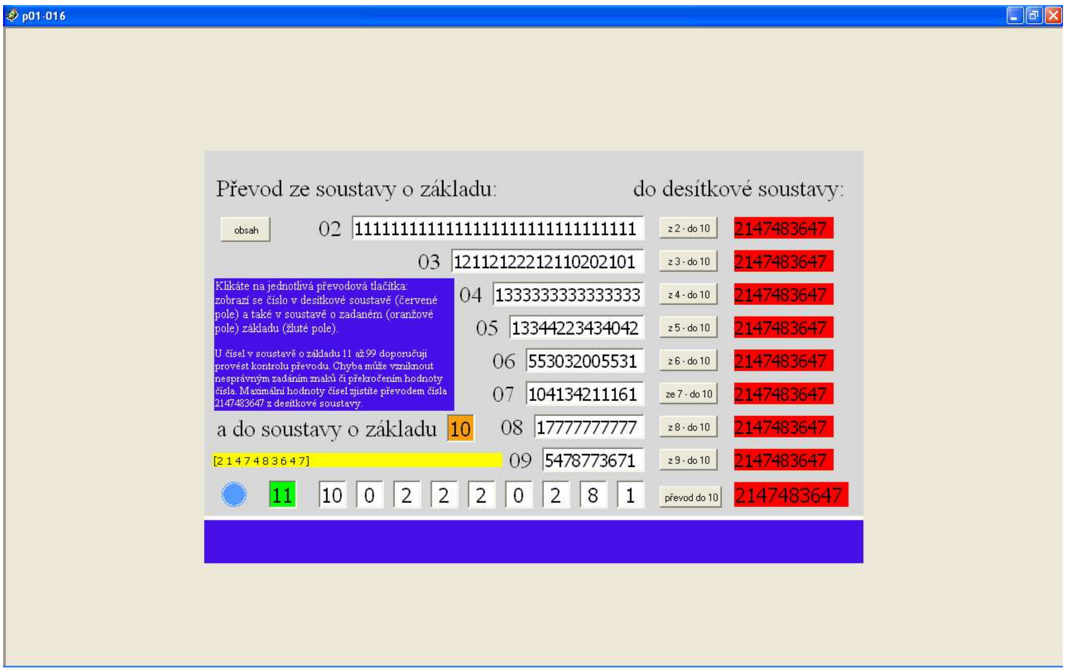
Program vznikl při tvorbě diplomové práce a mohl by se definovat jako kalkulačka. Uživatel se zde může opřít o nápovědu, která mu zde „zajistí“ správný chod programu, správné zobrazování. Pomocí myši a poklepání se pohybuje mezi jednotlivými stránkami a vykonává jednotlivé příkazy. Čísla do textových polí zadává na numerické klávesnici.

Dosavadní možnosti programu

Uživatel zde například zadá číslo v desítkové soustavě a program zobrazí číslo ve dvojkové či jiné číselné soustavě (obr. 1). Oproti tomu na další stránce (obr. 2), přepínání modrým puntíkem, zadá číslo například v soustavě o základu pět a to se zobrazí jak v desítkové soustavě, tak ještě v soustavě o základu, který si sám zvolil (oranžové pole).

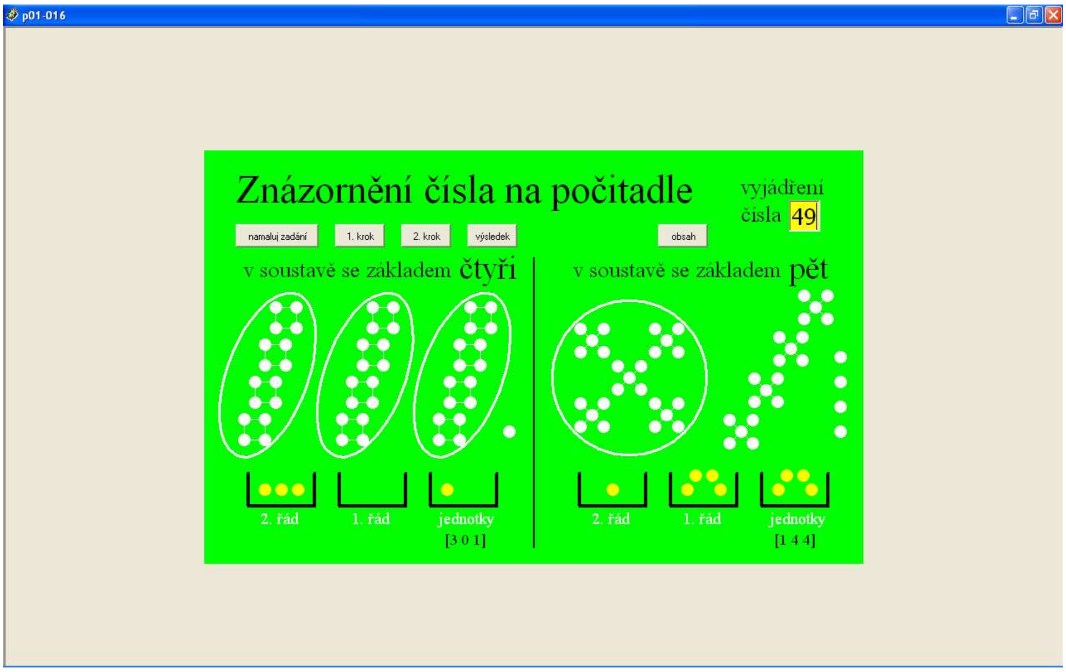


Obr. 1



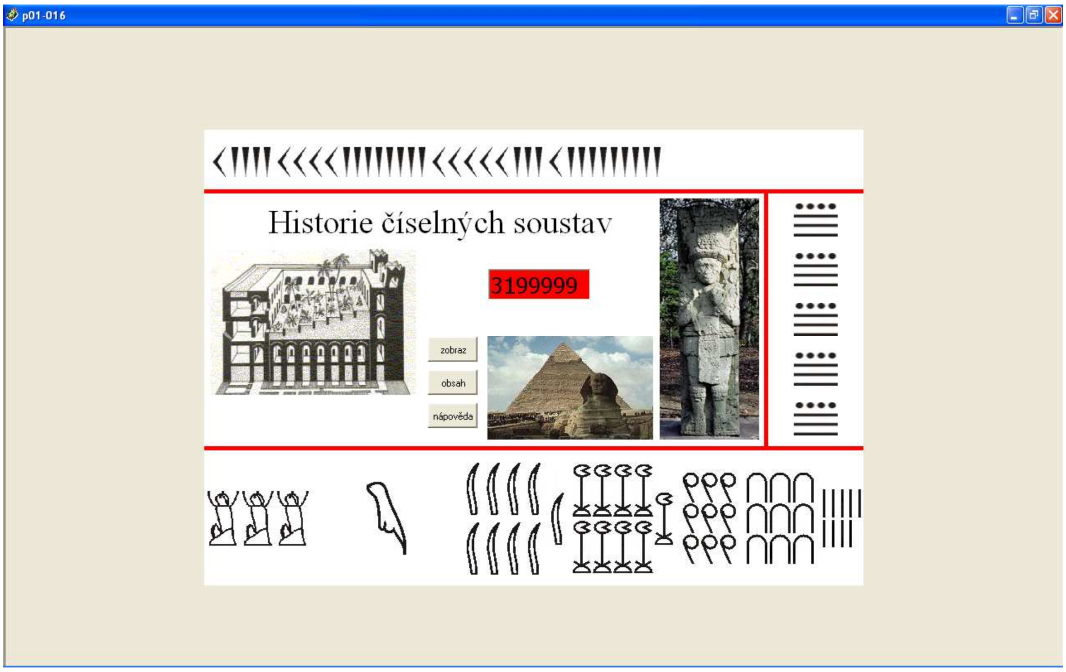
Obr. 2

Dále je tady naznačen princip počitadla (obr. 3), to pomáhá s převodem čísla (počet kamenů) do soustav o základu dvě, tři, čtyři a pět. Díky tomu se studenti názorně dozvědí, jak se vlastně převádí číslo z desítkové soustavy do soustavy o jiném základu.



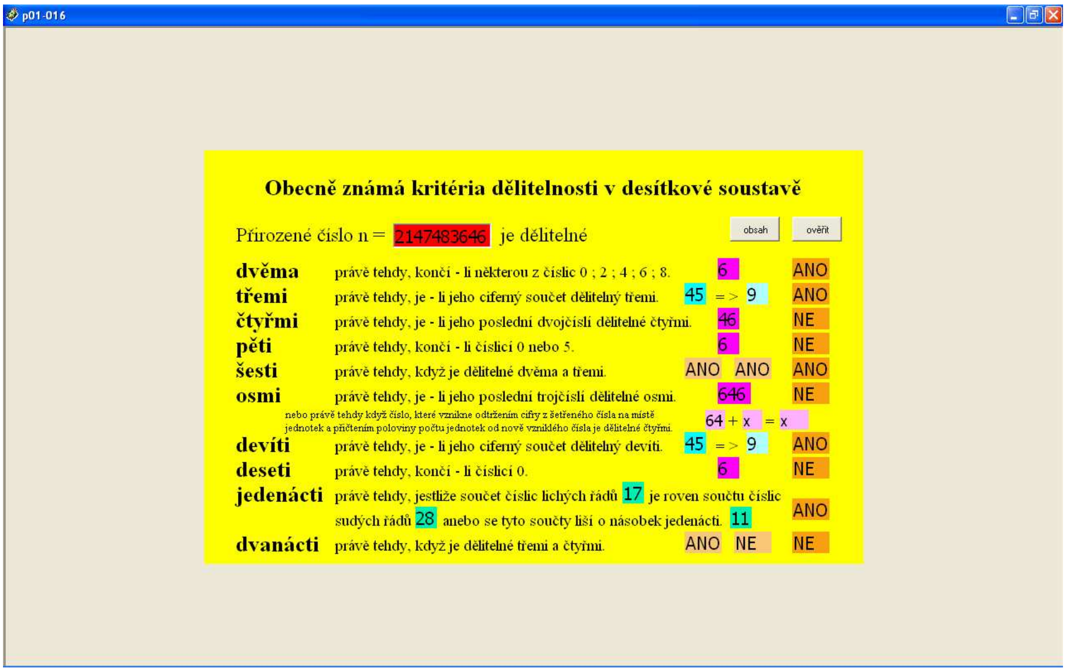
Obr. 3

Nebo je zde databáze obrázků, díky kterým uživatel pozná historický zápis čísla Egypťanů, Mayů a Babyloňanů (obr. 4).



Obr. 4

Program dále obsahuje obecně známá kritéria dělitelnosti (obr. 5). Uživatel zadá číslo a po ověření se zobrazí zda je či není číslo dělitelné. Poslední stránka naznačuje užití dělitelnosti v každodenním životě.



Obr. 5

Literatura

[1] JELÍNEK, M: *Numerační soustavy*, Praha: SPN, 1974

[2] ROHÁČEK, M: Dělitelnost a číselné soustavy, diplomová práce , PF JU katedra matematiky, duben 2006

[3] SVATOKRIZNY, P.: *Aritmetika a algebra pro pedagogické fakulty II.*, Bratislava: SPN, 1978

[4] TLUSTÝ, P.: Příklady z algebry pro II. ročník, České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 1999

[5] TLUSTÝ, P: *Obecná algebra pro učitele*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2006

Adresa autora:
Michal Roháček, Mgr.
ZŠ Zlatá stezka 240
383 01 Prachatice
Česká Republika
e-mail: miro81@seznam.cz

Aplikácie vektorového počtu vo vyučovaní stereometrie na strednej škole

Lucia Rumanová, Janka Drábeková

Abstract. *This paper suggest problem of teaching solid geometry. We are specializing to relation between vector calculus and solid geometry, concretely if the students know to apply their knowledge in solving of solid geometry problem. We describe preparing and realization of our experiment as well as results and possible solution of given problem.*

Úvod

Problémom vo vyučovaní stereometrie je nadväznosť obsahu vyučovania stereometrie a obsahu vyučovania ostatných vyučovacích predmetov. Špecifickým problémom je však nadväznosť, koordinácia vo vyučovaní jednotlivých tematických celkov v rámci samotnej stereometrie. Podobná situácia je určite aj v iných celkoch matematiky.

Ide nám predovšetkým o vzťah vo vyučovaní stereometrie a vektorového počtu. Menej alebo vôbec sa venuje pozornosť možnostiam aplikovať vektorový počet pri riešení stereometrických úloh, ktoré sa v iných tematických celkoch vyučujú z hľadiska syntetickej, prípadne analytickej geometrie.

Pripomeňme si, že so základmi vektorovej algebry či analytickej geometrie sa študenti stretávajú už na základnej škole. Neskôr sa s pojmom vektora a s operáciami s vektormi študenti oboznámia v 1. ročníku strednej školy v rámci vyučovania fyziky a v matematike sa potom stretávajú s vektormi v 3. ročníku strednej školy. Tento tematický celok je nasmerovaný predovšetkým k zavedeniu poznatkov analytickej geometrie (rovnice priamok v rovine i v priestore, analytické vyjadrenie rovín, polrovín, polpriestorov, neskôr k analytickej geometrii kužeľosečiek a guľovej plochy).

Už veľmi málo priestoru vo vyučovaní stereometrie zostáva na aplikačné úlohy z iných vyučovacích predmetov (fyzika, geografia, geológia a podobne). Študenti väčšinou neobjavia pri riešení stereometrických úloh súvis s inými vyučovacími predmetmi, a preto svoje nadobudnuté vedomosti nevedia a ani sa nepokúšajú aplikovať.

Príprava experimentu

Uvedené problémy by sme mohli zhrnúť nasledovne:

- Študenti na strednej škole sa učia izolovane nasledujúce tematické celky: axiomatická výstavba geometrie, syntetická geometria, analytická geometria, vektorový počet. Z toho vyplýva, že vzájomná nadväznosť rôznych prístupov k stereometrii je minimálna, resp. žiadna.

- Študenti na strednej škole v súlade so súčasne platnými učebnými osnovami nemajú možnosť dostatočne aplikovať poznatky vektorového počtu v iných oblastiach matematiky, okrem už spomínanej analytickej geometrie, a ak, aj tak v tomto prípade väčšinou iba formálne.

Problém sme overovali experimentálne, a preto sme sa najskôr snažili nájsť takú stereometrickú úlohu, ktorá by nám dala potrebnú odpoveď.

Snažili sme sa nájsť takú úlohu, ktorú by nebolo možné riešiť jednoduchým použitím niektorého z naučených algoritmov, a ktorá sa dá riešiť v rôznych teoretických rámcoch. Úloha by mala byť netypická v porovnaní s úlohami nachádzajúcich sa v učebniciach matematiky, ale mali by sa dať pri jej riešení využiť tiež vedomosti z viacerých oblastí matematiky, prípadne nájsť pri riešení danej úlohy aj súvislosť s inými vyučovacími predmetmi.

Po rôznych úvahách v súlade so zásadami teórie didaktických situácií (Brousseau, Sierpinská, ...), v rámci didaktickej situácie S_3 (noosferická didaktická situácia) sme preštudovali stredoškolské učebnice matematiky a rozhodli sme sa nakoniec využiť úlohu z francúzskej stredoškolskej učebnice matematiky *Mathématiques – Geometrie – Première S-E* ako aplikačnú úlohu na použitie operácií s vektormi.

Úloha znela: Daná je kocka ABCDEFGH a body K, L, M, N tak, že bod K je stredom podstavy EFGH, bod L je stred úsečky AB, bod M patrí úsečke AE tak, že platí

$$|AM| = \frac{1}{3}|AE|$$

a bod N patrí úsečke BG, kde

$$|BN| = \frac{1}{3}|BG|$$

Dokážte, že body K, L, M, N ležia v jednej rovine.

Sme si vedomí, že formulácia úlohy by mala byť taká, aby neobsahovala návod na riešenie a aby „neponúkala“ alebo nenaznačovala metódu, ktorou sa má úloha riešiť.

Študenti sa môžu s ohľadom na ich vedomostnú úroveň zaoberať riešeniami úlohy v rôznych rámcoch. Uvádzame možnosti riešenia danej úlohy, ktoré úzko súvisia s niektorými tematickými celkami stredoškolskej matematiky:

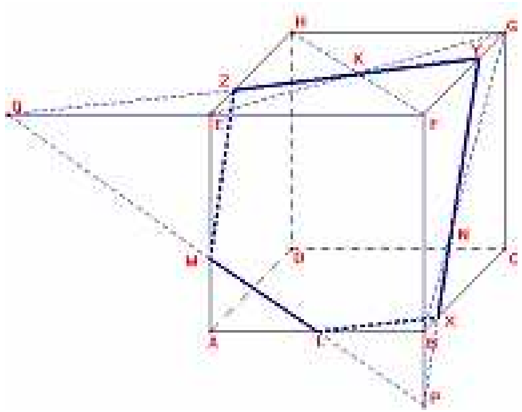
- *Q_1: Vektorové riešenie* – využijeme kolineárnosť alebo komplanárnosť vektorov
- *Q_2: Analytické riešenie* – napíšeme všeobecnú rovnicu roviny určenej tromi s daných štyroch bodov a ukážeme, že aj štvrtý bod je bodom tejto roviny
- *Q_2': Analytické riešenie* – napíšeme parametrické vyjadrenie roviny určenej tromi s daných štyroch bodov a ukážeme, že aj štvrtý bod je bodom tejto roviny
- *Q_2": Analytické riešenie* – napíšeme parametrické rovnice dvoch priamok z daných štyroch bodov a následne zistíme ich vzájomnú polohu (či tvoria rovinu)
- *Q_3: Syntetické riešenie* – zostrojíme na kocke rez rovinou a zistíme, či zvyšný bod je tiež bodom tejto roviny (bodom rezu)
- *Q_4: Vektorové riešenie* – využijeme vlastnosti ťažiska určitej sústavy bodov s pridelenými „váhami“.

Uvedieme dve konkrétne riešenia danej úlohy. Prvé bude syntetické riešenie Q_3, ktoré sme očakávali v riešeniach študentov najčastejšie a druhá ukážka bude (podľa nás) riešenie, o ktoré sa možno študenti ani nepokúsia, nakoľko musia aplikovať vedomosti z fyziky, a to je vektorové riešenie s využitím vlastnosti ťažiska Q_4.

Syntetické riešenie Q_3 :

Úlohu riešime tak, že zostrojíme na kocke $ABCDEFGH$ rez rovinou určenou bodmi L, M, N a zistíme, či bod K patrí rovine LMN:

1. $ML; M \in ABF; L \in ABF; ML \in ABF$

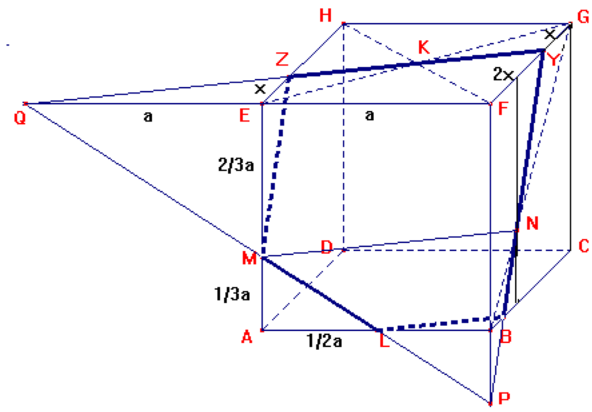


Obr. 1

2. $P, Q; ML \in ABF; BF \in ABF; EF \in ABF; P = ML \cap BF \wedge Q = ML \cap EF$
3. $PN; P \in BCG; N \in BCG; PN \in BCG$
4. $X, Y; PN \in BCG; BC \in BCG; FG \in BCG; X = PN \cap BC \wedge Y = PN \cap FG$
5. $LX; L \in ABC; X \in ABC; LX \in ABC$
6. $QY; Q \in EFG; Y \in EFG; QY \in EFG$
7. $Z; EH \in EFG; QY \in EFG; Z = EH \cap QY$
8. $MZ; M \in ADH; Z \in ADH; MZ \in ADH$
9. rez $MLXYZ$

Treba ešte dokázať, že aj štvrtý bod patrí rovine určenej tromi z daných štyroch bodov. Uvádzame niekoľko rôznych typov dôkazov:

1. Jednoduchými výpočtami vieme dokázať, že dĺžky úsečiek YG a ZE sa rovnajú (viď nasledujúci obrázok 2). Vychádzali sme napríklad z podobnosti trojuholníkov, a ak zistíme, že $x = \frac{1}{3}a$, tak bod $K \in LMN$.

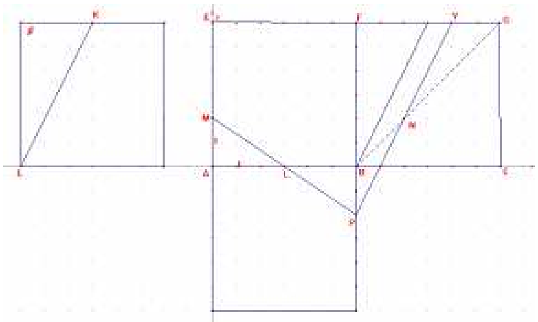


Obr. 2

Z podobnosti trojuholníkov MAL a MEQ vyplýva, že |QE| $= a$. Potom $x + \frac{1}{3}a = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{3}a$

To znamená, že priamka prechádza stredom K steny *EFGH* kocky *ABCDEFGH*, a teda bod K patrí rovine .

2. Dá sa tiež konštrukčne ukázať incidenciu bodu K



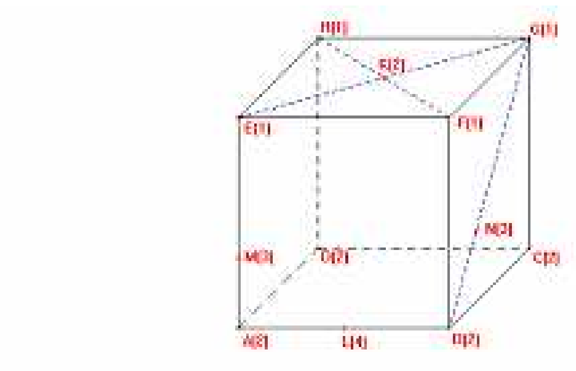
Obr. 3

a roviny MLN, ak dokážeme rovnobežnosť priamok *ZM, KL, PN* (resp. *LB, MN, ZY).*

Nech je rovina α určená bodmi *M, N, L.* Dokážeme, že $K \in MLN$.

Priamka PN patrí rovine BCG a LK patrí rovine β. Keďže rovina β je rovnobežná s rovinou BCG, tak aj priamky KL a PN sú rovnobežné (obr. 3). Z čoho teda vyplýva, že $KL \subset \alpha (L \in \alpha)$ a $K \in MLN$.

Vektorové riešenie Q_4:



Obr. 4

Úloha sa dá riešiť s využitím ťažiska, a preto je vhodné uviesť na tomto mieste jeho definíciu:

Nech sú dané dva rôzne body roviny A, B a dve reálne čísla a, b, ktorých súčet je rôzny od nuly, potom existuje jediný taký bod G, pre ktorý platí: $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ a $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. *Pre každý bod M platí:*

$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b}\left(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}\right).$

Bod G sa nazýva ťažisko systému $\{A(a), B(b)\}$.

Analogickým spôsobom možno pojem ťažiska definovať pre ľubovoľný konečný počet bodov v rovine i v priestore. Napríklad ťažisko systému $\{A(a), B(b), C(c)\}$, pričom $a + b + c \neq 0$, je bod G, pre ktorý platí: $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ alebo $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right)$.

Ťažisko Gsystému $\{A(a), B(b)\}$ je bod kolineárny s bodmi A a B a ťažisko G systému $\{A(a), B(b), C(c)\}$ je bod, ktorý je s bodmi A, Ba Ckomplanárny.

V riešení úlohy pridelíme hmotnosť vrcholom kocky podľa obrázku (obr. 4).

Zvyšné body považuje už za ťažiská:

K je ťažiskom *E(1), G(1)*;

L je ťažiskom *A(2), B(2)*;

M je ťažiskom *A(2), E(1)*;

Nje ťažiskom *B(2), G(1).*

Určíme ťažisko G: *{A(2), B(2), G(1), E(1)}.*

Z uvedených vlastností ťažiska, G je ťažiskom systému *{M(3), N(3)}* aj systému *{K(2), L(4)}.*

Potom platí, že body *K, L, M, N* ležia v jednej rovine, lebo $\overrightarrow{MG} = \frac{3}{6}\overrightarrow{MN}$ a $\overrightarrow{LG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{LK}$.

Realizácia experimentu

Experiment pozostával z danej úlohy a prebehol v dvoch etapách, pričom experimentu sa zúčastnilo 108 študentov stredných škôl (Bratislava, Nitra).

Na začiatku sa všetci študenti oboznámili s podmienkami, ktoré bolo potrebné dodržať. Náš experiment vyžadoval samostatnú prácu študentov, pričom na riešenie úlohy mali 25 minút. Pri riešení mohli používať písacie a rysovacie potreby a k dispozícii mali aj štvorčekový papier, čo väčšina študentov využila. Študenti boli ďalej vyzvaní k riešeniu úlohy všetkými možnými spôsobmi a mali uplatniť všetky nadobudnuté vedomosti.

Výsledky študentov v experimente uvádza nasledujúca tabuľka (tabuľka 1):

Vektorové riešenie úlohy (Q_1)	2 študenti
Analytické riešenie úlohy (Q_2)	15 študentov
Syntetické riešenie úlohy (Q_3)	92 študentov
Zostrojenie rezu na kocke rovinou z daných bodov	38 študentov
Uvedomenie si dôkazu incidencie štvrtého bodu v rovine	6 študentov
Študent dokáže, že dĺžky úsečiek *YG* a *ZE* sa rovnajú	0 študentov
Dôkaz incidencie štvrtého bodu v rovine s využitím podobnosti (zhodnosti trojuholníkov)	4 študenti
Dôkaz incidencie štvrtého bodu v rovine s využitím rovnobežnosti priamok (Q_4)	1 študent
Bez riešenia úlohy	10 študentov

Tabuľka 1

Záver

Pre štatistické vyhodnotenie experimentu sme využili štatistický program C.H.I.C (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), ktorý nám potvrdil, že najčastejším riešením študentov bolo syntetické a najmenej používané bolo vektorové riešenie, ktoré sa neobjavilo na významnej úrovni (pre výsledky experimentu) v žiadnom z grafov, ktoré poskytuje program C.H.I.C.

Pri riešení úlohy sa našli aj študenti, ktorí si uvedomili, že sa dá úloha riešiť viacerými spôsobmi. Desať študentov využilo analytické aj syntetické riešenie úlohy, pričom len jeden zo všetkých študentov riešil úlohu troma spôsobmi, a to analyticky, synteticky a vektorovo.

Pojem ťažiska hmotných bodov (ťažisko) poznajú študenti z fyziky, kde teleso a hmotný bod sú zaradené do 1. ročníka na gymnáziu. Ale ani jeden zo študentov neobjavil súvislosť medzi fyzikou a matematikou, t. j. ani jeden sa nepokúsil aplikovať vedomosti z fyziky, čo sme v podstate aj predpokladali.

Pri analýze učebníc sme zistili, že v učebniciach matematiky sa nachádza veľmi málo úloh unifikačného (zjednocovacieho) charakteru, ktoré by podporovali odstránenie uvedených nedostatkov. Možno práve preto študenti na strednej škole v súlade so súčasne platnými učebnými osnovami nemajú možnosť dostatočne aplikovať poznatky vektorového počtu v iných oblastiach matematiky, okrem už spomínanej analytickej geometrie, a ak, aj tak v tomto prípade väčšinou iba formálne.

Pokračovaním našej práce by malo byť preto zaradenie práve aplikačných úloh do vyučovacieho procesu, oboznámiť študentov s takýmito úlohami a venovať sa riešeniam týchto úloh na hodinách matematiky. Chceli by sme tiež zistiť, či riešenie takýchto úloh skvalitní vyučovanie stereometrie, a či študenti pri riešením úloh objavia súvislosti medzi jednotlivými celkami v rámci stereometrii.

Literatúra

[1] BEREKOVÁ H., FÖLDESIOVÁ L., HRÍBIKOVÁ I., REGECOVÁ M., TRENČANSKÝ, I.: *Slovník teórie didaktických situácií, 1. časť,* Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky, No. 4, Bratislava 2001, VEGA č. 1/8257/01, ISBN 80–223–1704–7, p. 95 - 103.

[2] BOŽEK M.: **:** *Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ, Zošit 2 – Stereometria II,* OrbisPictusIstropolitana, Bratislava, 1999.

[3] FÖLDESIOVÁ L.: *Sequence analytical and vector geometry at teaching of solid geometry at secondary school*, Quaderni di ricerca in didactica No.13, G.R.I.M., Palermo 2003, ISSN on-line 1592-4424, p.33 – 42.

[4] HECHT T., BOŽEK M.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, Zošit 3 – Stereometria,* OrbisPictusIstropolitana, Bratislava 1998.

[5] MINISTERSTVO ŠKOLSTVA SLOVENSKEJ REPUBLIKY: *Učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium – Matematika,* Schválilo MŠ SR 24. 2. 1997 pod číslom 1252/96-1 s platnosťou od 1. 9. 1997.

[6] ODVÁRKO O., BOŽEK M., RYŠÁNKOVÁ M., SMIDA J.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1985.

[7] RIEČAN B., BERO P., SMIDA J., ŠEDIVÝ J.: *Matematika pre 4. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1987.

[8] RUMANOVÁ L.: *Analýza a-priori problému a význam funkcie pedagóga pri adidaktických situáciách*, Zborník vedeckých prác zo seminára Matematika a jej aplikácie v inžinierskom vzdelávaní, Nitra 2006, ISBN 80-8069-708-6, str. 115 – 119.

[9] ŠEDIVÝ J., BOCKO V., BOČEK L., MANNOVÁ B., MÜLLEROVÁ J., POLÁK J., RIEČAN B.: *Matematika pre 3. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1986.

[10] *Mathématiques – Geometrie – Première S-E.*

Adresa autorov:
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD., RNDr. Janka Drábeková, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre
Trieda Andreja Hlinku
949 76 Nitra
e-mail: Lucia.Rumanova@fem.uniag.sk, Janka.Drabekova@fem.uniag.sk

Vyučovanie s použitím Equation Grapher

Martina Sandanusová

Abstract. *I used program Equation Grapher at the teaching of theme Function. The results of this experiment I described in following article. The basic hypothesis that I verified was: The using of computers during teaching of mathematics could make education more effective and enhance motivation of pupils on mathematics lessons.*

Úvod

Programy, ktoré kreslia grafy funkcií, nie je na Internete ťažké nájsť. Veľmi dobrý je napríklad Equation Grapher, ktorý je radený medzi shareware programy. Môžeme si ho volne stiahnuť na týchto webových adresách

(http://www.mfsoft.com/equationgrapher,
http://www.graphnow.com,
http://www.simtel.net/pub/dl/36201.shtml).

Tento program sa dá veľmi výhodne využiť na hodinách pri preberaní učiva o funkciách, poslúži šikovne na demonštráciu grafického riešenia rovníc a nerovníc rôzneho typu, vie vykresliť nielen graf funkcie.

Cieľom uskutočnenia experimentu bolo potvrdiť alebo vyvrátiť pomocou spomínaného sharewaru nasledujúcu **hypotézu:** Žiaci, ktorí budú absolvovať počítačom podporované vyučovanie, dosiahnu na konci experimentálneho vyučovania v písomnej práci lepšie výsledky ako žiaci vyučovaní tradične.

Experiment

Z troch tried prvého ročníka SPŠE sme si pre experiment vybrali triedu s najhorším prospechom v matematike (experimentálna vzorka) a pre jej porovnanie triedu s najlepším prospechom z matematiky (kontrolná vzorka).

	1.D.	**1.B.**
Počet žiakov	26	33
PriemerM	1,88	2,4
CP	2,03	2,4
Použité pomôcky	farebné kriedy, tabuľa noviny, učebnice (lit.)	Equation Grapher

Úvodné podmienky
1.D – kontrolná vzorka
1.B – experimentálna vzorka
PriemerM – priemerná dosiahnutá známka z matematiky na polroku
CP – celkový priemer triedy na polročnom vysvedčení
Tabuľka 1 – dosiahnuté výsledky použité na výber exp. a kontr. vzorky
Plán práce v experimentálnej vzorke:

Klasické vyučovanie (v triede) daného celku, podľa tématického plánu: Dĺžka trvania 8 vyučovacích hodín. Obsah: pojem funkcia, definičný obor funkcie, obor hodnôt funkcie, graf funkcie a jej vlastnosti - rastúca a klesajúca, ohraničená, párna a nepárna, periodická a inverzná.

Počítačom podporované vyučovanie bolo uskutočnené na 4 vyučovacích hodinách.

Technická zabezpečenie:

Žiaci sedeli v dvoch radoch za sebou, pred nimi bola tabuľa a učiteľský stôl, na ktorom bol počítač prepojený s televíznou obrazovkou na ktorej mohli žiaci sledovať všetky naše kroky.

Stručný opis počítačom podporovaných hodín v experimentálnej vzorke

1. Vyučovania hodina

Téma : Úvod do používania Equation Grapher a Regression Analyzer.

Cieľ: Práca so základnými funkciami.

Oboznámenie sa s používaním programu Equation Grapher (EG). Skôr ako sme sa začali bližšie oboznamovať s jeho funkciou, tak sme žiakom rozdali preklad Hlavného Menu

- stručne sme prešli jednotlivé ponuky hlavného menu a vysvetlila som žiakom ich funkciu.
- funkčnosť ikon, overenie si ich funkcií na konkrétnom príklade f: y=2x-1
- zápis v príkazového riadku použitím okna Funktion Pad a jeho ikon vykreslenie grafu funkcie
- samostatna práca žiakov, aby sami zistili ako pracujú jednotlivé malé ikony pod hlavným menu.

2. Vyučovacia hodina

Téma: Riešenie konkrétnych príkladov.

Cieľ: Riešenie príkladov z teoretických hodín.

Pr.1. Daná je funkcia

$u : y = x^3 - 2; x \in \langle -3, 2); Urte : D(u), H(u); u(1), u(-0,5);$

$Patria\,[0; 2]\,, [0; -2]\,, [2; 6]\;funkcii?$

Pr.2. Určte D(f) $f : y = \sqrt{x^2 - 3x}$

Pr.3. Určte D(f), f(3) a zistite, či 5∈ H(f)

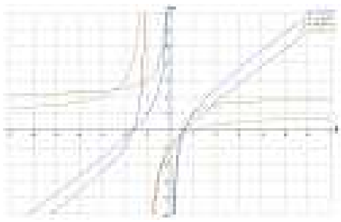
$$f : y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}; f : y = \frac{2x + 5}{\sqrt{(x-3).(2+x)}}$$

Pr.4. Nakreslite graf danej funkcie (zostavenie tabuľky a následné znázornenie hodnôt do zvolenej súradnicovej sústavy):

$$g : y = \{[2; 3]\,; [4; -1]\,; [-3; 5]\;\}\,; h : y = \{[0; 0]\,; [-2,5; 7]\,; [4; 0]\;\}$$
$$z : y = -2x + 1; x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$
$$u : y = x^2$$

Pri riešení pre funkcie g, h použili žiaci program Regression Analyzer.

Pr.5. Zistite výpočtom priesečníky grafu funkcie s osami x, y.



$$h : y = \frac{x-1}{x+1}$$

Typy nesprávneho zápisu tejto funkcie do príkazového riadku:
x-1/ x+1; (x-1)/x+1; x-1/(x+1)

Obrázok 1 – grafický zobrazenie
rôznych zápisov

Správny zápis mal vyzerať takto y= (x-1)/(x+1), obrázok 1.

Problémy:

1. zápis tretej mocniny –pomocou x^2
2. zápis odmocniny – sqrt (x 2-3x)
3. zápis zložitejších predpisov funkcií – uvedomenie si funkcie zátvoriek (pozri konkrétne príklad 5, zápisi z príkladu 3: y=1/(x 2-3x+2), y=(2x-5)/(sqrt((x-3).(2+x)))

3. Vyučovacia hodina

Téma : Riešenie konkrétnych príkladov.

Cieľ: Overenie si správnosti príkladov riešených na teoretických hodinách. Ukázať žiakom ako ich možno rýchlo a jednoducho vyriešiť pomocou počítača.

Pr.1. Nakreslite graf funkcie u: y=2x+b $b \in \{-2; 3; 0; 5\}$, v: y=ax-1 $a \in \{-1; 0; 1\}$ popíšte výsledok.

Pr.2. Nakreslite graf týchto funkcií a napíšte ich vlastnosti.

$$f : y = 2x-1; y_1 = |f(x)| = |2x-1|\,; y_2 = f(|x|) = 2\,|x|-1; y_3 = |f(|x|) = |2\,|x| - 1|$$

Pr.3. Aké vlastnosti majú nasledujúce funkcie:

$$u : y = 2 - x; v : x + x^3; z : y = \frac{1}{x^4}; w : y = 3 \cdot (x^2 - 2x + 1); t : y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Vzhľadom na pretrvávajúce problémy so zátvorkami mali na domácu úlohu teoreticky zapísať túto funkciu: $f : y = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$

Problémy:

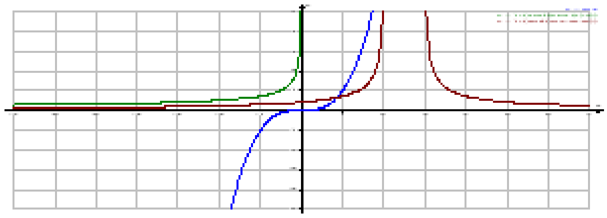
1. zápis absolútnej hodnoty – abs(x) ($y_1 = abs(2x-1); y_2 = 2abs(x) - 1; y_3 = abs(2(abs(x) - 1))$

4. Vyučovacia hodina

Písomná práca – použitá tá istá ako v 1.D.Všetky skupiny ju písali v tom istom čase. Ako dozor tam boli „nematematikári“, aby sme vylúčili možnosť prípadnej pomoci. Žiaci mohli pri riešení príkladov používať aj počítač, museli mať však príklady vypočítané aj teoreticky, takže pomocou počítača si väčšina kontrolovala správnosť svojho riešenia. Žiaci mohli odovzdať písomnú prácu kedy chceli a väčšina ju odovzdala po 22 – 27 minútach.

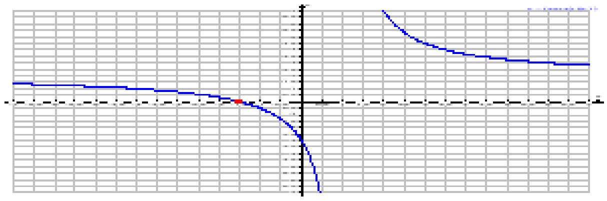
Pr.1 Určte definičný obor daných funkcií **5 bodov**.

$$g : y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \quad k : y = x^3 \quad h : y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$$



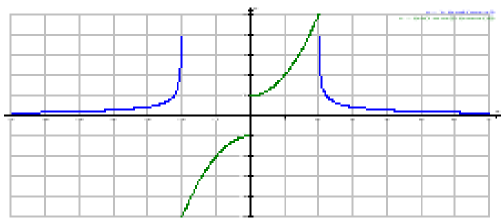
Riešenie
g: y=1/(sgrt(x 2-5x+6))
k: y=x 3
h: y=1/(sqrt(abs(x)-x))

Pr.2 Daná je funkcia $g : y = \frac{2x+3}{x-1}$, **3 body**
určite g(5), g(1); zistite x ak g(x)=0; zistite, či 2∈H(g)
Riešenie



g: y=(2x+3)/(x-1)
Y-Calc: y=3.25 for x=5
X -Calc: y=0 for x=-1.5
X- Calc: y-value could not be found

Pr.3 Určite definičný obor a vlastnosti danej funkcie **6 bodov**



$j : y = \frac{2x\left(1+x^2\right)}{2|x|}$
$p : y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$a funkciu j nakreslite

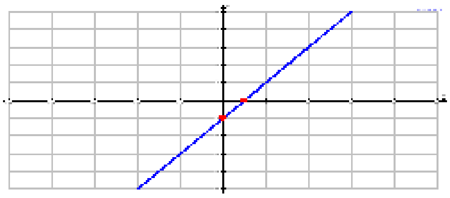
Riešenie

j: y=(2x(1+x 2))/(2absx)

p: y=1/(sqrt(x 2-4))

Pr.4 Určite priesečníky funkcie s osami x, y a inverznú funkciu k danej funkcii.

$o : y = 2x - 1$ 1**bod**



o:y=2x-1

X-Intersection x=0.5

Y-Intersection:y=-1

<u>**Hodnotenie:**</u>

percentuálne známka podľa bodov

normy

100% - 85,1% 1 15,00 – 12,76

85% - 70,1% 2 12,75 – 10,51

70% - 55,1% 3 10,50 – 8,26

55% - 40,1% 4 8,25 – 6,10

40% - 0% 5 6,00 – 0,00

Analýza porovnávacej písomnej práce (písomka)

1.B. – experimentálna vzorka (33 žiakov) v stĺpci B ozn. 1

1.D. – kontrolná vzorka (26 žiakov) v stĺpci B ozn. 2

Diff(1-2) – rozdiel medzi veličinami 1 – 2

PR1 – príklad 1

BODY – celkový počet dosiahnutých bodov z písomky

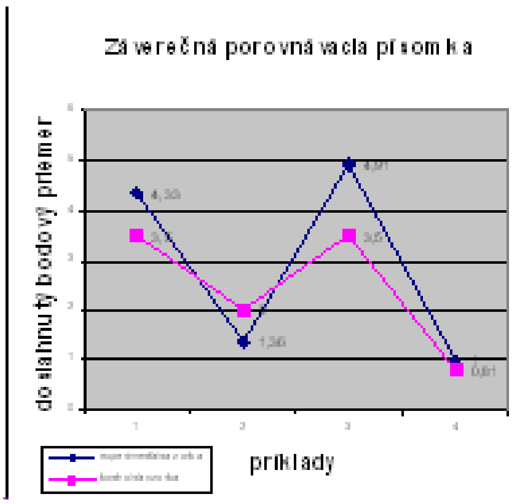
N – počet žiakov

Min a Max – najlepšia a najhoršia známka (Písomka), najmenší a najväčí počet dosiahnutých bodov (PR1, PR2, PR3, PR4, BODY) pre danú vzorku

Mean – priemer

Statistics						
Variable	**B**	**N**	**Lower CL Mean**	**Mean**	**Min**	**Max**
Písomka	**1**	33	1.6804	2	1	4
Písomka	**2**	26	2.3824	2.8846	1	5
Písomka	**Diff (1-2)**		-1.444	**-0.885**		
PR1	**1**	33	4.0438	4.3333	2	5
PR1	**2**	26	3.1002	3.5	1	5
PR1	**Diff (1-2)**		0.3625	**0.8333**		
PR2	**1**	33	1.0001	1.3636	0	3
PR2	**2**	26	1.6977	2	1	3
PR2	**Diff (1-2)**		-1.116	**-0.636**		
PR3	**1**	33	4.6527	4.9091	4	6
PR3	**2**	26	2.9988	3.5	1	6
PR3	**Diff (1-2)**		0.8922	**1.4091**		
PR4	**1**	33	1	1	1	1
PR4	**2**	26	0.6454	0.8077	0	1
PR4	**Diff (1-2)**		0.0525	**0.1923**		
BODY	**1**	33	10.87	11.606	7	15
BODY	**2**	26	8.7543	9.8077	5	15
BODY	**Diff (1-2)**		0.5779	**1.7984**		

Tabuľka 2 – štatistická analýza



	1.B	**1.D**
Ø bodov/1žiak	**11.61**	**9.81**
Ø známka	**2**	**2.88**

Tabuľka 3 – priemerný bodový zisk

Na základe týchto výsledkov sme vyslovili záver, že sme *potvrdili našu hypotézu*, ktorú sme si stanovili na začiatku experimentu. Experimentálna vzorka dosiahla lepšie výsledky ako kontrolná, pričom sme zmenili len premennú použitie IT u exp. vzorky. Z osobného pozorovania sme stanovili nasledujúce výhody a nevýhody v použití IT.

Výhody: motivácia žiakov, automatizácia vysoká názornosť, úspora času, lepšie dosiahnuté výsledky.

Nevýhody: nedostatok vyučovacích hodín na využívanie počítača, rôzna úroveň počítačových zručností, v ďalšom vzdelávaní nepoužiteľné.

Literatúra

[1] HECHT, T.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana

[2] JIRÁSEK, F.: Zbierka úloh z matematiky pre SOŠ a študijné odbory SOU 1. časť, Bratislava, SPN 1986

[3] KUDLÁČEK, L.: Matematika pre 1. a 2. ročník štúdia na stredných priemyselných školách pre pracujúcich, Bratislava, SPN 1976

[4] ODVÁRKO, O.: Matematika pre študijné odbory SOŠ a SOU 2. časť, Bratislava, SPN 1993

[5] SANDANUSOVÁ M.: Počítače v procese vyučovania matematiky, rigorózna práca, FMFI UK, 2003

[6] CALDA E. a kol.:Matematika pre študijné odbory SOŠ a SOU - 1. časť, Bratislava, SPN, 4. vydanie, 1993;

Adresa autora:
PaedDr. Martina Sandanusová
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: tinasa@pobox.sk

Kľúčové kompetencie v matematickom vzdelávaní a možnosť ich monitorovania slovnými úlohami

Jozef Sekerák

Abstract. *The paper deals with the term key competences and its terminological development. It mentions importance and necessity of development of key competences not only in mathematical education. There is slight a system of mathematical key competences. The paper contains an introduction to the ability of monitoring of key competences with word tasks. It represents theoretical base for further study of this problem.*

Úvod

Stále významnejším cieľom školských systémov je pripraviť študentov na to, aby boli schopní úspešne sa vyrovnať s nárokmi, ktoré na nich kladie spoločnosť založená na informáciách, a zároveň dokázali maximálne využívať príležitosti, ktoré im táto spoločnosť ponúka. Tento cieľ prinútil tých, kto sú zodpovední za podobu školskej politiky, k preskúmaniu obsahu vzdelávania, vyučovacích metód a cieľov, čo zase nevyhnutne podnietilo záujem o kľúčové kompetencie. Vzdelávanie sa preto začalo zameriavať skôr na úspešnú aplikáciu vedomostí, schopností a zručností než na ich predávanie. V dôsledku toho väčšina krajín nanovo definovala vzdelávacie ciele s prihliadnutím na kľúčové kompetencie, čo sa ukazuje ako správny a efektívny krok. Kľúčové kompetencie sa čoraz častejšie objavujú a s nimi aj otázka: „Čo vlastne sú tie kľúčové kompetencie a aký je ich význam¿‘ Práve na túto otázku reaguje tento článok.

Pojem – kľúčové kompetencie[29]

Terminológia slúžiaca k označeniu fenoménu **kľúčových kompetencií** sa začala formovať v anglicky hovoriacich krajinách a prešla vývojom od pojmu *basic skills*, cez *competences* až po konečné *key competences*. Termínom *basic skills* (základné zručnosti), poprípade tzv. *life* alebo *survival skills* (životne dôležité zručnosti), sa zvyčajne označovali zručnosti späté s čítaním a počítaním. Práve pre svoj veľmi úzky rozsah bol tento pojem nahradený pojmom *competence*.

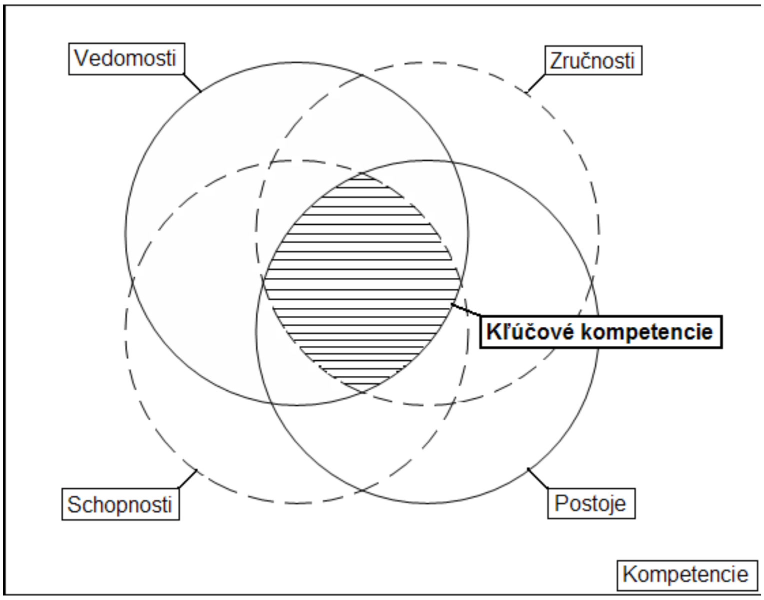
Okrem tohto pojmu sa súbežne vyskytujú aj ďalšie: *nové základné zručnosti, životné kompetencie, akčné kompetencie, metodologické* či *metakompetencie.* Z hľadiska frekvencie sa však najviac používa termín *kľúčové kompetencie.*

Čo teda treba pod pojmom kľúčové kompetencie chápať?

Pojem ***kľúčová kompetencia*** nemožno považovať za čisto pedagogický alebo psychologický termín. Tento pojem sa používa ako v odbornom, tak aj v bežnom, každodennom jazyku od začiatku 70 – tych rokov 20. storočia a až koncom 90 – tych rokov 20. storočia sa tento pojem dostáva do oblasti vzdelávania. Napriek tomu neexistuje doposiaľ jeho jednotne uznávaná a uspokojivá definícia. Ale uvedomením si všetkých charakteristík a faktov vyplývajúcich z definícií z rôznych oblasti, od rôznych odborníkov dostávame, že **kompetencie predstavujú zjednotenie**

[29]Spracované podľa [1], [2], [3], [5].

všetkých vedomostí, zručností, schopností a postojov. Jednotlivé kompetencie umožňujú ich nositeľovi konať adekvátne v konkrétnej situácii, v určitej oblasti činnosti. No kľúčové kompetencie sú tie kompetencie, ktoré sú využiteľné v rôznych oblastiach činnosti. Predstavujú len časť vedomostí, zručností, schopností a postojov, ktoré jedinec nadobúda počas celého života. Z toho možno kľúčové kompetencie chápať ako multifunkčný súbor vedomostí, zručností, schopností a postojov.



Obrázek: kľúčové kompetencie tvorí len časť vedomostí, zručností, schopností a postojov, ktoré žiak, resp. študent nadobúda v súčasnom vzdelávaní.

Tu sa núka otázka: Ako vybrať tu správnu časť vedomostí, zručností, schopností a postojov napr. vo vyučovaní matematiky, aby došlo k efektívnemu rozvíjaniu komplexnej osobnosti žiaka?

Na to neexistuje jednoznačná odpoveď, pretože kľúčové kompetencie chápeme kroskurikulárne (nadpredmetovo), t.j. neviažu sa na konkrétny obsah, resp. predmet, ale sú spojené s procesuálnou stránkou vyučovania. K tomu, aby došlo k efektívnemu rozvíjaniu kľúčových kompetencií žiakov a študentov, je potrebné obohatiť vyučovanie rôznymi netradičnými metódami, ktoré vyžadujú od žiakov činnosť a aktivitu.

Význam rozvíjania kľúčových kompetencií

V čom spočíva význam rozvíjania kľúčových kompetencií?

Problematikou rozvíjania kľúčových kompetencií sa začali zaoberať v osemdesiatych rokoch 20. storočia v hospodárskej sfére (obchod, služby, priemysel) vyspelé štáty sveta ako sú USA, Kanada a Austrália. Až koncom deväťdesiatych rokov 20. storočia vstupujú kľúčové kompetencie do oblasti vzdelávania. Príčinou sa stal fakt, že súčasný svet sa vyznačuje rýchlymi zmenami, explóziou informácií a rýchlym tempom inovácií, najmä informačných, pričom tento trend sa neustále zrýchľuje. Zastarávajú technológie, ktoré sa používajú v rôznych sférach spoločenského života. Ľudia strácajú zamestnanie, pretože nie sú schopní prispôsobiť sa týmto rýchlym zmenám. Celoživotné povolania v podstate začali miznúť. Kompetencie, ktoré sú zamerané iba na jednu konkrétnu situáciu, sa stávajú neužitočnými. Preto vo všetkých vyspelých štátoch sveta je snaha nájsť a v ľuďoch rozvíjať také kompetencie, ktoré možno využiť vo väčšine (aj zatiaľ ešte neexistujúcich) povolaní a umožnia jedincovi zastávať celý rad pracovných pozícií i funkcií, vykonávať rôzne povolania, sú vhodné na riešenie celého radu väčšinou nepredvídateľných problémov a umožnia jedincovi úspešne sa vyrovnať s rýchlymi zmenami v práci, osobnom i spoločenskom živote. Takéto kompetencie, ako sme už uviedli, sú **kľúčové.**

Systém matematických kompetencií

Matematické kompetencie sú nehierarchickým zoznamom všeobecných matematických vedomostí, schopností a postojov ako sú napr. riešenie úlohy, použitie matematického jazyka, matematické modelovanie, chápanie matematiky ako metódy riešenia každodenných problémov, atď. zodpovedajúce všetkým úrovniam vzdelania. Sú to kompetencie, ktoré treba aktivovať pre také prepojenie reálneho sveta (v ktorom sa problémy vyskytujú) s matematikou, ktoré vedie k riešeniu daného problému.

Matematické kľúčové kompetencie:

- Matematické myslenie a usudzovanie.
- Matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy.
- Použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií.
- Znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia.
- Položenie otázky, vymedzenie problému a jeho riešenia.
- Matematické modelovanie.
- Matematická argumentácia, dôkaz.
- Používanie pomôcok.
- Komunikácia.
- Kompetencie týkajúce sa práce s informáciami.
- Kompetencie týkajúce sa postojov a hodnotového systému.
- Personálne a interpersonálne kompetencie.

Medzi kľúčovými kompetenciami nie je ostrá hranica. V rámci nich sa nachádzajú kompetencie, rozvíjaním ktorých (aj slovnými úlohami) možno formovať danú kľúčovú kompetenciu, a tie môžu byť vo viacerých skupinách.

Kľúčové kompetencie a možnosť ich monitorovania slovnými úlohami

Kompetencie výchovné (afektívne), ktoré sa týkajú rozvíjania záujmu, postojov, hodnotovej orientácie a výchovy žiaka nemožno skúmať, monitorovať a hodnotiť úlohami ako niektoré iné kompetencie. Tie kompetencie, ktoré sa dajú overovať úlohami, nemožno overovať týmto spôsobom individuálne, pretože pri riešení problémov sa používa súčasne veľa (niekedy všetky) z uvedených kompetencií. Snaha hodnotiť ich individuálne by pravdepodobne viedla k umelým úlohám a zbytočnému rozparcelovaniu oblastí matematickej gramotnosti. Aj preto uvedené kompetencie kategorizujeme do troch väčších tried kompetencií [4]:

1. kompetencie na reprodukčnej úrovni,
2. kompetencie na úrovni prepojenia,
3. kompetencie na úrovni reflexie – preniknutie do podstaty matematiky.

Jednotlivé úrovne sú založené na type kognitívnych nárokov potrebných na vyriešenie rôznych matematických problémov. Horeuvedené matematické kompetencie nemusia patriť iba do jednej triedy kompetencií. Triedy tvoria koncepčné kontinuum, od jednoduchej reprodukcie faktov a počtárskych zručností cez schopnosti previazať rôzne zdroje pri riešení úloh až k „matematizácii“ problémov skutočného sveta. V tomto prípade sa hierarchia chápe tak, že požiadavky (napr. vo forme matematickej úlohy, problému) vyžadujúce kompetencie triedy 3 sú obvykle náročnejšie ako požiadavky vyžadujúce kompetencie triedy 2, čo však neznamená, že kompetencie triedy 2 sú nutným predpokladom všetkých kompetencií triedy 3.

Kompetencie na reprodukčnej úrovni

Kompetencie na úrovni reprodukcie možno popísať týmito charakteristikami: reprodukcia naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr a riešenie rutinných problémov. V zmysle hierarchie možno túto triedu kompetencií považovať za najnižšiu, pretože sa kladú najjednoduchšie požiadavky na vedomosti, zručnosti a postoje. Úlohy, ktoré sú zamerané na túto úroveň kompetencií, sú napr.:

Úloha č.1: Riešte rovnicu: $8x + 4 = 3x - 4$, kde $x \in R$.

Úloha č.2: Vypočítajte aritmetický priemer čísel: 7, 5, 18, 12, 6, 36, 24, 5.

Úloha č.3: Napíšte 69% v tvare zlomku.

Úloha č.4: Na vkladnú knižku s ročným úrokom 4% sme uložili 1000 Sk. Aká suma bude na knižke po prvom roku sporenia?

Kompetencie na úrovni prepojenia

Kompetencie na tejto úrovni umožňujú riešenie problémov, ktoré nie sú úplne rutinné, ale obsahujú známe alebo pomerne známe prvky. Možno ich charakterizovať týmito vlastnosťami: integrácia, prepojenie a nenáročné rozšírenie známeho materiálu, modelovanie, spojenie viacerých pre žiaka resp. študenta známych metód. Matematické problémy spojené s touto úrovňou kompetencií vyžadujú schopnosť prepojenia rôznych oblastí matematiky alebo prácu s viacerými navzájom rôznymi reprezentáciami daného problému. Príkladmi takýchto problémov sú:

Úloha č.5: Mária býva 2 kilometre od školy, Martin 5 kilometrov. Ako ďaleko od seba bývajú Mária a Martin?

Úloha č.6: Istá pekáreň ponúka dve okrúhle torty tej istej hrúbky, ale rozličnej veľkosti. Menšia má priemer 30 centimetrov a stojí 300 Sk. Väčšia má priemer 40 centimetrov a stojí 400 Sk. Ktorá torta ja cenovo výhodnejšia a prečo?

Úloha č.7: V novinách sa objavili tieto dva inzeráty:

Inzerát č. 1: Prenájom kancelárskych priestorov. 58 – 95 m^2 4750 Sk za mesiac, 100 – 120 m^2 10000 Sk za mesiac.

Inzerát č. 2: Prenájom kancelárskych priestorov. 35 – 260 m^2 9000 Sk za m^2 za rok.

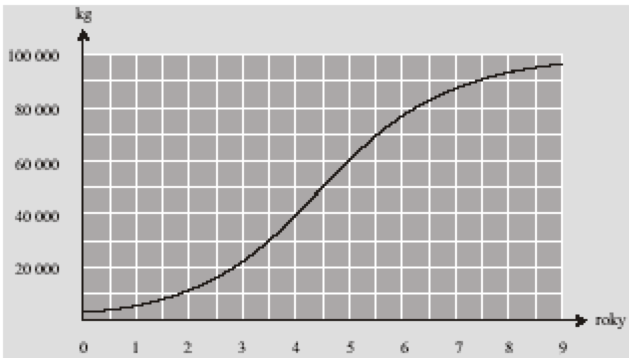
Istá firma si chce prenajať na jeden rok 110 m^2 kancelárskych priestorov. Na ktorý z uvedených inzerátov má reagovať, aby za prenájom zaplatila čo najmenej? Riešenie zdôvodnite.

Tieto úlohy alebo problémy vyžadujú prevedenie situácie z reálneho sveta do reči matematiky a vytvoriť matematický model, ktorý umožní porovnať a skontrolovať, či riešenie korešponduje s kontextom pôvodnej otázky a formulovať odpoveď. To všetko sú aktivity spojené s kompetenciami na úrovni prepojenia.

Kompetencie na úrovni reflexie

Z hľadiska náročnosti požiadaviek na vedomosti, zručnosti a postoje považujeme túto triedu kompetencií za najvyššiu. Ide o prenikanie do podstaty matematiky. Kompetencie na úrovni reflexie zahŕňajú uvažovanie o procesoch, ktoré sú potrebné k vyriešeniu problému. Majú vzťah k schopnostiam plánovať stratégie riešenia a uplatniť ich v úlohách obsahujúcich viacero súčastí. V porovnaní s úlohami zodpovedajúcimi predošlým úrovniam, môžu byť originálnejšie alebo menej zvyčajné. Možno ich opísať týmito charakteristikami: rozvinuté uvažovanie, argumentácia, abstrakcia, zovšeobecnenie a modelovanie použité v nových, neznámych kontextoch, originálny matematický prístup, spojenie viacerých zložitejších metód, vhľad do problému. Príkladmi problémov súvisiacich s kompetenciami na úrovni reflexie sú:

Úloha č.8: Do rieky vypustili isté množstvo rýb. Na grafe je znázornený model rastu celkovej hmotnosti týchto rýb v závislosti od času.



Predpokladajme, že rybár bude čakať niekoľko rokov (musí čakať celý počet rokov, nemôže čakať napr. 4,5 roka), a až potom začne s lovom rýb. Koľko rokov musí rybár čakať, ak chce každý rok z rieky vyloviť čo najväčšie množstvo rýb, a ak smie vyloviť maximálne také množstvo rýb, ktoré sa rovná prírastku hmotnosti za posledný uplynulý rok? Uveďte argumenty na podporu svojho tvrdenia.

Úloha č.9: V istom roku rozpočet ministerstva národnej obrany bol 3 miliardy Sk. Celkový štátny rozpočet v danom roku bol 50 miliárd Sk. Na ďalší rok bol rozpočet ministerstva národnej obrany 3,5 miliárd Sk, pričom celkový štátny rozpočet bol 60,5 miliárd Sk. Inflácia v období týchto dvoch rokov bola 10 %. Predstavte si, že ste minister národnej obrany.

Pozvali by Vás na prednášku pre spoločnosti pacifistov. Chcete vysvetliť, že rozpočet ministerstva obrany v uvedenom období klesol. Vysvetlite, ako by ste to urobili.

Pozvali by Vás na prednášku pre poslucháčov vojenskej akadémie. Chcete vysvetliť, že rozpočet ministerstva národnej obrany v uvedenom období vzrástol. Vysvetlite, ako by ste to urobili.

Prvý z uvedených príkladov (úloha č.8) zrejme spĺňa definíciu matematického problému riešeného v autentickom kontexte. Študenti musia objaviť vlastné stratégie a argumentáciu v zložitejšom a nie bežnom probléme. Zložitosť čiastočne spočíva v potrebe starostlivo kombinovať informácie z textu a z grafu a navyše odpoveď nemožno „vidieť“ bezprostredne. Treba interpretovať graf a uvedomiť si napríklad, že rýchlosť rastu dosahuje svoje maximum približne po piatich rokov. Ďalej si tento problém vyžaduje argumentáciu a aspoň náznak dôkazu. Jednou z možností je metóda pokusov a omylov. Zistíme, čo sa stane, ak bude rybár čakať menej ako 5 rokov a postupne prídeme na to, že ak rybár bude čakať celých 5 rokov, môže mať každoročne najvyšší úlovok 20 000 kg rýb. Ak nemôže čakať tak dlho, a začne loviť napríklad o rok skôr, môže chytiť len 17 000 kg. Ak bude čakať príliš dlho (napr. 6 rokov), môže chytiť ročne len 18 000 kg. Optimálny výsledok teda dosiahne, ak začne loviť približne po 5 rokoch.

Druhý z uvedených príkladov (úloha č.9) veľmi dobre ilustruje problémy zodpovedajúce kompetenciám na úrovni reflexie. Matematickým kľúčom k riešeniu je rozdiel medzi absolútnym a relatívnym nárastom. Ak chceme spraviť úlohu prístupnejšou pre mladších študentov, môžeme vypustiť tú časť, ktorá hovorila o inflácii. Tým však tento problém (úloha) stratí na svojej komplexnosti a teda aj z požadovanej matematizácie. Inou možnosťou zjednodušenia môže byť iný spôsob prezentovania údajov. Napríklad tabuľkou alebo schémou. Myslím si, že tento príklad výborne plní svoju ilustračnú úlohu. Je však namieste námietka k jeho formulácii, ktorá navodzuje dojem, akoby sa matematika nepoužívala na vyjasnenie problému, ale naopak na jeho zahmlievanie a manipuláciu. Na druhej strane chcem poukázať na to, že skúsenosť s takýmto využitím matematiky rozvíja kritické myslenie žiaka a pripravuje ho na život viac ako riešenie tradičných úloh či problémov.

Záver

Zameraním vyučovania matematiky na rozvíjanie kľúčových kompetencií žiaka, resp. študenta, ktoré sa formujú na základe vlastnej praktickej skúsenosti, a ktoré sa využívajú v praxi, možno priblížiť matematiku reálnemu životu, priviesť žiakov k uvedomeniu si úlohy matematiky v ich živote a aj naučiť ich používať ju pre svoj prospech.

Literatúra

[1] BELZ, H. – SIEGRIST, M.: *Klíčové kompetence a jejích rozvíjení.* 1. vyd. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-479-6.

[2] Definition and Selection of Competences (DeSeCo). *Theoretical and Conceptual Foundation: Strategy Paper.* [online] Publikované 2002. [citované 21.9.2006].

Dostupné z <http://www1.worldbank.org/education/stuttgart%5Fconference/>

[3] HRMO, R. – TUREK, I.: *Kľúčové kompetencie I.* 1. vyd. Bratislava: Slovenská technická univerzita, 2003. ISBN 80-227-1881-5.

[4] ŠPÚ: *PISA – matematika: Úlohy 2003.* 1. vyd. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2004. ISBN 80-85765-89-7.

[5] TUREK, I.: *Kľúčové kompetencie.* 2. vyd. Prešov: Metodicko – pedagogické centrum v Prešove, 2003. ISBN 80-8045-301- 2.

[6] TUREK, I.: *Zvyšovanie efektívnosti vyučovania.* 2. doplnené vyd. Bratislava: Edukácia, 1998. ISBN 80-88796-89-X.

Adresa autora:
Mgr. Jozef Sekerák
Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Moyzesova 16
040 01 Košice
e-mail: jozef.sekerak@upjs.sk

Matematická gramotnosť a daltonský plán

Edita Šimčíková

Abstract. *The article focuses on the problem of mathematical literacy and mathematical competencies of children ready for school as well as children during their beginnings at primary school. The interconnection of alternative pedagogical conception and education of children aged 5-7 offers one of the possibilities how to develop mathematical literacy through Dalton education.*

Pripraviť žiaka na život alebo Škola pre život, respektíve iné slogany prezentovali školské programy vypracované ešte pred rokom 1989. Aj v súčasných pedagogických dokumentoch, rámcových programoch či Národnom programe sú tieto zámery znovu preferované. Aká je však skutočná prax? Kedy a kde začať s prípravou na život? Ktoré oblasti sú prioritné? Možno by sme rýchlo a jednoznačne ani odpoveď nenašli. Každému z reálne zmýšľajúcich pedagógov je však určite jasné, že v súčasnosti je viac, ako iba odovzdať množstvo poznatkov a zručností, pripraviť žiaka na riešenie životných problémov, na sebavzdelávanie, na hodnotenie vzniknutých situácií a posudzovanie vlastných výkonov.

Medzinárodné merania PISA ukázali, na akej úrovni v medzinárodnom meradle je gramotnosť našich žiakov. Čo je gramotnosť? Čo je matematická gramotnosť? Pod pojmom gramotnosť sa v štúdii OECD – PISA rozumie „schopnosť aplikovať vedomosti a zručnosti z materinského jazyka, matematiky a prírodných vied pri riešení reálnych životných situácií." (Koršňáková – Tomengová, 2005, s.2) Čiže gramotnosť možno chápať v širšom zmysle ako funkčnú gramotnosť žiakov v uvedených oblastiach. Nie je neskoro začať s rozvojom matematickej gramotnosti na 2. stupni základnej školy? Ako to vyzerá na úrovni preelementárnej a elementárnej prípravy? Môže byť dieťa, ktoré nevie písať a čítať matematicky gramotné?

Matematická gramotnosť detí vo veku 5 – 7 rokov iste nemôže byť vnímaná ako gramotnosť v pravom zmysle slova. Podľa nášho názoru však určitou gramotnosťou je a našou úlohou je intenzívne ju rozvíjať. Dôležitú úlohu tu zohráva rozvoj matematických predstáv v predškolskom veku v kontinuite s prvým ročníkom základnej školy.

Štátny pedagogický ústav predložil kompetencie dieťaťa na záver predškolského obdobia v kognitívnej oblasti formulované na úrovni operacionalizovaných cieľov: „Dieťa na záver predškolského obdobia dosahuje tieto kognitívne kompetencie:

- orientuje sa vo svojom blízkom okolí, prakticky uskutočňuje a opisuje podľa orientačných bodov cestu vedúcu z domu do materskej školy a späť, prípadne inú dobre známu cestu v mieste bydliska.,
- triedi predmety dennej potreby, opisuje ich vlastnosti.,
- správne určuje a pomenúva časové vzťahy a zoraďuje ich do obdobia jedného dňa alebo týždňa.,
- triedi predmety podľa umiestnenia v priestore a určuje ich počet z hľadiska umiestnenia.,
- porovnáva a usporadúva predmety podľa veľkosti, hmotnosti, objemu.,

- usporadúva danú skupinu prvkov podľa vopred zvoleného kritéria, používa termíny prvý, posledný, pred, za, hneď pred, hneď za.,
- používa číselný rad najmenej do šesť, určuje počet v situáciách, keď počet prvkov pribudol alebo ubudol.,
- rozlišuje pravú a ľavú stranu vzhľadom na vlastnú osobu aj vzhľadom na iný objekt.,
- vyjadruje jednoduché hodnotiace postoje k svojmu blízkemu životnému prostrediu.,
- rieši jednoduché problémové situácie reálne i fiktívne." (Guziová, 2002, s.1–6)

Podľa nášho názoru sa v uvedených oblastiach dajú nájsť, vytvoriť a realizovať činnosti, ktoré súvisia s matematickou, lingvistickou aj sociálnou gramotnosťou dieťaťa v predškolskom veku. Deti vo veku 5-7 rokov prichádzajú do kontaktu s úlohami rozvíjajúcimi matematickú gramotnosť v oblasti tvorby matematických predstáv. „Preto je našou dôležitou úlohou a zároveň snahou dať deťom možnosť prenikať do tajov matematiky čo najskôr – hrami, zábavnými prístupmi, rozvíjaním prvotných záujmov a zvedavosti detí." (Uherčíková – Haverlík, 2001, s. 5.). Tomková (2006, s.268) vo svojom príspevku uvádza: „Rozsah a hĺbku obsahu, ktorý si majú deti osvojiť, je problematické vopred presne vymedziť a naplánovať, a práve v tom spočíva náročnosť vedenia výchovno – vzdelávacieho procesu v materskej škole."

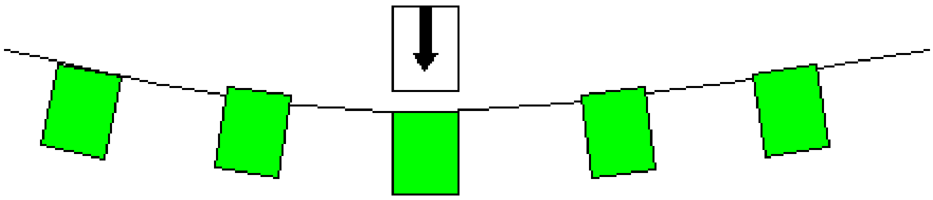
Niektoré alternatívne pedagogické koncepcie vo svojich filozofických východiskách tvrdia, že ich prednosťou oproti tradičnej škole je príprava dieťaťa na život (Tvorivá dramatika, Integrované tematické vyučovanie, Daltonský plán). V našich podmienkach sa ťažko uplatňujú alternatívne školské systémy z rôznych dôvodov, ale ich prvky – metódy a formy možno nájsť v edukácii žiakov na mnohých školách rôznych stupňov, aj keď si ich aplikáciu učiteľ nemusí uvedomovať. Je dôležité, že to vníma ako prínos a prospešnú činnosť pre svojich edukantov. Uvedené pedagogické systémy našli svoje uplatnenie už v predškolských zariadeniach, preto sa pokúsime predstaviť jednu z možností rozvoja matematickej gramotnosti detí vo veku 5 – 7 rokov prostredníctvom daltonskej výučby.

Matematickú gramotnosť v predškolskom zariadení a v prvom ročníku základnej školy možno úspešne rozvíjať samostatnou prácou aj u detí, ktoré ešte nevedia čítať a písať. Pozornosť sústredíme na matematické predstavy dieťaťa v integrácii s jazykovou zložkou a výtvarnou výchovou. Podľa systému daltonskej výučby si pripravíme balíček denného režimu, t.j. súbor kariet so symbolmi aktivít naplánovaných na dopoludnie. Šípkou označíme vždy aktivitu, ktorá práve prebieha. Karta vpravo je tá, ktorá bude nasledovať v poradí. Šípku nad kartu môže umiestniť učiteľ, ale aj dieťa.

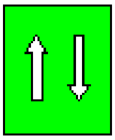
Napríklad: každý deň v týždni má priradenú svoju farbu
pondelok - červená
utorok - žltá
streda - modrá
štvrtok - zelená
piatok - fialová

Naše aktivity budeme realizovať vo štvrtok, pripravíme si teda 5 zelených kariet so symbolmi. Zavesíme ich na šnúru na viditeľné miesto v triede. Okrem toho si môžeme pripraviť šiestu (zelenú) kartu so šípkou a štipce.

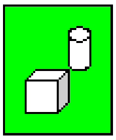
Poradie kariet so symbolmi znamená poradie úloh, ktoré budú deti vypracovávať počas dopoludnia. Môžeme sa však s nimi dohodnúť, že poradie úloh nie je dôležité zachovávať



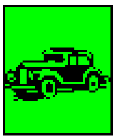
Úlohy pre deti na jednotlivé stanovištia označené príslušnými kartami s piktogramami:



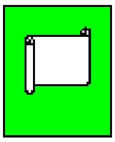
Práca s pracovným listom – na štvorčekovom papieri prejsť cestu zakreslenú pomocou šípok a zistiť, kam nás dovedie. Zakrúžkovať to miesto (obrázok).



Modelovanie telies – vymodelovať z plastelíny guľu, kocku, valec, postaviť na podložku stavbu z vymodelovaných telies podľa predlohy.

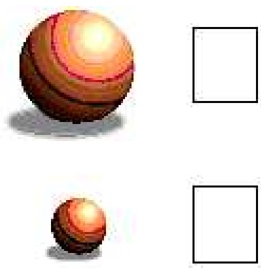


Práca na pieskovom stole – prejsť cestu autom cez mesto od vyznačeného stanovišťa ku konečnému cieľu, vybrať správnu cestu, rozhodnúť sa pre výhodnejšiu z dvoch správnych ciest, zakresliť svoju cestu na papier (labyrint), ktorý je zhodný s plánom na pieskovom stole.



Práca s obrázkami – usporiadať obrázky dievčat podľa výšky v smere šípky a nalepiť ich na pás baliaceho papiera, podpísať sa.

Práca s knihou – nájsť knihu (napr. žltá kniha s glóbusom, prípadne doplnená názvom veľkými tlačenými písmenami SVET) na poličke v súbore kníh, otvoriť ju na strane 11, vypracovať kartičku podľa návodu – zistiť počet veľkých guľatých tvarov na tejto strane a počet malých guľatých tvarov, zapísať to číslicou alebo skupinou bodiek:



Prepísať názov z uvedenej strany veľkými tlačenými písmenami.

Priebeh dopoludnia:

1. Úvodný ranný kruh – inštruktáž učiteľky k úlohám, pomocné návody k vypracovávaniu úloh, poradie činností, opis miesta realizácie, tabuľa splnených úloh, priestor na otázky detí.

Dohodnutý symbol na stole (napr. plyšová hračka, molitanová kocka, gumené jablko...) - perióda odloženej pozornosti, t.j. hračka je na stole = deti pracujú samy s pomocou kamarátov, hračka nie je na stole = učiteľ ponúka svoju pomoc.

Dohodnutý symbol na dverách, respektíve symbol zo stola umiestnený na lavici dieťaťa = potrebujem ísť von. Žiadne z ostatných detí vtedy nemôže opustiť triedu.

Časový odhad na samostatnú prácu reguluje štipec umiestnený na kartičke s piktogramom, ktorý sa priebežne posúva vpravo.

2. Samostatná práca detí – riešenie úloh na jednotlivých stanovištiach podľa dohodnutého poradia. Po skončení úlohy si dieťa položí k svojmu menu (k fotografii) na daltonskú tabuľu splnených úloh svoju značku (magnet, samolepku, špendlík s veľkou farebnou hlavičkou) ako dôkaz, že túto úlohu už vypracovalo. Je to dôležitá spätná väzba pre dieťa i pre učiteľa. Takto realizovaná činnosť učí dieťa plánovať si čas, rozvíja jeho trpezlivosť, vytrvalosť, samostatnosť i spoluprácu. Počas samostatnej práce učiteľka priebežne kontroluje prácu detí

3. Ukončenie samostatnej práce v dohodnutom čase, kontrola vyriešených úloh učiteľom, resp. odovzdanie prác.

Takýto balíček úloh si môžeme pripraviť pre deti, ktoré už systémom daltonskej edukácie pracovali. V počiatočnej etape začíname jednou alebo dvoma úlohami v kratšom časovom úseku. Uvedené úlohy sú iba jednou z možností, ktoré možno pripraviť pre deti na samostatnú prácu v daltonskom bloku.

Na záver

V príspevku sme sa pokúsili načrtnúť jeden z modelov overovania a rozvíjania matematickej gramotnosti detí vo veku 5-7 rokov. Využili sme formu daltonského bloku v časovom rozsahu 60 min. s možnosťou využitia prestávky – relaxačnej chvíľky, energizéru, pohybovej aktivity, občerstvenia. Zámerne sme zaradili úlohy z dvoch oblastí uvedených v štúdii PISA (kvantita, priestor) na prvé tri úrovne matematickej gramotnosti. Uvedený systém práce je v daltonských materských a základných školách overený a dosahuje pozitívne výsledky. Predložený model matematickej gramotnosti je v návrhovej rovine, v rámci riešenia projektu KEGA na Katedre matematickej edukácie ho však chceme ponúknuť širšej pedagogickej verejnosti na overenie a dotvorenie. Zároveň chceme podnietiť autorov kompetencií dieťaťa na záver predškolského obdobia, aby sa zamysleli nad kognitívnymi cieľmi v tvorbe matematických predstáv. Snáď by bolo vhodné doplniť ich o kompetencie z oblasti matematickej (medzizložkovej) gramotnosti.

Literatúra

[1] GUZIOVÁ, K. Kompetencie dieťaťa na záver predškolského obdobia. In: *Predškolská výchova*, roč. LVII, 2002/2003, č. 4, s. 1-6. ISSN 0032 - 7220

[2] KORŠŇÁKOVÁ, P. – TOMENGOVÁ, A. 2005. *PISA SK 2003.* Bratislava: ŠPÚ, 2005. ISBN 80-35756-89-9

[3] TOMKOVÁ, B. 2006. Problémy učiteľov preelementaristov pri rozvíjaní matematických predstáv. In: *Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí „Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy“*. Olomouc: UP, 2006. s. 267 – 271. ISBN 80 – 244 – 1311 - 6

[4] UHERČÍKOVÁ, V. – HAVERLÍK, I. K. Metodické poznámky k úlohám na rozvíjanie základných matematických predstáv.In: *Predškolská výchova*, roč. LV, 2000/2001, č. 3, s. 5-12. ISSN 0032-7220.

[5] WENKE, H. – ROHNER, R. 2000. *Ať žije škola.* Brno: Paido, 2000. ISBN 80-85931-82-6.

Adresa autora:
PaedDr. Edita Šimčíková
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta PU
Ul. 17. novembra 15
081 16 Prešov
e-mail: editasim@unipo.sk

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu Moderné informačno –komunikačné technológie ako prostriedok ďalšieho vzdelávania učiteľov – elementaristov v matematike. (MŠ SR KEGA 3/3027/05).

Inovácia vyučovania matematiky na druhom stupni základných škôl pomocou informačných technológií

Mária Slavíčková

Abstract. *This paper deals with educational software, which can be use on mathematical lessons on lower secondary school. We focused on software based on theory of Constructivism. We developed software of this kind and use it in pedagogical experiment. Important results of this experiment are part of this paper.*

Úvod

V poslednej dobe sa veľa hovorí o informatizácií, o potrebe zefektívnenia vyučovania, o tom že tradičná škola neposkytuje žiakom a študentom potrebné vedomosti, ich vedomosti sú encyklopedické a nevedia ich využiť v praxi. Sú projekty, ktoré sa snažia tieto problémy riešiť, ale zatiaľ bez väčších úspechov. Na každej škole, či už základnej, alebo strednej sa nájde zopár nadšencov, ktorí sú ochotní využívať IT vo vyučovacom procese, ale je to stále málo. Mnohí učitelia považujú využívanie počítača, alebo inej technológie za zbytočne komplikované, zdĺhavé, náročné na prípravu a pod. (Brisudová, 2006)

Na vyučovanie geometrie exituje jeden vynikajúci a jednoduchý nástroj – Cabri Geometria. Učitelia sú školení v jej používaní. Čo však pri výučbe aritmetiky na ZŠ? Na ZŠ sa predsa žiak má naučiť robiť základné aritmetické operácie vo všetkých číselných oboroch, preto je dôležité, aby sa ich naučil čo najlepšie a najmä – aby im rozumel. Vtedy budú jeho vedomosti z týchto oblastí trvácnejšie.

Pedagogický softvér určený pre ZŠ

Pedagogický softvér je softvér s didaktickým cieľom, vhodne zvoleným používateľským prostredím, ktorý ponúka žiakom prostredie na poznávanie, skúmanie a modelovanie. Je to softvér vyvinutý na podporu učenia sa, poznávania a na rozvoj informačnej gramotnosti. Podľa didaktického cieľa a formy môžeme pedagogický softvér rozdeliť na (Kalaš, 2004):

- aktivity zamerané na rozvoj procesov myslenia, uvažovania – vychádza z konštruktivizmu, ide o prostredia umožňujúce žiakovi poznatky objaviť (propedeutika matematiky, čítania, a pod.),
- živé knihy – čítanie textu doplnené ilustráciami s prekvapením,
- story book,
- aktivity na precvičovanie alebo prehĺbenie vedomostí – zamerané na fázu kryštalizácie a automatizácie nových pojmov,
- všeobecné nástroje na rozvoj tvorivosti – detské verzie rôznych editorov,
- aktivity zamerané na simuláciu a modelovanie – strategické hry, virtuálna realita,

- zdroje informácií, encyklopédie, príručky, slovníky,
- počítačové hry,
- programy pre SEN (special education needs) – tutoriály, on-line kurzy, encyklopédie, slovníky,
- e-learningové prostredia, internetové aplikácie – applety.

Tvorba vhodného pedagogického softvéru je zložitá úloha, ktorá vyžaduje tímovú prácu minimálne programátora a učiteľa daného predmetu, dôležitý je aj psychológ a výtvarník (dizajnér), čo je pravdepodobne jednou z príčin nedostatku kvalitných výukových programov pre ZŠ. Tieto programy najčastejšie vytvárajú študenti informatiky spravidla ako zápočtovú alebo diplomovú prácu. Uprednostňujú pri tom veľké, univerzálne používateľné programové balíky, v ktorých spracujú učivo tematického celku bez ohľadu na ročník štúdia. Zvláštnosťou vyučovania elementárnej matematiky je, že napríklad tematický celok sčítanie prirodzených čísel sa vyučuje vo všetkých ročníkoch. To znamená, že učiteľ 1. triedy by mohol využívať len malú časť programového balíka a zvyšok by bol pre neho len záťažou, čo komplikuje prácu a naopak vo 4 ročníku by brzdili prácu úlohy na úrovni prváka. Z hľadiska učiteľovej práce by bolo výhodnejšie mať k dispozícii viac jednoduchých výukových programov zameraných na konkrétne učivo v tematickom pláne. (Marcinek-Partová, 2000)

Platí to aj pre programy od profesionálnych firiem, napr. MATIK, ktorý vyvíja a distribuuje programy MATIK 3-5 pre prvý stupeň ZŠ v ČR a MATIK 6-9 pre druhý stupeň ZŠ v ČR. Tieto programy majú aj Slovenskú lokalizáciu a sú použiteľné a oboch stupňoch ZŠ vzhľadom na blízkosť učebných osnov oboch republík. Tento program v sebe zahŕňa výhody aj nevýhody veľkých programových balíkov. Výhodou je, že sú všetky čiastkové programy spolu. Nevýhodou je, že ak učíme u šiestakov, ostatné programy nepotrebujeme a zbytočne sa zdržujeme preklikávaním cez menu najskôr do príslušného ročníka a potom na konkrétnu tému, podtému atď.

Existujú aj užšie špecializovaná programy, ktoré vznikli ako zápočtový, alebo diplomový projekt. Napr. program ALICA, AUTOMATY, MÚDRI ZAJKOVIA atď. Ide o programy venujúce sa len jednej téme z matematiky – záporné čísla, zlomky, rovnice, percentá,... Výhodou takýchto čiastkových programov je, že učiteľ priamo žiakom povie, s ktorým programom sa ide pracovať. Ak si ich utriedi do adresárov podľa ročníkov, je to aj dostatočne prehľadné. Nevýhodou je, že tieto programy treba vyhľadať každý zvlášť a teda učiteľ s tým má viac práce ako s komplexným programovým balíkom.

Vytvorenie jednoduchého softvéru

Snažili sme sa vytvoriť sadu programov zameraných na rozvoj procesov myslenia a uvažovania, ktoré vychádzajú z teórie konštruktivizmu. Programy sú určené žiakom druhého stupňa ZŠ. Podľa toho bolo volené aj prostredie a motivácia žiakov. Ide o programy na vyučovanie nasledujúcich tematických celkov:

- Záporné čísla – všetky aritmetické operácie.
- Zlomky – pojem zlomku, rozširovanie zlomkov, sčitovanie zlomkov s rovnakým menovateľom a keď je menovateľ jedného zo zlomkov násobkom druhého menovateľa.

- Percentá – percento ako vyjadrenie pomeru, určovanie hodnoty.

Pri tvorbe sme sa snažili splniť tieto hlavné ciele:

- Zaujímavosť prostredia pre žiakov v danom veku (záporné čísla – vek 11-12, zlomky – vek 12-13, percentá – vek 13-14).
- Jednoduchosť ovládania (aby sa žiaci nepotrebovali učiť žiadne príkazy).
- Názornosť vykladanej látky s možnosťou odpozorovania vzťahov a pravidiel
- Didaktický cieľ: žiaci si používaním tohto softvéru budú schopní skonštruovať základné poznatky z preberanej tematiky

Práca s jednotlivými programami je popísaná v príručke, ktorú spolu s jednotlivými programami možno nájsť na http://slavickova.isnet.sk .

Tabuľa verzus počítač

Existuje mnoho aktivít, ktoré možno robiť na vyučovacích hodinách matematiky v triede, pomocou kriedy a tabule. Ide o rôzne didaktické hry, alebo „bežné“ vysvetľovanie novej učebnej látky. Rozdiely medzi týmito metódami sú značné a experimentálne dokázané vo viacerých prácach (Kraslanová, Sandanusová, Vankúš a.i.). Nás zaujímalo, či softvér, ktorý sme vytvorili, je nielen vhodným prostriedkom pre dosiahnutie didaktického cieľa na vyučovacej hodine, ale aj či jeho použitie robí vyučovanie ešte efektívnejším (v zmysle trvácnosti a hĺbky vedomostí).

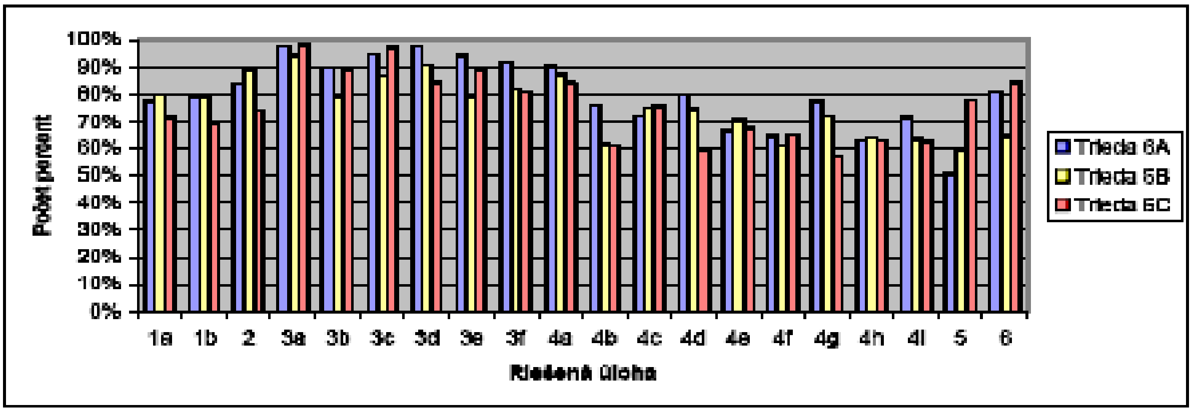
Do experimentu sme zahrnuli tri vzorky žiakov, pričom v prvej vzorke sme počítač nepoužívali vôbec, v druhej sme používali počítač len vo fáze automatizácie a kryštalizácie poznávacieho procesu a v tretej skupine sme použili nami vytvorený softvér aj vo fáze motivácie, separovaných a univerzálnych modelov. Stručne popíšeme štruktúru hodín v jednotlivých skupinách:

Tabuľka 1: Charakteristika vyučovania v jednotlivých triedach

A	***B***	***C***
Kontrolná trieda	***Trieda využívajúca softvér vo fáze automatizácie a kryštalizácie poznávacieho procesu***	***Trieda využívajúca konštruktivistický pedagogický softvér***
Používanie učebníc a zbierok, vysvetľovanie v triede bez hier alebo iných netradičných činností	Vysvetľovanie učiva v triede, precvičovanie v počítačovej učebni pomocou pedagogického softvéru	Vysvetľovanie a precvičovanie bolo aj v triede aj za počítačmi pomocou pedagogického softvéru

Prác, ktoré sa zaoberajú vzťahom medzi triedami A a B je dosť, pričom sa zameriavajú na konkrétne softvérové produkty, či už dodávané ako súčasť balíka INFOVEK, alebo voľne šíriteľné (Cabri geometrie, Derive, Equation grapher, Mathematica, Excel,....). Ide najmä programy pre stredné školy (výnimka je Cabri geometrie). Programami pre základné školy sa takmer nikto nezaoberá. A pritom práve základná škola je vo vzdelávaní mládeže kľúčová – žiaci získavajú základné vedomosti zo všetkých predmetov a preto by mali byť čo najviac trvalé, aby na nich mohli žiaci budovať.

Vráťme sa k nášmu výskumu. Vo všetkých skupinách sme preberali tematický celok záporné čísla podľa Tabuľky 1. Skupiny boli vyberané podľa kritérií výberu výskumnej vzorky (Turek, 1998). A tu sú výsledky zhrnuté do grafu:



Graf 1: Úspešnosť riešenia záverečného testu

Trieda 6A zodpovedá skupine A, Trieda 6A skupine B a trieda 6C skupine C rozdelenia tried v Tabuľke 1. Pre nás najdôležitejší výsledok je riešenie úloh 5 a 6, čo boli slovné úlohy z bežného života. Pozrime sa na tento výsledok detailnejšie. Vidno, že žiaci, ktorí používali konštruktivistický pedagogický softvér dosiahli podstatne lepšie výsledky, ako ostatní žiaci (tí, čo používali iný druh softvéru, resp. softvér vo vyučovaní nepoužívali vôbec).

Literatúra

[1] BRISUDOVÁ Z. (2006): Využitie IKT vo vyučovaní planimetrie na SŠ, Rigorózna práca, Bratislava 2006

[2] KALAŠ I.(2004): Tvorba pedagogického softvéru, www.edi.fmph.uniba.sk/vyuka, jún 2004

[3] KRASLANOVÁ I. (2005): Computer Supported Teaching of Mathematics at Secondary School, CIEAEM 57, Changes in Society: A Challenge for Mathematics Education, Proceedings, Italy 2005, p. 177-182

[4] MARCINEK – PARTOVÁ (2000): Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní elementárnej matematiky, príspevok z konferencie Infovek, 2000

[5] SANDANUSOVÁ M. (2003): Počítače vo vyučovaní matematiky, rigorózna práca, Bratislava 2003

[6] TUREK I.(1998): Učiteľ a pedagogický výskum, MC Bratislava, 1998

[7] VANKÚŠ P. (2005): Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a–didactic situation. In: Quaderni di Ricerca in Didattica, No. 15, G.R.I.M, University of Palermo 2005, ISSN 1592-5137, s. 90–105

Adresa autora:
PaedDr. Mária Slavíčková
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: maria.slavickova@centrum.sk

Teacher's diverging intervention in the process of solving mathematical problems and its place in the contemporary science of teaching mathematics

Eugeniusz Śmietana

Explanation of used terms

1. **Clue** - an additional information, a question or an instruction directed towards a person solving a mathematical problem or task in order to facilitate the solution of a given problem.

2. **Intervention** - every activity undertaken by a teacher intervening the process of solving a mathematical problem. A much wider term than a clue.

3. **Opening intervention** - an activity undertaken by a teacher aiming at opening a student onto a knowledge which is necessary to solve a mathematical problem. (a term introduced by Eugeniusz Śmietana)

4. **Convergent thinking** - can be observed in solving tasks using one known way only.

5. **Divergent thinking** - can be observed in problematic situations where many potential ways of solving one task are available.

Converging Interventions

In the process of solving a mathematical problem a student may experience a block of mathematical activity, which a teacher tries to remove using different kinds of clues.

However in the individual work with a talented student or a group of them teacher's converging interventions are dominate. They lead the student onto an area of knowledge associated with the given task facilitating a task solution at the same time. Such intreventions can remove the block but they do not always increase student's mathematical activity. They cannot help especially in case of problematic tasks.

We may conclude then, that teacher's converging interventions are not always effective in the process of solving a problem.

Can we teach solving problems

Having analyzed the effectiveness of converging interventions in the process of solving the problems we may ask a fundamental question:

How should we intervene in order to provoke a steady increase in student's mathematical activity, which will remove the block and ensure solving the task?

It's worth emphasizing that there is no universal teaching means removing the block in the process of solving every problem at any stage of student's education or provide knowledge, which will guarantee the success.

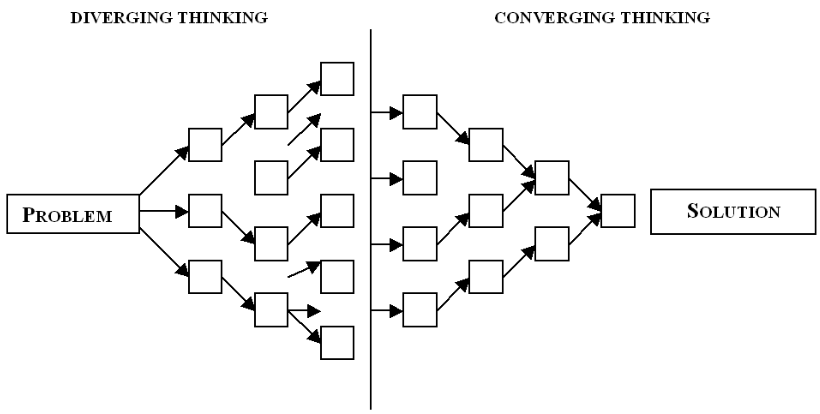
However on the basis of teaching experiments, which involved solving mathematical tasks, it has been proved that teacher's diverging intervention can be a very effective but not universally helpful teaching means. It opens the student onto the different areas of knowledge being necessary but not always associated with the task to be solved.

Diverging Interventions (Distracting)

Diverging (opening) interventions can successfully open a student onto the knowledge necessary to solve the problem. They can unblock the student and influence an increase of his mathematical activity in the solution process, at school as well.

In practice, if a teacher decides to provoke student's divergent thinking he usually uses diverging interventions together with converging ones. It has been shown on the diagram below based on the one worked out by a Canadian psychologist Sam Kaner. He prepared his diagram watching the behaviour of students during a biology lesson with a teacher using both diverging and converging interventions.

Diverging-Converging Interventions Diagram



1. It shows a transition from diverging to converging thinking of a individual student or a group of them.

2. Squares represent particular ideas of solutions put forward by different students. (not always successful ones).

3. Students diverge into different areas of knowledge. Paths (arrows) grow. It is a typical brainstorm in a classroom.

4. The moment the number of squares decreases convergent thinking starts. The teacher **uses converging clues helping a student to achieve his aim.** It's worth emphasizing that a student can solve the problem without the converging clues.

5. Convergent thinking does not have to prove successfull, as the scheme shows.

Examples of Problems and Diverging Clues

Problem 1

Let a, b, c, d be real numbers and $a > c$ and $b > d$. We need to prove that: $(a+b+c+d)^2 > 8(ad+bc)$.

This problem can be solved for example:

1. by using Cauchy's inequality and reduced multiplication formula,
2. by using the characteristic features of square trinomial.

Diverging (Opening) Intervention

Having seen unsuccessfull attempts, a teacher can direct a student to an area of knowledge on square trinomial by providing the following clue:

Associate the inequality from the task with the square trinomial !

Problem 2

Find real solution of the equation: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$

This problem can be solved by for example:

1. using sinus and cosinus functions,
2. theorems on mean number.

An example of the opening intervention

Associate the equality with the trigonometric function !

In the above mentioned cases diverging interventions are based on associations with the knowledge, which is not connected with the problems to be solved. But such interventions can provoke a steady increase in student's mathematical activity and ensure a task solution.

Conclusions below contain many other associations opening a student onto the areas of knowledge which is often necessary to solve the problem.

Conclusions drawn from the teaching experiment

1. In the process of solving a mathematical problem different types of teacher's interventions can open the students on certain area of knowledge which is used in solving a given problem, for example:
   - association of the given problem with the equivalent one causing the change or expansion of the area of knowledge,
   - association of the given problem (theorem) with a group of theorems or definitions from the same area of knowledge (ex. Euclidean or analitycal goemetry, divisibility of numbers, theory of plynomials etc.),
   - association by analogy of the given problem with the one solved before - (additional problem - supporting exercise)

2. Divergence may be provoked by a student himself, (autodivergence) either consciously or not, also with positive results.

3. Opening intervention does not always stimulate student's mathematical activity in the right direction, for example:

   - interventions diverging students into the unknown or "unfriendly" area of knowledge,
   - interventions provoking associations which have nothing in common with the problem to be solved,
   - divergence should stimulate that kind of student's knowledge, which is necessary for a solution and to which the student is bound to refer to later on.

4. Opening intervention is not necessarily effective in all kinds of problems or in case of every talented student.

5. Opening intervention can appear repeatedly and at any time during the proces of solving a problem.

The Place of Divergence in the Contemporary Science of Teaching Mathematics

Taking into account teaching experiments as well as conclusions drawn from students solving mathematical problems at school we may say that divergent thinking:

- makes the student really interested in solving a problem,
- helps to create different ideas and suggestions connected with the problem,
- teaches independence, discovering and verifying hypothesis,
- makes a student confident enough to draw conclusions and makes him open to new areas of knowledge, which is not always connected with the problem to be solved.

The above mentioned constitute a characteristic of a good, creative and effective student, which is necessary in the whole process of a successful solution.

Conclusion:

Divergence as a creative teaching tool in the process of solving problems should be an integral part of the science of teaching mathematics. What's more, it should be used by all teachers as a means of motivating the students solving different problems at all stages of education. (not only students interested in mathematics).

It's nevertheless worth mentioning that inaprropriate use of divergence may not fulfill its role in solution process.

References

[1] M.Ciosek: *Poszukiwanie rozwiązania zadania na różnych poziomach matematycznego doświadczenia*, Dydaktyka Matematyki, Seria V, Kraków 1998

Searching for task solutions at different levels of mathematical experience, The Science of Teaching Mathematics, Series V

[2] S.Kaner: *Facilitator's Guide to Participotary Decision-Making*, New Society Publishing, 1998

[3] J.Kozielecki: *Myślenie i rozwiązywanie problemów*, WN PWN, Warszawa 1995

Thinking and solving the problems

[4] G.Polya: *Odkrycie matematyczne*, PWN, Warszawa 1964

Mathematical Discovery

[5] E.Śmietana: Rozprawa doktorska pt. *Wpływ interwencji nauczyciela na aktywność matematyczną ucznia uzdolnionego w procesie rozwiązywania matematycznego problemu*, Akademia Pedagogiczna, Dydaktyka Matematyki, Seria V, Kraków 2005

Doctoral Dissertetion: The influence of teacher's intervention on a mathematically talentem student in the process of solving a mathematical problem, Academy of Pedagogy

Adresa autora:
University Of Engineering and Economics in Ropczyce
Faculty of Entrepreneurship in Rzeszów - Miłocin

Tvorba počiatočných matematických predstáv – vyhodnotenie práce študentov

Blanka Tomková

Abstract. *The problems of teachers while developing mathematic imaginations. New methods in disciplines for mathematical education.*

Úvod

Priestorová predstavivosť, orientácie v priestore, či priestorové videnie sa u detí rozvíja od narodenia. Pri vykonávaní pohybu, keď deti lezú, bežia, skáču, jedia, obliekajú sa, alebo sa hrajú, musia koordinovať svoj pohyb. Pri vyhľadávaní určitého objektu musia rozoznávať tvar daného objektu medzi inými, niekedy tvarovo podobnými objektami. Každodennou činnosťou, systematickým skúmaním objektov, spoznávaním ich tvarov získava dieťa prvotné predstavy o danom tvare – rozlišuje tvar hranatý, guľatý, či špicatý, štvorcový, trojuholníkový, či kruhový a mnohé ďalšie, ktoré možno ani nepomenuje.

Stotožňujeme sa stvrdením A. Stopenovej, (2004, s.65) že práve „v materskej škole si deti osvojujú všetky elementárne prvky matematiky iba sprostredkovane pomocou hier a rôznych manipulačných činností ... s geometrickými pojmami zoznamujeme deti prirodzeným a intuitívnym spôsobom“

Podľa psychológov nie je geometrická predstavivosť vrodená, ale človek ju získava skúsenosťou. Ideálnym obdobím na rozvoj priestorovej predstavivosti je obdobie do siedmeho/ôsmeho roku života. A veľmi ťažko sa naprávajú chyby po tomto období. Zdá sa akoby sa prechodom z predškolského zariadenia do prvého ročníka ZŠ uzatvárala jedna kapitola vývoja. V tejto oblasti absentuje nadväznosť edukačného procesu, podobne ako sa to neskôr deje pri prechode na 2.stupeň ZŠ. Bližšie o tejto problematike pojednávajú A. Prídavková a I Scholtzová (2006, s. 197).

Ako sú tieto poznatky aplikované v praxi?

V rámci matematických predstáv v predškolských zariadeniach pracujú detí formou rôznych úloh na rozvoji priestorovej a teda aj geometrickej predstavivosti:

V rámci kategórie „Porovnávanie, triedenie a orientácia v priestore“ sa deti majú naučiť

- chápať priestorové vzťahy, ktorými sa určuje poloha vecí v priestore
- popisovať polohu objektov vzhľadom k vlastnej osobe i vzájomnú polohu dvoch rôznych objektov
- zostavovať rôzne obrazce v rovine a stavať stavby z kociek v priestore podľa predlohy, obrázkov aj vlastnej fantázie
- porovnávať dĺžky hrán dvoch predmetov pomocou šnúrky, či prúžku papiera
- hľadať a vyznačovať cesty od jedného bodu k druhému
- zaznamenávať pohyb pomocou šípok z jedného miesta na iné

- prikladať k sebe rôzne predmety tak, aby sa navzájom prekrývali
- vkladať jednoduché predmety do otvorov, ktoré sú s nimi tvarovo zhodné
- rozlišovať a triediť jednotlivé predmety podľa tvaru, veľkosti, farby, umiestnenia v priestore apod

V prvom a druhom ročníku nastáva akoby prestávka. Požiadavky na vedomostný štandard pre žiakov prvého ročníka sú:

- Rozlíšiť geometrické tvary: trojuholník, kruh, štvorec, obdĺžnik, guľa, kocka, valec.
- Rysovať priame čiary.
- Kresliť a rozlišovať uzavretú a otvorenú čiaru.

V druhom ročníku sa od žiakov požaduje:

- Vyznačovať body a označovať ich veľkým tlačeným písmom.
- Rysovať a označovať úsečku a priamku.
- Vyznačovať body, ktoré ležia (neležia) na danom geometrickom útvare (úsečke, priamke).
- Odmerať dĺžku úsečky v centimetroch a narysovať úsečku danej dĺžky.

Pričom geometrii je v prvom ročníku venovaných 9 hodín z plánovaných 132 (necelých 7%) a v druhom ročníku ide o 20 hodín zo 165 hodín matematiky (cca 12%).

Obsah predmetu „Tvorba počiatočných matematických predstáv“

Tieto zistenia nás doviedli k rozhodnutiu naplniť obsah predmetov „Tvorba počiatočných matematických predstáv I“ a „Tvorba počiatočných matematických predstáv II“ s dotáciou hodín (1/2) a (1/1) takýmto spôsobom:

„Tvorba počiatočných matematických predstáv I“ bude zameraná na geometriu a „Tvorba počiatočných matematických predstáv II“ bude zameraná na aritmetiku a algebru. (O skúsenostiach s geometrickou zložkou prípravy učiteľov preelementaristov na našej fakulte pojednávajú práce M. Mokriša (2004), (2005), (2006).

„Tvorba počiatočných matematických predstáv I“

1. Pedagogická dokumentácia
2. Orientácia v priestore. Orientácia v rovine.
3. Rovinné útvary.
4. Pravidelné štvoruholníky
5. Priestorové útvary.
6. Základy deskriptívnej geometrie.
7. Zhodné útvary a zhodné zobrazenia.
8. Body a čiary
9. Miera úsečky, jednotky dĺžky. Miera rovinného útvaru.

Povinnosti študentov

Náplň práce študentov sme sa snažili voliť tak, aby zodpovedali predpokladaným kompetenciám budúceho učiteľa ako o tom pojednáva aj článok E.Šimčíkovej (2006)

- Napísanie vstupného testu - max 5 bodov
- Aktivita v rámci kurzov - max 5 bodov
- Odovzdanie dvoch kartotečných lístkov venovaných témam "*Orientácia v priestore a v rovine. Rovinné útvary.*" (Za každý lístok odovzdaný v termíne a spĺňajúci podmienky je možné získať max 10 bodov, po termíne max 5 bodov)
- Odovzdanie dvoch kartotečných lístkov venovaných témam "*Priestorové útvary. Zhodné zobrazenia.*" (Za každý lístok odovzdaný v termíne a spĺňajúci podmienky je možné získať max 10 bodov, po termíne max 5 bodov)
- Vypracovanie seminárnej práce na tému *"Matematická hra pre deti"*, ktorá bude obsahovať názov hry, popis priebehu hry, organizácia žiakov počas hry, význam hry v súvislosti s preberaným učivom, obmena hry, vyhodnotenie, potrebné pomôcky - maximálne 20 bodov
- Napísanie výstupného testu - maximálne 30 bodov

Za celý semester mohol študent získať maximálne 100 bodov. Zápočet študent získal po dosiahnutí aspoň 51 bodov.

Stupnica

100 - 91 A 90 - 81 B 80 - 71 C 70 - 61 D 60 - 51 E 50 - 0 FX

Vyhodnotenie práce študentov

Zistenia:

Všetkých študentov dennej formy štúdia bolo 83

- 7 študentov neodovzdalo prvú dvojicu kartotečných lístkov v termíne z toho jeden bol dlhodobo práceneschopný. Druhú dvojicu kartotečných lístkov odovzdali načas <u>všetci študenti.</u>
- 36 študentov odovzdalo kartotečný lístok na nesprávnom formáte (nie A6)
- 58 študentov neuviedlo literárny zdroj, prípadne ho neuviedli správne.
- U 42 študentov obsah nekorešpondoval z nadpisom, prípadne neobsahoval relevantné údaje
- Nevyhodnocovali sme gramatickú stránku, ale napriek tomu, že šlo o výpisky z literatúry, úroveň gramatickej presnosti našich študentov nebola vysoká. Estetická úroveň kartotečných lístkov bola tiež rôznorodá – od priam profesionálneho spracovania až po úroveň žiaka 3.ročníka ZŠ (hodnotenie nezávislého pozorovateľa)

- Vytvorenie didaktickej hry bolo skutočne náročným krokom (najmä pre študentov dennej formy štúdia). Napriek našej pomoci – presnému formuláru, do ktorého bolo potrebné doplniť jednotlivé údaje bolo ich spracovanie veľmi rôznorodé. Študenti sa často spoliehali na literatúru – vyhľadávali rôzne úlohy, matematické hry pre 2.stupeň ZŠ, prípadne si hru zamieňali s prácou v pracovnom liste. Raritou bola práca, ktorá bola skutočne hrou ale jej autor zabudol na matematickú stránku.

- Výstupný test mal preveriť vedomostnú úroveň našich študentov, ich schopnosť pracovať s pracovným listom a vytvárať úlohy vhodné pre deti predškolského a mladšieho školského veku.

- Najčastejšími chybami boli:

  - nepresné určovanie predmetov daného tvaru
  - neúplné pochopenie pojmu trojuholník
  - nepresné označovanie častí kocky (zámena pojmov: strany – steny; strany – hrany)
  - nepresné určovanie jednotlivých pohľadov na stavbu (spredu)
  - nesprávne zakresľovanie pohľadov jednotlivých telies
  - nesprávne určenie zamerania pracovného listu, prípadne voľba nevhodných typov úloh pre daný pracovný list

Záver

Je potrebné naďalej pracovať so študenti spôsobom, ktorý ich učí

- pracovať samostatne a tvorivo (kartotečné lístky, tvorba portfólia)

- plánovaniu a dodržiavaniu termínov

- pracovať s odbornou literatúrou a orientovať sa na internetových stránkach zameraných na matematiku

- umožniť študentom prežiť objaviteľský spôsob uchopenia poznatku

Rovnako súhlasíme s I. Scholtzovou a V. Zeľovou (2006), že „je potrebné ponúknuť učiteľom z praxe databázu s úlohami z reálneho života, ktoré môžu využívať na hodinách matematiky“. Preto požadujeme od študentov tvorbu ich vlastného portfólia, v ktorom majú prezentovať aj úlohy takéhoto typu.

Literatúra

[1] GUZIOVÁ, K.: Program výchovy a vzdelávania detí v materských školách. Ludoprint, trencianske tlaciarne, Trencín 1999. ISBN 80- 967721-1-2

[2] MOKRIŠ, M.: *Inovacné stratégie riešenia – geometria bez kružidla.*. In: Matematika v škole dnes a zajtra. 6.rocník konferencie. Pedagogická univerzita KU v Ružomberku, Ružomberok 2006. ISBN 80-8084-066-0

[3] MOKRIŠ, M.: *Metóda generovania problémov a jej aplikácia v geometrii pre elementaristov.* In: Príprava ucitelov elementaristov a európsky multikultúrny priestor. PU v Prešove, PF, Prešov 2005. ISBN 80-8068-372-7

[4] MOKRIŠ, M.: *Výskumný prístup v geometrii pre ucitelov elementaristov.* In: História, súcasnost a perspektívy ucitelského vzdelávania. UMB PdF Banská Bystrica, B. Bystrica 2004. ISBN 80-8083-107-6

[5] PRÍDAVKOVÁ, A. – SCHOLTZOVÁ, I.: *Matematická edukácia v kontexte postupu žiaka z primárneho stupna na sekundárny stupen vzdelávania.* In: Matematika 2, Pedagogická fakulta UP Olomouc, Olomouc 2006, ISBN 80-244-1311-6

[6] SCHOLTZOVÁ, I. – ZELOVÁ, V.: *Matematický diktát – jedna z ciest rozvoja matematickej gramotnosti žiaka primárnej školy.* In Matematika 2, Pedagogická fakulta UP Olomouc, Olomouc 2006, ISBN 80-244-1311-6

[7] STOPENOVÁ, A. *K prostorové predstavivosti detí predškolního veku.* In:Acta Paedagogicae III. Pedagogická fakulta Prešovskej univerzity, Prešov 2004. ISBN 80-8068-254-2

[8] ŠIMCÍKOVÁ, E.: *Matematické kompetencie zacínajúceho ucitela - elementaristu.* In Matematika 2, Pedagogická fakulta UP Olomouc, Olomouc 2006, ISBN 80-244-1311-6

Adresa autora:
Mgr. Blanka Tomková
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra 1
080 16 Prešov
e-mail: tomkova@unipo.sk

Zisťovanie efektívnosti vyučovacieho procesu v kontexte kľúčových kompetencií

Peter Vankúš

Abstract. *In this article we discuss importance of assessing key competencies when we inquire the efficacy of teaching methods. We describe various ways how key competencies can be assessed and speak about their strengths and weaknesses.*

Na Slovensku i v zahraničí majú v oblasti edukácie veľmi dôležitú úlohu *kľúčové kompetencie.* Jedná sa o kompetencie využiteľné v rámci najrozmanitejších pracovných a životných situácií, preto sa v zahraničí označujú ako *všeobecne použiteľné schopnosti* (generic skills), či ako *prenosné schopnosti* (transferable skills).

Dôležitosť kľúčových kompetencií pre vzdelávanie je daná potrebami súčasného trhu práce – zamestnanci musia byť schopní pracovať v tíme, riešiť problémy a jednať v neštandardných situáciách; musia vedieť prijímať rozhodnutia, byť zodpovední a efektívne komunikovať. Tieto schopnosti sú dôležitým kritériom pri príjímaní nových zamestnancov – preto sa pri kľúčových kompetenciách používa aj pojem *zručnosti súvisiace so zamestnateľnosťou sa* (employability skills) – hrajú ale podstatnú úlohu aj v priebehu zamestnania a v rodinných a spoločenských vzťahoch (NCVER, 2003a; Arendášová A., Krehlíková A., 2005).

Ak si uvedomíme význam kľúčových kompetencií, je samozrejmé, že úroveň ich osvojenia by mala byť jedným z faktorov pri posudzovaní efektívnosti edukačného procesu ako aj efektívnosti jednotlivých edukačných metód.

Vo väčšine štúdií zisťujúcich efektívnosť edukačnej metódy sa ako kritérium tejto efektívnosti berie do úvahy:

úroveň vedomostí žiakov overovaná väčšinou pomocou testov,
čas potrebný na vyučovací proces,
celková vhodnosť danej metódy pre daný počet a úroveň žiakov, materiálnu vybavenosť a dostupné zdroje,
subjektívne zážitky žiakov: vývoj názorov a postojov k predmetu a priebehu výučby, hodnotenie rozvoja vlastných vedomostí (Vankúš, 2005).

Tento spôsob stanovovania efektívnosti neberie bežne ohľad na vývoj úrovne kľúčových kompetencií, výsledkom čoho je, že hlavne inovatívne metódy výučby, ako sú projektové vyučovanie, problémové vyučovanie, výskumné vyučovanie, vyučovanie pomocou didaktických hier a pod. pri porovnávaní s bežným vyučovaním často naoko nevykazujú lepšie výsledky – pritom spomenuté vyučovacie metódy sú ideálne na rozvoj určitých kľúčových kompetencií (Slavíčková, 2006; Vankúš, 2005; NCVER, 2003b).

V našom článku sa preto chceme venovať potrebe zohľadnenia úrovne kľúčových kompetencií pri hodnotení efektívnosti edukácie. Aby to bolo možné, je potrebné:

Výstižné stanovenie a opis jednotlivých kľúčových kompetencií.

Integrácia kľúčových kompetencií do kurikula.

Vhodný spôsob merania úrovne ovládania kľúčových kompetencií.

Existuje množstvo zoznamov kľúčových kompetencií vytvorených v rámci jednotlivých štátov aj medzinárodnými tímami. Po ich preštudovaní možno vymedziť šesť spoločných oblastí (NCVER, 2003a; Hrmo R., Turek I., 2003):

Základné zručnosti (literárna gramotnosť, používanie čísel, technologické zručnosti).

Interpersonálne zručnosti (komunikácia, tímová práca, zručnosti spojené so vzťahom k zákazníkom).

Kognitívne zručnosti (získavanie informácií a práca s nimi, riešenie problémov, plánovanie a organizovanie, schopnosť učiť sa – učebné kompetencie, inovačné a tvorivé myslenie).

Osobnostné zručnosti a vlastnosti (zodpovednosť, dômyselnosť, flexibilita, schopnosť manažovať svoj čas, pozitívne sebahodnotenie).

Zručnosti súvisiace so zamestnaním (inovačné, rozvojové).

Zručnosti súvisiace s komunitou (občianske v zmysle lokálnom i širšom).

Zoznamy kľúčových kompetencií sa menia spolu so zmenami požiadaviek kladených na jednotlivca v rámci zamestnania a spoločnosti, preto je potrebné konktrétny zoznam kľúčových kompetencií rozvíjaných v rámci edukácie priebežne revidovať a aktualizovať. Pri integrácií kľúčových kompetincií do kurikula možno ale vzhľadom na veľkú podobnosť jednotlivých zoznamov, charakterizovanú uvedenými šiestimi oblasťami kľúčových kompetencií, vychádzať z väčšiny týchto zoznamov vytvorených regionálne i v rámci medzinárodných výskumov. Úloha inovácie obsahu kurikula s ohľadom na kľúčové kompetencie je veľkou výzvou pre slovenské i zahraničné školstvo. Veľa o tejto problematike a jej riešení v rámci slovenského školstva nájde čitateľ v zborníku z Fóra Pedagogiky, konaného v Bratislave roku 2006. V našom článku sa budeme bližšie venovať spôsobu merania úrovne ovládania kľúčových kompetencií.

Curtis a Denton (2003) identifikovali štyri všeobecné prístupy pri hodnotení úrovne ovládania kľúčových kompetencií:

Holistické posúdenie úrovne týchto kompetencií vyučujúcim.

Posúdenie na základe súboru rozmanitých prác a projektov daného žiaka.

Ohodnotenie v rámci situácií podobajúcich sa situáciám na pracovisku (workplace assessment).

Hodnotenie štandardizovanými nástrojmi určenými na meranie úrovne kľúčových kompetencií.

Prehľad silných a slabých stránok týchto prístupov obsahuje tabuľka č. 1(Curtis a Denton 2003).

Všetky prístupy k hodnoteniu úrovne kľúčových kompetencií uvedené v tabuľke č. 1 majú svoje klady a zápory. Je zrejmé, že posúdenie úrovne kľúčových kompetencií nie je ľahké a posudzovatelia musia poznať prednosti i nedostatky uvedených metód – ich vhodná kombinácia umožňuje zvýšiť presnosť hodnotenia. Požiadavky, ktoré by malo efektívne hodnotenie úrovne kľúčových kompetencií spĺňať sú:

Spätná väzba pre žiakov o dosiahnutej úrovni a možnostiach zlepšenia.

Informácia o stupni ovládania daných kľúčových kompetencií dostupná v zrozumiteľnej forme pre žiaka, vyučujúceho i prípadného zamestnávateľa.

Bohatý zdroj informácií o dosiahnutých pokrokoch žiaka, ktoré sú preukázané v rámci metód hodnotenia úrovne kľúčových kompetencií (pozri tabuľku č. 1).

Autentické hodnotenie v rámci situácií podobajúcich sa situáciám na pracovisku.

Proces hodnotenia nesmie byť príliš zložitý pre žiakov ani pre hodnotiteľov.

Finančne efektívne prostriedky získavania informácií slúžiacich ako podklad hodnotenia.

Hodnotenie úrovne ovládania kľúčových kompetencií je závislé na úrovni individuálnych hodnotiteľov či hodnotiacich tímov a na prepracovanosti procesu

Tabulka c. 1: Prehlad prístupov merania úrovne klúcových kompetencií		
Prístup	Silné stránky	Slabé stránky
Holistické posúdenie ucitelom Zahrna pozorovanie žiaka vyucujúcim alebo tímom vyucujúcich v rámci aktivít prebiehajúcich pocas vyucovacieho procesu – na základe toho sa robí úsudok o úrovni klúcových kompetencií daného žiaka.	Autentické, získané na základe pozorovaní v relevantných situáciách. Dáva konzistentný pohlad na úroven pozorovaných zrucností v porovnaní so štandardnou úrovnou.	Reliabilné len v rámci danej organizácie (i to len ak je robené školenými hodnotitelmi), zlá porovnatelnost hodnotenia v rámci rôznych inštitúcií. Vyžaduje školenie pre hodnotiacich vyucujúcich. Jedná sa o sumatívne hodnotenie, preto má len obmedzený potenciál pre zdokonalenie hodnoteného žiaka.
Posúdenie na základe portfólia prác daného žiaka		
V rámci tohto prístupu žiak vo svojich prácach dokumentuje momentálnu úroven klúcových kompetencií a svoj pokrok v tejto oblasti.	Poskytuje bohatý zdroj dát. Tvorba rozmanitých prác a projektov, ktoré slúžia ako podklad ku hodnoteniu. Je cennou ucebnou skúsenostou pre žiakov a pomáha rozvoju klúcových kompetencií.	Ovplyvnené inými faktormi, napríklad úrovnou písomného prejavu, co znižuje validitu. Nízka možnost porovnávania jednotlivcov – tieto porovnania majú nízku reliabilitu. Vysoká casová nárocnost získavania informácií z portfólia prác žiaka. Hodnotenie portfólia je casovo nárocné a má nízku reliabilitu.
Ohodnotenie v rámci situácií podobajúcich sa situáciám na pracovisku (workplace assessment)		
Hodnotenie výkonu v rámci situácie podobajúcej sa pracovnej skúsenosti na pracovisku sa javí ako uzitocná metóda, ktorej produktom je prehladná správa.	Vysoká validita. Má velký význam aj pre uciacich sa, ak produktom hodnotenia je aj spätná väzba pre žiakov.	Nízka reliabilita ovplyvnená skúsenostou posudzovateľov a možnosťami hodnotenia danými kontextom konkrétnej situácie, v rámci ktorej sa hodnotenie realizuje.
Hodnotenie štandardizovanými nástrojmi urcenými na meranie úrovne klúcových kompetencií.		
Štandardizované nástroje vyvinuté špeciálne na posudzovanie úrovne klúcových kompetencií umožnujú ich efektívne hodnotenie a môžu tvorit základ pre správu o úrovni klúcových kompetencií žiaka použitelnú v rámci dalšieho vzdelávania i potenciálnymi zamestnávatelmi.	Jedná sa o efektívnu a vysoko reliabilnú metódu hodnotenia úrovne klúcových kompetencií. Kedže ide o štandardizovaný nástroj hodnotenia, výsledky jednotlivcov sú navzájom porovnatelné. Pri známej presnosti hodnotenia možno stanovit úroven ovládania konkrétnej kľúčovej kompetencie.	Jedná sa o sumatívne hodnotenie, preto má len obmedzený potenciál pre zdokonalenie hodnoteného žiaka.

a metodiky samotného hodnotenia. Táto metodika by mala byť zrozumiteľná, proces hodnotenia by mal byť jednoducho integrovateľný do priebehu vyučovania. Ako všetky formy hodnotenia by mal spĺňať princípy validity, reliability a praktickosti. Hodnotitelia i hodnotiace tímy potrebujú dostatočné časové a materiálne zázemie a podporu v ich profesionálnom rozvoji – výmena skúseností a spolupráca medzi jednotlivými hodnotiteľmi prispieva k zvyšovaniu kvality hodnotenia.

V tomto smere je potrebné urobiť na Slovensku veľa – jedná sa o dôležitú úlohu pred ktorou stojí naše školstvo – ak úroveň ovládania kľúčových kompetencií nie je hodnotená a toto hodnotenie nie je prístupné, žiaci si neuvedomujú ich dôležitosť, zamestnávatelia nemajú možnosť získať relevantné informácie o ich potenciálnych zamestnancoch. Je potrebné explicitne špecifikovať dôležitosť kľúčových kompetencií v rámci kurikula a túto pozornosť venovať i procesu hodnotenia ich úrovne – to sa v praxi ukazuje ako dôležitý faktor pre rozvoj kľúčových kompetencií v rámci edukácie.

Literatúra

[1] Arendášová A. - Krehlíková A. 2006, *Kľúčové kompetencie absolventa technickej vysokej školy*, Schola 2006: Kvalita výchovy a vzdelávania, Slovenská technická univerzita, Bratislava.

[2] Clayton, B. - Blom, K. - Meyers, D. - Bateman, A. 2003, *Assessing and certifying generic skills. What is happening in VET?*, NCVER, Adelaide.

[3] Curtis, D. - Denton, R. 2003, *The authentic performance-based assessment of problem-solving*, NCVER, Adelaide.

[4] Fórum pedagogiky 2006: *Transformácia vzdelávania smerom k potrebám európskeho trhu práce,* Metodicko-pedagogické centrum, Bratislava.

[5] Hrmo, R.- Turek, I. 2003, *Kľúčové kompetencie*, Slovenská technická univerzita, Bratislava.

[6] NCVER (National Centre for Vocational Education Research) 2003a, *Defining generic skills: At a glance*, NCVER, Adelaide.

[7] NCVER (National Centre for Vocational Education Research) 2003b, *Fostering generic skills in VET programs and workplaces: At a glance*, NCVER, Adelaide.

[8] Slavíčková, M. 2006, *Rôznorodé metódy vyučovania tematického celku Záporné čísla*, In: Matematika v škole dnes a zajtra, Ružomberok, s. 248–252.

[9] Vankúš, P. 2005, *Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a–didactic situation*, In: Quaderni di Ricerca in Didattica, No. 15, G.R.I.M, University of Palermo, s. 90–105.

Adresa autora:
PaedDr. Peter Vankúš
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

Internet a diferenciálny počet

Beáta Vavrinčíková

Abstract. *In this article we deal with the possibilities how to use the internet when teaching differential calculus at grammar schools.*

Úvod

V novom tisícročí sme sa ocitli vo svete plnom nových technológií, počítačov, Internetu, mobilov... V súčasnosti sú bežnými užívateľmi počítačov aj naprostí laici, deti, predavačky, zdravotné sestry, pracovníci v bankách, podnikatelia atď. Počítače sa stali ozajstnými pomocníkmi nielen na väčšine pracovísk, v domácnostiach, ale aj vo vyučovaní.

Počítače a Internet možno efektívne uplatniť vo všetkých fázach vyučovacieho procesu, pri motivácii, pri opakovaní, pri osvojovaní nového učiva, pri upevňovaní a prehlbovaní, pri preverovaní aj hodnotení žiakov, pri ich domácej príprave, ako aj pri spätnej väzbe.

V tomto článku uvádzame svoje skúsenosti s využitím Internetu pri vyučovaní jedného konkrétneho tematického celku v gymnaziálnej matematike – diferenciálneho počtu. Uvedené aktivity boli zrealizované v marci a apríli 2006 v septime B (trieda s rozšíreným vyučovaním matematiky) Gymnázia na Alejovej ulici č.1 v Košiciach.

Využitie Internetu pri vyučovaní diferenciálneho počtu

Diferenciálny a integrálny počet (často aj infinitezimálny počet) je jedna z centrálnych disciplín matematiky, ktorá v súčasnosti tvorí základ matematickej analýzy. Diferenciálny počet študuje rýchlosť zmeny, ktorá je zvyčajne vyjadrená smernicou krivky. Je založený na probléme hľadanie okamžitej rýchlosti zmeny jednej veličiny vzhľadom na inú.
Vývoj a použitie diferenciálneho a integrálneho počtu malo a má ďalekosiahle dôsledky na skoro všetky aspekty moderného bytia. Je prítomný takmer vo všetkých vedách, hlavne vo fyzike. Prakticky všetky moderné výdobytky, ako stavebné techniky, letectvo a iné technológie používajú infinitezimálny počet priamo vo svojich základoch.

Počas stredoškolského štúdia sa žiaci gymnázia oboznamujú so základmi infinitezimálneho počtu, pričom skúsenosti hovoria o tom, že ide o najťažšiu časť stredoškolskej matematiky. Aj preto považujeme za dôležité hľadať možnosti, ako túto tému žiakom lepšie priblížiť. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli zistiť, čím nám v tomto smere môže pomôcť Internet.

Základným pomocníkom pre využitie počítačov pri štúdiu matematickej analýzy je pre nás dobrý **kreslič funkcií**. Programy, ktoré kreslia grafy funkcií, nie je na Internete ťažké nájsť. Dajú sa veľmi výhodne využiť na hodinách pri preberaní učiva o funkciách, poslúžia šikovne na demonštráciu grafického riešenia rovníc a nerovníc rôzneho typu, vedia vykresliť nielen graf funkcie, ale aj geometrického útvaru daného analytickým vyjadrením, dá sa pomocou nich vykresliť aj derivácia danej funkcie, viesť dotyčnica daným bodom, vykresliť aj vyčísliť určitý integrál. Umožňujú zväčšovať a zmenšovať, nakresliť v krátkom čase do jedného obrázku celú sériu grafov funkcií líšiacich sa len hodnotou nejakého parametra. Tým žiak môže sám, vlastnou rukou získať predstavu o význame daného parametra pre tvar, alebo polohu grafu funkcie. Jeho predstava o grafoch funkcií a teda i o pojme funkcia sa stane bohatšou a v prípade, že k poznatku došiel vlastnou manipuláciou s počítačom tak aj trvalejšou. Nám sa veľmi osvedčil program **Graphmatica** pre jeho jednoduché ovládanie. Keďže je voľne stiahnuteľný z Internetu, žiaci si ho môžu nainštalovať aj doma a využívať v príprave na vyučovanie.

Ďalej sme využili aj niekoľko **apletov** k danej téme. Aplety sú interaktívne javovské programy, animácia je dosiahnutá najčastejšie možnosťou pohybu nejakého bodu, resp. väčšieho útvaru. Na väčšine stránok sa nachádza sprievodný text, matematický teoretický základ, vzorce, odvodenia, návodné úlohy, otázky a pod. Okrem toho sme použili aj **testy** a niekoľko **zaujímavých stránok**.

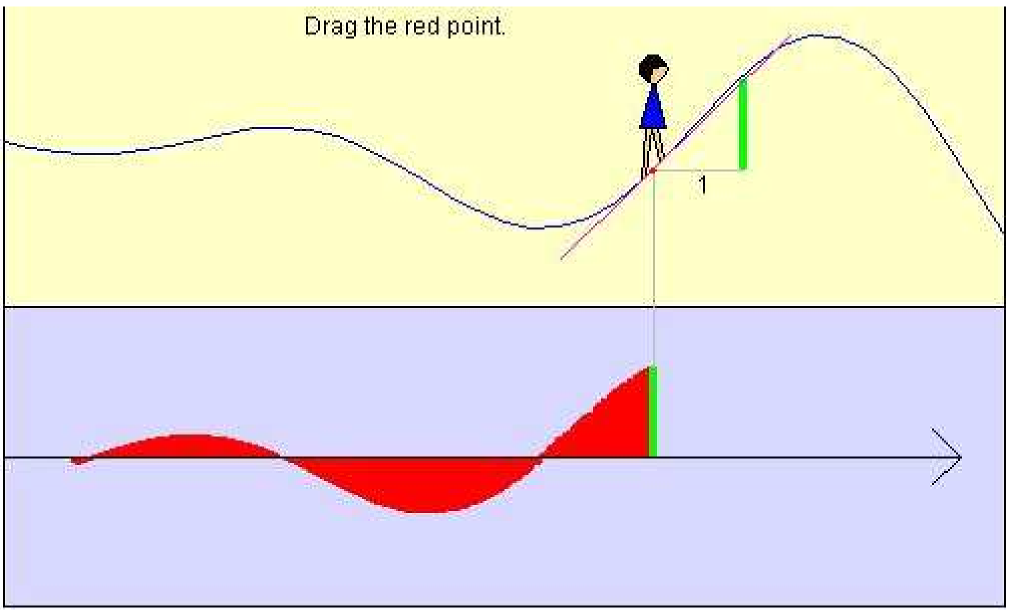
Na nasledujúcich stranách popisujeme šesť aktivít, realizovaných v rámci tohto tematického celku s využitím Internetu. Pritom na vyučovacích hodinách bolo možné podľa potreby buď ísť so žiakmi do učebne informatiky alebo pracovať v triede s nootebookom a dataprojektorom.

1. Úvod do štúdia diferenciálneho počtu

Metódy: frontálny výklad

Popis: Na úvod nového tematického celku sme si pripravili historické poznámky podľa článku „Diferenciálny a integrálny počet“ [1]. Keďže najväčšiu zásluhu na rozvoji tejto časti matematiky mali Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz, pripravili sme si aj ich portréty ([2] a [3]) s poznámkami o ich živote a diele.

Nasledovala geometrická interpretácia derivácie funkcie v bode ako smernice dotyčnice ku grafu funkcie v danom bode. Na podporu tejto geometrickej predstavy sme použili aplet so surfujúcim panáčikom [4]. Tento aplet je nádherný svojim dôvtipom, predstavuje deriváciu ako surfovanie po vlnách. Mód s panáčikom sa dá vypnúť, tak isto aj vykresľovanie derivácie. Na začiatku je vhodné so žiakmi ozrejmiť, prečo má dolná odvesna veľkosť 1, kde sa vykresľuje hodnota derivácie v bode a prečo môžeme chápať deriváciu ako novú funkciu.



2. Derivácie elementárnych funkcií

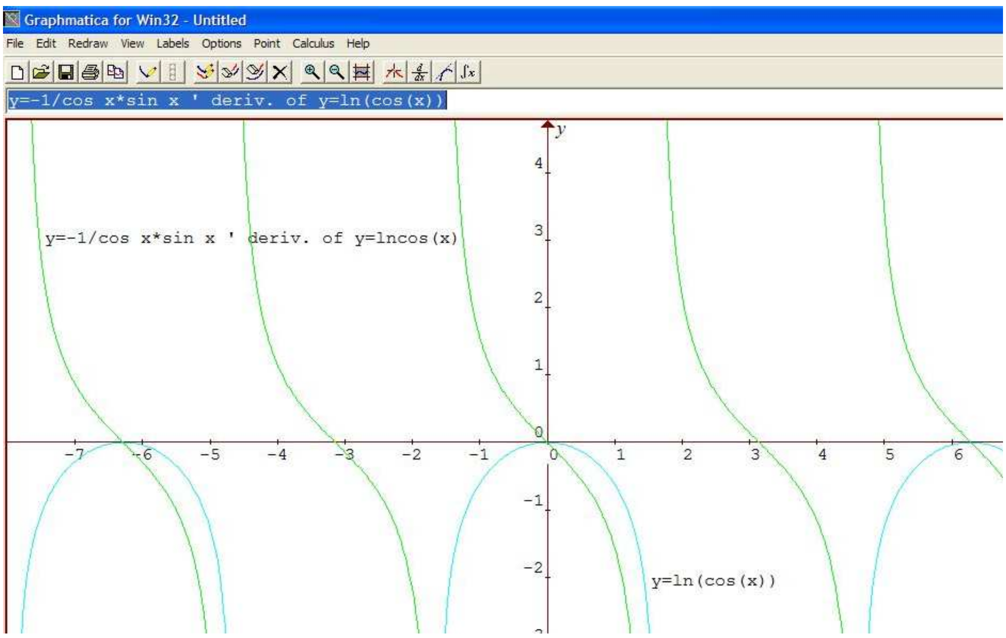
Metódy: samostatná práca žiakov na PC
Popis: Po oboznámení sa s pravidlami pre derivovanie súčtu, súčinu a podielu funkcií, vzťahmi pre derivovanie elementárnych funkcií a zložených funkcií nasleduje „drilovanie" – žiaci potrebujú získať zručnosť v derivovaní funkcií. Chýba tu však spätná väzba – pri riešení napr. rovnice môžeme urobiť skúšku správnosti dosadením. Ako však overiť, že sme funkciu správne zderivovali? Tu môže veľmi dobre poslúžiť kreslič funkcií, ktorý dokáže zostrojiť aj deriváciu funkcie. Na hodinách matematiky sa nám veľmi osvedčil program Graphmatica [5], žiaci prácu v tomto prostredí ovládajú z nižších ročníkov.

Úlohou žiakov pri tejto aktivite bolo najprv do zošita vypočítať derivácie niekoľkých funkcií, napr.: $y = \cos^2(3x)$, $y = 2^x + 3x$, $y = \ln(\cos x)$

Potom si svoje riešenia skontrolovali v Graphmatice nasledovným postupom:

1. spustiť program Graphmatica
2. do príkazového riadku zapísať rovnicu funkcie, po stlačení klávesy Enter sa zobrazí graf príslušnej funkcie (v prípade problémov so správnymi zápismi možno vyvolať pomocníka príkazmi Help → Operator table alebo klávesou F1; v prípade potreby môžeme graf upravovať pomocou príkazov View → Graph paper, View → Colour, View → Grid range)
3. zostrojiť graf derivácie funkcie kliknutím na ikonku $\frac{d}{dx}$ – graf sa objaví v tom istom obrázku
4. po kliknutí na graf derivácie funkcie sa v príkazovom riadku objaví rovnica derivácie, ktorú porovnáme s tou v zošite
5. opakovaním 3. a 4. kroku môžeme nájsť aj vyššie derivácie danej funkcie (žiaci pracovali s funkciou $y = x^4 - 2x^3 + 5x - 1$)

Aktivita prebehla veľmi dobre, ukázalo sa, že iba dvaja žiaci robili chyby pri derivovaní.



Vety o strednej hodnote

Metódy: problémová metóda – samostatná práca žiakov na PC; frontálny výklad
Popis: Vyučovacia hodina prebehla v nasledovných fázach:

Žiaci pracujúci samostatne v programe Graphmatica [5] dostali nasledovné zadanie:
Zostrojte graf ľubovoľnej nemonotónnej funkcie. Zostrojte jej deriváciu. Zistite, či viete nájsť taký interval $\langle a, b\rangle$, na ktorom platí:

f je spojitá na $\langle a, b\rangle$

f má deriváciu na (a, b)

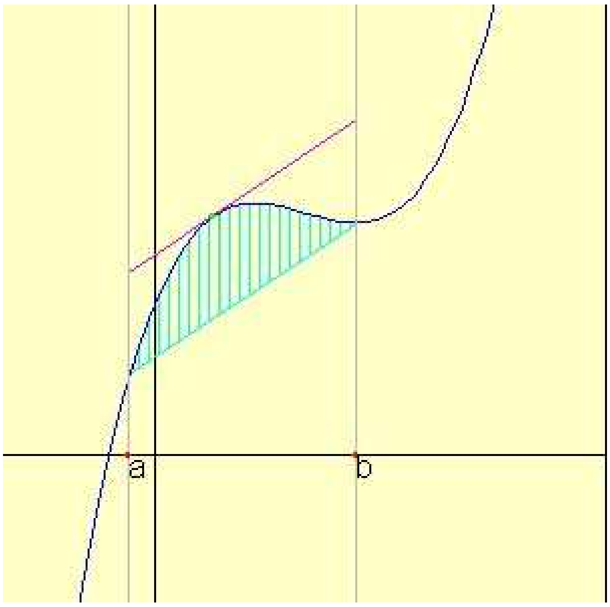
$$f(a) = f(b)$$

Ak ste našli taký interval, pokračujte. Ak nie, zvoľte novú funkciu Λ. Teraz zistite, či $\exists c \in (a, b)$ také, že $f^{/}(c) = 0$. Do zošita si zapíšte vašu funkciu, hodnoty a, b, c a načrtnite si jej graf aj s hodnotami a, b, c.

Táto úloha bola pre žiakov problémová, museli samostatne analyzovať zadaný text a nájsť funkciu daných vlastností. Keďže sa s vetou o strednej hodnote ešte nestretli, nevedeli dopredu, k akému záveru majú dôjsť.

Nasledovala diskusia – okrem troch žiakov, ktorí úlohu nepochopili, všetci ostatní našli funkciu spĺňajúcu dané podmienky. Okrem bežných elementárnych funkcií, napr. $y = x^2$, $y = \sin x$, sa objavili aj zložitejšie funkcie, napr. $y = \sin x^2.x$, $y = \frac{2x^2+3x+2}{x^2+4}$. Niekoľko grafov bolo načrtnutých na tabuľu aj s vyznačenými hodnotami *a, b, c*. Spoločne sme sformulovali hypotézu, že daná veta platí vždy.

V ďalšej časti bola táto Rollova veta presne sformulovaná a nadiktovaná, za ňou nasledovala Lagrangeova veta spolu s niekoľkými príkladmi. Na podporu súvisu medzi Rollovou a Lagrangeovou vetou bol použitý aplet [6], kde pekne vidno geometrickú interpretáciu oboch viet - súvislosť s dotyčnicami ku grafom funkcií.



Na záver bola ako zaujímavosť žiakom prednesená Balada o vete Rollovej [7]. Takéto spestrenie vyučovacej hodiny žiaci uvítali, dokonca sa vyskytla otázka, či môžu aj pri ústnej odpovedi povedať znenie vety vo veršoch...

4. Monotónnosť a derivácia

Metódy: problémová metóda - samostatná práca žiakov na PC; frontálny výklad
Popis: Po zvládnutí techniky derivovania nastáva čas na oboznámenie sa s možnosťami využitia derivácií v matematike. Prvou takouto aplikáciou je určovanie intervalov monotónnosti funkcie za pomoci prvej derivácie. Pritom by bola škoda nevyužiť možnosti, ktoré poskytuje kreslič funkcií práve v tom, že dokáže v jednom obrázku vykresliť graf funkcie aj jej derivácie.

Žiaci pracujúci samostatne na PC dostali nasledovné zadanie:

Skupina A – *Po jednom si postupne zostrojte v Graphmatice grafy nasledujúcich funkcií aj s ich deriváciami:* $y = x^3, y = x^4 - 2x^2 + 1, y = \sin x$. *Pri každej funkcii rozhodnite, či platia nasledovné hypotézy:*

Ak $f^{/}(x) > 0$ *pre všetky* x *z nejakého intervalu, tak f rastie na tomto intervale.*

Ak f rastie na intervale I, tak pre všetky $x \in I$ *plat* $f^{/}(x) > 0$.

Skupina B – *Po jednom si postupne zostrojte v Graphmatice grafy nasledujúcich funkcií aj s ich deriváciami:* $y = x^5, y = -2x^3 + 3x^2 - 1, y = \cos x$. *Pri každej funkcii rozhodnite, či platia nasledovné hypotézy:*

Ak $f^{/}(x) < 0$ *pre všetky* x *z nejakého intervalu, tak f klesá na tomto intervale.*

Ak f klesá na intervale I, tak pre všetky $x \in I$ *plat* $f^{/}(x) < 0$.

Nasledovala diskusia o získaných výsledkoch a formulácia príslušných viet. Na podporu predstavy o vzťahu derivácie a monotónnosti sme použili aplet [8], kde možno pozorovať zmenu znamienka derivácie v súvislosti s monotónnosťou funkcie.

5. Lokálne extrémy a derivácia

Metódy: problémová metóda – skupinová žiakov na PC; frontálny výklad
Popis: Ďalšou oblasťou využitia derivácií v matematike je hľadanie lokálnych extrémov funkcií. Pri tejto aktivite sme sa snažili o to, aby žiaci sami našli požadované súvislosti. Pracovali v malých skupinkách (2 - 3 žiaci pri počítači) s apletmi [9] a [10], v ktorých sú pod sebou vykreslené graf funkcie, jej prvá aj druhá derivácia, a to pre polynomické a goniometrické funkcie.

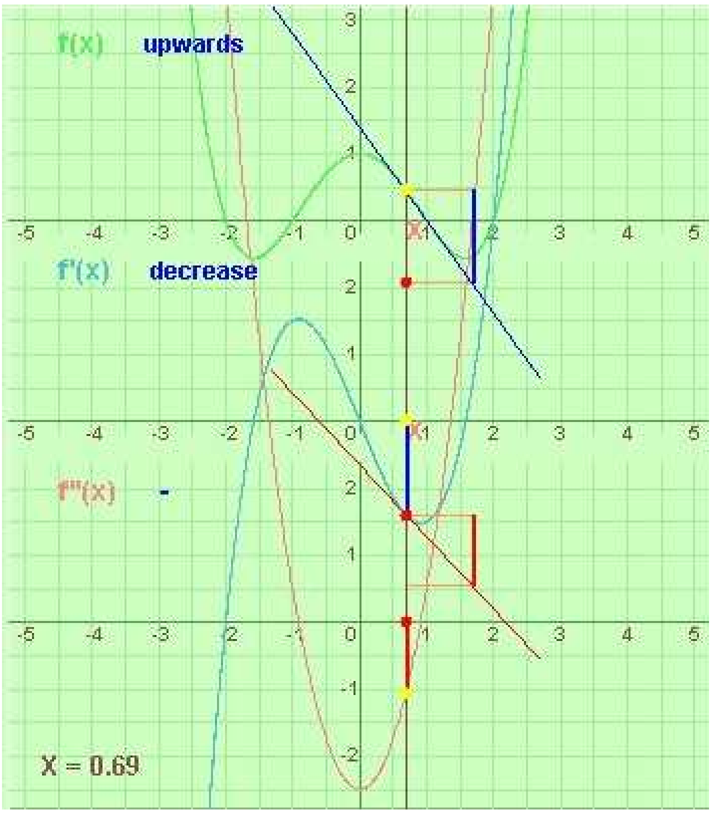
Úlohou žiakov bolo nájsť súvislosť medzi lokálnymi extrémami funkcie a jej prvou aj druhou deriváciou. Objavené zákonitosti mali overiť na ľubovoľnej ďalšej funkcii v programe Graphmatica [5]. Nájdenie súvisu medzi lokálnymi extrémami a prvou deriváciou nerobilo problémy. Ukázalo sa však, že nájdenie súvislosti s druhou deriváciou bolo ťažké, podarilo sa to len 6 žiakom. Takto voľne formulovaný problém bol pre žiakov zrejme ťažký, vhodnejšie by bolo ponúknuť žiakom nejaké hypotézy, ako sme to urobili pri vyšetrovaní monotónnosti.

6. Testy

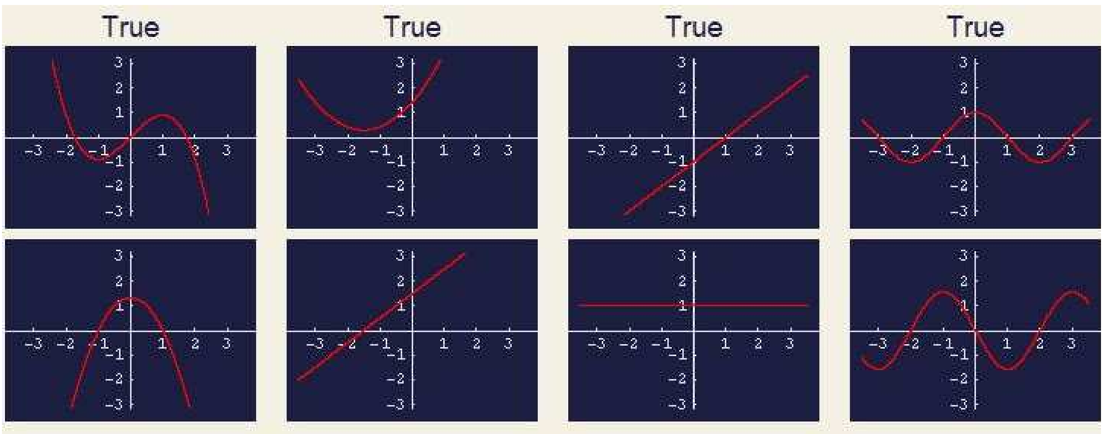
Metódy: preverovanie vedomostí, samostatná práca žiakov na PC
Popis: Internet ako bohatý zdroj materiálov je možné využiť aj vo fáze preverovania a hodnotenia vedomostí žiakov. Použili sme stránky Maths Online, kde môžeme nájsť interaktívne testy z matematiky rôzneho typu a z rôznych tematických celkov. Výhodou využitia takýchto interaktívnych testov je efektívnosť, okamžitá spätná väzba a vyhodnotenie, možnosť práce vlastným tempom.

Na vyučovaní mali žiaci riešiť dva testy:

The big derivative puzzle [10] – tento test je označený ako puzzle, teda skladačka. Úlohou žiakov bolo správne priradiť graf derivácie funkcie ku grafu pôvodnej funkcie.



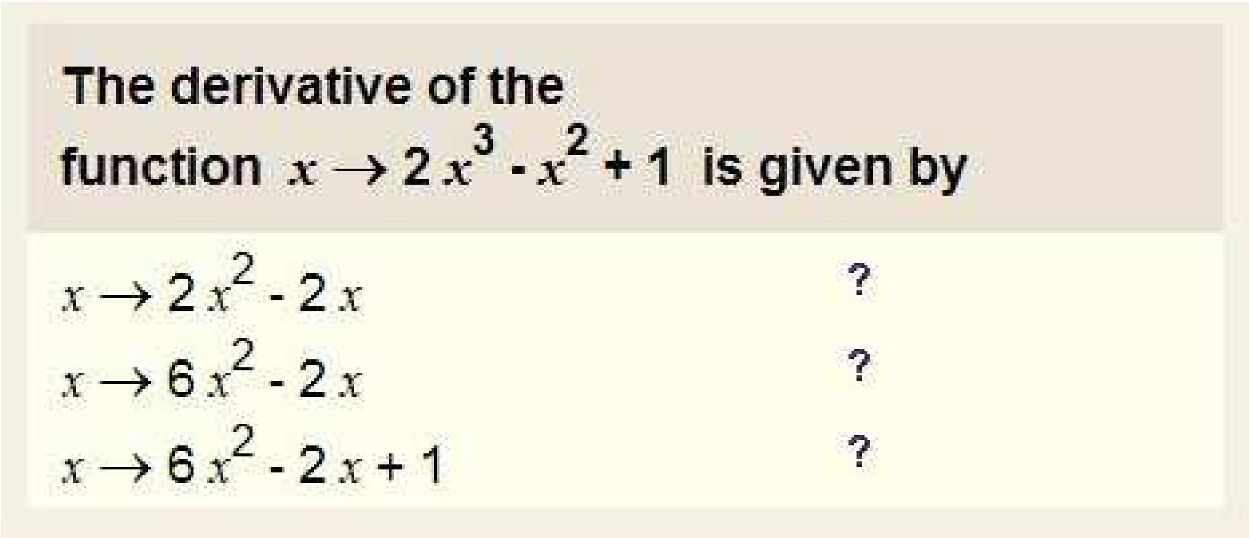
Dobre tu mohli využiť vedomosti z predchádzajúcich vyučovacích hodín o súvise derivácie funkcie s monotónnosťou a lokálnymi extrémami.



Žiaci tejto triedy zvládli test výborne, úspešnosť bola 93,9% (riešilo 23 žiakov). Pri opätovnom spustení testu počítač vygeneruje iné funkcie (z viac než 50 možných), čo spolu so skutočnosťou, že žiak pracuje iba s grafmi funkcií, umožňuje tento test použiť aj na klasifikáciu. Ďalšie podobné priraďovacie aplety možno nájsť na adrese http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/diff1/diff1.html#ableitung.

Differentiating polynomials [11] – tento test je označený ako multiple choice test, teda pri každej úlohe si žiaci vyberajú jednu z ponúknutých možností. Cieľom je správne určiť deriváciu na základe jej predpisu.

Úspešnosť bola opäť vysoká – 94,1%. Chyby vznikali pri derivovaní zloženej funkcie (najmä ak sa to snažili urobiť spamäti) a pri posledných dvoch úlohách, kde zamenili



pojem graf derivácie funkcie s grafom pôvodnej funkcie. Keďže v tomto teste musí žiak porozumieť zadaniu v cudzom jazyku (angličtine alebo nemčine) a navyše pri opätovnom spustení obsahuje stále tie isté úlohy, nie je vhodný na klasifikáciu žiakov.

Záver

Používanie nových informačno-komunikačných technológií patrí ku kultúrnym zručnostiam blízkej budúcnosti a preto sa ani škola nemôže od nich izolovať. Jedným z cieľov matematického vzdelávania musí byť aj vytváranie a rozvoj schopností riešiť praktické problémy reálneho života pomocou nových počítačových technológií.

Tento článok je malým príspevkom k vytvoreniu potrebného prepojenia matematického vzdelávania na nové informačné technológie. V texte zámerne neuvádzame presné matematické formulácie jednotlivých definícií a viet, pretože tie je možné nájsť v literatúre, napr. [15]. Našim zámerom bolo na príklade jedného tematického celku ukázať možnosti využitia Internetu pri vyučovaní matematiky na gymnáziu. Navrhnuté a zrealizované aktivity pritom pokrývali oblasť motivácie žiakov, sprístupňovania nového učiva, precvičovania, problémové metódy ako aj oblasť preverovania a hodnotenia žiakov. Pozitívne reakcie žiakov, ich aktívna práca na hodinách a dobré výsledky nás presviedčajú o tom, že sme sa vydali správnou cestou.

Literatúra

[1] http://sk.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1lny_a_integr%C3%A1lny_-po%C4%8Det

[2] http://sk.wikipedia.org/wiki/Obr%C3%A1zok:Newton.jpg

[3] http://sk.wikipedia.org/wiki/Obr%C3%A1zok:Leibniz.jpg

[4] http://www.ies.co.jp/math/java/calc/doukan/doukan.html

[5] http://www8.pair.com/ksoft/

[6] http://www.ies.co.jp/math/java/calc/rolhei/rolhei.html

[7] http://www.infovek.sk/predmety/matem/hlav/rolleveta.html

[8] http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/diff1/diff1.html#ableitung.

[9] http://www.ies.co.jp/math/java/calc/x_2nd/x_2nd.html

[10] http://www.ies.co.jp/math/java/calc/sin_2nd/sin_2nd.html

[11] http://www.univie.ac.at/future.media/moe/tests/diff1/ablerkennen.html

[12] http://www.univie.ac.at/future.media/moe/tests/diff1/poldiff.html

[13] Koreňová, Lilla: Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní matematiky, Metodické centrum mesta Bratislavy, 2000; ISBN 80-7164-271-1

[14] Lukáč, Stanislav: Multimédiá a počítačom podporované učenie sa v matematike, Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice, 2001; ISBN 80-7097-423-0

[15] Riečan, Beloslav – Neubrunn, Tibor: Základy diferenciálneho počtu pre 3. ročník gymnázia s triedami zameranými na matematiku, Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1992; ISBN 80-08-01675-2

Adresa autora:
RNDr. Beáta Vavrinčíková
Gymnázium Alejová 1
041 49 Košice
e-mail:bea.vav@post.sk

Výuka kombinatoriky na střední škole

Zuzana Voglová

Abstract. *This paper concentrates on the teaching of the combinatorics at secondary school. The main part is about questionnaire, which was sent to teachers of many secondary schools around Czech republic. This article includes some opinions of teachers about combinatorics, its advantages and difficulty.*

Úvod

Kombinatorika na střední škole znamená pro větší část žáků a mnohdy i učitelů nepříjemné téma, které se od ostatních tématických celků středoškolské matematiky liší hned v několika ohledech. Je to bezpochyby složitější část středoškolské matematiky, která vyžaduje jiný způsob uvažování a přináší s sebou mnohá úskalí.

Jedním ze základních problémů je, že studentům nemůžeme dát přesný a univerzální návod, jak úlohy řešit. Některým žákům sice vyhovuje, že se nemusí učit nazpaměť žádné vzorečky a postupy, ostatní žáci si však se samostatným řešením úloh, které vyžaduje především jejich logické uvažování, neví rady. Nevýhodou kombinatoriky je určitě i to, že u velké části příkladů není možná zkouška. Student je často odkázán jen na svůj vlastní odhad a dobrý úsudek.

Žáci se s úlohami, které vyžadují tzv. kombinatorické myšlení, setkávají už na základní škole . Zadané úlohy řeší často vypisováním všech možností. Proto je dobré i na střední škole začít těmi příklady, kdy je možné vypsat všechny možnosti. Pro některé žáky je tento postup vhodnou zkouškou jejich řešení, pro jiné je samotným řešením, při němž si cvičí kombinatorický způsob uvažování. Zjistí, že se jim při výčtu všech možností vyplatí postupovat systematicky, uvědomí si spoustu zákonitostí a možná i objeví vztahy, které by jim učitelé jinak předložili jako daný fakt. Navíc se jim tento způsob později bude hodit i u složitějších příkladů, při jejichž řešení je často nejefektivnější částečné vypsání některých možností.

Je také dobré u studentů trénovat správný odhad. I to jim může sloužit pro částečnou kontrolu výsledku.Vzhledem k nemožnosti zkoušky u kombinatoriky více než kde jinde platí, že cvičení dělá mistra.

Kombinatorika má však také spoustu kladných stránek, na které bychom měli studenty upozornit. Výhodou této části matematiky je, že pro studium kombinatoriky na střední škole není třeba téměř žádných předchozích znalostí. Žákům postačí základní algebraické znalosti, dobré logické myšlení a často také zdravý selský rozum. Motivující pro studenty může být také to, že se v kombinatorice setkávají s příklady, které jsou často zábavné a praktické a je v nich vidět konkrétní spojení s reálným životem.

Dotazník

Zajímalo mě, jaký názor mají na kombinatoriku středoškolští učitelé, které části kombinatoriky učí a jaké metody používají, či zda kombinatorika dělá studentům větší problémy než jiné části matematiky. Proto jsem vytvořila dotazník, který jsem v dubnu 2006 rozeslala na střední školy (gymnázia i střední odborné školy) po celé

České republice. Dotazník vyplnilo a zpátky zaslalo 133 učitelů, z toho 87 z gymnázií a 46 ze středních odborných škol. Dotazník obsahoval následujících 13 otázek, ke každé otázce bylo na výběr 2 až 9 odpovědí.

1. Jaký máte postoj ke kombinatorice?
2. Jaký mají podle vašich zkušeností žáci zájem o kombinatoriku?
3. Kolik vyučovacích hodin věnujete výuce kombinatoriky?
4. Prošli jste na vysoké škole kurzem kombinatoriky (diskrétní matematiky)?
5. Máte pocit, že v kombinatorice vynikají jiní žáci než obvykle?
6. Zaškrtněte, které kapitoly v rámci kombinatoriky probíráte.
7. Používáte při výuce matematiky počítače ?
8. Používáte počítač při přípravě na výuku?
9. Jaké materiály používáte při přípravě na výuku?
10. Uvítali byste multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky?
11. Pohlaví
12. Věk
13. Na jakém typu střední školy učíte?

Učitelé mohli zodpovědět libovolné otázky, mohli zvolit i několik odpovědí na jednu otázku současně. Toho často využívali, pokud se nemohli rozhodnout mezi dvěma možnostmi. Velká část učitelů do dotazníku dopisovala různé poznámky a postřehy k výuce kombinatoriky, které získali během své učitelské praxe. Spousta učitelů také vyjádřila zájem o výsledky tohoto dotazníku.

Vyhodnocení dotazníku

Spíš než procentuální vyhodnocení jednotlivých odpovědí bylo zajímavé sledovat každý dotazník zvlášť a souvislosti mezi jednotlivými odpověďmi. Projevily se zde některé očekávané i méně předpokládané skutečnosti.

Učitelé věnují kombinatorice 9 - 50(!) vyučovacích hodin. Na gymnáziích je to v průměru 21 hodin, na středních odborných školách jen 15 hodin. Na některých školách, kde je matematice věnována větší pozornost, bývá kombinatorika navíc zařazována i do matematických seminářů. Zároveň však učitelé přiznávají, že vzhledem k tomu, že je kombinatorika zařazena až na konec školního roku, ne vždy (díky jiným školním aktivitám souvisejícím právě s koncem roku) je možné dodržet daný počet hodit a probrat beze zbytku všechnu naplánovanou látku.

59% učitelů odpovědělo, že učí kombinatoriku rádi. Zbylých 41% přiznává, že kombinatorika není jejich oblíbené téma, popřípadě ji učí vyloženě neradi. Tento výsledek není nijak zvlášť překvapující, neboť v každé části matematiky se najdou učitelé, kteří dané téma nemají rádi. Zajímavější je sledovat důvody neoblíbenosti a další souvislosti. Polovina učitelů, kteří v dotazníku odpověděli, že kombinatoriku učí neradi, jsou učitelé, kteří na vysoké škole neprošli kurzem kombinatoriky či diskrétní matematiky. Je přirozené, že pokud učitel nemá v dané problematice dostatečný nadhled a nebyl na ni na vysoké škole dostatečně připraven, není pro něj příjemné toto téma učit.

62% všech učitelů, kteří neprošli kurzem kombinatoriky, jsou učitelé z nejstarší věkové kategorie (nad 46 let), pouze 7% jsou učitelé mladší 35 let. Z toho se dá usuzovat, že kombinatorika a diskrétní matematika nebyla v 60. a 70. letech do výuky na vysokých školách vůbec zařazována .

Očekávaná byla také vazba mezi učiteli a žáky, je však těžší určit její směr. Z dotazníku vyplynulo, že pokud učitelé neučí kombinatoriku rádi, ani žáci potom nemají o toto téma větší zájem. Učitel by měl žáky motivovat mnoha způsoby a jedním z důležitých způsobů motivace je určitě i to, že učitel projevuje o dané téma zájem a učí je rád. Na druhé straně také učitelé potřebují vidět zpětnou vazbu od žáků.

Samotná látka mne celkem baví, ale protože vím, že pro studenty je náročná, netěším se na ni.

Každý rok doufám, že zaujmu více studentů. Komu to jde, tak ho to samozřejmě baví.

Zajímavé bylo také hodnocení studentů. Asi 42% učitelů sice tvrdí, že prospívají stejní žáci jako obvykle, nicméně 46% učitelů odpovědělo, že v kombinatorice dobře prospívají i jinak nepříliš úspěšní studenti. Naopak 32% dotazovaných říká, že kombinatorika je pro některé dobré studenty náročnější než ostatní učivo. Důvody jsou zřejmé, kombinatorika vyžaduje jiný způsob uvažování než řešení úloh z jiných oblastí matematiky. Žáci, kteří doposud prospívali hlavně díky naučeným postupům, mají v kombinatorice problémy. Zde totiž není možné studentům předložit univerzální návod, s jehož pomocí by mohli řešit všechny úlohy. Naopak líní studenti, kterým bylo dříve zatěžko naučit se něco nazpaměť, mají šanci, pokud mají dobré logické myšlení a jistý kombinatorický talent. K řešení velké řady kombinatorických úloh totiž nepotřebují znát prakticky nic kromě základních algebraických operací.

Úspěch nekoreluje zcela se známkou z jiných partií. Tak je to ale i např. u stereometrie.

Záleží zejména na přístupu jednotlivých studentů a jejich "kombinatorických" vlohách -někteří slabí studenti se v kombinatorice náhle výrazně zlepší, naopak některým jinak zdatným dělá kombinatorika (zejm. slovní úlohy) nečekané potíže.

Řekla bych, že úspěšnost při řešení kombinatorických úloh a tím také jejich oblíbenost je velmi rozdílná, úspěšní bývají někdy právě žáci, kteří mají s jinými tématy problémy, ale vykazují určitou "kombinatorickou" představivost. Úspěšnější bývají chlapci než děvčata.

Studenti (ti, kteří nepřemýšlejí) mi vyčítají, že je nedokážu kombinatoriku naučit. "Řekněte nám návod, jak se to počítá...".

V otázce číslo 6 měli učitelé zaškrtnout, které kapitoly v rámci kombinatoriky probírají. Na všech středních školách jsou dle očekávání probírána kombinační čísla, faktoriály a práce s nimi, všichni se také zabývají variacemi, kombinacemi a permutacemi bez opakování, téměř všichni projdou také binomickou větu a variace s opakováním. Permutace s opakováním probírá pouze 79% učitelů, kombinace s opakováním už jen 68%. Princip inkluze a exkluze je vyučován jen v 16% případů a Dirichletův princip jen ve 14%. To je škoda, protože se jedná o pravidla velmi jednoduchá (s nejjednodušší verzí principu inkuze a exkluze se setkáváme už v první třídě základní školy), použitelná a užitečná v každodenním životě a při řešení celé řady zajímavých a zábavných úloh. Určitě by stálo za to, věnovat jim alespoň trochu pozornosti. Je zarážející, že ne všichni učitelé uvedli, že probírají pravidlo součtu a součinu. Přitom jsou to nejdůležitější a nejužitečnější pravidla používaná v kombinatorice. Na základě jejich znalosti lze vyřešit velkou část všech středoškolských příkladů. Dokonce pomocí nich lze vysvětlit příklady, jejichž řešení by jinak vedlo na užití vztahů pro variace a permutace bez i s opakováním. Používání těchto pravidel vede studenty k přemýšlení a ne jen k bezduchému odhadování, zda se v daném případě jedná o variace či kombinace. Lze předpokládat, že mezi 11% učitelů, kteří v dotazníku nezaškrtli pravidlo součtu a součinu, je většina těch, kteří je považují za naprosto samozřejmá a uvádějí je pouze bez jejich názvů jako součást "kombinatorického myšlení". Doufejme, že mezi nimi není žádný učitel, který by chtěl kombinatorické úlohy řešit bez jejich znalosti a užití, pouze s pomocí vztahů pro jednotlivé skupiny prvků.

Pro celou třídu beru nenáročný základ, aby je to bavilo a to se mi daří. Permutace a kombinace s opakováním prozradím jen maturantům. Snažím se o přemýšlení, vzorce jen kde jsou nezbytně nutné.

Nejčastěji používají učitelé při přípravě na výuku učebnice a vlastní poznámky. Z učebnic jsou to nejčastěji: Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika autorů Caldy a Dupače, Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 4. část (Petránek a kol.), Matematika (Petáková). Hojně také učitelé využívají příklady z Matematické olympiády, Klokana, materiály z různých seminářů a konferencí, příklady z přijímacích zkoušek na vysoké školy, vysokoškolská skripta a úlohy rekreační matematiky. Nicméně 96% všech učitelů by uvítalo multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky, dvě třetiny z nich by ji rádi zařadili i do výuky.

Úlohy lze najít v nejrůznějších učebnicích, ale nejlépe je najít vlastní úlohy z každodenní praxe - prostě chodit nějaký čas po světě s myšlenkami na kombinatoriku!

Těším se na novou sbírku, či jinou obsahově zajímavou pomůcku pro výuku kombinatoriky.

Cokoliv, co mi pomůže vylepšit výuku kombinatoriky, uvítám. Multimediální výuka naráží na problém celé třídy ve výuce a počítačové učebny pro polovinu třídy.

Poslední reakcí jsme se dostali k další důležité otázce a tou je využití počítačů ve výuce matematiky. Drtivá většina učitelů nevyužívá počítač ve výuce nikdy. Počítač sice při výuce matematiky nemůže nahradit tabuli a křídu, ale přece jen existují části matematiky, kde se využití počítačů přímo nabízí. Také v kombinatorice by bylo možné počítače využít a to zejména díky různým appletům a programům, které ukazují vztahy mezi kombinačními čísly a počty kombinací, variací či permutací po zadávání různých "vstupních údajů". Navíc v naší počítačové době má multimediální učebnice větší šanci zaujmout studenty než učebnice klasická. Užití počítačů přímo ve výuce však často není školou umožněno, počítačové učebny jsou malé a bývají využívány především k výuce výpočetní techniky. Dalším problémem může být nepřipravenost učitelů na tento způsob výuky.

Na dotazník odpovědělo 86 žen a 47 mužů. Nejvíce odpovědí zaslali učitelé z nejstarší věkové skupiny, nejméně potom učitelé nejmladší.

Závěr

Z dotazníku vyplynulo, že kombinatorika sice nepatří mezi nejoblíbenější témata žáků a často ani učitelů, je však zajímavou částí matematiky a často baví i studenty, kteří předtím o matematiku neprojevovali větší zájem. Je také ale náročnou kapitolou, které by měla být na střední škole věnována dostatečná pozornost. Učitelé by měli žáky vhodně motivovat a svým pozitivním přístupem a nadšením pomoci žákům tuto obtížnou část matematiky úspěšně zvládnout.

Literatura

[1] CALDA, E. – DUPAČ, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Prometheus, Praha 1993.

Adresa autora:
Mgr. Zuzana Voglová
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Janáčkovo náměstí 2a, 602 00 Brno
e-mail: zuzana.voglova@foxis.cz

Některé vlastnosti aditivní funkce

Tomáš Zdráhal

Abstract. *The paper deals with some properties of additive functions. Mathematicians could neither prove that every additive function is continuous nor find a discontinuous additive function until 1905, when G. Hamel first succeeded in proving the existence of discontinuous additive function (by means of the Axiom of Choice).These ones are also named Hamel functoins and exhibit many pathological properties as is shown in this article.*

V článku se budeme podrobněji věnovat některým vlastnostem aditivní funkce, jejíž definice zní následovně:

Definice 1. Funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se nazývá aditivní, jestliže vyhovuje Cauchyově funkcionální rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{5}$$

pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$.

Ukážeme, že aditivní funkce je buď spojitá (a pak má známý tvar ax, jednoduchý graf a další pěkné vlastnosti) nebo je totálně nespojitá, tj. není spojitá ani v jednom bodě; v tomto případě neexistuje efektivní příklad takové funkce, její graf je množina hustá v $\mathbf{R}^{N+1}$ a má další patologické vlastnosti. Proto se v aplikacích snažíme takovým funkcím vyhnout — z toho důvodu se hledají co nejslabší podmínky k tomu, aby aditivní funkce byla spojitá. Existence nespojitých aditivních funkcí byla prokázána až v roce 1905 německým matematikem G. Hamelem a neexistují (nebo je založeno na axiomu výběru) jejich efektivní příklady.

Věta 1. Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je aditivní funkce spojitá v jednom bodě. Pak je spojitá na $\mathbf{R}$.

Důkaz:

Nechť f je spojitá v bodě b; pak pro libovolné reálné y platí:

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y} f((x-y+b)+(y-b)) = \lim_{x\to y}(f(x-y+b)+f(y-b)) =$$

$$= \lim_{x-y+b\to b} f(x-y+b) + f(y-b) = f(b) + f(y-b) = f(y).$$

Věta 2. Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je aditivní funkce, která je shora (anebo zdola) ohraničená na nějakém intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Pak je f na $\mathbf{R}$ spojitá.

Důkaz:

Položme $g(x) = f(x) - xf(1)$. Zřejmě

$$g(x+y) = f(x+y) - (x+y)f(1) = g(x) + g(y),$$

tj. funkce $g(x)$ je také aditivní. Navíc z faktu, že $f(x)$ je shora ohraničená na nějakém intervalu $I = (a, b)$ konečné délky, evidentně plyne, že také funkce g je na tomto intervale shora ohraničená. (Není-li interval I ohraničený, vezmeme místo něj ohraničený podinterval.). Protože pro každé racionální r platí

$$f(r) = rf(1),$$

tedy

$$g(r) = f(r) - rf(1) = 0.$$

Proto

$$g(x + r) = g(x) + g(r) = g(x)$$

pro každé reálné x a racionální r. Zvolme nyní libovolné $y \in \mathbf{R}$. Vzhledem k tomu, že množina $\mathbf{Q}$ je hustá v $\mathbf{R}$, můžeme y psát ve tvaru

$$y = x + r,$$

kde $x \in I = (a, b)$, $r \in \mathbf{Q}$. Pak máme

$$g(y) = g(x + r) = g(x) + g(r) = g(x) \leq M,$$

kde M je nějaká reálná konstanta — viz dokázaná ohraničenost funkce g na I. Protože y je libovolné reálné číslo, ukázali jsme, že funkce g je shora ohraničená na celém $\mathbf{R}$ konstantou M. Nyní ukážeme, že z tohoto již vyplývá, že $g(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$ (tj. $f(x) = xf(1)$). Odtud už dostaneme, že f je na $\mathbf{R}$ opravdu spojitá. Plyne to ze známého tvrzení:

Tvrzení 1. Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá aditivní funkce. Pak má tvar

$$f(x) = ax, \tag{6}$$

$x \in \mathbf{R}$, $a = f(1)$. Opačně, každá funkce tvaru (5) je aditivní a spojitá.

Předpokládejme, že g není nulová funkce. Pak existuje nějaké číslo $c \in \mathbf{R}$ takové, že $g(c) = A \neq 0$. Můžeme předpokládat, že $A > 0$. V opačném případě bychom totiž místo bodu c vzali bod $-c$, neboť každá aditivní funkce je lichá. Tuto skutečnost ihned uvidíme, dosadíme-li do rovnice

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \tag{7}$$

nejprve za x i y nulu a potom položíme $y = -x$. Podobně, položíme-li $y = x$ a užijeme-li matematickou indukci, lehce ukážeme, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$g(nc) = ng(c) = nA.$$

Protože funkce g je shora ohraničená, mělo by platit, že $nA \leq M$, což ovšem pro dostatečně velké n neplatí. Nemůže tedy existovat takový bod c, v němž by bylo $g(c) \neq 0$. Je proto $g(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}$.
Za předpokladu, že funkce f je zdola ohraničená, dojdeme zřejmě ke stejnému výsledku.

Věta 3. Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je nespojitá aditivní funkce. Pak její graf je množina hustá v $\mathbf{R}^2$.

Důkaz:
Předpokládejme, že věta neplatí. Existuje tedy takový interval I a takový interval $J = (c, d)$, že

$$(I \times J) \cap Gr(f) = \emptyset,$$

kde $Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}$ je graf funkce f. To znamená, že pro všechna $x \in I$ je

$$f(x) < c \ \text{ nebo } \ f(x) > d.$$

Zvolme $\delta > 0$ tak, aby $c + \delta < d - \delta$ a položme

$$F(x) = xf(1).$$

Zřejmě můžeme předpokládat, že

$$|F(I)| < \delta.$$

($|F(I)|$ je délka intervalu $F(I)$.) V opačném případě totiž můžeme místo I vzít menší interval, pro který bude tato nerovnost již platit.

Položme

$$g(x) = f(x) - xf(1).$$

Ze shora uvedeného plyne, že pro každé $x \in I$ je

$$g(x) < c + \delta \quad \text{nebo} \quad g(x) > d - \delta.$$

Spor dostaneme, ukážeme-li, že to není pravda.

Protože je dle předpokladu f je nespojitá, musí existovat bod $x_0 \in I$ takový, že $f(x_0) \neq x_0 f(1)$, tj. $g(x_0) \neq 0$.

Zvolme taková racionální čísla q a r, že

$$c + \delta < qg(x_0) < d - \delta, \quad qx_0 + r \in I.$$

Pak máme (f je aditivní funkce)

$$\begin{aligned} g(qx_0 + r) &= f(qx_0 + r) - (qx_0 + r)f(1) = \\ &= qf(x_0) + rf(1) - qx_0 f(1) - rf(1) = \\ &= q(f(x_0) - x_0 f(1)) = qg(x_0). \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy, že v bodě $qx_0 + r \in I$ je $g(qx_0 + r) \in (c + \delta, d - \delta)$, což je hledaný spor.

Větu 3 můžeme zřejmě formulovat také takto:

Věta 4. Nechť f je nespojitá aditivní funkce. Pak pro každý nedegenerovaný interval $I \subset \mathbf{R}$ je množina $f^{-1}(I)$ hustá v $\mathbf{R}$.

Uveďme si nyní další výsledky, které dostaneme vyšetřováním grafů nespojitých aditivních funkcí. Pomocí Hamelovy báze se dá zkonstruovat (nespojitá) aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, která nabývá pouze racionálních hodnot: $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{Q}$. Vezměme pro tuto funkci libovolné $r \in \mathbf{Q}$ a libovolné $x \in \mathbf{R}$ takové, že $f(x) \neq 0$. (Musí existovat, neboť nulová (a aditivní) funkce je spojitá.) Potom $f(x) \in \mathbf{Q}$ a tudíž $q = \frac{r}{f(x)} \in \mathbf{Q}$. Víme, že platí $f(qx) = qf(x) = r$. Proto $\mathbf{Q} \subset f(\mathbf{R})$ a tedy $f(\mathbf{R}) = \mathbf{Q}$. Ukázali jsme, že existuje (nutně nespojitá) aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taková, že množina $f(\mathbf{R})$ je spočetná.

Každá aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taková, že množina $f(\mathbf{R})$ je spočetná, se nazývá <u>funkce s malým grafem</u>. Ukažme, že její graf je množina první kategorie a má (Lebesgueovu) míru nula. Její graf je totiž podmnožina množiny

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R},\ y \in f(\mathbf{R})\} &= \\ = \cup_{y \in f(\mathbf{R})} (\mathbf{R} \times \{y\})& \end{aligned}$$

a každá množina $\mathbf{R} \times \{y\}$ je (v $\mathbf{R}^2$) míry nula a řídká (v topologii prostoru $\mathbf{R}^2$).

Pokud je aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spojitá, nemůže být očividně množina $f(\mathbf{R})$ spočetná, proto se nemůže jednat o funkci s malým grafem. Dokázali jsme tedy větu:

Věta 5. Existují aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s malým grafem; všechny takové funkce jsou nespojité a jejich graf je množina míry nula a první kategorie (v $\mathbf{R}^2$).

Uveďme si, že však existuje také aditivní funkce s grafem diametrálně odlišným. Aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se nazývá funkce s velkým grafem , jestliže pro každou Borelovu množinu $F \subset \mathbf{R}^2$ takovou, že kardinální číslo projekce této množiny do $\mathbf{R}$ má mohutnost kontinua, platí

$$F \cap G_r(f) \neq \emptyset.$$

($G_r(f)$ je graf funkce f.)

Věta 6. Existují aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s velkým grafem; všechny takové funkce jsou nespojité a jejich graf je (lebesgueovsky) neměřitelná množina, jejíž vnitřní míra, jakož i vnitřní míra jejího doplňku (v $\mathbf{R}^2$) je rovna nule.

Důkaz této věty je složitější a je proveden např. v Kuczmově knize (viz literatura na konci článku). Poznamenejme, že tvrzení této věty ještě obsahuje topologickou analogii pojmu saturované neměřitelné množiny, jíž graf f vlastně je a jejím dalším důsledkem je následující skutečnost.

Důsledek 1. Jestliže f je aditivní funkce s velkým grafem (a tedy nespojitá), pak má Darbouxovu vlastnost.

Nespojité aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mají další velice zajímavou vlastnost.

Věta 7. Nechť K je neprázdná konečná nebo spočetná množina. Pak existuje nespojitá aditivní funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taková, že

$$f(x) = x \quad \text{pro } x \in K.$$

Důkaz:
Nechť $H \subset \mathbf{R}$ je Hamelova báze prostoru $(\mathbf{R}, \mathbf{Q}, +, \cdot)$. Každé $x \in K$ můžeme psát ve tvaru

$$x = \sum_{i=1}^{n_x} q_{xi} h_{xi}$$

kde $q_{xi} \in \mathbf{Q},\ h_{xi} \in H,\ i = 1, \dots, n_x,\ n_x \in \mathbf{N}$.
Položme

$$H_0 = \cup_{x \in K} \cup_{i=1} \{h_{xi}\}.$$

Protože K je konečná nebo spočetná množina, musí mít tutéž vlastnost i H_0. Proto množina $H \backslash H_0$ je nekonečná. Existuje zřejmě rozklad

$$H \backslash H_0 = H_1 \cup H_2,$$

kde $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ a card $H_1 =$ card H_2. Proto existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $g_0 : H_1 \to H_2$ a tudíž i funkce $g_0^{-1} : H_2 \to H_1$. Definujme nyní funkci $g : H \to H$ následovně

$$g(h) = \begin{cases} h & \text{pro } h \in H_0 \\ g_0(h) & \text{pro } h \in H_1 \\ g_0^{-1}(h) & \text{pro } h \in H_2. \end{cases}$$

Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je aditivní rozšíření funkce g. Pro $h \in H_0$ máme $g(h) = h$ a pro $h \in H_1$ platí $g(h) = g_0(h) \in H_2$ a tedy $g(h) \neq h$. Odtud plyne, že f je nespojitá funkce. Skutečně, pokud by byla spojitá (a tedy tvaru $f(x) = ax$), nemohla by být (jednoznačným) aditivním rozšířením takovéto funkce g. Platí totiž následující tvrzení, jehož důkaz není nikterak obtížný:

Tvrzení 2. Nechť $H \subset \mathbf{R}$ je nějaká Hamelova báze lineárního prostoru $(\mathbf{R}, \mathbf{Q}, +, \cdot)$ a nechť $g : H \to \mathbf{R}$ je libovolná funkce. Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je jediné aditivní rozšíření funkce g. Pak funkce f je spojitá právě tehdy, když funkce g je tvaru $g(x) = ax$, kde $x \in H$, $a \in \mathbf{R}$.

Funkce f je tedy nespojitá a konečně zřejmě pro $x \in K$ (kde $q_{xi} \in \mathbf{Q}$, $h_{xi} \in H_0$) platí

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n_x} q_{xi} h_{xi}) = q_{x1} f(h_{x1}) + \ldots + q_{xn_x} f(h_{xn_x}) =$$

$$= q_{x1} g(h_{x1}) + \ldots + q_{xn_x} g(h_{xn_x}) = q_{x1} h_{x1} + \ldots + q_{xn_x} h_{xn_x} =$$

$$= x.$$

Literatura

[1] KUCZMA, M.: *An Introduction to the Theory of Funcional Equations and Inequalities.* Uniwersytet Slaski, Warszawa-Kraków-Katowice 1985.

Adresa autora:

Tomáš Zdráhal
Pedagogická fakulta
UJEP v Ústí nad Labem
Hoření 13
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: zdrahalt@pf.ujep.cz

Riešenie problémových úloh zo života ako cesta k rozvíjaniu matematickej gramotnosti žiaka

Veronika Zeľová, Iveta Scholtzová

Abstract. *Many times in the life we can experience the situations when we have to solve different tasks using the mathematical instruments. In the following article we will concern on solving one problematic task, which was being resolved by the 4th grade pupils at elementary school.*

Problémová úloha

Každodenný život prináša mnoho problemových situácií. Úspešné vyriešenie problému vlastnými silami v nás vyvoláva pocit radosti, podporuje v nás dôveru vo vlastné sily. Častokrát sme v živote postavení pred úlohy, ktoré nie sú „náročné na výpočet“, no my nevieme adekvátne použiť matematické vedomosti nadobudnuté v priebehu školského vzdelávania.

Problémové úlohy vo výskume PISA 2003 sú definované ako úlohy, ktoré *zahŕňajú rad odborov: matematiku, prírodné vedy, literatúru, spoločenské vedy, techniku, obchod atď. Naviac sú zasadené do situácií, ktoré nie sú súčasťou kurikula a bežne sa nevyskytujú v školských učebniciach.* [4]

Klasifikácia a základné prvky problémových úloh

Problémové úlohy vo výskume PISA 2003 sú podľa situácie rozdelené do týchto základných oblastí: osobný život, škola alebo zamestnanie, voľný čas, spoločnosť, veda.

Štúdia PISA 2003 [4] vyčleňuje tri základné charakteristické aspekty problémových úloh.

1. aspekt: Typy problémov

V tomto aspekte vyčleňuje tri kategórie:

- rozhodovanie: chápe sa ako výber najlepšieho riešenia z ponúkaných možností (zahŕňa porozumenie informáciám v zadaní úlohy, určenie možností a podmienok, vhodné znázornenie a pod.);
- systémová analýza a projektovanie: táto kategória sa chápe ako porozumenie alebo navrhnutie systému riešenia úlohy;
- odstraňovanie chýb: úlohou žiakov je nájsť a opraviť chybu v zle fungujúcom systéme.

2. aspekt: Postupy

Tento aspekt charakterizuje použité postupy riešenia problémov danej úlohy. Umožňuje zároveň analýzu, čo je najčastejšou príčinou chýb:

- porozumenie problému;
- usporiadanie problému: identifikácia prvkov a ich zaradenie do systému, ich usporiadanie, posúdenie a kritické hodnotenie;

- znázornenie problému (tabuľky, grafy, symboly a pod.);
- riešenie problému: zahŕňa rozhodovanie, analýzu a tvorbu systému;
- kontrola a posúdenie riešení;
- prezentácia riešení.

3. aspekt: Spôsoby uvažovania
Pre riešenie problémových úloh sú dôležité tieto spôsoby uvažovania:

- analytické uvažovanie;
- kvantitatívne uvažovanie (porozumenie významu čísel);
- analogické uvažovanie (uplatňuje sa pri riešení problémov, ktoré sú podobné ako tie, ktoré už v minulosti žiak riešil);
- kombinatorické uvažovanie (uvažovanie nad všetkými možnosťami).

Popis realizovaného prieskumu

Na základe vyššie uvedených skutočností bol realizovaný prieskum, v ktorom sme sledovali spôsoby riešenia vybranej problémovej úlohy. Prieskumu sa zúčastnilo 100 žiakov 4. ročníkov dvoch základných škôl (ZŠ). Vybraná úloha bola pôvodne použitá ako problémová úloha vo výskume PISA 2003 u žiakov 9. ročníkov ZŠ. Úlohu sme zadávali vo 4. ročníku, a preto bola prispôsobená vedomostiam a schopnostiam 10-ročných žiakov. V prvej časti ide o riešenie kombinatorického problému. Ako uvádza I. Scholtzová (2003), vedieť dobre kombinovať v životných situáciách je určite veľmi dôležité.

Vypracovaniu úlohy venovali žiaci približne 20 minút. Po vyriešení úlohy bol s náhodne vybranými žiakmi realizovaný rozhovor, ktorý bol písomne zaznamenaný.

V ďalšej časti uvádzame upravené zadanie úlohy a fragmenty z analýzy žiackych riešení.

NÁVŠTEVA KINA

Ivo, Peter a Martin majú 11 rokov. Rozhodli sa, že chcú ísť na budúci týždeň do kina. Ivo chce návštevu kina naplánovať tak, aby to vyhovovalo všetkým trom chlapcom. Opýtal sa svojich priateľov, kedy by im to vyhovovalo.

Dostal takéto odpovede:

Peter: „V utorok a vo štvrtok mám od 17:00 do 18:00 klavír."

Martin: „V nedeľu chodíme na návštevu k babičke, takže v nedeľu ísť nemôžem. Pokémonov som už videl a nechcem ich vidieť znova."

Ivovi rodičia trvajú na tom, že chlapci môžu ísť iba na film vhodný pre ich vek a môže trvať najdlhšie do 22:00. Po skončení filmu Ivovi rodičia chlapcov vyzdvihnú.

Ivo si z kina priniesol program na celý týždeň a zistil toto:

Pondelok Vstupné: 50 Sk	**Pokémoni**	Začiatok predstavenia: 14:30 Dĺžka trvania: 100 minút	Nevhodné pre deti do 10 rokov
Utorok Vstupné: 55 Sk	**Leví kráľ**	Začiatok predstavenia: 17:30 Dĺžka trvania: 95 minút	Mládeži prístupné
Streda Vstupné: 70 Sk	**Svetlo**	Začiatok predstavenia: 20:00 Dĺžka trvania: 140 minút	Nevhodné pre mládež do 15 rokov
Štvrtok Vstupné: 60 SK	**Doba ľadová II**	Začiatok predstavenia: 19:30 Dĺžka trvania: 110 minút	Mládeži prístupné
Piatok Vstupné: 55 Sk	**Utajenie**	Začiatok predstavenia: 19:45 Dĺžka trvania: 120 minít	Nevhodné pre mládež do 15 rokov
Sobota Vstupné: 60 Sk	**Motýľ**	Začiatok predstavenia: 18:30 Dĺžka trvania: 115 minút	Mládeži prístupné
Nedeľa Vstupné: 55 Sk	**Farbičky-čarbičky**	Začiatok predstavenia: 18:30 Dĺžka trvania: 100 minút	Mládeži prístupné

Na ktoré z týchto filmov by všetci traja chlapci mohli ísť?
Pri každom filme zakrúžkuj áno (ak ísť môžu) alebo nie (ak ísť nemôžu).

Film	**Môžu všetci traja chlapci ísť na film?**	
Pokémoni	Áno	Nie
Leví kráľ	Áno	Nie
Svetlo	Áno	Nie
Doba ľadová II	Áno	Nie
Utajenie	Áno	Nie
Motýľ	Áno	Nie
Farbičky-čarbičky	Áno	Nie

Doplň do nasledujúcich viet chýbajúce údaje: (žiaci mali k dispozícii 3 vety)

Ak sa rozhodnú ísť na film ...., rodičia ich musia prísť čakať o .... a spolu všetci traja zaplatia za kino ....Sk.

Danú úlohu by sme podľa klasifikácie PISA 2003 charakterizovali ako problémovú úlohu z oblastí osobný život a voľný čas. Podľa typu problému sme sa v nej sústredili najmä na rozhodovanie, z hľadiska postupov riešenia sme sa zamerali na porozumenie problému, jeho usporiadanie, riešenie, kontrolu a posúdenie riešení a ich prezentáciu.

Z hľadiska spôsobu uvažovania sme sledovali najmä analytické uvažovanie, pretože predpokladáme, že žiaci v školskej praxi ešte takýto problém neriešili. V prvej časti sme použili otázku s výberom odpovede, v druhej sme využili uzavretú otázku s tvorbou odpovede.

V rozhovore, ktorý nasledoval bezprostredne po skončení testovania, sme náhodne vybraným žiakom (celkom 33) kládli otázky, ktoré sa týkali porozumenia textu, spôsobu riešenia a ktoré smerovali ku kontrole a kritickému posúdeniu ich riešenia. Zo záznamov vyberáme niektoré odpovede žiakov. (U-učiteľ, Ž-žiak)

U: O čom bola úloha?

Ž1: Chlapci sa dohodli, že pôjdu do kina a dvom to nevyhovovalo. Tak jeden priniesol z kina zoznam a oni mu povedali, či môžu, či nemôžu.

Ž2: O čom? Kedy ich majú vyzdvihnúť (rodičia) a kedy sa končí film.

Ž3: Koľko majú zaplatiť. U: Len o tom? Ž3: Hej. Len o tom.

Ž4: Oni išli do kina a všetci na iný film, lebo niekomu to nevychádzalo.

Už z týchto ukážok vidíme, že samotné porozumenie textu zadania úlohy je u rôznych žiakov rozdielne a nie vždy je zadanie pochopené správne.

U: Ako ste vypočítali, o koľkej vybraný film skončí? (konkrétne sme sa pýtali na film Doba ľadová II)

Ž1: 110 minút som si rozložil na 1 hodinu a 50 minút.

Ž2: 19:30, to som si zapamätal, že 20. To som dal ako 30. To bolo osem hodín plus ešte hodina t.j. 9 hodín a 20 minút, t.j. 21:20.

Ž3: 19:30 plus hodina, plus hodina a mínus 10 minút.

Ž4: 19:30 mínus 30 minút som si zobral, aby sa mi lepšie prepočítavali hodiny. A som si zobral 50 minút plus 30, t.j. 80, potom som pripočítal 1 hodinu, čo sa nám zvýšila zo 110, t.j. 20:00 plus 1 hodinu, čo sa nám zvýšila z 80, t.j 21:00 plus ešte 20.

Ž5: Mne vyšlo 25:30. Lebo 19:30 plus 110 je 25:30 (podpíše pod seba a chybne sčíta). U: Tebe sa ten čas páči? Ž5: Nie, lebo ich rodičia ich majú vyzdvihnúť o 22:00. Asi by museli odísť v polovičke.

Rôznorodosť spôsobov riešení pozorujeme už v týchto ukážkach. U niektorých žiakov sledujeme uľahčenie počítania doplnením 110 minút do 2 celých hodín. Uvedomujú si, ako zdôvodňuje jeden zo žiakov: „...no keď som ich tam dal, tak musím ich vziať aj preč“.

Pri výpočte sumy, ktorú majú chlapci zaplatiť za kino, sme nepostrehli vážnejšie problémy. Predpokladáme, že táto skutočnosť súvisí aj s tým, že žiaci sa s počítaním s peniazmi stretávajú každodenne vo svojom živote.

Záver

V prvej časti úlohy si žiaci vyberali jednu z možností (áno, nie). Správne si vybralo 45% percent žiakov. Zistili sme, že len 11% žiakov používalo pri riešení tejto úlohy symbolické označovanie nevhodných možností (krúžky, krížiky, vyškrtávanie) priamo v programe kina. Zároveň však musíme konštatovať, že len 23% žiakov dotiahlo úlohu do úspešného záveru. Najviac chýb pozorujeme v druhej časti úlohy. Aj v tejto úlohe sa nám potvrdilo (nadväzujúc na článok Scholtzová - Zeľová 2006), že žiaci majú problémy pracovať s časovými údajmi, ktoré sú v našom živote potrebné.

Literatúra

[1] KUBÁČEK, Z. a kol.: *Matematická gramotnosť – správa 2003.* ŠPÚ, Bratislava 2004.

[2] SCHOLTZOVÁ, I.: *Prvé dotyky s kombinatorikou–prečo, kedy a ako.* In: Od činnosti k poznatku. Západočeská univerzita, Srní 2003. s. 39-42

[3] SCHOLTZOVÁ, I.- ZEĽOVÁ, V.: *Matematický diktát – jedna z ciest rozvoja matematickej gramotnosti žiaka primárnej školy.* In: ACTA UP OLOMUCENSIS - Matematika 2. UP, Olomouc 2006. s. 229-233

[4] TOMÁŠEK, V.- POTUŽNÍKOVÁ, E.: *Netradiční úlohy (Problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA).* UIV, Praha 2004.

Adresa autora:
Veronika Zeľová, Mgr.
Scholtzová Iveta, RNDr. PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta PU v Prešove
Ul. 17. novembra č. 15, 081 16 Prešov
e-mail: zelova@unipo.sk, scholtzi@unipo.sk

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu *Moderné informačno-komunikačné technológie ako prostriedok ďalšieho vzdelávania učiteľov elementaristov v matematike* (MŠ SR KEGA 3/3027/05).

Monty Hall paradox v izomorfných úlohách

Monika Žilková

Abstract. *We present the results of our investigations concerning intuition and probability. We analyze and evaluate some well-known misconceptions using various types of problems isomorphic to the Monty Hall paradox.*

Cieľom uvedeného experimentu bol výskum nesprávnych intuícií a chybných domnienok pri riešení Monty Hall paradoxu. Monty Hall paradox sme formulovali do šiestich izomorfných úloh. Z materiálov zaoberajúcich sa týmto paradoxom a jeho históriou ([1], [2], [3]) sme vedeli, že pôvodná formulácia tohto paradoxu vedie k častým nesprávnym intuitívnym záverom. Predpokladali sme teda výskyt rovnakých intuitívnych omylov v našej výskumnej vzorke. Ďalším cieľom bolo zistiť vplyv rôznych formulácií Monty Hall paradoxu na výskyt nesprávnych intuícií, na porozumenie a úspešnosť pri riešení problému. Reakcie na uvedený Monty Hall paradox a jeho rôzne formulácie boli skúmané u študentov 2. ročníka neučiteľského štúdia a 4. ročníka učiteľského štúdia matematiky formou dotazníka. Uvádzame analýzu týchto študentských riešení so zreteľom na spomenuté ciele.

Hypotézy

Hypotéza 1: Pôvodná formulácia Monty Hall paradoxu (úloha 1 dotazníka A) bude viesť vo vysokej miere ku známym nesprávnym intuitívnym riešeniam a omylom.

Hypotéza 2: Jednotlivé formulácie Monty Hall paradoxu zaradené do dotazníka A (úloha 2, 3 dotazníka A), ako aj urnový model týchto formulácií zaradený do dotazníka B (úloha 1, 2, 3 dotazníka B) zvýšia úspešnosť riešenia uvedeného problému.

Metodológia

Subjekty výskumu. Výskumu sa zúčastnili dve skupiny študentov matematiky vysokej školy: 16 študentov bakalárskeho štúdia matematiky (vek 19-20 rokov), 21 študentov magisterského štúdia aprobácie v kombinácii s matematikou (vek 21-22 rokov).

Metóda výskumu. Študentom boli rozdané 2 formy dotazníkov (A a B forma) počas klasickej vyučovacej hodiny (cvičenia z pravdepodobnosti). Každý zo študentov vypĺňal len jeden druh dotazníka. Výskum trval 1 hodinu, pričom na študentov nebol kladený žiaden časový tlak. Študenti absolvovali vhodnú prípravu z pravdepodobnosti – obe skupiny prebrali vysokoškolské učivo úvodu do pravdepodobnosti vrátane podmienenej pravdepodobnosti. Odpovede študentov boli písomné. Študentov sme požiadali, aby ku každému riešeniu napísali vysvetlenie svojej odpovede.

Dotazník A

Úloha 1 V tejto hre je hráčovi ukázaných trojo rovnakých zavretých dverí (označme X, Y, Z); za jednými z nich sa skrýva automobil (výhra) a za zvyšnými dvoma sa skrýva koza (prehra). Hráč si vyberá jedny z týchto troch dverí ako svoju výhru (povedzme dvere Z), ale dvere zostávajú zatvorené. Potom asistent, ktorý vie, čo sa za ktorými dverami skrýva, otvorí zo zvyšných dvoch dverí (X a Y) dvere, za ktorými sa skrýva koza (povedzme dvere X). Potom ponúkne hráčovi možnosť zmeniť svoj výber dverí, alebo zostať pri svojom prvom výbere. Čo má v tejto situácii hráč urobiť, ak chce vyhrať automobil?

Predpokladajme, že boli otvorené dvere X (takže jedny z dverí Z alebo Y ukrývajú automobil). Aká je pravdepodobnosť, že za dverami Z je automobil?

Predpokladajme, že boli otvorené dvere Y (takže jedny z dverí Z alebo X ukrývajú automobil). Aká je pravdepodobnosť, že za dverami Z je automobil?

Predtým, ako asistent otvorí jedny z dverí X a Y ukrývajúce kozu, aká je pravdepodobnosť, že za dverami Z je automobil?

Úloha 2 Uvažujme hru s účasťou dvoch agentov (nazvime ich Díler a Hráč). Díler mieša 100 kariet z balíčka, medzi ktorými je však len jedno Eso (výherná karta) a ukladá ich do radu tak, aby Hráč nevidel hodnoty kariet. Hráč potom musí ukázať na jednu z kariet – označme ju ako karta V (výber). Všetky karty vrátane karty V však zostávajú neodkryté. Díler vie, kde sa Eso nachádza, Hráč nie. Teraz Díler (vediac, ktorá karta je eso) odkryje zo zvyšných 99 kariet 98 kariet, nesmie však obrátiť Eso. Výsledkom je, že Hráč vidí 98 odkrytých kariet, z ktorých ani jedna nie je Eso. Zostávajú teda dve neodkryté karty, jedna z nich je karta V. Nakoniec je Hráčovi ponúknutá možnosť zmeniť svoj prvotný výber karty, a teda buď si nechá ako svoju výhru kartu V, alebo zmení výber na zvyšnú kartu. Hráč vyhráva, ak karta, ktorú si vybral je Eso. Má hráč zmeniť svoj výber? (Margolis, 2004)

Úloha 3 Máš na výber tri na pohľad rovnaké golfové loptičky (označme ich A, B, C) líšiace sa len svojou váhou. Najťažšia loptička je pre teba výhrou. Na začiatku hry si vyberáš jednu z troch loptičiek (nemáš však možnosť loptičky vážiť), povedzme loptičku A. Zo zvyšných dvoch loptičiek B a C je následne odstránená tá, ktorá má menšiu hmotnosť, povedzme C. Nakoniec máš možnosť znova prehodnotiť svoj výber (nemôžeš však loptičky vážiť). Buď si vyberieš ako výhru loptičku A vybratú na začiatku hry, alebo zmeníš výber na loptičku B. Čo by si v tejto situácii urobil? Prečo? (Margolis, 2004)

Dotazník B

Úloha 1 V nepriehľadnom osudí A sa nachádzajú tri guľôčky: jedna biela (výhra) a dve čierne (prehra). Z tohto osudia losuješ jednu guľôčku tak, aby si nevidel výsledok svojho výberu a dávaš ju do druhého nepriehľadného osudia B. Potom asistent, ktorý má možnosť nahliadnuť do osudia, vyberie z osudia A jednu čiernu guľôčku. V osudí A aj B je teda po jednej guľôčke. Guľôčku z ktorého z nich (osudie A alebo osudie B) by si si vybral ako svoju výhru? Prečo?

Predtým, ako asistent vyberie jednu čiernu guľôčku z osudia A, aká je pravdepodobnosť, že v osudí B je biela guľôčka?

Úloha 2 V nepriehľadnom osudí A sa nachádza 100 guľôčok: jedna biela (výhra) a 99 čiernych (prehra). Z tohto osudia losuješ jednu guľôčku tak, aby si nevidel výsledok svojho výberu a dávaš ju do druhého nepriehľadného osudia B. Potom asistent, ktorý má možnosť nahliadnuť do osudia, vyberie z osudia A 98 čiernych guľôčok. V osudí A aj B je teda po jednej guľôčke. Guľôčku z ktorého z nich (osudie A alebo osudie B) by si si vybral ako svoju výhru? Prečo?

Predtým, ako asistent vyberie 98 čiernych guľôčok z osudia A, aká je pravdepodobnosť, že v osudí B je biela guľôčka?

Úloha 3 V nepriehľadnom osudí A sa nachádzajú tri guľôčky očíslované číslami 1, 2, 3. Guľôčka s číslom 1 je výherná. Z tohto osudia losuješ jednu guľôčku tak, aby si nevidel výsledok svojho výberu a dávaš ju do druhého nepriehľadného osudia B. Potom asistent, ktorý má možnosť nahliadnuť do osudia, vyberie z osudia A guľôčku s vyšším číslom. V osudí A aj B je teda po jednej guľôčke. Guľôčku z ktorého z nich (osudie A alebo osudie B) by si si vybral ako svoju výhru? Prečo?

Predtým, ako asistent vyberie z osudia A guľôčku s vyšším číslom, aká je pravdepodobnosť, že v osudí B je guľôčka s číslom 1?

Analýza riešení

Do dotazníka A sme zaradili 3 rôzne formulácie Monty Hall paradoxu, pričom našim predpokladom bolo, že úlohy 2 a 3 napomôžu svojou formuláciou ku úspešnému vyriešeniu problému. Prvá úloha je formulovaná ako klasický Monty Hall paradox, pričom zobrazuje situáciu hráča, účastníka televíznej šou „Let's make a deal". Predpokladom pri formulácii druhej úlohy nazvanej *„formulácia 100"* (Margolis, 2004) bolo, že svojim charakterom, výhra je skrytá medzi 100 kartami a následne je odkrytých 98 nevýherných, pomôže lepšie porozumieť charakteru problému ako aj správne ho riešiť. Znenie tretej úlohy dotazníka tzv. *„formulácia vylúčenia"* bolo navrhnuté Howardom Margolisom [2], na odstránenie nesprávnych intuícii spojených so situáciou, kedy v klasickom prípade Monty Hall paradoxu dvere Z skrývajú automobil, a teda asistent otvorí jedny z dverí X, Y, pričom obe skrývajú kozu. V tomto prípade nie je jednoznačne určené, ktoré z dverí X, Y budú otvorené, keďže oba prípady sú potenciálne možné, pretože oboje dvere ukrývajú kozu. Vo *„formulácii vylúčenia"* je táto situácia vyriešená tým, že uvažujeme namiesto trojo dverí trojo golfových guľôčok, ktoré sa líšia len svojou váhou. Najťažšia je výherná, pričom v každej situácii, kedy je potrebné jednu nevýhernú vylúčiť, je vylúčená tá, ktorá je ľahšia. Takto nenastáva žiadna dilema v súvislosti s rozhodovaním, ak si hráč ako svoj výber vybral výhernú guľôčku.

V dotazníku B sú úlohy už na prvý pohľad formulované jednoduchšie. Pri formulácii úloh v tomto dotazníku sme použili *urnový model* na vykreslenie Monty Hall paradoxu. Tak ako v dotazníku A, aj tu sa vyskytujú 3 formulácie tohto paradoxu („klasická formulácia", „formulácia 100" a „formulácia vylúčenia"), všetky tri však prezentované využitím osudia s guľôčkami. Predpokladom bolo, že formulácia všetkých troch foriem pomocou urnového modelu s guľôčkami bude študentom najprístupnejšia a najľahšie porozumiteľná, a že zvýši úspešnosť pri riešení Monty Hall paradoxu.

Uvedieme niekoľko zaujímavých odpovedí študentov na zadané úlohy. V zátvorke pred odpoveďami študentov možno nájsť informácie o type riešeného dotazníka (A alebo B), ročníku štúdia, aprobácii, pohlaví a veku jednotlivých študentov.

(A, 4, Ma-Bi, Ž, 21)

1. *„Ak boli otvorené dvere X, tak za dverami Z alebo Y sa skrýva automobil. Pravdepodobnosť, že za dverami Z je automobil je* $^1/_2$ *, lebo rovnako pravdepodobné je, že aj za dverami Y je automobil."*

Ak boli otvorené dvere Y, tak si myslím, že je to rovnaký prípad ako predchádzajúci.

V poslednom prípade majú každé dvere rovnakú pravdepodobnosť, takže P(Z)=1/3.

2. *„Na začiatku má hráč šancu, že si vyberie eso 1/100, lebo si vyberá 1 zo 100 kariet. Keď sa skoro všetky odkryjú má hráč rovnakú šancu, že si vyberie eso. Nemusí zmeniť svoj výber, veď si vybral kartu, o ktorej je presvedčený, že je eso."*

3. *„Na začiatku mám šancu vybrať si najťažšiu loptičku 1/3. Po tom, ako sa jedna z loptičiek odstráni – tá najľahšia – potom mám šancu si vybrať najťažšiu* $^1/_2$*. Ale ja by som v tejto situácii loptičku nevymenila, lebo som si vybrala loptičku, o ktorej som presvedčená, že je najťažšia."*

V uvedenom príklade možno vidieť, že študentka odpovedala nesprávne na všetky tri formulácie Monty Hall paradoxu dotazníka A. Odpoveď možno charakterizovať ako najčastejšiu nesprávnu intuíciu vyskytujúcu sa v súvislosti s Monty Hall paradoxom. Túto skupinu odpovedí možno označiť ako intuícia *„rovnakých šancí“*, pri ktorej študentka tvrdí, že šanca na získanie automobilu po otvorení nevýherných dverí je pre zvyšných dvojo dverí rovnaká, rovná $1/2$. Teda považuje nové rozhodovanie za úplne novú situáciu nezávislú od prvého výberu hráča, ako aj od reakcie asistenta. Zároveň môžme povedať, že študentka necíti žiadne protirečenie v odpovediach na tri otázky prvej úlohy. Hoci v prvej a druhej odpovedi tvrdí, že pravdepodobnosť P(Z)=1/2 (Z – jav, že za dverami Z je výhra potom, ako boli otvorené jedny z dverí X alebo Y), v tretej tvrdí P(Z)=1/3 (Z – jav, že za dverami Z je výhra predtým, ako asistent otvorí jedny z dverí X alebo Y), a teda verí, že po otvorení ľubovoľných nevýherných dverí sa zmení pravdepodobnosť, že za dverami Z je výhra z 1/3 na $1/2$ zanedbajúc fakt, že ak je pravdepodobnosť P(Z)=1/2 bez ohľadu na to, ktoré z dverí X, Y boli otvorené, apriórna pravdepodobnosť (pravdepodobnosť pred otvorením jedných z dverí) nemôže byť iná. Jednoznačne možno tvrdiť, že študentka zanedbala podmienenosť pravdepodobnosti skúmaného javu.

Ďalším zaujímavým javom, vyskytujúcim sa v týchto odpovediach je *subjektívnosť* v určovaní pravdepodobnosti: *„Nemusí zmeniť svoj výber, veď si vybral kartu, o ktorej je presvedčený, že je eso.“* (úloha 2) *„Ale ja by som v tejto situácii loptičku nevymenila, lebo som si vybrala loptičku, o ktorej som presvedčená, že je najťažšia.“* (úloha 3) Študentka cíti schopnosť ovplyvniť výsledok náhodného procesu napríklad aj vierou vo vlastný odhad či schopnosti.

(A, 2, MaNe, M, 19)

1. *„1) Boli otvorené dvere X. Pravdepodobnosť, že za dverami Z je automobil je* $1/2$.

2) Otvorené dvere Y. Pravdepodobnosť, že za dverami Z je výhra je $1/2$.

3) Neotvorí žiadne dvere. Pravdepodobnosť, že výhra za dverami Z je automobil je 1/3.

Mal by zmeniť rozhodnutie.“

2. *„Určite áno, lebo pri prvom výbere ťahá s pravdepodobnosťou 1/100, a teraz s* $1/2$*. Treba zmeniť výber.“*

3. *„Zmenil by som názor, pretože na začiatku ťahám s pravdepodobnosťou 1/3, a teraz s pravdepodobnosťou* $1/2$*. Zmenil by som názor.“*

Zaujímavosťou uvedeného riešenia je, že hoci študent odpovedá podľa intuície rovnakých šancí, na rozdiel od predchádzajúceho prípadu je presvedčený, že hráč má zmeniť svoj výber. Dôvodom vo všetkých troch prípadoch je, že prvý výber sa vždy uskutočnil s menšou pravdepodobnosťou výhry ako $1/2$, ktorú určil ako pravdepodobnosť výhry po vylúčení nevýhernej možnosti. Teda, hoci určil pravdepodobnosti výhier pre obe zo zostávajúcich dverí ako $1/2$, „zohľadňuje“ apriórnu pravdepodobnosť výhry dverí Z (1/3 resp. 1/100) a odporúča zmeniť výber na zostávajúce dvere.

(A, 4, Ma-Bi, Ž, 21)

1. *„Pred otvorením – P(X)=P(Y)=P(Z)=1/3. Po otvorení X - P(X)=0, P(Y)=P(Z)=1/2. Po otvorení Y - P(Y)=0, P(X)=P(Z)=1/2. Hráč sa spoľahne na vlastnú intuíciu, šanca je 1:1.“*

3. *„Šanca je 2:3 – 1.) buď A je najľahšia, potom B je najťažšia (C prostredná)*

2.) alebo je A prostredná, potom B je najťažšia (C najľahšia)

3.) alebo je A najťažšia a B prostredná (C najľahšia).

Asi by som zmenila výber na B, lebo vyhovuje v 2 z 3 prípadov, zatiaľ čo A by vyhrala iba ak by bola najťažšia t.j. 1 z 3 možností.“

V tomto riešení vidieť, že *„formulácia vylúčenia“* Monty Hall paradoxu v úlohe 3 napomohla ku správnemu riešeniu úlohy. Zatiaľ čo v riešení prvej úlohy dochádza k už spomínanej „dvojznačnosti“ alebo protirečeniu, úloha 3 využitím jednoznačného pravidla pre odstránenie jednej z nevýherných guľôčok pomáha intuícii a správnemu riešeniu. Ako možno vidieť z uvedeného riešenia, študentka jednoznačne rozlíšila tri možné rovnako pravdepodobné situácie, z ktorých práve dve sú priaznivé pre prípad zmeny výberu guľôčky. Avšak skupina študentov, ktorým „formulácia vylúčenia“ napomohla ku správnemu riešeniu bola veľmi málo početná.

Z analýzy dotazníka B však možno jednoznačne tvrdiť, že formulácie úloh pomocou jednoduchého *urnového modelu* sú pre študentov omnoho názornejšie, omnoho ľahšie predstaviteľné i pochopiteľné. Uvedieme niekoľko riešení.

(B, 2, MaNe, M, 20)

1. *„Ide o to, že keď v A aj v B zostane po jednej guľôčke, tak kde je pravdepodobnosť bielej guľôčky väčšia. Pravdepodobnosť, že vyberiem bielu guľôčku z A a dám ju do B je 1/3. Takže pravdepodobnosť, že biela je v A je 2/3 a pravdepodobnosť, že biela je v B je 1/3. Vybral by som si A.“*

2. *„Pravdepodobnosť toho, že vyberiem bielu guľôčku z A a dám ju do B je 1/100 a pravdepodobnosť toho, že biela zostane v A je 99/100. Vybral by som si osudie A. Pravdepodobnosť, že v osudí B je biela guľôčka predtým ako asistent vyberie 98 čiernych guľôčok z A je 1/100.“*

3. *„Predtým ako vyberie asistent jednu guľôčku z osudia A je pravdepodobnosť, že v osudí B je guľôčka s číslom 1 1/3.*

Pravdepodobnosť, že biela zostane v A je 2/3, pravdepodobnosť, že biela je v B je 1/3. Vybral by som si z A.“

Ako možno z odpovedí študenta jasne vidieť, úplnou a správnou argumentáciou určil pravdepodobnosti jednotlivých javov a správne vyriešil všetky tri zadané úlohy.

Pravdepodobnosť výhry v osudí A je určená na základe pravdepodobností úspechu v prvom výbere. Keďže pravdepodobnosť neúspechu pri prvom výbere je väčšia, správnym odôvodnením je zmena výberu výhry na osudie A.

(B, 2, MaNe, Ž, 19)

1. „B_B *– jav, že do B z A presuniem bielu guľôčku*..............................$P(B_B) = 1/3$

A_B *– jav, že v A zostane biela = vyberiem čiernu a presuniem do B*.......$P(A_B) = 2/3$

Vybrala by som si guľôčku z osudia A, lebo je väčšia pravdepodobnosť (2/3), že v ňom je biela guľôčka. Pravdepodobnosť, že v osudí B je biela guľôčka je 1/3.”

2. „A_B *– jav, že v A je biela guľôčka*..............$P(A_B)=C(1, 99)/C(1,100)=99/100$

B_B *– jav, že v B je biela guľôčka*..............$P(B_B)=C(1,1)/C(1,100)=1/100$

Vybrala by som si guľôčku z A, lebo je väčšia pravdepodobnosť, že v A je biela guľôčka. Pravdepodobnosť, že v B je biela je 1/3.”

3. „A_1 *– jav, že v A je guľôčka 1 = vyberiem 2 alebo 3*..............$P(A_1) = 2/3$

B_1 *– jav, že v B je guľôčka 1*..$P(B_1) = 1/3$

Vyberiem si guľôčku z A, lebo je väčšia pravdepodobnosť, že v A je guľôčka 1. Pravdepodobnosť, že v B je 1 je 1/3.”

Správnymi argumentáciami je vo všetkých troch úlohách určená pravdepodobnosť výhry v osudí A na základe pravdepodobnosti opačných javov. Táto metóda bola pri riešení urnového modelu najčastejšou metódou správnej argumentácie.

Výsledky výskumu potvrdili, že použitie „urnového modelu“ formulácie Monty Hall paradoxu vedie k usmerneniu a takmer k úplnej eliminácii nesprávnych intuícií, ktoré sú inak pri klasickej formulácii tohto problému takmer vždy prítomné, a ktoré sú zdrojom nesprávnych riešení a nedorozumení spojených s riešením uvedeného paradoxu. V nižšie uvedených tabuľkách uvádzame výsledky analýz študentských riešení. Ako možno z výsledkov vidieť, pri formuláciách použitých v dotazníku A pri úlohe 1 žiaden zo študentov nevyriešil úlohu správne, pri úlohe 2 bolo jedno a pri úlohe 3 tri správne riešenia. Naproti tomu formulácie pomocou „urnového modelu“ použité v dotazníku B zabezpečili vysokú, v niektorých prípadoch stopercentnú, úspešnosť riešení.

Úloha 1	**2. roč. VŠ**		**4. roč. VŠ**	
	A	B	A	B
Správna odpoveď	**-**	**8**	**-**	**7**
Rovnaké šance	6	-	11+1	-
Iná odpoveď	2	-	-	3

Úloha 2	**2. roč. VŠ**		**4. roč. VŠ**	
	A	B	A	B
Správna odpoveď	**-**	**8**	**1**	**7**
Rovnaké šance	3	-	9	-
Iná odpoveď	5	-	1	3

Úloha 3	**2. roč. VŠ**		**4. roč. VŠ**	
	A	B	A	B
Správna odpoveď	**1**	**8**	**2**	**7**
Rovnaké šance	4	-	7	1
Iná odpoveď	3	-	2	2

Záver a diskusia

Z analýzy riešení a z výsledkov uvedených v tabuľkách vyplývajú nasledujúce závery:

Najčastejšie sa objavujúcou nesprávnou intuíciou v súvislosti s riešením Monty Hall paradoxu pri úlohách v dotazníku A bola tzv. *intuícia rovnakých šancí*. V súvislosti s touto nesprávnou intuíciou možno rozoznať dva pohľady na uvedenú situáciu. Prvý pohľad hovorí o rovnakých šanciach na výhru či hráč zmení svoje rozhodnutie alebo nie. V tomto pohľade ide o zanedbanie faktu, že prvý výber sa uskutočnil s pravdepodobnosťou 1/3 resp. 1/100. V druhom prípade študent odpovedá podľa intuície rovnakých šancí, no je presvedčený, že hráč má zmeniť svoj výber. Dôvodom tohto presvedčenia je akési „zohľadnenie“ apriórnej pravdepodobnosti výhry dverí Z (1/3 resp. 1/100). Teda hoci študent určil pravdepodobnosti výhier po otvorení nevýherných dverí pre obe zo zostávajúcich dverí ako $\frac{1}{2}$, odporúča zmeniť výber na zostávajúce dvere so zdôvodnením, že prvý výber sa vždy uskutočnil s menšou pravdepodobnosťou výhry ako $\frac{1}{2}$.

Formulácia Monty Hall paradoxu použitá v dotazníku B, teda použitie *urnového modelu* jednoznačne napomáha správnemu pochopeniu problému a úspešnému riešeniu. Tento model preto odporúčame ako východiskový pri zoznamovaní študentov s Monty Hall paradoxom. Vzhľadom na jeho jednoduchú formuláciu a nenáročnosť je vhodný na použitie aj na strednej škole. Veľmi jednoducho možno poukázať na analógiu uvedenej formulácie s pôvodnou formuláciou Monty Hall paradoxu, a tým odstraňovať, či predchádzať nesprávnym intuíciám a chybným záverom v súvislosti s týmto paradoxom.

Vo všeobecnosti môžme tvrdiť, že modelovanie reálnych pravdepodobnostných situácií využitím *urnového modelu* je dôležitým prvkom matematického vzdelávania. Je to práve schopnosť matematizácie reálnych situácií, ktorú je potrebné rozvíjať u študentov. Bez schopnosti matematizovať situáciu, teda bez schopnosti modelovať ju využitím jednoduchých prostriedkov, sú často naše riešenia nesprávne, ovplyvnené nesprávnymi intuíciami. Ako sme na konkrétnom príklade mohli vidieť, študenti boli schopní správne vyriešiť Monty Hall paradox len v prípade, že bol formulovaný pomocou jednoduchého urnového modelu. V prípade, že študenti nemali explicitne tento model zadaný, a teda bola potrebná jeho tvorba nimi samotnými, model tejto stochastickej situácie neutvorili a problém riešili nesprávne.

Význam „formulácie 100“ a „formulácie vylúčenia“ v súvislosti s riešením paradoxu sa v našej výskumnej vzorke ukázal ako malý. Hoci nemožno zanedbať niekoľko úspešných riešení úloh týchto formulácií (najmä „formulácie vylúčenia“) u študentov riešiacich dotazník A, vo všeobecnosti je táto mnohonásobne menšia, ako úspešnosť urnového modelu, ktorý zabezpečil správne riešenie v rámci všetkých formulácií v niektorých prípadoch až so 100% úspešnosťou. Vzhľadom na uvedené analýzy však odporúčame zaradiť úlohy týchto formulácií jednak pri oboznamovaní študentov s Monty Hall paradoxom - formulácia vylúčenia, ktorá napomáha pochopeniu štruktúry a modelu pravdepodobnostného priestoru, v ktorom sa daná situácia odohráva, ako aj na prehĺbenie správnych intuícií a hlbšie preniknutie do problému (formulácia 100). Výskum potvrdil hypotézu 1 aj hypotézu 2.

Literatúra

[1] JAHNKE, T.: Drei Türen, zwei Ziegen und eine Frau:Ein didaktisches Lehrstück? In: *Mathematik Lehren*, Heft 85, 1997, s. 47-51.

[2] MARGOLIS, H.: Monty Hall Again? Working Paper Series 03.11. [online] Publikované apríl 2004. [citované 20. 6. 2006]. Dostupné z http://harrisschool.uchicago.edu/About/publications/working-papers/pdf/wp_03_11.pdf

[3] von RANDOW, G.: *Das Ziegenproblem: Denken in Wahrscheinlichkeiten.* 1. vyd. Reinbeg bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 1992. 176 s. 1090-ISBN 3 499 19337 X

Adresa autora:

RNDr. Monika Žilková
KM MtF STU
Paulínska 16
917 24 Trnava
e-mail: monika.zilkova@stuba.sk