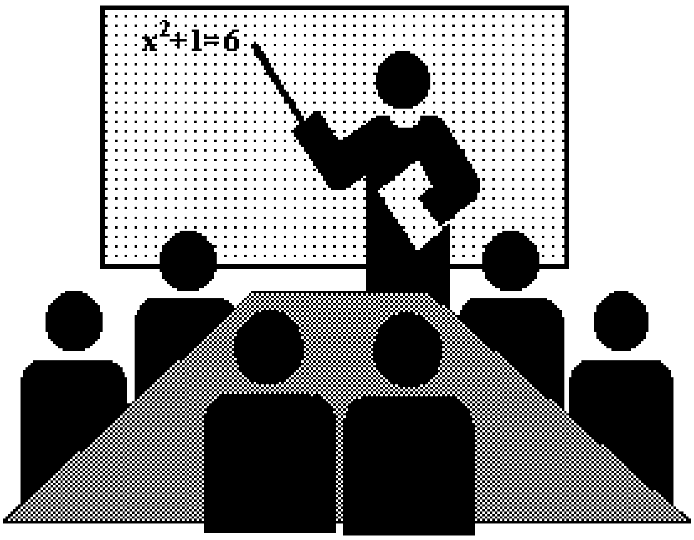
KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

6. ročník

KONFERENCIE

**organizovanej s podporou
Európskeho sociálneho fondu**

Matematika v škole dnes a zajtra



Zborník príspevkov

Ružomberok, 12. - 14. september 2005

Mathematics at school today and tomorrow

held September 12 - 14, 2005 at the Pedagogical Faculty of Catholic University in Ružomberok

sadzba
systémom LaTeX 2_ε

Publikácia bola vydaná s podporou projektu ESF č. 11230220094
Modernizácia a inovácia vyučovania matematiky a informatiky so zreteľom na budúcich učiteľov a celoživotné vzdelávanie učiteľov (inovatívny projekt)

Európsky **sociálny** fond

Editori:

Ján Gunčaga
Zdenko Takáč

Recenzenti:

Martin Billich
Jaroslava Brincková
Petr Eisenmann
Roman Frič
Ján Gunčaga
Pavol Klenovčan
Jan Kopka
Ladislav Kvasz
Beloslav Riečan
Štefan Tkačik
Marián Trenkler
Viera Uherčíková
Tomáš Zdráhal

ISBN 80-8084-066-0

Obsah

Úvod

Rok 2000 - svetový rok matematiky bol výzvou pre matematickú obec, aby upozornila verejnosť na úlohu a miesto matematiky v pestrej mozaike svetovej kultúry a jej úlohy v pokroku ľudstva. Symbolicky práve v tomto roku vznikla na Pedagogickej fakulte Katolíckej univerzity tradícia organizovať konferenciu *Matematika v škole dnes a zajtra* zaoberajúcu sa týmito otázkami vyučovania matematiky na školách všetkých typov.

Matematika má svoje pevné miesto v školskom vzdelávaní, ktoré v súčasnosti prechádza mnohými zmenami. Učitelia matematiky sa snažia v zápase o miesto matematiky vo vzdelávaní, ale hlavne v myslení svojich žiakov. Sme radi, že konferencia *Matematika v škole dnes a zajtra* vstúpila už do povedomia odbornej a pedagogickej komunity Slovenska. K úrovni konferencií významne prispela i účasť zahraničných účastníkov z Bieloruska, Česka, Litvy, Maďarska, Nemecka a Poľska. Ukazuje sa, že problémy a nadšenie nepoznajú hranice a že všetci si máme čo povedať.

V dňoch 12. - 14. septembra 2005 sa uskutočnila už 6. konferencia *Matematika v škole dnes a zajtra*. Pestrosť i obsah prednesených príspevkov svedčia o tom, že máme erudovaných učiteľov matematiky na školách všetkých typov a stupňov ako i o tom, že sa zamýšľajú stále viac nad tým nielen čo učiť z matematiky, ale ako rozvíjať tvorivé myslenie mládeže, ktorá ju bude využívať zajtra. Stretnutia, ako táto konferencia potvrdzujú neustály príliv nových ideí, nových metód, nových prístupov k žiakom s cieľom priblížiť im krásu a užitočnosť matematiky. Matematici chápu, že matematika je organická súčasť všestranného formovania osobnosti žiaka a pre jej úspešnú výučbu treba hľadať a nájsť cestu do duše študenta a vnášať do nej radosť z poznania a hľadania. Skúšanie takýchto nových ciest je neraz komplikované, na mnohé otázky sa nenašla odpoveď, mnohých otázok sme sa ešte nedotkli, no berieme to ako výzvu pre organizáciu ďalších ročníkov tejto konferencie.

V tomto roku oslávil svoje 70. narodeniny Doc. RNDr. Viliam Chvál, CSc., ktorý bol iniciátorom konferencií. Bol prvým dekanom Pedagogickej fakulty Katolíckej univerzity v Ružomberku a má výrazný podiel na vzniku Katedry matematiky a fyziky Pedagogickej fakulty Katolíckej univerzity. Táto katedra vznikla v rámci Katecheticko-pedagogickej fakulty sv. Ondreja Žilinskej univerzity a v tomto roku si pripomíname 10. výročie jej vzniku.

Konferencia sa uskutočnila v rámci projektu, ktorý je financovaný Európskym sociálnym fondom. Tento projekt je realizovaný na Katedre matematiky Pedagogickej fakulty Katolíckej univerzity v Ružomberku v partnerstve so Združením katolíckych škôl Slovenska, Odborom školstva Mestského úradu v Ružomberku a Krajským školským úradom v Žiline.

Podobne ako v minulých rokoch, tak aj v tomto roku sú ďalšie informácie o konferencii uverejnené aj na stránkach Katedry matematiky PF KU (http://pf.ku.sk/kmaf). Pozývame všetkých na siedmy ročník konferencie *Matematika v škole dnes a zajtra*, ktorý sa uskutoční v septembri 2006.

Organizačný výbor

Prvky kritického myslenia na hodine matematiky v 7. ročníku ZŠ

Jana Balážová

Abstract. *Autorka absolvovala priebežné vzdelávanie na MPC v Prešove s témou Kritické myslenie na hodinách matematiky a fyziky. V príspevku opisuje ako získané skúsenosti realizovala na hodine matematiky v 7. ročníku ZŠ pri preberaní učiva o percentách.*

Predmet: matematika
Cieľová skupina: žiaci 7. ročníka
Téma: Počet percent a percentová časť
Ciele: Žiaci sa naučia a upevnia výpočet percent a percentovej časti na príkladoch z praxe, pochopia pojem zlacnenie, zľava, pôvodná cena, nová cena tovaru, rozvíjajú samostatnosť, iniciatívnosť, zodpovednosť, sebakritickosť, sebadôveru.
Metódy: metóda voľného písania, metóda skupinovej práce, projektová metóda.
Pomôcky: reklamné letáky rôznych obchodných spoločnosti, nožnice, lepidlo, výkres, pero, farbičky, meotar, kartičky.

Priebeh vyučovacej hodiny:

Základnou metódou vyučovacej hodiny bola projektová metóda s témou: Nakupujeme výhodne? Rozsah tvorili 2 vyučovacie hodiny alebo jedna hodina v triede a príprava doma.

Úvod: Matematická rozcvička, príprava voľného písania

- Vyučujúci rozdá niektorým žiakom kartičky s jednoduchými úlohami typu: Vypočítajte 7% z 200 Sk. Vypočítajte základ, ak 7 % je 200 Sk. Vypočítajte koľko percent je 55 kg z 650 kg ? - na precvičenie výpočtu percent, percentovej časti a základu a vybraní žiaci ich riešia na tabuli. Počas riešenia učiteľ rozdáva papiere na voľné písanie.

Poznámka k prvkom kritického myslenia (KM): Žiaci o danej téme majú množstvo informácií z prvého stupňa ZŠ, z iných predmetov a hlavne z bežného života mimo školy. Myslím si, že je potrebné učiť žiakov premýšľať o hodnote predložených informácií. Klooster v [3] *uvádza, že takto vedení žiaci potom budú pristupovať k informáciám so zdravým skepticizmom a nebudú môcť byť mini manipulovaní. Kritické myslenie sa má začínať otázkami a problémami, ktoré žiakov stretávajú v ich živote. No aj keď je zvedavosť základná životná orientácia všetkých ľudských bytostí, u žiakov je potrebné niekedy prebudiť vnímavosť voči problémom, ktoré existujú okolo nás.*

Použitie metódy voľného písania:

- Po skontrolovaní výsledkov vyriešených príkladov, učiteľ premieta pomocou meotaru nasledujúce otázky, na ktoré požaduje písomnú odpoveď:

  „Chodíš nakupovať s rodičmi alebo to zvládneš aj sám?“

  „Poznáš oddelenia, v ktorých sa nakupuje?“

  „Ktorý tovar je výhodnejšie nakúpiť?“

  „Podľa čoho sa zákazník rozhoduje?“

„Myslíš si, že vyššia zľava je vždy výhodná?“

„Dá sa veriť vypočítaným zľavám v letákoch?“

Žiaci určitý čas píšu odpovede a vyučujúci rozdáva všetkým žiakom kartičky s názvami tovarov z rôznych oddelení. Jeden vybratý tovar z každého oddelenia je napísaný červenou farbičkou. Na tabuľu si pripraví názvy jednotlivých oddelení (Predaj pečiva, sladkostí, mäsových výrobkov, ovocia a zeleniny, drogéria, predaj elektrických spotrebičov, predaj športových potrieb).

Poznámka k prvkom KM: Žiaci sa najlepšie naučia, ak skutočne nachádzajú problémy súvisiace s ich osobnou skúsenosťou a využívajúc pramene školy a prostredie triedy na to, aby našli ich riešenie, a tým rozvíjajú svoju schopnosť vyjadrovať sa, utvárať si vlastný názor a argumentovať.

Nasleduje ústne pokyn pre heterogénne rozdelenie žiakov do skupín:

- Rozdeľte sa do skupín tak, že sa podľa kartičiek zaradíte do oddelenia predaja, ktoré sú na tabuli a vytvoríte skupiny. Po chvíli učiteľ vyzve žiakov, aby si v skupinách porovnali odpovede na otázky a hovorcovi - žiakovi, ktorý má tovar na kartičke červenou dá možnosť ich odpovede zverejniť. Dôležité tvrdenia zaznamenajú jednotliví hovorcovia na tabuľu.

Skontrolovanie domácej úlohy:

- Žiaci si vyberú reklamné letáky, ktoré si mali doniesť z domu. Učiteľ touto činnosťou pestuje zmysel pre plnenie si povinností a mieru zodpovednosti jednotlivých žiakov. Pre zábudlivcov má učiteľ v zálohe letáky zo svojej vlastnej poštovej schránky.

Poznámka k prvkom KM: Podľa Davida Kloostera (pozri [3]*) závažným aspektom kritického myslenia je, že získavanie informácií je východiskom a nie cieľom nášho myslenia. Rôzne formy reklám pôsobiace na žiakov neformujú ich myslenie, ak ich budú prijímať ako hotové fakty.*

Popis aktivity:

- Učiteľ na základe tvrdení na tabuli zadá úlohy: Vyberte jeden výrobok, ktorý predávajú 3 alebo 4 firmy a porovnajte ako pravdivo informujú o zľavách v letákoch, ako zaokrúhľujú ceny a rozhodnite, kde je najvýhodnejšie tento tovar nakúpiť. Výsledky svojho bádania budete v závere pred celou triedou obhajovať.

Poznámka k prvkom KM: Tým, že žiakom oznámime dopredu možnosť prezentovania výsledkov ich spoločnej činnosti zvýšime ich motiváciu. Podľa Tureka [2] *je motivácia odpoveď na otázku „Prečo človek robí práve túto činnosť?“ Odpoveďou je snaha učiteľa o to, aby zistil problémy, s ktorými sa žiaci v živote stretávajú a pomáhal im ich formulovať. Nakoniec sa takýto žiaci naučia zapájať svoj intelekt nielen do školskej práce, ale aj v praktickom živote.*

Samotná práca skupín:

- Žiaci v skupinách diskutujú, konfrontujú svoje názory s ostatnými členmi, prijímajú ich postoje alebo si utvárajú svoj vlastný názor.

Poznámka k prvkom KM: V triede sa učia žiaci kriticky myslieť, ak si každý vytvára vlastný názor, hodnotu a presvedčenie. Žiaci musia pociťovať slobodu myslieť za *seba samých, rozhodovať o otázkach, ktoré sa ich týkajú. Môže sa však stať, že žiak prijme myšlienku a presvedčenie druhého žiaka a vo vete "súhlasím s tebou"môže nájsť uspokojenie s tým, že ako kriticky mysliaci človek sa dostal do súladu s inými. Nezávislosť myslenia je totiž podľa Davida Kloostera (viď* [3]*) prvá a najdôležitejšia vlastnosť kritického myslenia.*

Činnosť učiteľa:

- Počas práce vyučujúci kontroluje, pomáha a usmerňuje prácu v skupinách.

Poznámka k prvkom KM: Tu sa tradičná roľa učiteľa mení: učiteľ sa stáva rovnocenným partnerom vo vnútri učiacej sa komunity. Aj Kosová [1] *sa zmieňuje o učiteľových profesionálnych schopnostiach pomocou, ktorých môže plniť humanistické ciele školy. Tie sa týkajú hlavne schopnosti učiteľa pomôcť žiakom budovať pozitivne medziľudské vzťahy. Vyzýva študentov k vyjadrovaniu svojich vlastných názorov a k zaujímaniu stanovísk, ktoré sú schopní obhájiť, ak majú dobre spracované informácie.*

Činnosť žiakov pri zdokumentovaní zistených záverov:

- Učiteľ ukáže žiakom spracovanú tému na výkrese z minulých ročníkov. Požaduje rozdelenie jednotlivých činností členov skupiny tak, aby na výkrese boli vystrihnuté a nalepené obrázky tovarov, pod nimi zapísané, ako vypočítali zľavu v percentách alebo novú cenu po zlacnení.

Poznámka k prvkom KM: Žiaci sa učia zbierať údaje, rozoberať texty, zvažovať rôzne pohľady a nakoniec hľadať riešenia. Ak sú takto vedení hľadajú rozumné argumenty a presvedčivé dôvody pre vlastné riešenia a často zisťujú, že riešenie nie je len jedno, preto musia dokázať práve logickosť a praktickosť, ktorým vyniká ich riešenie. Žiaci v skupinách vytvárajú a predkladajú argumenty, ktorými preverujú spoľahlivosť a platnosť študovaných textov. Každý argument sa totiž posilňuje tým, že naňho pristúpime alebo ho vyvrátime.

- V závere hodiny dostanú všetky skupiny priestor na prezentovanie výsledkov svojho tímu.

Poznámka k prvkom KM: Klooster [3] *vo svojom článku cituje filozofku Hannu Arendtovú: "K dosiahnutiu výnimočnosti potrebujeme vždy prítomnosť druhých."Keď žiaci v triedach diskutujú, čítajú, súhlasia alebo nesúhlasia s prijímaním myšlienok zapájajú sa do procesu, v ktorom sa prehlbujú a prepracovávajú ich vlastné postoje a názory. Učiteľ kritického myslenia musí preto podnecovať dialóg a diskusiu počas práce v skupinách a tiež rôzne formy zverejňovania žiackych písomných prác, čo Kosová* [1] *prezentuje jako názorný prameň pre hodnotenie žiaka.*

Záver:

Využitím témy percentá v 7. ročníku som sa pokúsila zblížiť učenie v triede so životom mimo triedu a školu. U žiakov som umocňovala postoje ako tolerancia, usilovné počúvanie druhých a zodpovednosť za svoje vlastné stanovisko.

Literatúra

[1] Turek I.: *Tvorivé riešenie problémov*, Bratislava, MC, 1999

[2] Kosová B.: *Humanizačné premeny výchovy a vzdelávania na 1.stupni ZŠ*, Banská Bystrica, MC, 2000

[3] Klooster D.: *Co je kritické myšlení?* In: http://www.kritickemysleni.cz/klisty.php?co=klisty1-2_cojeKM

Adresa autora:
RNDr. Jana Balážová
Základná škola
Kudlovská ul. 11
066 21 Humenné
e-mail: balazovajana@zoznam.sk

Niektoré aktuálne otázky vyučovania matematiky na základnej škole

Ľudovít Bálint

Abstract. *The article is dealing with some specific issues concerning teaching mathematics within the frame of coming educational system transformation.*

Úvod

Predpokladám, že nás už veľa času nedelí od začatia systémovej realizácie obsahovo, metodicky, materiálne a organizačne najnáročnejšej časti transformácie nášho výchovno-vzdelávacieho (ďalej vzdelávacieho) systému, od transformácie obsahu, metód, organizačných foriem a prostriedkov vyučovania, inými slovami od kurikulárnej transformácie. Preto je potrebné príprave parciálnych otázok súvisiacich so samotnou transformáciou venovať osobitnú pozornosť. Táto práca je uľahčená tým, že základné teoretické postuláty transformácie boli sformulované vo viacerých programových koncepčných materiáloch ako sú Duch školy, Škola v roku 2000, Konštantín, ale hlavne v projekte Milénium.

Redukcia, reštrukturalizácia a adaptácia

V súčasnosti sme svedkami toho, že takmer hromadne sa volá po redukcii obsahu vzdelávania na všetkých typoch a stupňoch školy a vo všetkých učebných predmetoch.

Má to viac dôvodov:

1. V druhej polovici 20. storočia vo svete nastal búrlivý rozvoj vedeckého poznania a vedeckých poznatkov nazývaný aj ako kognitívna revolúcia.
2. Škola nemohla čeliť prieniku viacerým novým poznatkom do obsahu školského vzdelávania vo väčšom množstve, ako to bolo žiaduce, čím obsah vzdelávania v súčasnosti už nadobudol žiakmi nezvládnuteľné rozmery.
3. Narastaním obsahu sa na školách vytvorila nežiadúca situácia. Medzi učiteľmi začal prevládať latentný názor, že v osnovách a v učebniciach nachádzajúce sa kvantum učiva možno so žiakmi pri danej hodinovej dotácii len prebrať, ale ho nemožno naučiť.

Výsledok takého prístupu k učivu a k vyučovaniu je malá efektivita školskej práce, lebo žiaci nezískajú trvalé vedomosti a potrebné učebné návyky.

V dôsledku tejto skutočnosti vo svete už od začiatku 60-tych rokov prebiehal proces zvaný modernizácia obsahu a metód vyučovania, so zámerom implementovania niektorých výsledkov kognitívnej revolúcie do obsahu vzdelávania so súčasnou reštrukturalizáciou a vynechaním zastaralého obsahu. Tieto pokusy však nepriniesli očakávané výsledky.

V 70-tych rokoch keď sa ukázalo, že ani centralizované ani decentralizované projektovanie obsahu vzdelávanie neuspelo, odborníci hľadajú účinnejšie cesty projektovania obsahu vzdelávania, aby preťažovanie žiakov bolo vylúčené, alebo aspoň v značnej miere obmedzené. Podstata nového spôsobu projektovania obsahu vzdelávania je v tom, že škola vo veľkej miere participuje na tvorbe pedagogických dokumentov, a teda má možnosť na svoje pomery optimálnejšie naprojektovať obsah vzdelania. Tento spôsob projektovania obsahu vzdelávania je už zakotvený aj Miléniu, kde sa hovorí, že tvorba pedagogických dokumentov bude prebiehať na základe **dvojúrovňového participatívneho modelu,** čo predpokladá centrálne vytvorený **rámcový vzdelávací program** a jeho adaptáciu na konkrétne podmienky jednotlivých škôl**,** v podobe **školského vzdelávacieho programu.** Počíta sa s tým, že centrum bude projektovať obsah vzdelávania približne na 60% a škola na 40% vyučovacieho času a obsahu. K týmto údajom v projekte Milénium je potrebné poznamenať, že na jednotlivých typoch a stupňoch školy budú uplatnené diferencovane. Časť rámcového vzdelávacieho programu pre 1. stupeň pravdepodobne bude obsahovať až okolo 80% učiva centrálne určeného, kým maturitné ročníky strednej školy len približne 20 –30% učiva. Tento trend sa už čiastočne realizuje podľa experimentálne overených rámcových alternatívnych učebných plánov pre gymnázia od roku 1998. Skúsenosti z realizácie tohto učebného plánu je potrebné vyhodnotiť, aby boli k dispozícii pri transformácii gymnaziálneho vzdelávania.

Nový prístup k tvorbe a realizácii vzdelávacieho programu bude vyžadovať veľmi premyslenú a **výraznú selekciu** obsahu vzdelávania a následne aj jeho **redukciu** tak**,** aby do rámcového vzdelávacieho programu sa dostalo skutočne len učivo, ktoré každý žiak bude si môcť osvojiť, aspoň na minimálnej úrovni. Tieto požiadavky budú zakotvené vo **vzdelávacom štandarde** a v **cieľových požiadavkách**, budú predmetom celoplošných evalvácií, respektíve maturitných skúšok.

Ďalšia skutočnosť považovaná za celosvetový trend, ktorá si vyžiada výrazný zásah do učebných plánov a obsahu vzdelávania, na ktorú bude potrebné reagovať pri transformácii, je potreba vytvorenia voľných vyučovacích hodín v učebnom pláne pre cudzie jazyky, rôzne druhy výchov a informatiku, na úkor ostatných učebných predmetov. Zahraničné príklady ukazujú, že tento trend znižovania počtu vyučovacích hodín klasických učebných predmetov, napríklad matematiku zasiahne približne takto:

- na 1. stupni pravdepodobne bude o 2 až 3 hodín týždenne menej (miesto súčasných 19 hodín, 16 – 17 hodín),
- na 2.stupni pravdepodobne až o 3 - 4 hodín týždenne menej (miesto súčasných 23 – 24 hodín, 19 – 20h),
- na stredných školách bude tiež pokles, ale diferencovane.

Treba však poznamenať, že školské vzdelávacie programy v rámci 40% obsahu, ktorého voľba bude v kompetencii školy, umožnia, aby každá škola mohla do určitej miery svoje učebné plány vylepšiť v prospech niektorých predmetov napr. matematiky, podľa miestnych podmienok, záujmu žiakov a rodičov.

Tým, že obsah vzdelávania napr. z matematiky, ale aj ostatných učebných predmetov, aj pri súčasnom pomerne vysokom počte vyučovacích hodín je predimenzovaný, nás núti, aby sme sa veľmi vážne zamysleli nad **redukciou** matematického učiva na každom stupni školy. Keď hovoríme o **redukcii** (obmedzovaní, zmenšovaní, znižovaní) obsahu, tak nikto z nás tento čin nechápe len ako vyškrtávanie určitých tém a tematických celkov z učebných osnov a následne vynechanie z učebníc. Je isté, že boli a budú aj takéto časti učiva. Malo by však vo väčšine prípadov ísť **o redukciu spojenú s reštrukturalizáciou** obsahu. Ako príklad uvediem už realizovanú redukciu obsahu písomného násobenie a delenie viacciferným násobiteľom respektíve deliteľom. Redukcia bola v tom, že žiaci sa učia písomne násobiť len dvoj- a trojciferným číslom, deliť len jedno a dvojciferným číslom. Reštrukturalizácia v tomto prípade znamená, že nácvik algoritmu písomného násobenia a delenia bude ponímaný ako proces algoritmizácie, čo zaberie menej času, pričom samotné násobenie a delenie väčších čísel žiaci budú vykonávať na kalkulátore. Tým sa získa čas, aby sa žiaci vo zvýšenej miere mohli venovať ďalšiemu, pre praxe užitočnému učivu. Bude potrebné analyzovať obsah učebných osnov matematiky a dohodnúť sa na redukcii učiva a zároveň skúmať aj možnosť reštrukturalizácie učiva tak, aby medzipredmetové vzťahy boli nielen zachované, ale aj posilnené. Bude dôležité odstrániť z koncipovania obsahu prílišnú cykličnosť, pritom ustrážiť, aby matematické vzdelanie našich žiakov bolo úplné a plnohodnotné.

Pri projektovaní obsahu v budúcnosti treba počítať aj s tým, že centrálny rámcový vzdelávací program budú **adaptovať** (prispôsobovať) školy na svoje podmienky, pričom budú disponovať okolo 40% všetkého vyučovacieho času. Preto bude potrebné školám **ponúknuť zaujímavé, užitočné a pre prax potrebné rozširujúce učivo**, a tým regulovať konečný obsah matematického vzdelávania a následne aj výsledky vzdelávania.

Doteraz sme hovorili len o obsahu vzdelávania, nespomínali sme metódy, postupy a organizačné formy učenia, ba ani teórie učenia. Novokoncipovaný obsah a ciele vzdelávania, v ktorých iste bude prítomný aj snaha o dosiahnutie dnes už pomerne dobre vymedzených kľúčových kompetencií, medzi nimi aj učebných kompetencií, bude vyžadovať, aby sa viac do popredia dostala problémové a projektová metóda vyučovania, čo najširšia diferenciácia, až na individuálny prístup so širokým využitím prostriedkov digitálnej techniky. Z teórií učenia sa viac do popredia dostane **konštruktivistická teória učenia.** Stručná podstata tejto teórie je podľa (Doulik,P.- Škoda,J., 2003) v tom, že vedomosti nedostávame v hotovej podobe z vonka, ale ich sami konštruujeme, sami vytvárame svoje individuálne vedomosti.

Štandardy a kompetencie

Obidve sú cieľové kategórie vzdelávania. V súčasnosti už náukové predmety disponujú vzdelávacími štandardami, v ktorých sa nachádzajú požiadavky na vedomosti a zručnosti žiakov zo základného učiva, spresnené a konkretizované exemplifikačnými úlohami. Predstavujú však len operacionalizáciu kognitívnych cieľov, pričom z nich absentujú afektívne ciele. Týmto spôsobom sú vedomosti a zručnosti jednotlivých učebných predmetov atomizované, čo často má za dôsledok, že ani tí žiaci, ktorí ovládajú väčšinu požiadaviek štandardu, nie sú schopní riešiť komplexnejšie úlohy, alebo neštandardné aplikačné úlohy, ktorých riešenie môže byť do značnej miere nezávislé na vedomostiach a zručnostiach požadovaných vo vzdelávacích štandardoch, ale pri ktorých je potrebné uplatniť logické myslenie. Výsledky väčšiny zúčastnených štátov v medzinárodných meraniach PISA a TIMSS tento stav potvrdili. Na tieto nedostatky vo vedomostiach žiakov poukázali, zámerne odlišným spôsobom pripravované medzinárodné merania vzdelávacích výsledkov, ktoré boli koncipované tak, aby neukazovali len to, čo si žiaci z osnovami predpísaného učiva osvojili, ale to, čo prevyšuje osnovy a síce všeobecnú informovanosť, schopnosť osvojené učivo v praxi tvorivo aplikovať v takých situáciách, keď matematická podstata v úlohe bola skrytá alebo ťažšie identifikovateľná, a žiak ju mal objaviť, tj. vytvoriť matematický model danej úlohy a v ďalšom riešiť tento matematický model.

Sme svedkami toho, že vyššie spomínané medzinárodné merania už naznačujú cestu, na ktorú musíme čo najskôr nastúpiť. Tieto merania už nie sú o izolovaných poznatkoch a zručnostiach, ale o úrovni organizovanosti týchto elementov vedomostí, čo sa prejavuje v požiadavke, vytvorené schopnosti rozvíjať, získané vedomosti a zručnosti vedieť aplikovať a prenášať (transfér). Všetky výsledky kognitívnej psychológie sa využili a využívajú pri organizovaní vedomostí, zručností a schopností do takých systémov, v ktorých z relatívne malého počtu prvkov môže vzniknúť u žiakov, väčšinou prirodzeným interaktívnym spôsobom, nový organizačný princíp tvorby systému vedomostí, zvaná **kompetencia.**

V súčasnosti existuje niekoľko definícií kompetencie. My sa prikloníme k definícii kompetencie od experta európskej komisie pre vzdelávanie pri Rade Európy J. Coolaha: „Na kompetenciu je potrebné sa pozerať ako na takú všeobecnú schopnosť, ktorá sa zakladá na vedomostiach, skúsenostiach, na hodnotách a dispozíciách, ktorú určitá osoba vytvára v sebe v procese učenia sa".

Z tejto definície vyplýva, že pri vytváraní určitej kompetencie u žiakov ide vlastne o vytvorenie všeobecnej schopnosti, čo podľa (Ďurič a kol., 1997) je „vlastnosť osobnosti, ktorá je predpokladom vykonávania istých činností a podávania istých výkonov". Inými slovami kompetencia znamená pripravenosť žiaka v oblasti, ktorú reprezentuje daná kompetencia, v žiadanej podobe a hĺbke byť „odborníkom" v danej oblasti. Ak o žiakovi tvrdíme, že je kompetentný v oblasti napr. čísel na ZŠ, tak by mal disponovať osnovami predpísanými vedomosťami, podloženými skúsenosťami (niekedy znázornením), mal by mať vedomosti a zručnosti z oblasti prirodzených, celých a racionálnych čísel, na základe ktorých sa u neho vytvárajú postoje a hodnoty, ovplyvnené rodenými dispozíciami.

Ako ďalší príklad uveďme vytváranie vedomosti žiakov o počtových výkonoch. Vedomosti podľa (Ďurič a kol., 1988) „sú osvojené, tj. zapamätané a pochopené fakty a vzťahy medzi nimi (v podobe pojmov, pravidiel, pončiek, zákonov, vzorcov, značiek), v ktorých sa odráža poznanie objektívnej skutočnosti vo vedomí žiakov". Popri vedomostiach o počtových výkonoch žiak má získať skúsenosť v praktickom použití týchto vedomostí, čím sa postupne vytvárajú u neho zručnosti.

Je zaujímavé a poučné pozrieť sa na súvislosť medzi vedomosťou a zručnosťou, nakoľko zručnosť je taktiež predpokladom vzniku kompetencie. Zručnosť (spôsobilosť) podľa (Ďurič a kol., 1988) je „nadobudnutá pohotovosť (pripravenosť) správne, čo najrýchlejšie a s čo najmenšou námahou vykonať istú činnosť na základe osvojených vedomostí a predchádzajúcej praktickej činnosti". Pri vytváraní zručností, ako aj z definície zručnosti vyplýva, vznikajú u žiakov aj skúsenosti, ktoré sú taktiež predpokladom vytvorenia kompetencie. V súvislosti s vytváraním vedomostí a zručností ako úspešnej aplikácie vedomostí v praxi, taktiež sa hovorí, že vedomosti tvoria spravidla základňu, východisko utvorenia zručností, ako to vidíme aj pri vzniku zručnosti v súvislosti s počtovými výkonmi. Je evidentné, že v procese vytvárania zručností sa u žiakov rozvíjajú numerické schopnosti, ktoré sa zakladajú na vedomostiach, ale aj naopak, dobré numerické schopnosti napomáhajú rýchlejšie a kvalitnejšie osvojenie vedomostí a zručností. V tomto prípade je prepojenosť obojstranná.

Tým, že vedomosti a zručnosti, ktoré má žiak osvojiť za určité obdobie, vzdelávací cyklus, sú zakotvené vo vzdelávacích štandardoch. Pri osvojení ich obsahu žiak získa aj skúsenosti pri riešení vhodne volených úloh a cvičení, využíva svoje rodené danosti, a dopracuje sa hodnotám, ktoré sú pri výučbe preferované. Je vidieť, že k vytváraniu kompetencií je potrebné podstatne viac ako vedomosti a zručnosti, aj keď vedomosti a zručnosti majú prioritu. Je teraz len otázkou, ako do štandardov zakomponovať popri vedomostí a zručností aj postoje a hodnoty a využiť pritom rodené dispozície žiakov, alebo opačne, do novo vytvoreného konštruktu, ktorý nazveme kompetenciou, ako začleniť príslušné požiadavky na vedomosti a zručnosti žiakov požadované štandardom.

Novšie do popredia sa dostávajú kvalitatívne charakteristiky vedomostí ako je ich organizovanosť, schopnosť transféru a aplikovateľnosť. Tieto skutočnosti majú byť taktiež zakomponované do **štandardov kompetencií**, ako ich zatiaľ pracovne budeme nazývať. Práve tieto atribúty dávajú veľkú príležitosť na dotvorenie kompetencii v hlavách žiakov, nakoľko hlavne schopnosť transféru vedomosti a zručnosti zo strany žiakov dáva veľké možnosti na aplikáciu aj v mimo matematickej oblasti. Teda transfér a aplikácia sú blízke psychické činnosti, ktoré vo väčšine prípadov vystupujú spolu a majú rozhodnú a vyhranenú pozíciu pri vytváraní kompetencií u žiakov.

Z uvedeného je zrejmé, že pri projektovaní štandardov kompetencií pre určitý stupeň školy vychádzame síce zo štandardu, ale pri plnení požiadaviek štandardov dávame naviac ešte záležať na získanie praktických skúseností žiakmi, rozvíjať ich schopnosti, profilovať u nich nielen jednotlivé hodnoty, ale celý preferovaný hodnotový systém. Treba však už na tomto mieste poznamenať, že pri zisťovaní miery splnenia štandardov kompetencií, nebude postačujúce zisťovať len úroveň splnenia vedomostí a zručností, ale budeme musieť do našich testov zakomponovať aj mieru pripravenosti aplikovať vedomosti, rozvíjať schopností a vyhranenosť hodnotového systému. Pri meraniach vzdelávacích výsledkov sa budeme musieť zamerať na meranie kompetencií.

Pri vytváraní konkrétnych kompetencií budeme postupovať tak, že vo vytypovaných kompetenciách, ktoré budú obsahovať viaceré požiadavky na vedomosti a zručnosti z existujúcich štandardov, ktoré sú obsahom danej kompetencie, najprv vymenujeme všetky vedomosti, ktoré sú obsiahnuté v danej kompetencii. Potom uvedieme prostredníctvom aktívnych slovies všetky zručnosti, ktorými žiak má disponovať a ktoré dokáže samostatne vykonať, keď s danou kompetenciou bude disponovať. Taktiež uvedieme niektoré oblasti bežného života, v ktorých dokáže svoje vedomosti aplikovať, pričom sa u neho vytvoria očakávané postoje.

Kompetencia žiaka v oblasti čísiel

Vedomosti: arabské a rímske číslice, celé čísla (navzájom opačné čísla), racionálne čísla (rozvinutý zápis čísla v desiatkovej sústave, prevrátené číslo, zmiešané číslo, zložený zlomok), desatinné čísla , iracionálne čísla, číselná os.

Zručnosti: zapísať čísla v desiatkovej sústave a rímskymi číslicami, zápisať čísla v tvare $a.10^n$, kde $1 < a < 10$, porovnať čísla, zaokrúhľovať čísla, prevedenie číselného vyjadrenia veličín v menších jednotkách na ešte menšie alebo väčšie, zobraziť čísla na číselnej osi.

Postoje: prestáva mať „strach“ z čísel, smelšie kvantifikuje realitu okolo seba, sebavedome robí porovnávanie osôb, vecí a udalostí pomocou čísel, je spokojný s číselným vyjadrením výsledku, nakoľko v prípade potreby dokáže uskutočniť kontrolu.

Záver

Pri vytváraní transformovaného didaktického systému bude zohrávať výber a čo najoptimálnejšie usporiadanie súhrnu tých vedomostí, zručností, prostredníctvom ktorých sa budú u žiakov rozvíjať schopnosti a vytvárať hodnoty, dôležité pre ich rozvoj a uplatnenie v spoločnosti. Tým, že efektívnosť vzdelávania je prirodzeným očakávaním od vzdelávacej sústavy, hneď za projektovaním kľúčových kompetencií v pedagogických dokumentoch, má nasledovať aj otázka merania a hodnotenia žiakmi nadobudnutých kompetencií. Preto považujeme za aktuálne a potrebné, integrovať štandardy a kompetencie do jedného objektu.

Literatúra

[1] *Koncepcia rozvoja výchovy a vzdelávania a Národný program výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike.* 2000. In: Príloha časopisu Technológia vzdelávania. Roč. 10., č. 10.

[2] Veselský, M.: *Pedagogická psychológia II. Teória a prax.* UK, Bratislava, 2003.

[3] Doulik, P. - Škoda, J: *Reflexe nad základnými aspekty konstruktivistického pojetí výuky v přírodovedných předmetech.* Pedagogická revue 2003, roč. 55, č.5, s. 470 – 482.

[4] Belz, H. - Sigrist, M.: *Klíčové kompetence a jejich rozvíjení.* Praha, Portál, 2001.

[5] Ďurič, L. a kol.: *Pedagogická psychológia.* Bratislava, SPN, 1988.

[6] Ďurič, L. a kol.: *Pedagogická psychológia, terminologický a výkladový slovník.* Bratislava, SPN, 1997.

[7] Turek, I.: *Kľúčové kompetencie žiakov.* Pedagogické rozhľady. 2002, č.2, s. 3 – 7.

Adresa autora:
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
830 00 Bratislava
e-mail: balint@statpedu.sk

Volba vhodného označení – cesta k úspěchu při řešení úloh

Jaroslav Beránek

Abstract. *In the article there is shown on a number of examples how the choice of a suitable notation or a picture can make the solution of mathematical tasks and problems easier, even those which seem very difficult. It is shown on algebraic and geometric problems and also simple functional equations. The article also points out that it is important that students – the future teachers of mathematics – develop the ability to use suitable notation.*

Řešení úloh má při studiu matematiky značný význam. Při řešení úloh si studenti mohou ověřit praktické využití teoretických znalostí, přičemž současně procvičují další důležité aspekty s řešením úloh související. Jedná se např. o nutnost dokonalého porozumění jejich zadání a dovednost jejich matematizace (jedná-li se o slovní úlohu), dále je nutno řešit otázku volby vhodné metody řešení; opomenout nelze ani ověření správnosti výsledku (popřípadě důkaz, že žádné další řešení neexistuje). Není cílem tohoto příspěvku podat metodickou analýzu řešení matematických úloh; o tomto tématu již bylo napsáno velmi mnoho (viz např. [3], [4], [7]). Cílem je ukázat, že při úvahách o postupu řešení úlohy je velmi důležitá volba vhodného označení nebo znázornění. Volbou vhodného označení nebo vhodně zvoleným „obrázkem“ je možné získat do úlohy jistý vhled, který umožní efektivně danou úlohu nebo problém vyřešit. Je zřejmé, že schopnosti analyzovat zadání úloh a problémů a hledat a nacházet vhodné označení je potřeba neustále procvičovat. Toto „umění“ lze naučit pouze neustálým řešením úloh tak, aby studenti získali v tomto směru potřebné zkušenosti. Zejména se jedná o studenty učitelství matematiky pro ZŠ a SŠ, neboť právě oni budou řešit matematické problémy se svými žáky a studenty a budou tyto schopnosti u nich rozvíjet. V příspěvku bude uvedeno několik příkladů, které slouží jako ukázka volby vhodného označení či znázornění. Nejprve to budou dvě úlohy využívající vhodných úprav, potom dva problémy z geometrie; v závěru budou uvedeny dvě úlohy, při jejichž řešení využijeme reálné funkce jedné proměnné. Příklady 1 až 5 jsou převzaty z [5], příklad 6 z publikace [8].

Příklad 1: Nechť n je takové přirozené číslo, že $2n+1$ je druhou mocninou celého čísla. Dokažte, že $n+1$ lze vyjádřit jako součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích celých čísel.

Řešení: Předpokládáme, že $2n+1 = s^2$, kde $s \in \mathbf{Z}$. Zřejmě s^2 je liché, tedy i s musí být liché číslo. Vyjádříme proto $s = 2t+1$. Potom platí $2n+1 = (2t+1)^2$.Z posledního vztahu vyjádříme n. Po úpravě dostaneme $n = 2t^2 + 2t$.Proto platí $n + 1 = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t+1)^2$,což je dokazované tvrzení.

Příklad 2: Nechť $a_0 \in (-1,1)$. Definujme rekurentně posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n\in N}$ takto: $a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$.Určete vztah pro výpočet n-tého členu této posloupnosti. Nechť $\{b_n\}_{n\in \mathrm{N}}$ je posloupnost, definovaná pomocí posloupnosti $\{a_n\}_{n\in \mathrm{N}}$ takto: $b_n = 4^n(1- a_n)$.Rozhodněte, zda jsou tyto dvě posloupnosti konvergentní a určete jejich limity.

Řešení: Induktivní postup zde nevede k cíli. Klíčem k úspěchu při řešení je úvaha (plynoucí z předpokladu $a_0 \in (-1{,}1)$), že existuje jediný úhel $\varphi \in (0, \pi)$ s vlastností $a_0 = cos\varphi$. Pro tento úhel φ platí: $a_1 = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = cos\frac{\varphi}{2}$.Protože předchozí vztah platí obecně ve tvaru $\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}} = cos\frac{\omega}{2}$pro libovolný úhel ω, lze členy posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ vyjádřit takto: $cos\varphi$, $cos\frac{\varphi}{2}$, $cos\frac{\varphi}{4}$, $cos\frac{\varphi}{8}$, $cos\frac{\varphi}{16}, \ldots$, tzn. platí $a_n = cos\frac{\varphi}{2^n}$. Pro $n-$tý člen posloupnosti b_n potom platí $b_n = 4^n(1\text{-}\ cos\frac{\varphi}{2^n})$.Nyní přejdeme k otázce konvergence. Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ je zřejmě konvergentní a její limita je rovna číslu 1. Složitější otázkou, vyžadující vhodné označení a vyjádření, je určení limity posloupnosti $\{b_n\}_{n\in\mathrm{N}}$. Postupně tedy počítáme

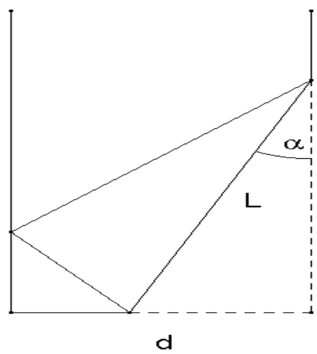
$$\lim_{n\to\infty} 4^n\left(1-\cos\frac{\varphi}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left(1-\cos\frac{\varphi}{2^n}\right)\cdot\left(1+\cos\frac{\varphi}{2^n}\right)}{1+\cos\frac{\varphi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\sin^2\frac{\varphi}{2^n}}{1+\cos\frac{\varphi}{2^n}}.$$

Zlomek v poslední limitě rozšíříme φ^2 a pokračujeme:

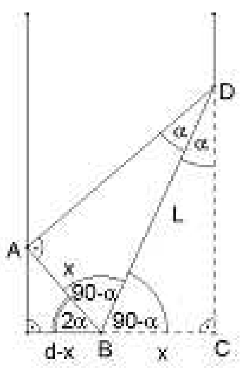
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^2 4^n\sin^2\frac{\varphi}{2^n}}{\varphi^2\left(1+\cos\frac{\varphi}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^2\sin^2\frac{\varphi}{2^n}}{\varphi^2\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\cdot\left(1+\cos\frac{\varphi}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi^2}{1+\cos\frac{\varphi}{2^n}}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}\right)^2.$$

Protože platí limita známá z matematické analýzy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, je posloupnost $\{b_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ rovněž konvergentní a její limita je rovna hodnotě $\frac{\varphi^2}{2}$.

Příklad 3: List papíru široký d cm je přeložen tak, jako na obrázku (roh na jedné delší straně se dotýká rovnoběžné strany). Vyjádřete délku přehybu Lpouze pomocí hodnot α, d.



Řešení: V tomto příkladu kromě vhodného označení využijeme symetrie – přehnutá část papíru je osově souměrná se svojí původní polohou podle přímky určené přehybem Odtud plynou velikosti úseček a úhlů znázorněné na následujícím obrázku (čtyřúhelník $ABCD$ je deltoid).

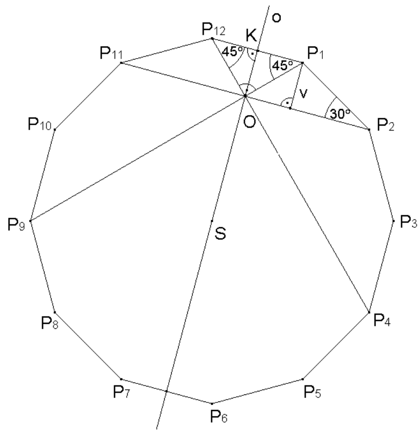


Označíme-li délku úsečky BC jako x, pak délka úsečky AB je rovněž x. Snadno spočteme velikosti potřebných úhlů (viz obrázek) a můžeme počítat. Platí: $\sin\alpha =$

$\frac{x}{L}$, odtud $L = \frac{x}{\sin\alpha}$.Dále platí $cos2\alpha = \frac{d-x}{x}$,odkud úpravou $x = \frac{d}{\cos 2\alpha+1}$.Poslední vztah dosadíme do vzorce pro výpočet La po úpravě dostaneme výsledný vztah $L = \frac{d}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}$.

Příklad 4: Nechť je dán pravidelný dvanáctiúhelník $P_1P_2P_3\ldots P_{11}P_{12}$.Rozhodněte, zda se úhlopříčky P_1P_9, P_2P_{11} a P_4P_{12} protínají v jednom bodě. Své tvrzení dokažte.

Řešení: Příklad budeme řešit dvěma způsoby: Pomocí syntetické geometrie a analytické geometrie (s využitím binomické rovnice). Při prvním, syntetickém způsobu, budeme vycházet z následujícího obrázku.



Pro zjednodušení úvah si dvanáctiúhelník můžeme představit jako ciferník na hodinách (jak tomu nasvědčuje i označení vrcholů). Uvažujme přímku o, která je osou úsečky P_1P_{12}.Snadno lze dokázat, že úhlopříčky P_1P_9 a P_4P_{12} jsou osově souměrné podle této přímky jako podle osy souměrnosti, tedy jejich průsečík Omusí ležet na této ose. Dále úhlopříčka P_2P_{11} je ke zvolené ose kolmá, a proto je ve zvolené ose souměrnosti samodružná. Zbývá dokázat jediné tvrzení, které není zřejmé, že průsečík osy o a přímky P_2P_{11} je totožný s průsečíkem O úhlopříček P_1P_9 a P_4P_{12}. Dokážeme proto, že vzdálenost v bodu P_1 od přímky P_2P_{11} je rovna délce úsečky OK, kde K je střed strany P_1P_{12}.Pomocí středových a obvodových úhlů snadno zjistíme (opět viz předchozí obrázek), že úhly $P_9P_1P_{12}$ a $P_4P_{12}P_1$ mají stejnou velikost rovnou 45°. Úhlopříčky P_1P_9 a P_4P_{12}jsou tedy na sebe kolmé, trojúhelník P_1OK je proto pravoúhlý rovnoramenný a odtud velikost úsečky OK je rovna polovině délky strany dvanáctiúhelníka P_1P_{12}. Nyní opět užitím středových a obvodových úhlů zjistíme, že úhel $P_1P_2P_{11}$ má velikost 30°. Platí: $sin30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{v}{|P_1P_2|}$, tzn. platí $v = \frac{|P_1P_2|}{2}$.S ohledem na to, že dvanáctiúhelník je pravidelný, dokázali jsme, že délka úsečky OK je rovna v a proto se dané tři úhlopříčky protínají v jednom bodě.

Druhým způsobem řešení je metoda analytická. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že daný dvanáctiúhelník je vepsán do kružnice o poloměru jedna. Souřadnice všech vrcholů pak dostaneme pomocí řešení binomické rovnice $x^{12} = 1$. Výpočty opět nebudeme uvádět; zapíšeme pouze souřadnice všech vrcholů dvanáctiúhelníka: $P_1 = [1, 0]$, $P_2 = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $P_3 = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $P_4 = [0, 1]$, $P_5 = [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $P_6 = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $P_7 = [-1, 0]$, $P_8 = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}]$, $P_9 = [-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $P_{10} = [0, -1]$, $P_{11} = [\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $P_{12} = [\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}]$. Přímka P_1P_9 má analytické vyjádření $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$, přímka P_2P_{11} vyjádření $(2+\sqrt{3})x - y - (1+\sqrt{3}) = 0$, přímka P_4P_{12} je analyticky vyjádřena rovnicí $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$. Pomocí vztahů známých z analytické geometrie (popřípadě užitím determinantu) zjistíme, že se dané tři úhlopříčky skutečně protínají v jednom bodě o souřadnicích $[\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}]$.

Příklad 5: Jednou ráno začalo hustě sněžit s konstantní intenzitou (rychlostí). V 8 hodin vyjel sněžný pluh. Do 9 hodin upravil 2 km silnice, v 10 hodin měl za sebou již 3 km. Předpokládáme-li, že pluh odstraní za každou hodinu konstantní množství sněhu, určete čas, kdy začalo sněžit.

Řešení: Nejprve označíme potřebné veličiny. Písmenem t budeme značit čas od okamžiku, kdy začalo sněžit, T bude označovat čas měřený od výjezdu sněžného pluhu. Nechť $s(t)$je dráha, kterou pluh urazil do doby t (měřené pochopitelně pro $t \geq T$). Nechť dále $h(t)$ označuje výšku napadaného sněhu v čase t. Nyní matematicky vyjádříme tvrzení, že sníh padá s konstantní rychlostí. Lze psát $\frac{dh}{dt} = c$, kde c je konstanta. Integrováním obou stran dostaneme $h(t) = ct + C$, kde C je integrační konstanta. Protože ale $h(0) = 0$, musí být $C = 0$. Odtud tedy $h(t) = ct$. Poznamenejme, že tento vztah lze odvodit také pomocí analogie s fyzikálním vztahem pro dráhu rovnoměrného pohybu. Tvrzení, že pluh odstraňuje sníh s konstantní intenzitou, znamená, že rychlost pluhu je nepřímo úměrná výšce napadaného sněhu v každém čase t. Pro $t \geq T$ tedy platí vztah $\frac{ds}{dt} = \frac{k}{h(t)} = \frac{k}{ct} = \frac{K}{t}$, kde $K = \frac{K}{c}$ je konstanta. Integrováním obou stran dostaneme podmínku $s(t) = K \cdot logt + L$, kde L je integrační konstanta. Shrneme nyní podmínky určené zadáním: $s(t) = K \cdot logt + L$, $s(T) = 0, s(T+1) = 2, s(T+2) = 3$. Po dosazení máme $K \cdot logT + L = 0, K \cdot log(T+1) + L = 2, K \cdot log(T+2) + L = 3$. Poslední tři rovnice tvoří soustavu, ze které určíme T. Z první rovnice vyjádříme $L = -K \cdot logT$; po dosazení do druhé a třetí rovnice za L získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých K, T. Z obou rovnic vyjádříme neznámou K: $K = \frac{2}{\log(T+1) - \log T}, K = \frac{3}{\log(T+2) - \log T}$. Nyní porovnáme pravé strany obou rovnic. Po úpravě obdržíme rovnici $(\frac{T+2}{T})^2 = (\frac{T+1}{T})^3$. Tato rovnice je kvadratická, má dva reálné kořeny. Z nich pro řešený problém má smysl pouze kladná hodnota $T = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, což je přibližně $0,618$hodin, tzn. asi 37 minut. Sněžit tedy začalo přibližně v 7 hodin a 23 minut.

Příklad 6: U rybníku sedí n rybářů. Každý z nich loví ryby nezávisle na ostatních. Jakmile každý z rybářů uloví rybu, odejde. Nikdo však neopustí svoje místo bez úlovku. Určete funkci, pomocí které je možno popsat klesající počet rybářů u rybníka (předpokládáme samozřejmě, že v rybníku je dostatek ryb).

Řešení: Zavedeme vhodné označení. Čas budeme měřit od okamžiku, kdy rybáři začali lovit. Jako $f(t)$označíme poměr mezi počtem rybářů, kteří v čase $t$ještě loví a celkovým počtem rybářů n. Odtud tedy počet rybářů, kteří v čase t ještě loví, je určen hodnotou *n· f(t)*. Hledaná funkce $f(t)$nezávisí na n ani na tom, který časový okamžik zvolíme za počáteční. Proto počet rybářů, kteří v čase $t+h$ ještě loví, lze určit dvěma způsoby: Buďto *n· f(t+h)* nebo *[n·f(t)]· f(h)*. Posledni dva výrazy porovnáme. Protože $n \neq 0$, dostaneme fukcionální rovnici ve tvaru: *f(t+h) = f(t)· f(h)*. Tato rovnice je jednou z modifikovaných Cauchyových rovnic. Jejím řešením se vzhledem k rozsahu příspěvku nemůžeme zabývat, podrobnosti lze nalézt např. v [1], [2], [6], [8]. Uvedeme pouze spojité, nerostoucí a nenulové řešení, které má význam pro řešený problém. Tímto řešením je funkce $f(t) = a^t$,kde a je reálná konstanta s vlastností $a \in (0, 1)$. Pro $t = 0$ platí $a^0 = 1$, což odpovídá skutečnosti, že v čase $t = 0$ je u rybníka všech n rybářů. Poznamenejme ještě, že číslo $n \cdot\ a^t$ vyjadřuje pravděpodobný počet rybářů u rybníka v čase t. Čím větší bude číslo n, tím přesněji bude uvedená funkce vystihovat skutečný stav.

Závěrem lze konstatovat, že uvedené úlohy jsou jen některé z mnoha úloh a problémů, které využívají vhodného označení či geometrického vhledu. Poučením pro budoucí učitele matematiky by mělo být takové úlohy vyhledávat a zařazovat jak do výuky, tak i pro přípravu talentovaných studentů v matematice (řešitelé matematické olympiády, Klokana a pod.)

Literatúra

[1] Beránek, J. : *Funkcionální rovnice.* Brno: Masarykova univerzita, 2004, s. 74. ISBN 80-210-3422-X

[2] Davidov, L. : *Funkcionální rovnice.* Praha: Mladá fronta, 1984, s. 92. ISBN 23-046-84-03

[3] Hejný, M. , a kol. : *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN, 1989, s. 554. ISBN 80-08-01344-3

[4] Kuřina, F. : *Umění vidět v matematice.* Praha: SPN, 1989, s. 248. ISBN 80-04-23753-3.

[5] Larson L. C. : *Metódy riešenia matematických problémov.* Bratislava: Alfa, 1990, s. 416. ISBN 80-05-00627-6

[6] Neuman, F. : *Funkcionální rovnice.* Praha: SNTL, 1986, s. 148. ISBN 04-016-86

[7] Odvárko, O. : *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990, s. 264, ISBN 80-04-20434-1

[8] Smítal, J. : *O funkciách a funkcionálnych rovniciach.* Bratislava: Alfa, 1984, s. 144. ISBN 63-146-84

Adresa autora:
RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU v Brně
Poříčí 7
603 00 Brno
Česká republika
e-mail: beranek@ped.muni.cz

Špeciálne prípady Apolloniovych úloh

Martin Billich

Abstract. *In the present paper possibility of using inversion for solving Apollonius' problem are discussed. We describe some facts from the methods for solving the Apollonius' Tasks. There are shown two examples of special cases of the Apollonius' problem in this article.*

Úvod

Pôvodná *Apolloniova úloha*, zostrojiť kružnicu, ktorá sa dotýka daných troch kružníc v rovine, je jednou z významných planimetrických úloh. Svoje meno má podľa gréckeho geometra, fyzika a astronóma *Apollonia z Pergy* (približne 262 – 190 pred n. l.), ktorý sa zaoberal konštrukciami kružníc dotýkajúcich sa daných troch útvarov (bodov, priamok, kružníc) v diele *O dotykoch*. Spis sa nezachoval, takže nemôžeme s istotou povedať ako túto úlohu riešil tento veľký geometer. Zmienil sa o ňom *Pappos* okolo roku 320, podľa ktorého Apollonios vyriešil všetky úlohy s výnimkou prípadu troch kružníc. Apollonios uvažoval konštrukcie iba pomocou pravítka a kružidla.

Apolloniovou úlohou sa zaoberalo niekoľko slávných matematikou, najskôr Viète, Fermat, Newton, Euler, Carnot, potom Casey, Gergonne, Gaultier, Fouché a ďalší. Z tohto záujmu, ktorému sa tešili Apolloniove úlohy, vidíme, že mali veľký teoretický význam, podložený objavovaním rozmanitých metód ich riešenia, a dodnes patria k atraktívnym úloham syntetickej geometrie.

V pôvodnej Apolloniovej úlohe sú dané tri podmienky dotyku s danými kružnicami. Ak označíme jednu takú podmienku symbolom (k), môžeme túto úlohu označiť (kkk). Ak nahradíme niektoré z daných kružníc bodmi, podmienka (B), priamkami, podmienka (p), dostaneme týchto desať úloh (tzv. Apolloniove úlohy): *BBB, BBp, Bpp, ppp, BBk, Bpk, Bkk, ppk, pkk, kkk.* K týmto úlohám môžeme pripojiť úlohy, v ktorých daný bod je dotykovým bodom na danej kružnici, podmienka (k_B), alebo na danej priamke, podmienka (p_B). Takto dostaneme šesticu známych *Pappových úloh*, ktoré môžeme považovať za špeciálne prípady Apollonivých úloh: $p_BB, k_BB, k_Bp, p_Bp, p_Bk, k_Bk$. Namiesto podmienky dotyku môžeme ďalej zaviesť niektoré ďalšie špecifické podmienky, aby hľadaná kružnica mala daný polomer r (r), pretínala danú kružnicu ortogonálne (k^o), diametrálne (k^d), pod daným uhlom $\alpha(k^\alpha)$, resp. pretínala danú priamku ortogonálne (p^o), pod daným uhlom $\alpha(p^\alpha)$. Takto dostaneme ďalšie tvary Apolloniových úloh.

Podľa toho, či sa výsledná kružnica dotýka troch daných kružníc zvonka alebo zvnútra, má všeobecná Apolloniova úloha najviac osem riešení. Pri riešení vyššie uvedených úloh sa používajú najmä konštrukcie *metódou množín bodov daných vlastností* a konštrukcie *metódou geometrických zobrazení.* Používanie *algebricko-geometrickej metódy* nie je príliš časté. Podrobnejšie sa metódam riešenia Apolloniových úloh venuje Z. Sklenáriková v práci [2]. Nájdeme tu dôležitý historický prehľad metód ich riešenia (aj algebrické a deskríptívnogeometrické) so zreteľom na prekvapujúco jednoduché riešenie francúzskeho matematika *Jozepha D. Gergonna* (1771 – 1859).

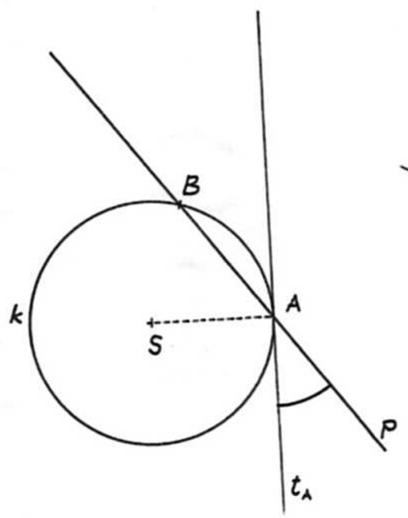
Riešenie špeciálnych Apolloniovych úloh

V tejto práci sú uvedené riešenia dvoch špeciálnych prípadov Apolloniovych úloh, ktoré sa v literatúrach spomínajú zriedkavo. Namiesto podmienky dotyku (pretínania sa pod nulovým uhlom) sa venujeme podmienke pretínania dvoch kružníc pod nenulovým uhlom. Na riešenie použijeme jednu z elementárnogeometrických metód riešenia Apolloniovej úlohy – *metódu kružnicovej inverzie*. Je veľmi efektívnou metódou riešenia mnohých planimetrických úloh. Do geometrie bola zavedená *Stubbsom* (r. 1843, Philosophical Magasin). V niektorých prípadoch Apolloniových úloh (obzvlášť ak je medzi danými prvkami bod) je vhodné pomocou kružnicovej inverzie (daný bod pritom volíme za stred inverzie) previesť danú úlohu na jednoduchšiu, ktorú vyriešime (metódou množín bodov daných vlastností alebo metódou geometrických zobrazení) a výsledok prevedieme pomocou tej istej kružnicovej inverzie (involutórneho zobrazenia) na výsledok pôvodnej úlohy. Na tomto mieste je potrebné zdôrazniť, že kružnicová inverzia úlohu nerieši priamo, ale ju iba prevádza na úlohu jednoduchšiu. Viac o kružnicovej inverzii nájdeme napr. v práci [3].

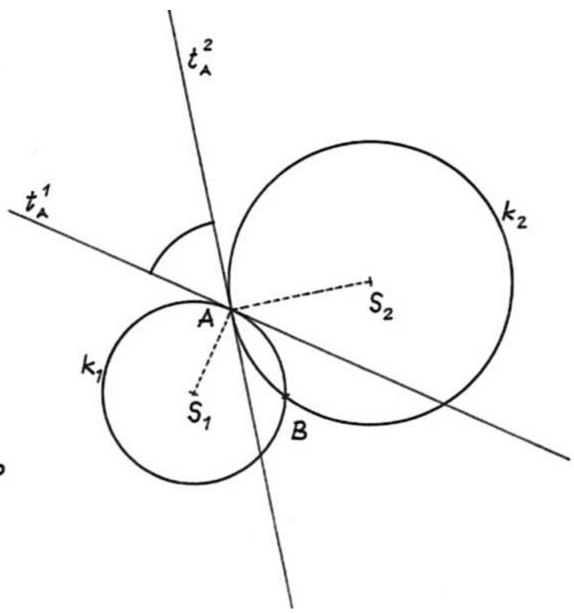
Skôr ako prejdeme k riešeniu niektorých špeciálnych Apolloniovych úloh, pripomenieme si pojem uhla priamky s kružnicou a uhla dvoch kružníc.

Definícia.

a) Uhlom priamky s kružnicou nazývame uhol priamky s dotyčnicou ku kružnici v spoločnom bode priamky a kružnice (*obr. 1a*).



obr. 1a



obr. 1b

b) Uhlom dvoch nedisjunktných kružníc nazývame uhol dotyčníc týchto kružníc v spoločnom bode kružníc (*obr. 1b*).

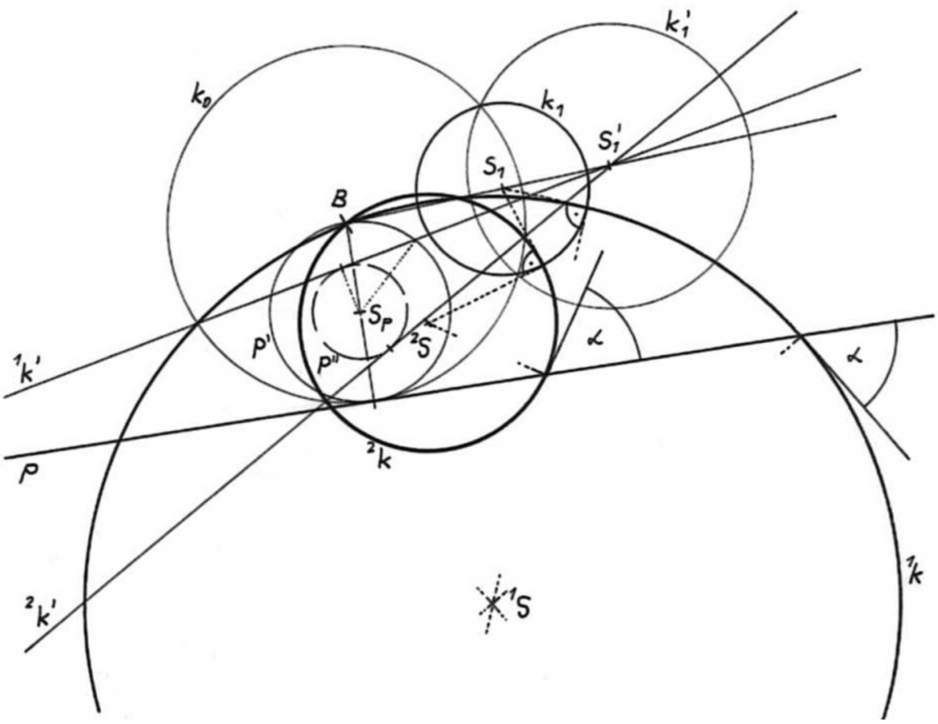
c) Dve kružnice sa pretínajú ortogonálne, ak ich uhol je zhodný s pravým uhlom.

Úloha 1. $(Bp^{\alpha}k^{o})$

Daná je kružnica $k_1(S_1;\ r_1)$, priamka p a bod B, ktorý neleží na kružnici k_1 ani na priamke p. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom B, pretína kružnicu k_1 ortogonálne a priamku p pod daným uhlom α.

Riešenie:

Rozbor a konštrukcia. Predpokladajme, že existuje kružnica k požadovaných vlastností. Úlohu vyriešime použitím kružnicovej inverzie s určujúcou kružnicou $k_o(B; r')$, kde r' je ľubovoľné kladné číslo. V tejto kružnicovej inverzii sa kružnica k_1 zobrazí do kružnice k_1', priamka p do kružnice p' prechádzajúcej bodom B a hľadaná kružnica k do priamky k', ktorá bude ortogonálna s kružnicou k_1' a kružnicu p' pretína pod uhlom α. Tým sme úlohu zmenili na konštrukciu priamky k', ktorá pretína kružnicu k_1' ortogonálne (t.j. prechádza jej stredom) a kružnicu p' pretína pod uhlom α. Ak priamka k' má pretínať kružnicu p' pod uhlom α, vtedy tetiva tejto kružnice ležiaca na priamke k' je známa, a tým je známy aj polomer kružnice p'' sústrednej s kružnicou p', ktorej sa priamka k' dotýka. Našou úlohou je teraz zostrojiť stredom kružnice k_1' dotyčnice ku kružnici p'', čo je už triviálne. Ak ku priamke k' zostrojíme inverznú kružnicu k, tak k má požadované vlastnosti (*obr. 2*).



obr. 2

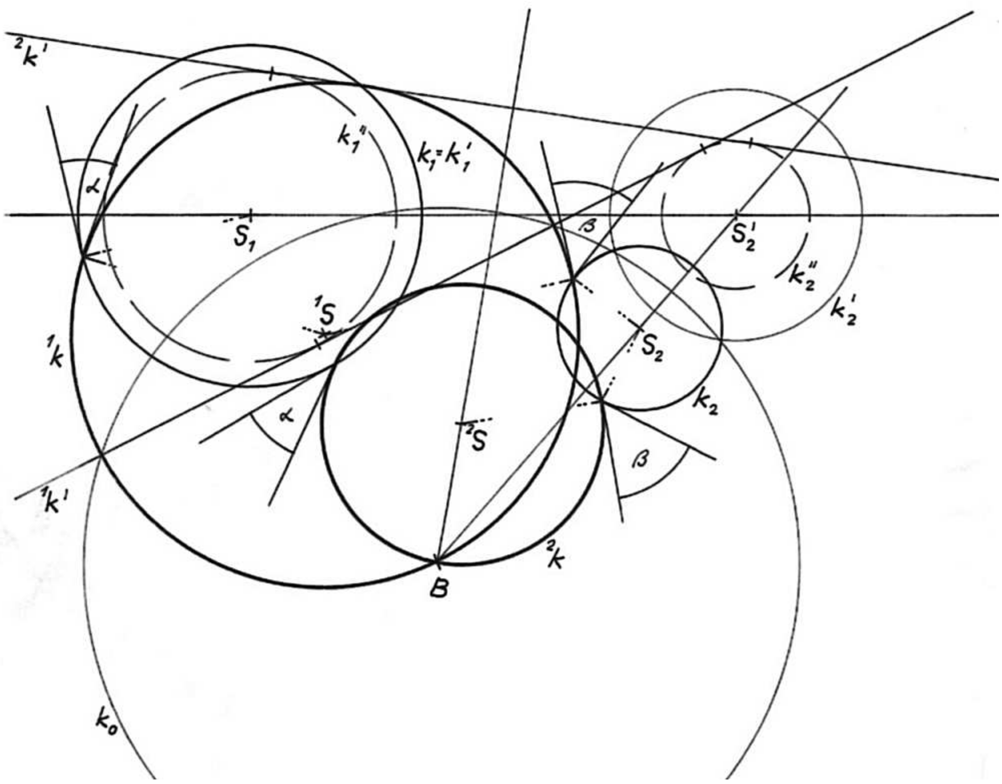
Diskusia a záver. Počet riešení úlohy závisí od počtu dotyčníc z bodu S_1' ku kružnici p'', t.j. od vzájomnej polohy kružnice p'' a stredu S_1' kružnice k_1'. V našom prípade je bod S_1' vonkajším bodom kružnice p''. Potom existujú dve dotyčnice požadovaných vlastností, ktorým zodpovedajú dve kružnice: ${}^1k({}^1S;\ |{}^1SB|\ )$, ${}^2k({}^2S;\ |{}^2SB|)$. Ak bod S_1' je bodom kružnice p'', tak úloha má jediné riešenie. V prípade, že S_1' je vnútorným bodom kružnice p'', zadaniu úlohy nevyhovuje žiadna kružnica požadovaných vlastností.

Úloha 2. $(Bk^{\alpha}k^{\beta})$

Dané sú dve rôzne kružnice $k_1(S_1;\, r_1)$, $k_2(S_2;\, r_2)$ a bod B, ktorý neleží na žiadnej z nich. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom B, kružnicu k_1 pretína pod daným uhlom α a kružnicu k_2 pod uhlom β.

Riešenie:

Rozbor a konštrukcia. Nech existuje kružnica k požadovaných vlastností. Úlohu vyriešime použitím kružnicovej inverzie. Zvoľme určujúcu kružnicu $k_o(B; r')$, kde r' zvolíme tak, aby kružnice k_o a k_1 boli ortogonálne. V tejto kružnicovej inverzii je kružnica k_1 samodružná ($k_1' = k_1$), kružnica k_2 sa zobrazí do kružnice k_2' a hľadaná kružnica k do priamky k', ktorá bude pretínať kružnice k_1' a k_2' postupne pod uhlami α a β v danom poradí (*obr. 3*).



obr. 3

Ak priamka k' má pretínať kružnicu k_1' $[k_2']$ pod uhlom α $[\beta]$, vtedy tetiva tejto kružnice ležiaca na priamke k' je známa, a tým je známy aj polomer kružnice k_1'' $[k_2'']$ sústrednej s kružnicou k_1' $[k_2']$, ktorej sa priamka k' dotýka. Zvolenou inverziou sme previedli danú úlohu na úlohu: Zostrojiť spoločné dotyčnice dvoch daných kružníc. Zostrojením inverzných obrazov týchto dotyčníc dostaneme kružnice požadovaných vlastností.

Diskusia a záver. Počet riešení závisí od počtu spoločných dotyčníc kružníc k_1'' a k_2''. Ak kružnice k_1'' a k_2'' nemajú spoločný dotyk a jedna leží zvonku druhej (*obr. 3*), úloha má štyri riešenia. Kvôli prehľadnosti sú na obrázku zostrojené iba dve riešenia: ^1k, ^2k. Ak sa kružnice k_1'' a k_2'' zvonku dotýkajú, úloha má tri riešenia. V prípade, že sa tieto dve kružnice pretínajú v dvoch rôznych bodoch, úloha má dve riešenia. Ak kružnice k_1'' a k_2'' majú vnútorný dotyk, úloha má jediné riešenie. Úloha nemá riešenie, ak jedna z kružníc leží vnútri druhej.

Záver

Apolloniove úlohy patria k najatraktívnejším konštrukčným úlohám elementárnej geometrie. Okrem zvýšenia záujmu o geometriu sú určite vhodným príspevkom k výchove logického myslenia, presnosti, estetického cítenia a trpezlivosti. S problematikou *Apolloniovych úloh* by sa mohli oboznámiť žiaci už na stredných školách pri riešení mnohých zaujímavých úloh, napr. v rámci matematických krúžkov, čím by si rozšírili svoje vedomostí z tejto časti matematiky.

Literatúra

[1] Holubář, J.: *O metodách rovinných konstrukcí,* JČMF Praha, 1949.

[2] Sklenáriková, Z.: *K metódam riešenia Apolloniovej úlohy,* In: *Matematika v proměnách věku III*, Edícia Dějiny matematiky, Praha, 2004, s. 45 – 55.

[3] Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*, FMFI UK Bratislava, 2002.

Adresa autora:

RNDr. Martin Billich
Katedra matematiky a fyziky
Pedagogická fakulta KU
Nám. A. Hlinku 56/1
034 01 Ružomberok
e-mail: billich@fedu.ku.sk

Aspekty riešenia numerických metód na fakultách technických univerzít

Jana Boržíková

Abstract. *In paper is shown various aspect of teaching numerical alghorithm at technical faculities. From the principle of clearness point of view were prepared some illustration, e.g. term: convergency, division, derivative. These illustrations are part of multimedial CD used at Faculty of production technologies.*
Key words: *principle of clearness, animation, alghorithms of numecical methods*

Úvod

Zásada názornosti vo vyučovacom procese sa vhodne prejavuje používaním rozličných názorných učebných pomôcok a príslušnej didaktickej techniky s cieľom, aby si študenti vytvárali správne a presné predstavy a obrazy o jednotlivých predmetoch a javoch.

V psychologickej a pedagogickej literatúre sa uvádza, že prostredníctvom zraku a sluchu získava človek až 94 % všetkých informácií. Pritom si pamätá 20 % počutých, 30 % videných, ale až 50 % počutých aj videných súčasne. [4]

Názornosť vo vyučovacom procese by mala spĺňať tieto didaktické funkcie [3]:

– predstavuje zdroj informácií pre študentov,

– uľahčuje pochopiť abstraktné prvky učiva,

– zvyšuje záujem študentov, ich motiváciu, podporuje ich pozornosť,

– prispieva k rozvoju myslenia,

– pomáha vytvárať presnejšie predstavy, pojmy, atď.,

– je prostriedkom proti odtrhnutiu teórie a praxe, školy od života.

Nadmerné a nesprávne používanie názornosti niekedy môže brzdiť rozvoj abstraktného myslenia študentov, preto treba dbať a na správny pomer názorného a abstraktného, konkrétneho a zovšeobecneného.

Názornosť vo vyučovacom procese môže byť sprostredkovaná viacerými technickými prostriedkami vyučovania. Pravdepodobne najvyužívanejším v súčasnosti je výpočtová technika. Výsledkom jej premysleného využívania v numerickej matematike je možné prezentovaním niektorých abstraktných pojmov dosiahnuť u študentov lepšie pochopenie a zapamätanie. Samozrejme, že na tomto stupni školy už hovoríme o abstrahovanom názore, t. j. využívame už schémy, diagramy a grafy a formalizované vzťahy (matematické formuly a symboly). V niektorých prípadoch využívame simulačný, alebo animovaný záznam. A práve o využívaní takýchto animácií na hodinách numerickej matematiky na našej fakulte sa budem zaoberať v tomto príspevku.

Analýza názornosti v tvorbe animácií pri výučbe numerickej matematiky

Vo svojej budúcej dizertačnej práci som sa zamerala na sledovanie vplyvu využitia výpočtovej techniky pri riešení numerických algoritmov za účelom zvyšovania efektívnosti vyučovania numerickej matematiky. Súčasťou práce je aj výukové CD. Výskum popísaný v dizertačnej práci ukázal, na čo je potrebné sa zamerať pri jeho tvorbe. Predstavované CD je technickým prostriedkom vyučovania, využívaným na hodinách numerickej matematiky.

Vo výskume bolo porovnávané využívanie programovacieho jazyka Pascal a programu MS Excel. Pracovné prostredie MS Excelu sa ukázalo ako prostredie študentom blízke, vedeli pracovať s bunkami (kopírovať, presúvať, usporiadať), so vzorcami (zapisovať predpisy jednotlivých funkcií), vedeli vytvárať grafy.

Program MS Excel sa vo všeobecnosti potvrdil, ako vhodný prostriedok, pretože (podľa Hypotézy 1) prispieva k vyššiemu zapamätaniu algoritmu a tým zlepšuje výsledky študentov pri záverečných kontrolách. Ukázalo sa však, že niektoré šablóny pripravované na hodinách numerickej matematiky v spolupráci so študentmi je potrebné prehodnotiť, pretože nie pri všetkých vyučovaných algoritmoch sa potvrdilo zlepšenie. Pri niektorých sa dokonca ukázali nedostatky využívania Excelu. Keďže program nevie pracovať s premennou, výskum ukázal, že interpolačné úlohy boli riešené rovnako programovacím jazykom aj MS Excelom. Zlepšenie nastalo pri riešení aproximačných úloh a pri riešení jednej nelineárnej rovnice. Bezo zmeny kvality riešenia bolo aj riešenie sústavy nelineárnych rovníc. Pri riešení určitého integrálu bolo dokonca zaznamenané zhoršenie výsledkov. Bolo to spôsobené tým, že študenti nesprávne používali šablónu. Nezahrnuli do riešenia všetky kroky algoritmu a tým dostávali chybné výsledky.

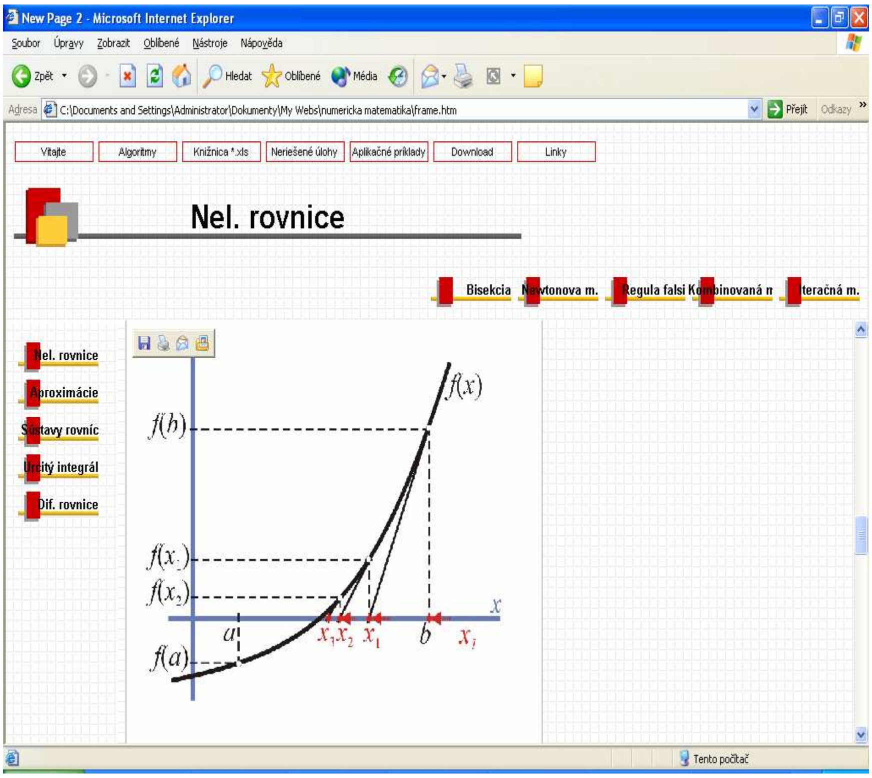
Práve chyby tohto typu chcem pripravovaným CD odstrániť. Cieľom je podať komplexný zdroj informácií, plniaci viaceré funkcie kladené na výpočtovú techniku pri výučbe všeobecne (funkcia motivačno-stimulačná, informačno-expozičná, precvičovacia aj aplikačná). [1]

Cieľom CD z hľadiska teórie vyučovania je zvýšiť u študentov záujem o predmet, dosiahnuť porozumenie jednotlivým algoritmom a posilniť u nich vizuálnu stránku riešených problémov. Výklad algoritmu je, podľa zásady názornosti, doplnený o animácie, dokresľujúce niektoré bežné pojmy numerickej matematiky (konvergencia, delenie intervalu na ekvidistančné body, nahradzovanie funkčnej hodnoty jej deriváciou).

CD je tvorené formou webu. Ten bol pripravovaný bežne dostupným programom Microsoft FrontPage verzia 4.0. [3] Využívam pritom do maximálnej možnej miery niektoré výhody *.html formátu. Ide najmä o prehľadnosť, hypertextové odkazy, možnosť odkazov na súbory rôzneho typu (pdf, exe, gif, xla). Pripravených je cca 50 www stránok. Každá stránka obsahuje v hornej časti Navigation Bar, zobrazujúci Top level. Z neho je potom zrejmá úroveň jednotlivých stránok. V Top leveli, po domovskej stránke **Vitajte** nasledujú vetvy: **Algoritmy**, **Knižnica *.xls, Neriešené úlohy, Aplikačné príklady, Download, Linky.** Stránky, na ktoré sú hypertextové odkazy v Top leveli, sú delené na rámce, čo prináša lepšiu orientáciu a pohyb po webe, pretože pri práci z nimi sa mení obsah iba jedného z rámcov. Ostatné menu ostávajú nezmenené. Otváranie webu je zabezpečené stránkou domovskou stránkou index.html.

Pri každom algoritme sú odkazy na Teoretickú časť, Obrázok, Riešený príklad, Nahrávka riešenia v MS Excel, Úlohy na precvičenie a ukážka úlohy z praxe.

Obrázok (Obrázok 1) je tvorený ako animácia *.gif, aby vizuálny dojem zvýšil u študentov zapamätateľnosť a predstavivosť. Boli pripravované programom Advanced GIF Animator. Každý z *. gif obrázkov je konštruovaný z 50 statických *.jpg obrázkov, pripravených v grafickom editore. Sú obsiahnuté pri všetkých metódach na riešenie nelineárnych rovníc a pri riešení určitého integrálu a pri riešení diferenciálnej rovnice.

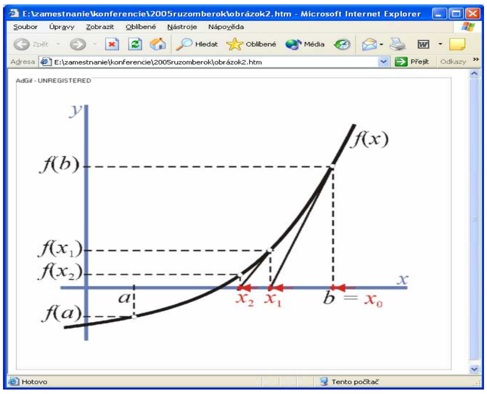


Obrázok 1 Ukážka stránky z výukového CD. V ľavom menu si užívateľ volí zameranie úlohy, hornom menu si vyberie metódu. Banner obsahuje základnú štruktúru webových stránok

Pojmy „iteračný proces“, „konvergencia“ v algoritme numerického riešenia nelineárnej rovnice

Animácie v časti Riešenie nelineárnej rovnice sú zamerané na pochopenie pojmu iteračný proces, konvergencia. Pri všetkých obsiahnutých metódach (Metóda bisekcie, Newtonova metóda, Metóda regula falsi, Kombinovaná metóda a Iteračná metóda) je graficky prezentovaný spôsob, ako k samotnému iteračnému procesu dochádza, čo to znamená, ak postupnosť x_i konverguje ku koreňu nelineárnej rovnice.

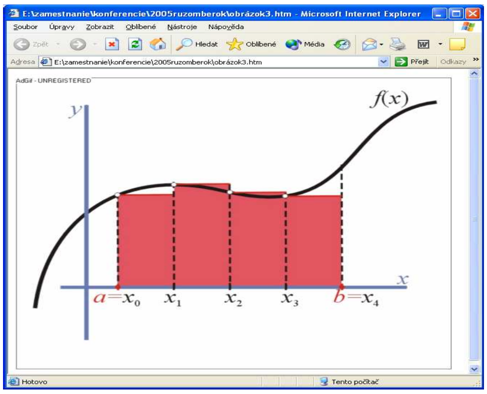
Ako ukážka bola vybraná animácia Newtonovej metódy. (Obrázok 2) Aj keď, podľa samotného algoritmu môžu nastať štyri prípady, kde podľa priebehu funkcie volíme začiatočný bod iterácie, bola úloha zovšeobecnená do tohto jedného príkladu rastúcej, konvexnej funkcie. Grafické porovnanie jednotlivých algoritmov vedie k vyššej zapamätateľnosti a porozumeniu metódy.



Obrázok 2 Nahrávka iteračného procesu pri Newtonovej metóde

Pojem „delenie intervalu“ v algoritme numerického riešenia určitého integrálu

Pojem delenie intervalu bol názorne prezentovaný pri obdĺžnikovej a lichobežníkovej metóde. Delenie intervalu integrovania má kľúčovú úlohu pri riešení určitého integrálu a je základným pojmom aj pri Riemannovej definícii určitého integrálu v matematickej analýze.

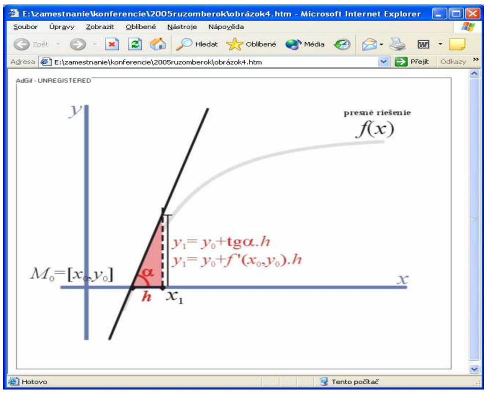


Obrázok 3 Nahrávka delenia intervalu na $n = 4$, $n = 8$, $n = 16$ uzlových bodov pri obdĺžnikovej metóde

Náhodne vybraná ohraničená funkcia $f(x)$ (Obrázok 3) je na svojom intervale integrovania $\langle a, b\rangle \subset D(f)$ postupne delená na $n = 4$, $n = 8$, $n = 16$ uzlových bodov, pričom sú vypočítané plochy obdĺžnikov navzájom porovnávané a na záver sú porovnané aj so skutočnou hodnotou integrálu. Okrem porozumenia je pochopenie obdĺžnikovej metódy dôležité pre propedeutiku nahradzovania funkcie $f(x)$ funkciou vyššieho stupňa. Voľba vyššej hodnoty n, alebo animácia Simpsonovej metódy (metóda nahradzovania integrovanej funkcie $f(x)$ polynómom 2. stupňa, totiž strácala na názornosti. Obrázok sa stal viac neprehľadným, ako názorným.

Pojem „nahradzovanie funkčnej hodnoty $f(x_0)$ deriváciou funkcie v bode $f\,'(x_0)$“ v algoritme numerického riešenia diferenciálnej rovnice

Na riešenie diferenciálnej rovnice obsahuje CD Eulerovú metódu, Runge–Kutta metódu 2. rádu a 4. rádu. Z posledne spomenutého dôvodu bola vypracovaná animácia iba pre metódu riešenia diferenciálnych rovníc najnižšieho rádu, t. j. pre Eulerovú metódu. Zo zadania diferenciálnej rovnice je predpis pre deriváciu funkcie je známy a v samotnom algoritme je využívaný jej geometrický význam. Čo je aj graficky zdôraznené. (Obrázok 4) Vizualizácia tohto numerického problému vedie k upevneniu pojmu derivácia funkcie všeobecne a poukazuje na jej význam pri riešení aj iných úloh, nie iba základných úloh matematickej analýzy. Každá z Runge-Kutta metód je „len spresneným“ tejto metódy. Využíva lepšiu aproximáciu ako je derivácia funkcie v ľavom krajnom bode.



Obrázok 4 Nahrávka numerického riešenia diferenciálnej rovnice Eulerovou metódou

Záver

Dúfam, že nové možnosti výpočtovej techniky iba podporia známy Komenského výrok: „Aby sa veci viditeľné zraku, počuteľné sluchu, čuchateľné čuchu, chutnateľné chuti a hmatateľné hmatu podávali, ak je to možné, viacerými zmyslami súčasne.“ Pretože možno hodnotiť, že využívanie tejto metodiky výučby (forma webových stránok, *.gif animácie, *.exe nahrávky práce na pracovnej ploche a MS Excel a Visual Basic ako prostriedok na vykonanie výpočtov) zaznamenalo u študentov záujem o predmet. Napríklad pri výklade obdĺžnikovej metódy študenti sami navrhovali zvýšenie presnosti integrovania nahradeným plochy pod funkciou lichobežníkmi. Zároveň treba dbať, a to zdôrazňujem, aby nebolo podcenené abstraktné zapisovanie algoritmov, pretože to sa v ostatných ročníkoch ukázalo ako veľká slabina našich študentov.

Literatúra

[1] Boržíková, J.: *Algoritmy numerických metód s podporou PC v príprave inžinierskeho štúdia.* Písomná práca k dizertačnej skúške. Nitra:FPV, 2003.

[2] Fisher, V. – Petrík, A.: *Základy inžinierskej pedagogiky.* Košice: TU, 1993. ISBN 80-7099-219-0

[3] Hlavenka, J. – Lapáček, J. – Roubal, P.: *MS FrontPage 2003*. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-251-0366-8

[4] Turek, I.: *Zvyšovanie efektívnosti vyučovania.* Bratislava: Edukácia, 1998. ISBN 80-88796-89-X

Adresa autora:
Mgr. Jana Boržíková
Katedra matematiky informatiky a kybernetiky
Fakulta výrobných technológií
TU Košice, so sídlom v Prešove
Bayerova 1
080 01 Prešov
e-mail: borzikova.jana@fvt.sk

Gradované série úloh a písomných prác v matematike základnej školy

Jaroslava Brincková

Abstract. *This paper shows possibilities of creation the graded series of tasks in written tests which give a possibility of choice to a pupil from a given aggregate of tasks with gradational difficulty such tasks which answer its knowledge and possibilities level. Thereby they affect motivationally to the acquirement of the best performances in mathematics.*

Úvod

Vieš čo si? Si zázrak. Si jedinečný. Na celom svete neexistuje iné dieťa, ktoré by bolo úplne rovnaké ako ty. Za milióny rokov, ktoré ubehli, nikdy neexistovalo úplne rovnané dieťa ako ty. …Máš schopnosti pre čokoľvek.

Pablo Casals

Vštepujeme toto našim deťom v školách? Cítia deti svoju vlastnú hodnotu v našom výchovnom pôsobení k nim. Určite by sme sa mali aspoň snažiť uberať sa týmto smerom.

Naša práca je vlastne snahou vykročiť v ústrety originalite jednotlivca a dať mu možnosť zažiť úspech vo vyučovaní matematiky. Podľa možnosti každému žiakovi. Tak žiakovi šikovnému, ktorý je nad priemerom triedy, ako aj slabšiemu žiakovi, ktorý pocíti, že niečo vie. Zvýšiť jeho sebavedomie a taktiež motiváciu ísť a snažiť sa ďalej, aby cítil, že zvýšené úsilie prinesie svoje ovocie.

Gradované písomné práce - vymedzenie pojmu

V odbornej literatúre sme sa nestretli s jednoznačným vymedzením termínu „***gradovaná séria úloh***“ pokúsime sme sa o vlastnú interpretáciu tohto spojenia s ohľadom na dostupnú literatúru a názory odborníkov. Napríklad v [3], [8] .

V Slovníku Slovenského jazyka a sa gradácia vysvetľuje ako stupňovanie, zväčšovanie, zosilňovanie. Slovo ***graduovať*** sa vysvetľuje ako označovať stupnicou a ***séria*** ako skupina, rad, súbor vecí, jednotiek patriacich k sebe. Taktiež môžeme bližšie vysvetliť pojem úloha. ***Úloha*** v matematike sa vysvetľuje ako problém, ktorý treba vyriešiť na základe známych výsledkov.

Na základe uvedeného sa stotožňujeme s takýmto vysvetlením termínu „**gradovaná séria úloh**“: *gradovať, čiže postupne stupňovať náročnosť úloh v jednej sérii úloh, v ktorej každá úloha obsahuje tri rôzne náročné varianty. Nie sú označené stupnicou, ale ako a, b, c – varianty. Najľahšie úlohy v sérii označujeme ako variant „a“, stredne ťažké ako variant „b“ a najťažšie ako variant „c“. Úlohy však môžu byť zadané aj formou príkladu, písomného počítania algoritmu.* Gradovaná séria úloh umožňuje v súlade so vzdelávacím cieľom precvičiť učivo tak, aby žiak preukázal schopnosť dobre aplikovať naučený postup na jemu primeranej úrovni.

Gradované písomné práce sú zostavené tak, že v každej sérii sú tri úlohy rôznej obtiažnosti ku ktorým je priradené bodové hodnotenie. Žiaci si podľa svojich schopností vyberú z každej trojice úloh vždy iba jednu úlohu. Žiak rieši toľko úloh, koľko je trojíc úloh. V písomnej práci je uvedená aj klasifikačná stupnica, umožňujúca prevod počtu získaných bodov na klasifikačné stupne.

Gradované písomné práce je vhodné použiť najmä v klasických triedach, v ktorých sa objavujú známky 1 – 4,5. Ak si žiak slabšie prospievajúci vyberie všetky „á-čka" a vyrieši ich správne, dostane známku ako usporiadanú dvojicu [1,3]. Jednotku za 100% výkon vo svojej najľahšej kategórii a trojku za porovnanie obtiažnosti zvolených úloh vo vzťahu k maximálnemu počtu bodov, ktoré mohol dosiahnuť pri výbere náročnejších úloh v písomnej práci. Takto je ocenená jeho snaha pracovať podľa svojich možností s maximálnym výkonom. Učí sa pracovať dobre a nie „odfláknuť" prácu.

Škola má podľa V. Uherčíkovej [12] *pripraviť žiakov čo najlepšie na plnenie požiadaviek reálneho života.* Jej úlohou je pomôcť žiakovi zorientovať sa na ceste svojej profesionálnej dráhy. Možnosť voľby primerane náročných úloh citlivým spôsobom diferencuje triedu v klasifikačnej stupnici. Ak v matematike slabší žiak počíta v „klasickej písomnej práci" postupne všetky príklady, čo dostane? Obyčajne takúto písomnú prácu zvládne na 4 alebo 5. V gradovaní spočíva vnútorná motivácia pre slabo prospievajúcich žiakov – „netopíme ich". Taktiež je to motivácia pre vynikajúcich žiakov, ktorí môžu naozaj ukázať, že sú lepší. Tvorba gradovaných písomných práca a ich oprava je náročná hlavne pre učiteľa. Ak v klasickej písomnej práci žiak rieši 4 úlohy, učiteľ opravuje jednu variantu prác. V prípade gradovanej série úloh môže vzniknúť až 3^4 rôznych písomných prác. Z nich sa v 25 člennej triede vyskytujú len niektoré varianty.

Ako zostaviť gradovanú sériu úloh?

Problémová situácia (PS), ako uvádza M. Hejný [3], je štruktúra, ktorá obsahuje niekoľko ***parametrov*** viazaných súborom väzieb. Ak niektoré z parametrov číselne určíme, je možné ostatné parametre vypočítať. Tak vznikajú z problémovej situácie školské matematické úlohy rôznej obtiažnosti. Napríklad pri porovnávaní veku žiakov.

Opis problémovej situácie: Vek Adama a Bela

Dnes má Adam x rokov a Belo y rokov. O q rokov bude Belo taký starý, ako je Adam dnes a Adam bude mať potom m rokov. Pred p rokmi mal Adam toľko rokov, ako má Belo dnes a Belo mal vtedy o n rokov menej, ako má Adam dnes. (Otázka???)

V danej situácii (PS) je šesť parametrov (P): x, y, p, q, m, n. Pýtame sa aké hodnoty môžu nadobúdať? Môže to byť x = -1, y = 200, p = 19/7? V našej dohode „ počítať iba v obore malých celých čísel" nie. Vek nad 105 rokov sa často nevyskytuje.

Vzťahy: Z podmienok vyplývajú väzby:

$$y + q = x\ (1),\ x + q = m\ (2),\ x - p = y\ (3),$$

$$y - p = x - n\ (4)\ p = q\ (5),.......$$

Zo všetkých vzťahov sa usilujeme vybrať takú podskupinu, ktorá je :

úplná – každý ďalší člen PS sa z nej dá vyvodiť

nezávislá- žiaden zo vzťahov tejto skupiny sa nedá vyvodiť zo zvyšných.

Skupinu vzťahov, ktorá je úplná a nezávislá nazveme ***báza vzťahov*** (BV) danej PS.

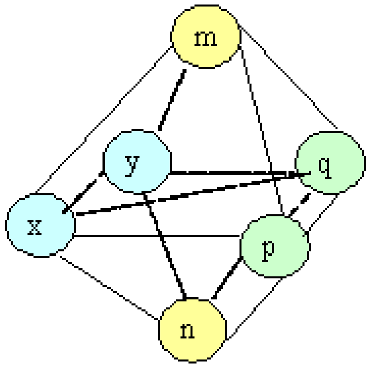
V našom príklade sú to vzťahy (1) až (4).

Stupne voľnosti (SV) udávajú minimálny počet parametrov, ktoré v danej úlohe treba číselne zvoliť tak, aby z PS vznikla matematický úloha. Pritom platí :

(PP) – (BV) = (SV)

6 - 4 = 2

Ak si predstavíme jednotlivé parametre ako vrcholy mnohostena (obr. č.1) a väzby medzi nimi ako hrany jednotlivých stien, je evidentné, že zadaním ľubovoľnej dvojice parametrov vrcholov jednej steny vieme určiť tretí parameter.

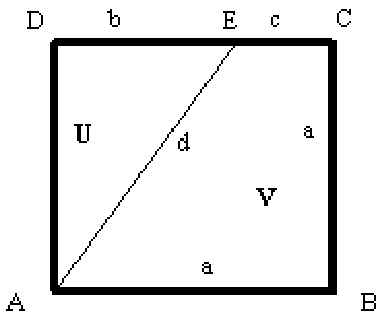


Obr. 1

Z danej problémovej situácie môžeme zostaviť sériu 15. gradovaných úloh tak, že volíme rôzne dvojice parametrov. Ich obtiažnosť pri riešení bude rôzna a závisí aj od vzdialenosti vrcholov mnohostena. Napríklad pri vyčíslení parametrov x a y sa úloha počíta ľahšie ako keď zadáme parametre ma n.

<u>Opis problémovej situácie: Zdedili sme záhradu</u>

Martin a Jozef zdedili záhradu tvaru štvorca, znázornenú na obr.č.2. Cez záhradu je natiahnuté zavlažovanie tak, že ju delí na trojuholník a lichobežník. Zostavte texty slovných úloh diferencovanej obtiažnosti v 6. až 8. ročníku ZŠ pre výpočet obvodu a obsahu rovinných útvarov udaných na obr. č.2.



Obr. 2

Úlohu môžeme pretransformovať do jazyka matematiky nasledovne:

Štvorec ABCD je úsečkou AE (E leží vo vnútri strany CD) rozdelený na trojuholník AED a lichobežník ABCE. Označme dĺžky : $a = |AB|$, $b = |DE|$, $c = |CE|$, $d = |AE|$.

Obsahy: $S = |ABCD|$, $U = |AED|$, $V = |ABCE|$.

Zo siedmich čísel a, b, c, d, S, U, V poznáme dve. Zvyšných päť máme vypočítať.

Vyjadríme dvojice parametrov uvedených v tabuľke č. 1 číselne. Vo zvolených 7. úlohách vypočítajte ostatné parametre. Stupňovanie obtiažnosti riešenia úlohy nie je dané len zmenou číselných oborov, ale aj počtom transformácií základných vzťahov, ktoré musí žiak realizovať pri vyjadrení neznámej zo vzorca a jej vyčíslení pomocou dvoch zadaných číselných údajov.

č.úl.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
a	4						
b	3		$\sqrt{2}$				
c		3			7		
d			$\sqrt{6}$		13	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{49}$
S				12		16	
U				6			44
V		90					

Tabuľka č. 1

Váženie úloh v gradovaných písomných prácach

Učivo matematiky venované rozširovaniu číselných oborov je v slovenských učebniciach matematiky usporiadané špirálovite. Realizuje sa v nasledujúcich etapách :
pojem číslo (modelovanie v E_3, v E_2, slovo, symbol, obraz na čísla na číselnej osi),
relácie,
operácie,
rovnice a nerovnice,
slovné úlohy.

Pritom ťažisko poznania je kladené na pojem číslo. Ak žiak nepozná napr. celé číslo, nemôže riešiť slovné úlohy s celými číslami. Bodová hodnota úloh v ktorých skúmame úroveň poznania pojmu číslo musí byť vyššia ako pri určovaní relácií medzi číslami.

Pri transformácii vzorcov pre výpočet úlohy žiak používa niektoré z rôznych úrovní nasledujúcich myšlienkových procesov:
reprodukcia,
porozumenie,
analýza, syntéza a induktívne myslenie,
deduktívne myslenie,
kauzálna analýza.

Náročnosť použitej myšlienkovej operácie umožňuje diferencovať váhu úlohy v rovnakom číselnom obore a etape. Zvolený číselný obor a úroveň myslenia určujú bodovú hodnotu úlohy v gradovanej sérii úloh a umožňujú navrhnúť klasifikačnú stupnicu pre gradovanú písomnú prácu. Ukážky gradovaných sérií úloh v matematike 2. stupňa ZŠ sú prezentované v Tvorivej dielni.

Záver

Pri overovaní účinnosti nami zostavených gradovaných písomných prác v školskej praxi 2.stupňa ZŠ sa ukázalo, že výchova k sebahodnoteniu je proces dlhodobejší. Gradované písomné práce nemôžeme zadať žiakom bez predbežnej prípravy. V takomto prípade ju žiaci nezvládnu. Nie je u nich vyvinutý až taký stupeň sebahodnotenia. a náhodne vybraní žiaci 7.a 8. ročníkov ZŠ v našom experimente neboli schopní sa rýchlo adaptovať na nový systém práce. Treba ich to naučiť!

Kľúčovou zložkou zodpovednosti **je sebaprijatie** – hlboké uvedomenie si svojho jedinečného talentu a ***možnosti byť vynikajúci***. Ďalšou zložkou je **sebariadenie** – vedomie, že nikto iný nemôže urobiť nič za nás, že ***kvalitu svojho života máme vo svojej moci***. Výchova žiakov k sebaprijatiu a sebariadeniu by mala predchádzať, podľa nášho názoru, vzdelávaniu. Takáto výchova by mala predchádzať aj nášmu výchovnému a vzdelávaciemu pôsobeniu na budúceho učiteľa matematiky. Prostredníctvom gradovaných písomných prác v matematike je možné vplývať na žiaka uvedeným spôsobom.

Gradované písomné práce by nemali byť jedinou formou písomných prác. Mali by sa využívať aj iné formy, aby učiteľ nebol len jednosmerne orientovaný.

Literatúra

[1] Brincková, J.: Implementácia učiva matematiky na 2. stupni ZŠ a pedagogický výskum v príprave učiteľov. *Nové možnosti vzdelávání a pedagogický výskumu.* Sborník příspěvků. Ostrava: PF UO, 2001. ISBN 80-7042-181-9

[2] Čápová, M.- Kolbaská, V.: *Nebojte sa písomných prác z matematiky.* Bratislava: SPN, 1997.

[3] Hejný, M.: *Gradované série úloh.* Študijný materiál pre účastníkov ďalšieho vzdelávania učiteľov. B.Bystrica: MC, 1997.

[4] Holík, M.: *Gradované série slovných úloh v 8. ročníku ZŠ.* B.Bystrica: PF UMB, 2002. Diplomová práca.

[5] Janoušková,B.:*Zbierka didaktických testov a gradovaných písomných prác z matematiky.* Banská Bystrica: MC, 2000. ISBN 80-8041-294-4

[6] Kocúrová ,V.: *Zbierka gradovaných úloh k učebnici matematiky pre 5. ročník ZŠ.* Prešov: MPC, 2005. ISBN 80-8045-364-0

[7] Mäsiar,P.: *Písomné práce z matematiky s rôznou náročnosťou.* Bratislava: MC, 2000. ISBN 80-8052-099-2

[8] Porubská, G.- Seidler, P.- Kurincová, V.: *Diferenciácia, integrácia a kooperácia v edukačnom prostredí.* Nitra: UKF, 2001. ISBN 80-8050-415-6

[9] Rybecká,M.: *Gradované písomné práce z matematiky pre 5. – 9.ročník ZŠ.* Prešov: MC, 2001. ISBN 80-8045-248-2

[10] Sakmárová, K.: *Gradované série úloh v matematike pre 7. ročník ZŠ.* Diplomová práca. B.Bystrica: PF UMB, 2004.

[11] Sýkorová, J.: *Zbierka gradovaných úloh k učebnici matematiky pre 6. ročník ZŠ.* Prešov: MPC, 2005. ISBN 80-8045-366-7

[12] Uherčíková, V.: *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti a jej význam v príprave učiteľov.* In: *Autentické vyučovanie a využitie medzipredmetových vzťahov vo vyučovaní matematiky. Z*borník z konferencie v Turčianskych Tepliciach. B.Bystrica: PF UMB, 2000, s. 109. ISBN 80-8055-444-7

Adresa autora:
Doc. RNDr. Jaroslava Brincková, CSc.
Katedra matematiky PF UMB
Ružová 13
974 11 Banská Bystrica
e-mail: jbrinckova@pdf.umb.sk

Využitie počítača a grafických kalkulačiek vo vyučovaní geometrie ZŠ

Monika Dillingerová

Abstract. *This paper shows how to use problem solving in teaching geometry at the elementary school. There are basic terms from problem solving given and the usage of two methods is in two geometrical subjects shown. The methods require some technical support. This can be realized with a PC or a graphical calculator. There are different methods of teaching for using only one PC or calculator and using one for each student described.*

Problémové vyučovanie

Geometria je na základnej škole chápaná ako veľmi ťažká časť matematiky. Často sa stretávame s tým, že sa žiaci pýtajú, kedy už konečne budeme „zase počítať“. Tento jav je sprievodným znakom formy vyučovania matematiky. V „počítacích“ úlohách stačí mať naučené postupy a všetko je jasné. V geometrii je každé zadanie iné – žiaci často nevedia, čo majú využívať, nie sú zvyknutí experimentovať, teda nemajú ako zisťovať doplňujúce informácie o probléme. Napríklad konštrukcia trojuholníka z troch daných dĺžok ťažníc predstavuje problém, ktorý žiaci samostatne nevedia vyriešiť. Našou úlohou – úlohou učiteľov – by malo byť naučiť žiakov tvorivo myslieť aj v geometrii. Tomuto cieľu je potrebné prispôsobiť výklad novej látky ako aj formu skúšania a overovania vedomostí. Do vyučovania treba zaviesť formy vysvetľovania, ktoré sa opierajú o konkrétne a im podobné problémy. Pritom časť vysvetľovania bude nutné preniesť na žiakov. Teória vzdelávania musí zahŕňať kooperatívne vzdelávacie stratégie, ktoré stavajú na tímovej práci a na spolupráci s prostredím, ktoré sa týka problémov, ktoré majú byť riešené. (Bertrand, 1998) Nech sa snažíme naučiť čokoľvek, používame pritom dlhodobú aj krátkodobú pamäť. Krátkodobá pamäť absorbuje všetky aktuálne informácie. Po určitom čase ich buď spracuje a presunie do dlhodobej pamäte, alebo zruší ako nepotrebné.. Na objasnenie, ako dlho sa v krátkodobej pamäti informácia udrží, boli robené mnohé psychologické výskumy. Ani jeden však nedal jednoznačnú odpoveď. Dokázalo sa, že obsah krátkodobej pamäti má krátky život a je ľahko nahraditeľný novými informáciami.(G. Petty,1993) Dôležité je teda, či informácia prejde do dlhodobej pamäte. Dlhodobá pamäť je pomerne stabilná, čiže informácie v nej uložené, sú odolné voči zabúdaniu. Napriek tomu nie sú stále voľne k dispozícii. Napríklad dlhšie nám ostane v pamäti zmysluplná veta, ako zhluk na seba logicky nenadväzujúcich slov. Dieťa si pri hre veľmi dobre zapamätá všetko, čo súviselo s jeho osobou: Určite vie že bolo spoluhráčmi pri hre „Človeče, nehnevaj sa!“ trikrát vyhodené, že však jeden zo spoluhráčov bol vyhodený až päťkrát, mu „ujde“. Toto všetko súvisí so spôsobom uloženia informácií v pamäti. Každá prijímaná informácia je konfrontovaná s už uloženými informáciami. Vznikajú spoje a vzťahy, ktoré potom pomáhajú informáciu vyvolať. Tieto tvoria kognitívnu sieť pojmov a poznatkov. Sila spojov pritom hrá veľkú úlohu pri vybavovaní si informácie. Na podporenie sily spojov sa používa učenie riešením problémov, ktoré ako ucelená teória vyučovania bolo akceptovane v druhej polovici 20. storočia a je známe aj pod názvom problem solving. Stavebným prvkom tejto metódy je problém. Kopka (1999) ho s odvolaním sa na Frobischera definuje takto: Problém charakterizujú jeho 3 hlavné zložky:

- východisková situácia, v ktorej opisujeme súvislosti a poskytujeme informácie alebo údaje
- cieľ, ktorý chce riešiteľ dosiahnuť
- cesta od východiskovej situácie k cieľu, ktorá pre riešiteľa môže, ale tiež nemusí byť zrejmá a dosiahnuteľná.

Okrem toho musíme ešte spomenúť, že do problémového vyučovania okrem problémov patria aj „investigation" (skúmanie, prieskum), ktoré tvoria :

- polootvorené (open-ended problems) problémy. Tieto zahŕňajú detské hľadanie cieľa, ktorý poznajú a ktorý je v probléme daný implicitne.
- otvorené (open problems) problémy. Môže sa jednať o problémy v ktorých buď nie je známy cieľ alebo je síce známy cieľ, ale metóda je úplne otvorená. (Podľa Bereková, 1996)

Podstatou problémového vyučovania je utváranie množstva problémových situácií a riadenie činnosti žiakov pri viac – menej samostatnom riešení problémov. (I. Turek, 1982)
V problémovom vyučovaní sa dobre uplatňujú nižšie uvedené princípy:

1. spolupráca
   častá práca v skupinách,
2. pružnosť
   rýchle reakcie učiteľa aj žiakov na prácu a jej výsledky,
3. vzájomná pomoc
   nadanejší žiaci sú nútení pomáhať menej nadaným,
4. zlepšenie sebahodnotenia
   žiaci sa dokážu vidieť reálne pozitívnejšie a získavajú sebavedomie (podľa Bertrand, 1998).

Problémové vyučovanie sa v triede môže realizovať rôznymi formami. Dnes sú jasne vymedzené nasledujúce:

- problémový výklad,
- heuristická metóda,
- metóda objavovania a riadeného objavovania,
- brainstorming,
- hobo metóda,
- Gordonova metóda,
- projektové vyučovanie. (Turek, 1982)

Okrem nich sa pri realizácii problémového vyučovania môžeme stretnúť aj s ich kombináciami, kde počas vyučovacej hodiny jedna forma plynulo prechádza do druhej. (bližšie pozri Dillingerová, 2004b)

Pre naše zámery sú momentálne dôležité heuristická metóda a metóda riadeného objavovania.

Heuristická metóda

Jedná sa o formu vyučovania, počas ktorej žiaci spolu s učiteľom aktívne objavujú nové poznatky alebo zatrieďujú pojmy do siete pojmov a poznatkov. Žiaci sa stávajú spoluzodpovední za osvojenie si učiva. Riešia dielčie problémy predkladané učiteľom. Jeho úloha spočíva v:

- zadávaní úloh,
- logickom spájaní výsledkov predchádzajúcich úloh so zadaním nasledujúcej úlohy,
- kontrole a udržovaní žiackej aktivity na primeranej hladine,
- prípadnej revízii svojho postupu
(ak zistí, že je pre žiakov príliš obtiažny alebo príliš ľahký).

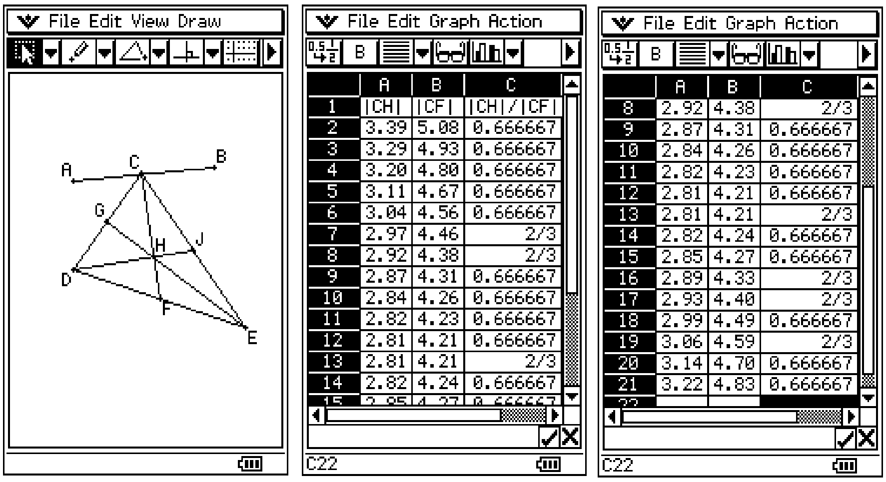
Metóda objavovania a riadeného objavovania

Pri učení metódou objavovania, či riadeného objavovania, sa od žiakov očakáva, že na dané princípy budú prichádzať sami – aj keď väčšinou s určitou cudzou pomocou (riadením) alebo po zvláštnej príprave. Metóda sa opiera o niekoľko hlavných zásad, ktoré by mal učiteľ zobrať do úvahy a dodržať:

- Žiaci musia mať všetky podstatné základné znalosti a schopnosti, ktoré budú pre úspešné zvládnutie úlohy - problému potrebné.
- Žiaci musia presne chápať, čo sa od nich vyžaduje.
Obvykle je vhodné úlohu okrem slovného zadania, pri ktorom sa odstraňujú rôzne nejasnosti, aj stručne a jasne napísať na tabuľu.
- Veľká väčšina žiakov musí byť schopná úlohu vyriešiť.
Najlepšie je, ak sú schopní úlohu vyriešiť všetci žiaci. S ohľadom na heterogénne zloženie žiakov v triedach to však zväčša nie je možné. V tomto prípade odporúčame, aby žiaci, ktorí neboli schopní úlohu sami vyriešiť, boli schopní pochopiť jej riešenie prezentované úspešnejšími spolužiakmi. (Podľa Petrášková, 2002)

Významné prvky trojuholníka

V tejto téme by sme mohli zvoliť použitie počítača, na určenie vzťahu medzi dĺžkami úsekov, na ktoré delí ťažnicu ťažisko. Nakoľko každá škola s balíkom programov od Infoveku získala aj program dynamickej geometrie, možno túto výuku realizovať v počítačovej učebni. Sme si však vedomí, že počítačové učebne na školách sú vyťažené. Nie každému učiteľovi sa podarí so svojou triedou optimálne zabezpečiť čas v nej, preto ponúkame aj inú alternatívu. Touto alternatívou sú grafické kalkulačky so zabudovanou dynamickou geometriou. Obrázky a údaje v našom článku pochádzajú z kalkulačky ClassPad300 od firmy Casio. (pre prácu s kalkulačkou pozri ftp://ftp.casio.co.jp/pub/world_manual/edu/en/CP300_UsersGuide_E.pdf alebo Dillingerová, 2004a)



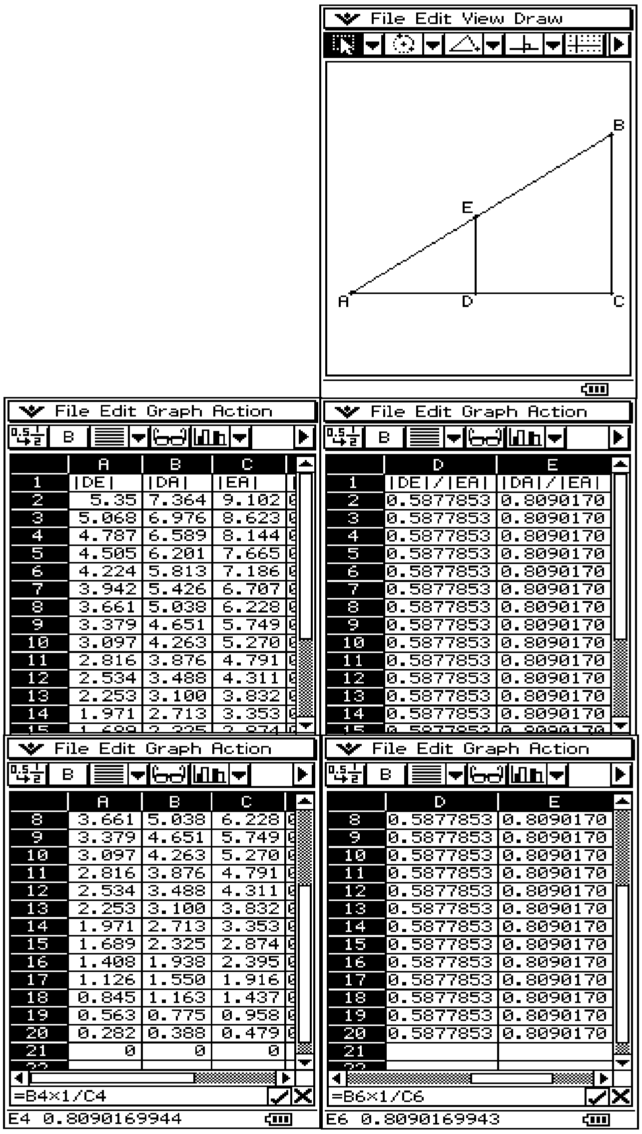
Obr. 1

Čo sa týka samotnej témy, metódou by bolo riadené objavovanie, prípadne heuristický výklad. Ak máme k dispozícii kalkulačky pre všetkých (alebo aspoň dvojice) žiakov triedy, môžeme výuku koncipovať ako riadené objavovanie. Heuristický výklad budeme voliť v prípade, že máme k dispozícii iba veľmi obmedzený počet kalkulačiek pre triedu, či dokonca jedinú pre učiteľa. Ak bude k dispozícii iba jedna, mala by to byť tzv. projekčná sada, t.j. kalkulačka s prídavným zariadením pre spätný projektor, alebo kalkulačka spojená s dataprojektorom. V prípade nami používanej kalkulačky je možné pracovať aj na počítači s emulátorom, ktorý kalkulačku plne imituje. Tu je však tiež ešte nutné zabezpečiť premietanie obrazu z monitora na plátno alebo stenu. Spomenuté grafické kalkulačky nám umožňujú robiť pohyblivé obrázky a naviac v nich vedia odmerať chcené dĺžky a dokonca aj urobiť výpočty pre všetky namerané hodnoty. Na obrázku 1 je takýto postup zaznamenaný. Trojuholník CDE je určený tak, že bod C je prvkom úsečky AB. To znamená, že môžeme na kalkulačke spustiť animáciu, počas ktorej sa bod C pohybuje po úsečke AB od bodu A k bodu B. Pritom necháme kalkulačku merať dĺžky úsečiek CH a CF (teda úseku od vrcholu po ťažisko a celej dĺžky ťažnice). Kalkulačka zobrazí toľko hodnôt, koľko krokov zadefinujeme pre animáciu – v pôvodnom nastavení ich je 20. Pre výskum je takýto počet dostatočný. Následne je urobené vyhodnotenie pomeru $\frac{|CH|}{|CF|}$, ktorý by mal žiakov presvedčiť, že pomer je až na chybu merania konštantný. Postupne vhodnými otázkami dovedieme žiakov k želanému poznatku.

Goniometria ostrého uhla

V tejto kapitole môžeme opäť použiť riadené objavovanie alebo heuristický výklad (podľa pomôcok). Výučba sa bude opierať o problémovú úlohu:

Narysujte pomocou kalkulačiek (počítača) pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C a uhlom pri vrchole A veľkosti 36°. Na strane AC zvoľte ľubovoľný bod D. Bodom D veďte kolmicu na stranu AC. Priesečník narysovanej kolmice a strany AB označte E. Definujte animáciu tak, aby sa bod D pohyboval po úsečke AC. Hľadajte čo sa dá povedať o dĺžkach DE, EA, DA.



Obr. 2

Metodické poznámky:

Ak urobíme tento experiment s pravítkom, ceruzkou a papierom, narazíme na obmedzenú presnosť zostrojovania uhlov a merania dĺžok. To znamená, že pomery, ktoré by sme chceli porovnávať budú v akomsi rozpätí. Teda použitím uvedených pomôcok žiaci naozaj nemôžu samostatne urobiť hypotézu, že pomer dĺžok odpovedajúcich si strán je konštantný.

V problémovej úlohe sme dopredu zadali konkrétny uhol. To preto, aby žiaci mohli svoje výsledky navzájom porovnávať. Tento uhol je možné počas priebehu hodiny niekoľko razy zmeniť a takto získať hodnoty goniometrických funkcií jednotlivých uhlov. Ako sme už vyššie uviedli, 20 hodnôt tvorí pre náš výskum dostatočný počet vstupných údajov. V tejto téme sa môžeme zaoberať aj matematickým dôkazom objaveného poznatku. Žiaci majú pre dôkaz všetky potrebné vedomosti. Môžu ho urobiť na hodine na základe vlastností podobných trojuholníkov.

Ak má kalkulačku (počítač) s geometrickým grafickým softvérom k dispozícii iba učiteľ, môže hodinu viesť vo forme heuristického výkladu.

Výstup z kalkulačky, ktorý postupne bude prezentovaný žiakom je zhrnutý v obrázku 2. Rysovanie a meranie urobí učiteľ sám, čo však s nameranými hodnotami urobiť, navrhujú žiaci. Všetky výstupy z kalkulačky (počítača) v takomto prípade premieta buď spätným projektorom alebo dataprojektorom pre žiakov na stenu (plátno).

Záver

Aj naši učitelia nám sprístupňovali učivo za pomoci dostupných pomôcok. Takouto pomôckou by dnes softvér dynamickej geometrie jednoznačne mal byť. Pokúsme sa teda v súčinnosti s novými metódami používať techniku, ktorá má napomôcť pochopeniu učiva, zatraktívneniu výučby a hlavne môže preniesť zodpovednosť za naučený obsah na žiaka.

Literatúra

[1] Bereková H.: *Habilitačná práca. Učenie riešením problémov.* KZDM, Bratislava, 1996.

[2] Brincková J.: *Projektové a autentické vyučovanie.* Metodické centrum, Banská Bystrica, 2002.

[3] Dillingerová M.: *How to solve geometrical problems with a graphic calculator.* In: *Zborník 8 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky.* KAGDM, Bratislava, 2004a.

[4] Dillingerová M.: *Problémové vyučovanie. Tvorba a realizácia problémových úloh so zameraním na geometriu ZŠ. Dizertačná práca,* FMFI UK, Bratislava 2004b.

[5] Gjone G., Andersen T.: *Shapes and Numbers*, Norderstedt, Casio Europe GmbH, 2003

[6] Turek, I.: O problémovom vyučovaní. SPN, Bratislava, 1982.

[7] Frobischer L.: *Problems, Investigation and Investigative approach.* In: *Issues in Teaching of Mathematics.* Cassell, London, 1994.

[8] Haapasalo L.: *Linking procedural and conceptual mathematical knowledge in technology-based learning.* In: *Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education*, Brno, Alan Rogerson, 2003.

[9] Kopka J.: *Problems and Investigation in school Mathematics.* Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching, Prague, 1995.

[10] Kopka J.: *Hrozny problémů ve školské matematice.* Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem, 1999.

[11] Kopka J.: *Ukázky strategií při řešení problémů*, In: *Acta mathematica 6,* Nitra, 2003.

[12] Koreňová L., Jodas V.: *Stredoškolská matematika s grafickými kalkulátormi,* Casio, Bratislava, FAST PLUS s. r. o., 2000.

[13] Odvárko O. a kol.: *Funkce a rovnice s kalkulačkou CASIO,* Praha, Prometheus, 2000.

[14] Paditz L.: *Simulation and Statistical Exploration of Data (Let's Make a Deal – The Monty Hall Problem), using the new ClassPad300-technology.* In: *Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education,* Brno, Alan Rogerson, 2003.

[15] Petrašková E.: *O jednom alternatívnom spôsobe vyučovania.* In *Pedagogické rozhľady,* ročník 11, číslo 2, Banská Bystrica, 2002.

[16] Turek I.: *O inováciách vyučovacích stratégií.* Metodické centrum, Tomášikova 4, Bratislava, 1996.

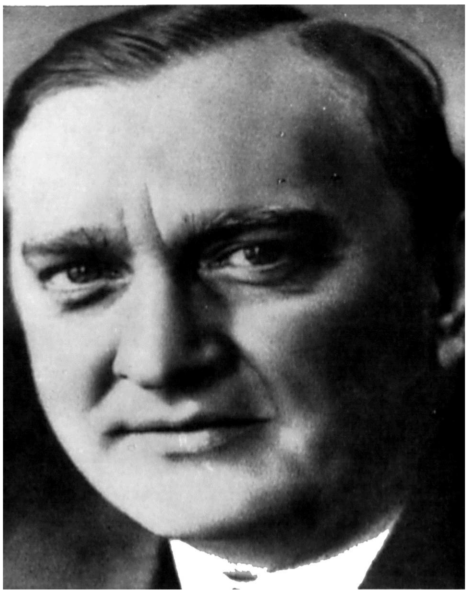
[17] Zelina M.: *Aktivizácia a motivácia žiakov na vyučovaní.* Metodické centrum, Banská Bystrica, 2002.

[18] ftp://ftp.casio.co.jp/pub/world_manual/edu/en/CP300_UsersGuide_E.pdf

Adresa autora:
RNDr. Monika Dillingerová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava
e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk

Stefan Banach's textbooks (in 60$^{\text{th}}$ memory of death)

Stanisław Domoradzki



Stefan Banach (1892-1945)

The introduction

After recovering of the independence by Poland in November 1918, Polish educational system was found in big troubles. They resulted from existing not only different types of schools but also from the different educational systems in three annexations. The first reform was carried out in 1919 - 1922. Reviewed textbooks were adapted to the carried out in Poland reforms of Jędrzejewicz [1] in 1932 - 1933. According to this reform the following model of the education was obligatory: the primary school (6 years), secondary schools: uniform grammar-school (4 years), diverse secondary school (2 years). There was also the VII class (consummative) at the primary school, instead of the I grammar-school.

Among prominent figures of 20th century mathematics, there were some Polish mathematicians. The best known is Stefan Banach (1892-1945), a professor at the University of Lvov, one of the founders of functional analysis (see [3], [4], [6]). The term "Banach space" is now world-wide used to describe a part of contemporary mathematics taught in university graduate courses.

The biography

Banach was born in 30.03.1892 in Cracow, and died in 31.08.1945 in Lvov. He was a self-taught man; he was an illegitimate child of Stefan Banach and Katarzyna Greczek and did not know his mother. At first he probably was cared by the grandmother Antonina who lived on Tatra Highlands near Nowy Targ. When the grandmother fell ill, the father gave back the son for the education to Franciszka Płowa and her

[1] Janusz Jędrzejewicz the minister of religious Confessions and Public Enlightenment in years 1931 - 1934.

daughter Mary Puchalska's home in Cracow. Franciszka Płowa worked in a laundry; Banach treated her as the natural grandmother, while her daughter Mary Puchalska as an older sister. There he touched with Julius Mień, the Frenchman from the origin, a writer, photographer, translator of the Polish literature, which was a close friend of Mary Puchalska. Exactly Julius Mień supervised the general education of the boy. Banach owes to him the excellent acquaintance of French which he beautifully exhibited on international mathematical Congresses.

In 1902 after the graduation from the primary school S. Banach as a ten years old boy becomes a schoolboy of the I class at the Grammar-school No 4 named by Henryk Sienkiewicz in Cracow. After passing the secondary-school certificate in 1910 he leaves to Lvov, where he earns with giving of the private lessons on his livelihood. At first he studied mathematics individually, during short time he also attended on lectures of Stanisław Zaremba (1863 - 1942), a professor of the Jagiellonian University. Then he began studies at Lvov Polytechnic, where in spring 1914 he passed the first examination showing the credit of two first years of studies of engineering, so called half the diploma (this meant the credit of two years of studies). On his own studies he earned with private lessons.

When in July 1914 I World War began, Banach left Lvov. He was dismissed from the military service, because he was left-handed and poorly saw on the left eye. In Cracow he gave private lessons in the range of all grammar-school classes. He refused the offer of the permanent work at secondary school; permanent work did not interest him.

In 1916 the meeting of Hugo Steinhaus (1887-1972) with Stefan Banach took place on Cracovian Planty about which Hugo Steinhaus mentioned many times calling Banach himself the greatest of his own scientific discovery. That meeting had almost immediate scientific consequences: Steinhaus let know Banach a certain problem over which he worked from longer time (depended on the problem of the convergence according to the first moment of partial sums of expansions of Fourier's integrable function). To Steinhaus's astonishment Banach soon brought the ready solution of this problem.

In 1920, when Banach submitted his PhD thesis, which laid foundations of functional analysis, the President of Poland issued a special decree allowing Stefan Banach, as an exception, to be awarded a PhD degree without formal university education (his education was interrupted by World War I). Afterwards the scientific career of Banach went on very quickly. He became an assistant of prof. Antoni Marian Łomnicki (1881-1941) who accepted Banach on his own assistant at Lvov Polytechnic, in spite of that he had not had completed studies. From this moment the brilliant scientific career of Banach starts. At the same time at the University of Jan Kazimierz in Lvov he represents the doctoral thesis published two years later in the periodical „Fundamenta Mathematicae" in III volume entitled „*Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations integralés*". In this work he introduced, among other things, the concept of linear normed complete space called afterwards the Banach space. In June 1922 he habilitates at the University of Jan Kazimierz, and in July this year he becomes an extraordinary professor of UJK. In 1924 Stefan Banach becomes a corresponding member of the Polish Academy of Sciences; however in 1927 he gets the appointment as a professor of the University of Jan Kazimierz. As the professor of the Lvov University he develops on rare scale the scientific-investigative activity, and, among other things, since 1929 he together with Steinhaus edits the periodical „Studia Mathematica". In 1932 he publishes his famous work „*Theorie dés opérations linéaires*", as the first volume of the new publication „Mathematical Monographs", of which he was one cofounder. In the period of existence of the University named Ivan Franko in Lvov (1939-1941 and 1944-1945) Stefan Banach directed I Department of the Mathematical Analysis.

Information about Banach's school textbooks.

In the 1930s, Banach wrote eight textbooks for children from fifth grade on (age: 11-16 years). He wrote most of them together with two other eminent Polish mathematicians:

Wacław Sierpiński (1882-1969), the co-founder of the Polish Mathematical School, an outstanding specialist in number theory, set theory and topology, professor of the University of Jan Kazimierz in Lvov and the University of Warsaw and a member of Académie des Sciences, Paris,

Wlodzimierz Stożek (1883-1941), a professor of Lvov Polytechnic.

The textbooks mentioned in the article are listed in the bibliography from position [8] to [15].

What school-books were written by outstanding Polish mathematicians?

First of all, these textbooks were comprehensible. The language is simple, down-to-earth and easy to understand. For example, in *Arithmetics for the I grammar-school class* [12] among other things there are the following problems:

1) Buy at The Post Office the broadcasting blank and fill it on the sum of 20 zlotys which you want to transfer to Mr. M.N. , owning account No 345600 (an example of the full blank was placed in textbook. (page 117)

2) 2 of January 1933 the Firm „The Wood Industry" paid on the checking account the sum of 30000 zlotys. From the above sum one paid 1/IV 1933 5000zł, and 1/VI 1933 - 4000zł. What sum did the firm possess at the end of June 1933 on the cheque account, if the bank pays 5% a year? (page 116)

Reasoning is concise; a master hand and impressive command of mathematics can be traced in these readings. New ideas are introduced as a generalization of concrete examples. Theorems are motivated with pertinent examples and proved without overemphasizing the deduction. There are numerous problems in these textbooks, relatively easy at the beginning and then gradually more difficult. Their type and arrangement show authors concern for the individualization of learning.

Banach was a devoted mathematician, had a powerful mind and imagination. Yet, it was he who said: "The humanities are more important in secondary education than mathematics, which is too sharp instrument for children to deal with" (see [4], [5]). He understood very well the difficulties encountered by students while learning mathematics thanks to private lessons that he had, often teaching older students. Was the writing textbooks for such mathematical fames an easy work? No. Hugo Steinhaus, "the discoverer"[2] of Banach, wrote about Banach's textbook life-time:

"*Most of the time and energy were taken to* Banach *by the writing textbooks of the arithmetics, algebra and the geometry for colleges. He wrote with* Sierpiński *and*

[2] H. Steinhaus thus mentions his own greatest exploration:

"*Though Cracow was actually a fortress, one can go in the evenings along park. During such a walk I heard words '...the Lebesgue measure of. . . .' I approached to the bench and I presented myself to two young students of mathematics. They said to me that to their company belonged Witold Wilkosz whose they glorified very much. They were Stefan Banach and Otto Nikodym. From this time we met regularly...*"

Stożek, *and also himself. This was never the duplication of already existing schoolbooks.* Banach - *thanks to his own experiences of the coach was aware of the matter that every definition, every argument and every exercise was a problem for the author of the schoolbook who cares for her didactic value.“*

It is conspicuous that the authors regard mastering arithmetics skills as particularly important. In chapters on arithmetics they distinguished separate sections entitled: “Mental computation and facilitations“. For example, they ordered to add some numbers to the given ones or to divide them by a certain number. From the textbook: *“Arithmetics and geometry for the II class of secondary schools“* [10] we can take the following examples:

1) Give the multiples of: a) number 2 which are smaller than 30,

b) number 5 which are smaller than 100. (page 23)

2) Which of the following numbers: 68, 100, 216, 322, 584, 764, 974, 1236 are divided into 4?

(page 27)

K. Wuczyńska [7] has noticed that nowadays we tend to expect that students discover by themselves some ways to facilitate computations; Stefan Banach did prompt it.

I myself have given a set of mental arithmetical tasks to a group of 30 university students majoring in mathematics. They performed very complicated operations, as they were lacking of appropriate skills and were not aware of simple facilitations. Is this necessary today? I think that even for the training of the mind it is necessary.

For somebody brought up after the new math era, the geometrical chapters of the textbooks by Banach, Sierpiński and Stożek may appear rather dull. Let us take some examples from the textbook: „*Arithmetics and geometry for the V class of elementary schools*”[8]. After having explained the terminology concerning triangles, the authors give the following problems:

1) Draw few triangles and mark their vertices.

2) Draw any triangle and compare: a) the sum, b) the difference of two sides, with the third side.

3) Draw a right-angled triangle and mark both its legs and hypotenuse.

4) One of the legs is 6 cm long, the other is 8 cm long; what is the length of the hypotenuse? Read from the drawing. (The drawing has to be drawn by the schoolboy - the interpolation S. D.)

5) Draw a right-angled triangle knowing the length of its legs: a) 3 cm and 4 cm; b) 2 cm and 5 cm; c) 2 cm and 4 cm.

6) Using four right-angled triangles with legs 3 cm and 5 cm, construct a right-angled triangle.

7) Divide the rectangle with sides 9 cm and 6 cm so as to obtain 6 identical right-angled triangles with legs 6 cm and 3 cm.

8) Draw an angle and (starting from the vertex) mark two equal segments on the arms. Join the ends of the segments as to get an isosceles triangle. Show its sides, base and vertex. Measure the base angles.

9) Draw an isosceles right-angled triangle. Measure its base angles. (page 50)

I read this selection exercises as the encouragement to such teaching of mathematics, so that comprehending and properties were constructed in pupil's minds. Cognitive process presented by Banach leads across the winning of experiences, to end of birth of a new fragment of abstract knowledge. Thus authors, masters of the mathematical deduction, in case of the pupil favoured constructive ordeals.

The bibliography

[1] S. Domoradzki, Z. Pawlikowska - Brożek, D. Węglowska, *The Biographic Dictionary of Polish Mathematicians*, (in Polish), PWSZ Tarnobrzeg, 2003.

[2] S. Domoradzki, *Stefan Banach's textbooks as an example of a mathematician's approach to teaching of mathematics*, CIEAEM, Neuchâtel, 1999, s. 387 - 389.

[3] R. Kałuża, *Stefan Banach* (in Polish), Warsaw, 1998.

[4] H. Steinhaus, *Souvenir de Stefan Banach*, Colloquium Mathematicum, (1948).

[5] H. Steinhaus, *Recollections and notes*, (in Polish) Annex, London, 1992.

[6] S. Ulam, *Stefan Banach (1892-1945),* Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), pp. 600-603.

[7] K. Wuczyńska, *School textbooks that Stephen Banach* (in Polish), Mathematics 2 (1992), pp. 96-101.

Manuals written by: S. Banach, W. Sierpiński and W. Stożek (in Polish):

[8] S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek, *Arithmetics and geometry for the V class of elementary schools*, Lvov - Warsaw, 1933.

[9] S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek, *Arithmetics and geometry for the I class of secondary schools*, Lvov, 1929.

[10] S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek, *Arithmetics and geometry for the II class of secondary schools*, Lvov, 1930.

[11] S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek, *Arithmetics and geometry for the III class of secondary schools*, Lvov - Warsaw, 1931.

[12] S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek, *Arithmetics for the I grammar-school class of secondary schools*, Lvov - Warsaw, 1933.

[13] S. Banach, W. Stożek, *Arithmetics for the II class of grammar-school*, Lvov - Warsaw, 1934.

[14] S. Banach, *Arithmetics for the III class of grammar-school*, Lvov - Warsaw, 1935.

[15] S. Banach, *Arithmetics for the III class of grammar-school*, Lvov - Warsaw, 1936.

Adress of author:
Dr. Stanisław Domoradzki
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Rzeszów
ul. Rejtana 16a
35-959 Rzeszów, Poľsko
e-mail: domoradz@univ.rzeszow.pl

Higher Vocational State School of Education
Them. prof. Stanisław Tarnowski
Tarnobrzeg
Poland

Pohľad maturantov na matematickú analýzu a jej vyučovanie

Ján Ďuriš

Abstract. *In this paper we describe the final year's students' answers to the questionnaire concerning the mathematical analysis and its teaching.*

To, čo si myslí niekoľko maturantov o vyučovaní matematickej analýzy, sme zisťovali na jar v roku 2003. Zisťovali sme to pomocou ankety uskutočnenej v dvoch bratislavských gymnáziách (Gymnázium na Novohradskej ul. a Gymnázium na Vazovovej ul.).

Na prvom gymnáziu sa ankety zúčastnili dve triedy – Oktáva (17 študentov) a 4.B (25 študentov). Študenti v Oktáve boli zo skupiny, ktorá mala 5 hodín matematiky týždenne. Z matematiky mali povinne maturovať. V 4.B boli v rámci matematiky študenti delení na dve skupiny, tzv. posilnených (15 študentov, 5 hod. matematiky týždenne) a tzv. neposilnených (10 študentov, 3 hod. matematiky týždenne). Neposilnení ešte nemali prebraté integrály, takže do vyhodnotenia ankety sme nezaradili ich odpovede na niektoré otázky.

Na druhom gymnáziu sa ankety zúčastnilo 17 študentov zo skupiny, ktorú tvorili zväčša tí študenti vybratí z celého štvrtého ročníka, ktorí z matematiky chceli maturovať alebo ju potrebovali pri prijímacích pohovoroch na vysokú školu.

Anketa mala tri hlavné ciele. Prvým bolo zistiť postoje jednotlivých študentov ku matematickej analýze, jej náročnosti, prínosu jej objavu, spôsobu a opodstatnenosti jej vyučovania. Druhým bol zámer zistiť, aký prínos malo vyučovanie matematickej analýzy pre študentov, aké problémy mali pri jej študovaní, do akej hĺbky ju pochopili a ako vidia možnosti použitia infinitezimálneho počtu v aplikáciách. Tretím zámerom bolo získať prehľad o samotných konkrétnych vedomostiach z diferenciálneho a integrálneho počtu.

Anketa obsahovala 15 otázok. Snažili sme sa o to, aby kladené otázky boli otvorenými otázkami a teda aby umožnili študentom vyjadriť sa a tým poskytli hlbší vhľad do ich pochopenia jednotlivých pojmov matematickej analýzy. V prvých piatich otázkach mali študenti zaujať svoj vzťah alebo postoj tým, že označia číslo na stupnici od 1 do 5. V ďalších desiatich im bol daný priestor na napísanie odpovede na danú otázku.

Do vyhodnotenia bolo zaradených 59 vyplnených anketových hárkov. Pri odpovediach desiatich „neposilnených“ študentov zo 4.B neboli hodnotené otázky 8, 9, 10, 13, 14 a 15, pretože sa v nich spomína diferenciálny aj integrálny počet a študenti tejto skupiny ešte nepreberali integrály. V týchto otázkach je teda vyhodnocovaných 49 hárkov.

V ďalšom texte sú kvôli ilustrácii uvádzané citáty zo študentských odpovedí. Sú písané kurzívou a v úvodzovkách. Pre nedostatok miesta sú v tomto článku analyzované odpovede študentov na niektoré z otázok ankety len veľmi stručne. Úplný článok sa dá nájsť na webe na adrese:
http://www.fmph.uniba.sk/~jduris/sk/clanok_ruzomberok2005.doc.

Otázky 1 až 5 (vyhodnocovaných bolo 59 odpovedí)

Otázka 1: Objav pojmu derivácia bol podľa mňa: (1 = bezvýznamný, 5 = veľmi významný).

Otázka 2: Myslím si, že budúci právnik má na SŠ počúvať základy diferenciálneho a integrálneho počtu: (1 = rozhodne áno, 5 = rozhodne nie).
Otázka 3: Myslím si, že vyučovanie diferenciálneho a integrálneho počtu na SŠ bolo pre mňa prínosom: (1 = rozhodne áno, 5 = rozhodne nie).
Otázka 4: S vyučovaním matematiky na SŠ som vcelku spokojný: (1 = rozhodne áno, 5 = rozhodne nie).
Otázka 5: Myslím si, že pri chápaní pojmov mi pomáhajú obrázky: (1 = rozhodne áno, 5 = rozhodne nie).

Výsledky sú spracované podľa jednotlivých otázok. V tabuľke je uvedený počet žiakov, ktorí zaškrtli danú odpoveď a pri každej otázke aj aritmetický priemer zaškrtnutých hodnôt odpovedí.

Tabuľka: Celkové výsledky otázok 1 až 5 vo všetkých skupinách

	Odpovede					
Otázka	1	2	3	4	5	Priemer
1	4	3	19	19	14	**3.61**
2	5	8	28	16	2	**3.03**
3	18	17	7	11	6	**2.49**
4	21	29	6	3	0	**1.85**
5	25	17	13	3	1	**1.95**

Odpovede skupiny 4.B – neposilnení sa v otázkach 1, 3 a 4 výrazne líšili od odpovedí ostatných troch skupín. Znamená to, že títo študenti boli v porovnaní s ostatnými menej spokojní s vyučovaním matematiky na SŠ, vyučovanie matematickej analýzy nepovažovali za prínosné a objavu pojmu derivácia prikladali skôr malý alebo žiadny význam. Môže to byť spôsobené veľkou náročnosťou tohto učiva a možno aj tým, že študenti tejto skupiny zatiaľ nepreberali integrálny počet a diferenciálny počet sa im preto môže zdať zbytočný, nikde nepoužiteľný.

Celkovo študenti považovali objav pojmu derivácia za významný alebo veľmi významný a prínos tohto učiva označili za veľký alebo dostatočný. Až 47,5 % študentov zaujalo neutrálny postoj voči tomu, či sa budúci právnik má na SŠ oboznámiť so základmi matematickej analýzy. Predpokladáme, že sa nevyjadrovali, pretože sa necítia byť dostatočne kompetentní odpovedať na takúto otázku.

Obrázky rozhodne pomáhajú alebo pomáhajú pri chápaní pojmov až 71,2 % študentov. Je teda potrebné pri vyučovaní matematiky používať čo najviac grafov, schém a iných obrázkov a takisto v učebniciach by sa malo nachádzať dostatočné množstvo obrázkov. Veľmi pozitívne je, že až 84,7 % študentov je spokojných alebo rozhodne spokojných s vyučovaním matematiky na SŠ. Predpokladáme, že na takomto výsledku majú zásluhu najmä učitelia, ktorí učili anketovaných študentov.
Otázka 6 (vyhodnocovaných bolo 59 odpovedí)
Otázka: Je nejaký rozdiel medzi definíciou a vetou?

Len stručné, zväčša jednoslovné odpovede, dalo 20 študentov, z nich 14 napísalo alebo sa priklonilo k *"áno"* a 6 k *"nie"*. Ďalší traja neodpovedali vôbec.

Najväčšia skupina, 19 študentov, sa správne vyjadrovala o definícii, ale nesprávne o vete. Definíciu chápu ako niečo, čo *"niečo definuje"*, *určuje"*, *"popisuje"* a o vete zväčša uvažujú ako o gramatickej vete, konštatovaní. Môže to byť spôsobené tým, že ich učitelia nepoužívali pojem veta, alebo ho používali s prílišnou samozrejmosťou, bez toho, aby upozornili študentov na význam pojmu veta v matematike.

Myslíme si, že by bolo vhodné, aby mal študent o vete v matematike predstavu ako o čomsi inom ako je veta v gramatickom zmysle.

Otázka 7 (vyhodnocovaných bolo 59 odpovedí)
Otázka: Boli potrebné nejaké predchádzajúce vedomosti na pochopenie diferenciálneho počtu?

Najviac, až 26 študentov, uviedlo *"áno"*, ale bližšie nešpecifikovalo. Piati vyjadrili presvedčenie, že vždy sú potrebné predchádzajúce vedomosti, resp. že veci na seba nadväzujú, najmä v matematike. Otázka zrejme mala byť radšej formulovaná: "Boli potrebné nejaké predchádzajúce vedomosti na pochopenie diferenciálneho počtu? Ak áno, ktoré?"

Medzi odpoveďami tých 15 študentov, ktorí konkretizovali aspoň jednu vedomosť, sa vyskytovali najčastejšie limity (6), základy funkcií (6), grafy funkcií (5). Ďalej sa v odpovediach vyskytlo počítanie s mocninami (2), počítanie kvadratických a iných rovníc (2), základy algebry, analytická geometria a dotyčnice (po 1).

Limity zrejme spomenuli tí, ktorí si pamätajú definíciu derivácie, grafy funkcií zasa tí, ktorí si deriváciu spájajú so smernicou dotyčnice ku grafu funkcie.

Otázka 8 (vyhodnocovaných bolo 49 odpovedí)
Otázka: Čo z oblasti diferenciálneho a integrálneho počtu vám robilo problémy? Prečo?

Buď sa nevyjadrilo, napísalo *„nič“*, alebo nešpecifikovalo konkrétne problémy z oblasti matematickej analýzy 23 študentov. Dvaja z nich napísali *„všetko“*.

Traja študenti sa vyjadrili, že nechápali podstatu, princíp diferenciálneho a integrálneho počtu, bolo to *„niečo nové“*. Štyria napísali, že im robilo problémy zapamätať si vzťahy pre derivácie alebo integrály elementárnych funkcií.

Problémy s počítaním príkladov malo 17 študentov. Dvaja bližšie nekonkretizovali a u ostatných boli najčastejšie problémy so zisťovaním priebehu funkcií (7 študentov). Šiestim robilo problémy počítanie integrálov, najmä s použitím metódy per partes.

Problémy pri zisťovaní priebehu funkcií môžu byť spôsobené tým, že v príkladoch tohto typu je potrebné spájať viacero poznatkov a aplikovať ich na konkrétnu úlohu. Sú možno spôsobené aj tým, že na hodinách sa riešili príliš náročné príklady. Výpočet integrálov metódou per partes, resp. substitučnou metódou nie je v učebných osnovách a ani nepovažujeme za dôležité, aby boli tieto témy vyučované už na strednej škole.

Otázka 9 (vyhodnocovaných bolo 49 odpovedí)
Otázka: Je nejaký nový typ úloh, ktoré ste predtým nevedeli riešiť a vďaka diferenciálnemu alebo integrálnemu počtu viete?

Nijaký nový typ úloh z matematickej analýzy nemenovalo alebo veľmi stručné odpovede poskytlo 17 študentov. Z nich deviati napísali *„áno“*, štyria napísali *„nie“*. Za zrýchlenie a zefektívnenie výpočtov považujú používanie diferenciálneho a integrálneho počtu štyria študenti.

Tí, ktorí spomenuli konkrétne úlohy z diferenciálneho alebo integrálneho počtu, písali o výpočtoch obsahov plôch ohraničených funkciou a osou x, príp. ohraničených dvomi funkciami (14 odpovedí), o výpočtoch objemov telies vzniknutých rotáciou grafu funkcie (12 odpovedí) a o extrémoch funkcií (7 odpovedí).

Presnosť, s akou sa vyjadrovali, bola dobrá najmä pri tých, ktorí písali o extrémoch funkcií, napr. *„Myslím, že táto metóda je veľmi šikovná pri zisťovaní najväčších / najmenších možných dosiahnutých hodnôt (→ napr. najväčší o záhrady, ...)“*. Tí, ktorí písali o výpočte obsahu plochy ohraničenej grafom funkcie a osou x, väčšinou použili skrátené *„plocha pod krivkou“* alebo *„plochy vymedzené rôznymi funkciami“*. Mnohí napísali zjednodušene, resp. nesprávne *„zisťovanie obsahov“*, *„výpočet plochy“*, *„povrch funkcie“*, *„niečo s plochami“*. Pri písaní o objeme telies vzniknutých rotáciou grafu funkcie boli použité dve formulácie. Jedna bola *„objemy telies“* (6 študentov) a druhá *„objemy rotačných telies“* (6 študentov).

Myslíme si, že aj keď študenti často používali nepresné alebo zjednodušené vyjadrenia, rozumeli tomu, o čom píšu. Dá sa tak usudzovať aj na základe ich odpovedí na otázku 15, v ktorých sa medzi obrázkami, ktoré sa im spájajú s pojmom integrál, najčastejšie objavovali obrázky znázorňujúce výpočet *„plochy pod krivkou“* alebo výpočet *„objemu telesa“*.

<u>Otázka 10</u> (vyhodnocovaných bolo 49 odpovedí)

Otázka: Vymenujte niekoľko odborov, ktoré nepotrebujú diferenciálny a integrálny počet.

Šiesti študenti sa vyjadrili, že okrem matematiky (resp. ešte fyziky a informatiky) iné odbory diferenciálny a integrálny počet nepotrebujú.

Ani jeden prírodovedný odbor v odpovedi na otázku neuviedlo až 27 študentov. Uvádzali najmä humanitné a umelecké odbory, ďalej medicínu, robotnícke povolania, učiteľstvo (okrem učiteľstva matematiky), šport.

Aspoň jeden prírodovedný odbor uviedlo vo svojich odpovediach 13 študentov. Najčastejšie uvádzali biológiu (6), geografiu (5), chémiu (2) a environmentalistiku (2). V jednej odpovedi bolo uvedené, že *„prírodovedci“* nepotrebujú diferenciálny a integrálny počet, v dvoch, že ekonómia nepotrebuje túto oblasť matematiky.

Je veľmi pozitívne, že tých, ktorí v odpovedi neuviedli žiadny prírodovedný odbor, bolo dvojnásobne viac ako tých, ktorí prírodovedný odbor uviedli. V odpovediach sa nevyskytla fyzika, čo je zrejme spôsobené tým, že v rámci matematiky bol počítaný dostatok príkladov na pohyb telies a iné aplikácie infinitezimálneho počtu. Keby učiteľ na hodine predviedol navyše aj nejakú inú ako fyzikálnu aplikáciu, napr. chemickú (rýchlosť chemickej reakcie), v odpovediach by sa možno nevyskytovala ani chémia a menej častá by mohla byť biológia.

<u>Otázka 11</u> (vyhodnocovaných bolo 59 odpovedí)

Otázka: Dá sa znázorniť derivácia funkcie v bode pomocou grafu funkcie?

Veľmi veľa študentov odpovedalo na túto otázku veľmi stručne. Bolo ich až 45, z nich 6 vôbec neodpovedalo. *„Nie“* napísali štyria študenti, *„áno“*, príp. *„áno, myslím“*, alebo niečo podobné, až 35 z nich. Je jasné, že otázka mala byť radšej formulovaná: „Dá sa znázorniť derivácia funkcie v bode pomocou grafu funkcie? Ak áno, ako?“. Z reakcií študentov na takúto otázku by sa pravdepodobne získalo viac vyhodnotiteľných odpovedí.

Desať študentov napísalo, že sa dá znázorniť *„dotyčnicou“* (jeden nakreslil a popísal obrázok). Traja z nich upresnili, že ide o *„dotyčnicu daného grafu funkcie v danom bode“*.

Úplne presnú odpoveď napísali traja študenti. Ukážka: *„áno → derivácia je smernica dotyčnice zostrojená v tom bode“*. Jeden z nich prikreslil aj obrázok.

<u>Otázka 12</u> (vyhodnocovaných bolo 59 odpovedí)

Otázka: Ktoré vlastnosti funkcií môžeme zistiť pomocou derivácií?

Väčšina študentov sa k otázke vyjadrila a napísala viac ako len jedno slovo. Najčastejšie spomínané vlastnosti sú monotónnosť a existencia extrémov (obe po 31 odpovedí). Namiesto pojmu monotónnosť častejšie používali *„rastúca a klesajúca funkcia“*, príp. *„stúpajúca“* namiesto rastúca.

Ďalšia často spomínaná vlastnosť bola kovexnosť a konkávnosť funkcie (12 odpovedí). Desiati napísali, že pomocou derivácií môžeme zistiť celý priebeh funkcie, poprípade z neho potom zistiť jednotlivé vlastnosti. Strmosť resp. rýchlosť stúpania alebo klesania funkcie uviedlo 6 študentov. Rovnaký počet uviedol inflexné body.

Najpočetnejšia z nesprávnych odpovedí je odpoveď *„nulové body"*. Uviedlo ju 6 študentov.

Ďalšie odpovede boli stacionárne body (4), limita (4), asymptoty (3), ohraničenosť a neohraničenosť (3), vrcholy funkcie (3), body nespojitosti (2), párnosť a nepárnosť (2), definičný obor (2), obor hodnôt (1), spojitosť (1), perióda (1).

Z odpovedí je vidieť, že študenti majú dobré poznatky o vlastnostiach funkcií a aj o možnosti použitia derivácií na ich vyšetrovanie. Je tiež vidieť, že niektorí učitelia učia výrazne nad rámec učebných osnov (napr. vyšetrovanie konvexnosti / konkávnosti).

<u>Otázka 13</u> (vyhodnocovaných bolo 49 odpovedí)

Otázka: Aké geometrické aplikácie má diferenciálny a integrálny počet?

Neodpovedalo 11 študentov. Zvyšných 38 napísalo aspoň po jednej geometrickej aplikácii. Najčastejšie, až v 25 prípadoch, sa objavil *„výpočet plochy pod krivkou"*, resp. *„pod grafom"*. Vyjadrenia zväčša neboli veľmi korektné, napr. *„zistenie obsahu nejakého úseku"*, *„obsahy"*.

V 15 odpovediach sa vyskytol *„výpočet objemov rotačných telies"*. Ani tu neboli príliš časté úplne korektné odpovede, skôr sa vyskytovali odpovede typu *„zistenie objemov pod obrázkami vymedzenými nejakými funkciami"*, *„objemov telies"*.

V šiestich odpovediach sa vyskytli dotyčnice, *„dotyčnice v danom bode"*. Výpočet hľadaných rozmerov *„ideálnych telies a útvarov"* uviedli štyria študenti.

Okrem menších problémov s pochopením termínu geometrické aplikácie nerobila študentom táto otázka žiadne väčšie ťažkosti. Znamená to, že študenti si uvedomujú, že existuje súvis medzi matematickou analýzou a geometriou.

<u>Otázka 14</u> (vyhodnocovaných bolo 49 odpovedí)

Otázka: Naformulujte jedno tvrdenie z diferenciálneho alebo integrálneho počtu.

Žiadne tvrdenie neuviedlo 23 študentov. Výnimočne uviedli aspoň komentár k otázke: *„tvrdenia to je moja slabá stránka. Chápať chápem o čo ide ale naformulovať to je problém"*.

Nepravdivé tvrdenia, resp. definíciu namiesto tvrdenia uviedlo 13 študentov. Sedem z nich pritom použilo hovorový jazyk, napr. *„Integrál je opak k diferenciálnemu počtu."* (2 odpovede), alebo *„funkcia má extrém, keď prvá derivácia sa rovná 0"* (3 odpovede). Ďalší šiesti použili vhodný matematický jazyk, napr. *„Limita = hodnota, ku ktorej sa blíži funkcia v nekonečne."*, alebo *„Derivácia funkcie v danom bode je dotyčnica funkcie v tom istom bode."* (3 podobné odpovede).

Pravdivé tvrdenie uviedlo 13 študentov. Nematematický, hovorový jazyk použilo 9 z nich. Ukážky ich tvrdení: *„$y\prime = 0 \Rightarrow$ zistenie extrémov"*, *„$f\prime > 0$ funkcia je rastúca"*, *„$y'' > 0$ lok. min $y'' < 0$ lok. max"*, *„Spodný a vrchný integrálny počet danej funkcie sa limitne k sebe blížia."*. Štyria naformulovali správne tvrdenia: *„Derivácia funkcie v bode x určuje smernicu dotyčnice funkcie v bode x"* (3 odpovede), alebo *„Integrál súčtu = súčtu integrálov $\int (a + b)\, dt = \int a\, dt + \int b\, dt$"*.

Myslíme si, že študenti majú skôr potrebu pojmom rozumieť a vedieť ich používať v príkladoch ako vedieť o nich formulovať tvrdenia. Napriek tomu istá snaha zo strany učiteľa budovať matematický jazyk u študentov je namieste.

<u>Otázka 15</u> (vyhodnocovaných bolo 49 odpovedí)

Otázka: Aké obrázky sa vám spájajú s pojmami limita, derivácia, integrál? Nakreslite nejaký a popíšte, čo demonštruje.

V odpovedi na otázku nenakreslilo obrázok 8 študentov, z nich traja nenapísali vôbec nič, dvaja spomenuli graf a dvaja namiesto kreslenia obrázky opísali. V odpovedi na otázku 5 z ankety až piati z týchto študentov označili 1 alebo 2 (t.j. pri chápaní pojmov im pomáhajú obrázky).

Ako obrázok, ktorý sa im spája s pojmom limita, nakreslilo 25 študentov graf klesajúcej resp. rastúcej funkcie, ktorý sa pre x→ ∞ približuje k osi x resp. ku priamke, ktorá je s ňou rovnobežná. Popisy obrázkov boli zväčša stručné a častejšie použitím slov ako zápisu $\lim_{x\to\infty}$. Piati študenti nakreslili funkčné hodnoty oscilujúcej postupnosti ako body okolo osi x resp. okolo priamky s ňou rovnobežnej.

Ako obrázok, ktorý sa študentom spája s pojmom derivácia, nakreslilo 16 z nich graf kvadratickej funkcie (príp. aj inej) a jeho dotyčnicu v niektorom jeho bode. V popise uvádzali, že ide o dotyčnicu a o súvise medzi deriváciou a dotyčnicou často nesprávne písali, že dotyčnica je deriváciou.

Obrázok funkcie majúcej maximum a minimum, s vyznačením, že ide o maximum a minimum, si s pojmom derivácia spájalo 6 študentov.

S pojmom integrál si 11 študentov spája obrázok, v ktorom je vyšrafovaná oblasť ohraničená grafom funkcie, osou x a dvomi priamkami rovnobežnými s osou y. V popise uvádzajú, že (určitý) integrál je vlastne obsah vyšrafovanej plochy.

Obrázok, na ktorom bol znázornený horný alebo dolný integrálny súčet (poprípade oba), nakreslilo päť študentov. Bližší popis týchto obrázkov zväčša nebol.

Vyšrafovanú oblasť ohraničenú grafmi dvoch funkcií nakreslili štyria študenti. V troch odpovediach sa obrázkom demonštrovalo použitie určitého integrálu na výpočet obsahu tejto oblasti. V dvoch odpovediach bolo napísané, že určitým integrálom je možné vypočítať objem telesa vzniknutého rotáciou tejto oblasti okolo osi x.

Záver

Vzorka 59 maturantov, aj keď nie náhodne vyberaných, ale skôr takých, z ktorých až 49 má k matematike „blízko", môže pomôcť získať predstavu o súčasných slovenských maturantoch, ich postojoch k matematickej analýze a prostredníctvom odpovedí na niektoré z otázok (najmä 11 až 14) aj o ich vedomostiach z tohto učiva.

Rozhodne príjemným prekvapením bolo, že 50 z 59 študentov vyjadrilo spokojnosť s vyučovaním matematiky na strednej škole. Zrejme je to najmä zásluhou ich učitelov matematiky. Na základe odpovedí tiež usudzujeme, že niektorí učitelia vyučujú výrazne nad rámec platných učebných osnov, zrejme „zo zotrvačnosti".

Tiež sa zdá, že príliš prevláda vyučovanie prostredníctvom riešenia čisto matematických príkladov a zabúda sa na širšie zaradenie matematiky do systému vied, jej aplikovateľnosti a použiteľnosti v iných oblastiach (viď odpovede na otázku 10 a tiež 2), čo matematike (a jej vyučovaniu) môže škodiť, lebo sa môže začať javiť ako príliš špecifická, okrajová.

Literatúra

[1] Hecht, T.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOŠ, 1. zošit – Postupnosti.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2000.

[2] Hecht, T.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOŠ, 2. zošit – Matematická analýza, Logika.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2000.

[3] Smida, J.: *Postupnosti a rady pre gymnázium.* Bratislava, SPN, 1988.

[4] Riečan, B., Bero, P.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií, Diferenciálny a integrálny počet.* Bratislava, SPN, 1997.

[5] Ďuriš, J.: *Vyučovanie matematickej analýzy na stredných školách, Diplomová práca*. Bratislava, UK, 2003.

[6] Internet: http://www.statpedu.sk, Štátny pedagogický ústav

[7] Internet: http://www.orbispictus.sk, Vydavateľstvo Orbis Pictus Istropolitana

Adresa autora:
PaedDr. Ján Ďuriš
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: jan.duris@fmph.uniba.sk

Funkční myšlení žáků a studentů – popis pedagogického experimentu

Petr Eisenmann

Abstract. *This contribution deals with the students' results in a test of functional thinking. Its target is to describe the respondents' ability to draw and interpret graph of functionality.*

Úvod

Tento článek popisuje výsledky experimentu, jehož cílem bylo zachytit jeden aspekt funkčního myšlení, a to schopnost vytvářet a popisovat grafy funkčních závislostí. Dotazník uvedený na následující stránce vyplnilo v roce 2004 celkem 201 žáků základních škol (7., 8. a 9. třída), 198 studentů různých typů středních škol s maturitou (3. a 4. ročník) a 204 vysokoškolských studentů učitelství matematiky (všechny ročníky). Základní a střední školy se nacházejí v severočeském regionu, vysokými školami jsou míněny pedagogické fakulty v České a Slovenské republice. Respondenti vyplňovali dotazníky samostatně, anonymně, udávali pouze věk, pohlaví a školu. Poskytnutý čas byl maximálně 20 minut. Po vyplnění dotazníku následovala téměř vždy živá diskuse s žáky či studenty o výsledcích testu a správných odpovědích.

Správné odpovědi jsou 1A, 2C, 3B a 4D.

Výsledky

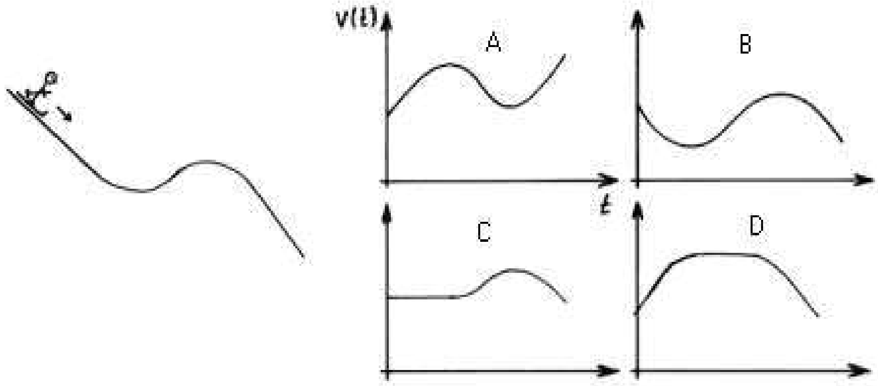
Základní škola

	A	B	C	D	Neodpovědělo
1	29	**59**	6	6	0
2	12	30	16	**40**	2
3	4	10	11	**73**	2
4	8	3	**76**	13	0

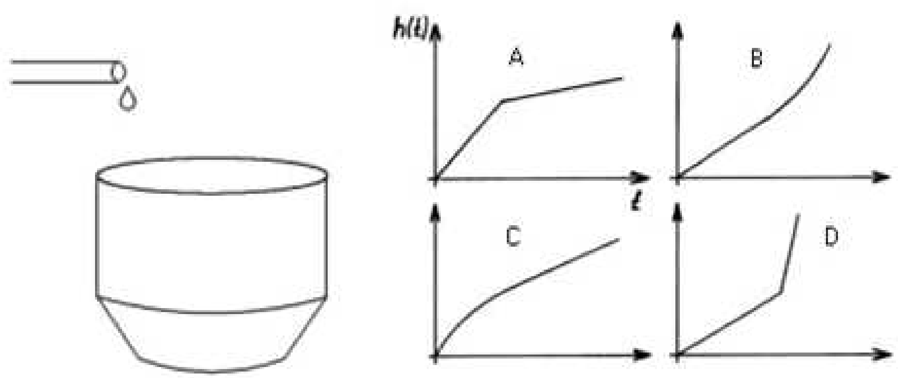
První tabulka ukazuje souhrnné výsledky žáků základních škol. Čísla vyjadřují četnost odpovědí v procentech. Je zřejmé, že žáci základních škol volili nejčastěji ty grafy, ve kterých křivka vyjadřující závislost odpovídá příslušnému obrázku znázorňujícímu danou situaci (Markantní je to především u položek číslo 1, 3 a 4). To je pochopitelné. Na základní škole se žáci s interpretací závislostí z praxe, vyjádřených grafem, setkávají spíše vzácně. Většina žáků ještě graf číst neumí a tak volí odpověď podle podobnosti grafu funkce s obrázkem příslušné situace. Tento jev se objevil i u podobně koncipovaných úloh v tzv. PISA – studii (rozsáhlý výzkum matematických znalostí a dovedností žáků v mnoha zemích světa), viz Leuders/Prediger 2005.

Lepší výsledky zaznamenali respondenti tohoto věku pouze u položky číslo 1, kde správnou odpověď A volila téměř třetina žáků. Situace znázorněná v této položce je totiž pro respondenty obecně nejsnáze představitelná, nejvíce odpovídá jejich zkušenostem (viz výsledky dalších věkových kategorií).

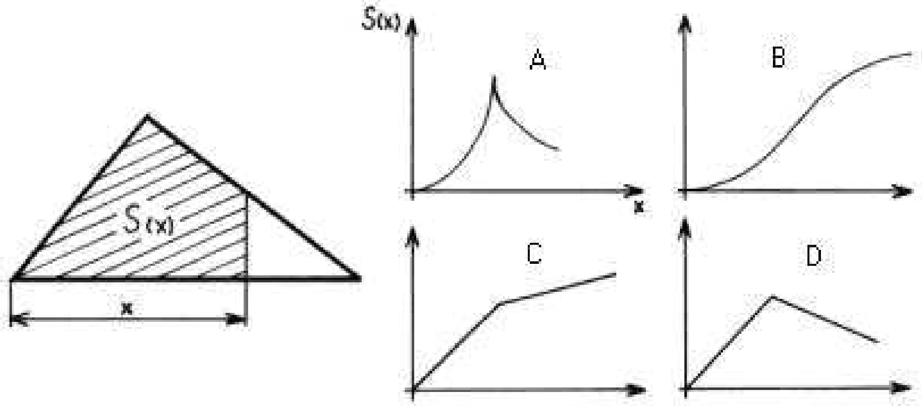
1. Grafy vpravo vyjadřují závislost rychlosti lyžaře $v(t)$ na čase t. Jen jeden z nich odpovídá situaci zachycené na obrázku vlevo. Zaškrtněte jej.



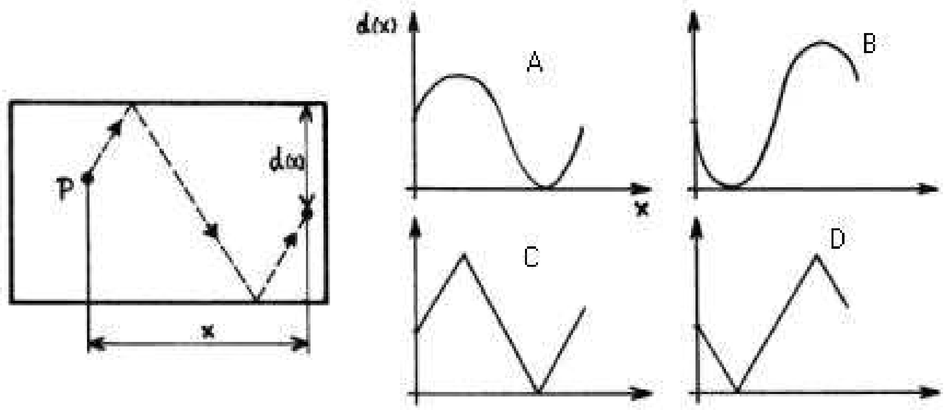
2. Nádoba se v čase $t = 0$ začne naplňovat stálým přítokem vody. Grafy vpravo vyjadřují závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



3. Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku $S(x)$ na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



4. Kulečníková koule je odpálená z bodu P ve směru čárkované čáry. Grafy vpravo vyjadřují závislost vzdálenosti $d(x)$ koule od horní hrany stolu na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



Vývoj četnosti úspěšných odpovědí žáků základních škol v závislosti na věku (7., 8., 9. třída) je relevantní pouze u položky číslo 1, kde je tato závislost rostoucí (8, 33, 43 procent správných odpovědí), u ostatních tří položek se četnost správných odpovědí monotónně nezvyšuje a kolísá okolo 15 procent.

Střední škola

	A	B	C	D
1	**84**	6	3	7
2	26	31	**40**	3
3	4	16	30	**50**
4	10	6	34	**50**

U položek č. 1, 2 a 4 již správné odpovědi volilo vždy nejvíce respondentů této kategorie. Markantní je to především u první situace. Alarmující jsou podle mého soudu výsledky středoškoláků u položky č. 3, kde stále ještě značná část respondentů – plná polovina – volí nesmyslnou odpověď D (Obsah zvětšující se části trojúhelníku zde podle tohoto grafu ubývá). Odpověď C v této položce (druhá nejčastější – 30 %) není z tohoto hlediska tedy fatálně chybná. Že se jedná o závislost kvadratickou, a nikoli lineární, bylo nejčastější chybou i u následující kategorie vysokoškoláků.

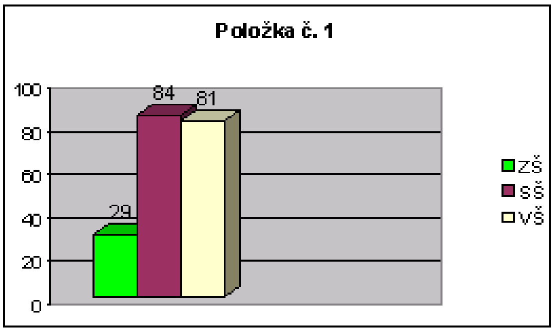
Vysoká škola

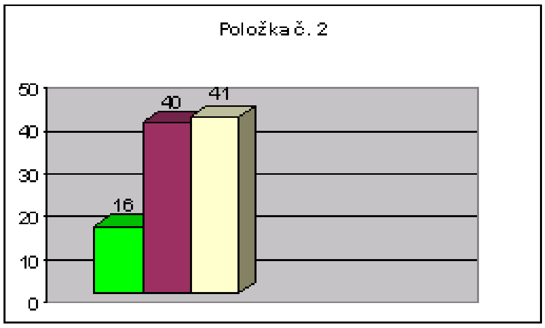
	A	B	C	D
1	**81**	16	2	1
2	38	19	**41**	2
3	4	31	**41**	24
4	7	10	22	**61**

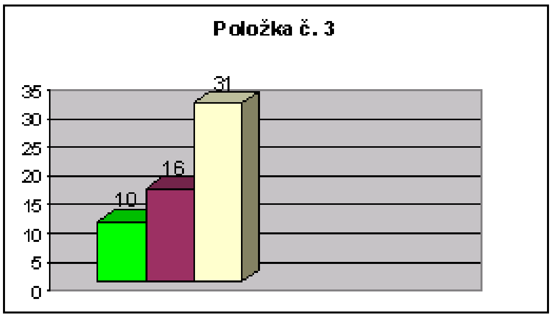
K výraznějšímu posunu u četnosti správných odpovědí dochází u respondentů této kategorie pouze u položky č. 3, maximum ohlasů (41 %) však zde má po částech lineární graf z odpovědi C.

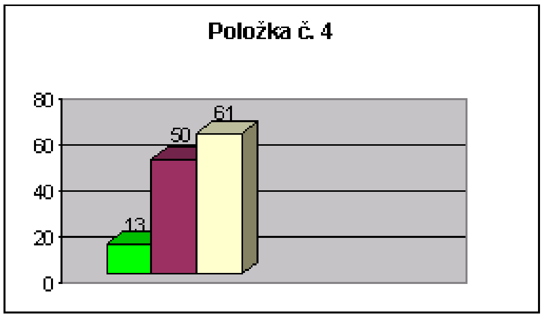
K dokreslení uvedených postřehů uveďme ještě následující diagramy ilustrující vývoj procentuální četnosti správných odpovědí u jednotlivých položek.

Za pozornost jistě stojí lepší výsledky středoškoláků oproti studentům učitelství matematiky u položky č. 1. Výrazný nárůst správných odpovědí mezi těmito dvěma kategoriemi respondentů není ani u druhé situace – naplňování nádoby.









Z hlediska vývoje je nejzajímavější položka č. 3. K výraznému nárůstu správných odpovědí zde došlo až u vysokoškoláků. Na základní i střední škole respondenti označovali nejčastěji odpověď D (73% na základní a 50% na střední škole), kde je graf funkce podobný obrázku příslušné situace.

Na závěr ještě zmíním jeden zajímavý výsledek. Porovnání četnosti správných odpovědí u chlapců a dívek vyznívá bez výjimky u každé položky a v každé věkové kategorii ve prospěch chlapců. Rozdíly to ale nejsou nikde veliké. Na základní škole se jedná průměrně o 6%, na střední škole o 10% a na vysoké škole o 14%.

Literatúra

[1] Leuders, T., Prediger, S.: *Funktioniert's? – Denken in Funktionen*, Praxis der Mathematik in der Schule, 2005, č. 2, Köln/Leipzig, 1 – 7.

Adresa autora:
Doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc.
Katedra matematiky PF UJEP
České mládeže 8
Ústí nad Labem
e-mail: eisenmannp@pf.ujep.cz

Historie matematiky a humanizace vzdělávání

Eduard Fuchs

Abstract. *The paper concentrates on the position of the history of mathematics in the education of the teachers. The attention is paid on possible interpretations of the term "humanization of teachingänd on the utilization of history in the school teaching. Also included is information about some activities in the Czech Republic, particularly about editing activities and seminars for secondary school teachers.*

Příprava učitelů matematiky je složitý proces, který nelze redukovat na to, že „odborný matematik“ si doplní vzdělání o jistý blok psychologických, pedagogických a případně dalších společenskovědních předmětů.

Styl výuky, motivaci žáků, přesahy matematiky do jiných předmětů a obecně budování povědomí faktu, že matematika není soubor „z nebe spadlých“ vzorců, pouček a pravidel, to vše je nutno u budoucích učitelů matematiky budovat systematicky a ve všech odborných předmětech. Tuto roli nezvládne sama o sobě ani dobře koncipovaná didaktika matematiky a tím méně didaktika obecná.

Historie matematiky v tomto procesu hraje významnou roli. Prvoplánově kromě své všeobecně vzdělávací role samozřejmě poskytuje učiteli zásobárnu netradičních příkladů, motivačních prvků a zajímavých příběhů, jimiž lze zpestřit výuku apod. Zejména však hraje klíčovou úlohu ve formování celkového pohledu na výstavbu matematiky, umožňuje učitelům snáze začlenit tuto disciplínu do celkového obrazu lidské kultury a vzdělanosti a tím výrazně přispět k humanizaci výuky a to nejen matematiky.

Pojmem „humanizace výuky“ se u nás – a předpokládám ,že na Slovensku nebyla situace příliš odlišná – oháněla řada pedagogů a školských pracovníků se zřejmou snahou krátit na školách počty hodin přírodovědných předmětů.

Humanizací je třeba, dle našeho názoru, rozumět něco mnohem hlubšího než zvýšení počtu vyučovacích hodin jazyků, dějepisu, estetické výchovy apod. Nejen proto, že se ukázalo, že jazyky kupodivu nelezou dětem samy do hlavy, ať už těch hodin výuky mají jakýkoliv počet; a že byla zcela nesprávná představa, že v současných školách obsah matematiky nějak výrazně „nabobtnal“ oproti gymnaziálním osnovám v minulosti. (Na příkladech lze snadno dokumentovat, že maturitní písemka z matematiky z doby před sto lety by mezi dnešními maturanty zákonitě svou náročností vyvolala nefalšované zděšení.)

Argumenty tohoto druhu jsou sice neopominutelné, nikoliv však nejpodstatnější. Dovolte mně proto, abych se pokusil nastínit, co pokládám za faktickou humanizaci vzdělávání, v čem by měla spočívat její podstata a současně její náročnost.

Především bych chtěl zdůraznit, že ani v nejmenším, přestože jsem sám matematikem a vysokoškolským učitelem matematiky, nechci tvrdit, že právě exaktní vědy mají ve vzdělávacím procesu nějaké výsadní postavení; současně však chci zdůraznit že toto postavení, dle mého názoru, nemají ani vědy humanitní.

Zamyslíme-li se nad představou vzdělaného člověka, nad tím, co očekáváme od maturanta, a ten by snad vzdělaným člověkem být měl, pak se snad shodneme na některých skutečnostech.

Znakem a měřítkem vzdělanosti není to, že dotyčný umí vyjmenovat některá gramatická pravidla, ale to, že se dovede kultivovaně vyjadřovat a jeho písemný projev se nehemží hrubými chybami. (Dovolte mně v této souvislosti konstatování, které jistě řada z přítomných může doložit z vlastních zkušeností. Ještě před několika lety jsme si jako kuriozitu ukazovali posluchače, který dokázal napsat slovo elipsa s tvrdým **y.** Kdeže loňské sněhy jsou; z včerejší kuriozity se stává pravidlo. Naši studenti jsou budoucí **učitelé.** Pro mne je přímo děsivá skutečnost, že **většina** z nich, a to tvrdím zcela zodpovědně, běžně při psaní dělá hrubé chyby. Tím nemám na mysli takové „detaily" jako psaní velkých a malých písmen, čárek před větou vedlejší apod., ale psaní „i" a „y". Vždy znovu svádím boj, zda takový student má právo udělat zkoušku z matematiky. Jak si troufne psát jednou před žáky na tabuli?)

Měřítkem vzdělanosti není, zda člověk umí vyjmenovat díla některých spisovatelů, ale to, zda čtení patří mezi jeho životní potřeby. Mimochodem, právě to, že děti dnes čtou jen minimálně, je dle mého názoru jedním z hlavních důvodů výše popsaného neutěšeného stavu.

Stejně tak ovšem není znakem vzdělanosti to, zda dotyčný umí odříkat Newtonovy zákony nebo zda si pamatuje vzorce složitých chemických sloučenin, ale například to, zda je zvídavý nebo nikoliv, zda podléhá pavědeckým atakům, jimiž jsme dnes tak nehorázně často zahrnováni ve vysílání televize, rozhlasu i v tištěné podobě.

Škola má v dětech podněcovat zvídavost, kterou snad máme my, lidé, vrozenou. Má mu poskytnout orientaci ve světě, učit ho klást otázky, poznávat, které otázky jsou ty správné a které jsou zavádějící. Obrazně řečeno, ne ho učit memorovat fyzikální rovnice, ale učit ho porozumět čím to je, že jsme schopni orientovat se v knize přírody a občas z ní něco i pochopit. Není důležité odříkávat formuli $E = mc^2$, ale porozumět tomu úžasnému faktu, že jsme z pozorování světla hvězd byli schopni porozumět alespoň částečně stavbě vesmíru, jehož jsme součástí. Důležitější než odříkávat biologické zákonitosti, je poznat co kvete na rozkvetlé louce a umět se chovat v přírodě.

Abychom si dobře rozuměli: ani v nejmenším zde nehoruji pro to, aby se učilo a vyžadovalo méně faktů. Základní faktografická úroveň je absolutní nezbytností, ze které nelze slevit, nechceme-li, aby se vyučování neproměnilo v prázdné tlachání. Za téměř urážlivé považuji hlasy, které dnes již naštěstí víceméně umlkají. Jejich nositelé se nám snažili namluvit, jak je to v našem školství špatné ve srovnání se zahraničím, protože tam jsou děti sebevědomější a nevím jaké ještě. Postupně snad přicházíme na to, že přes všechny peripetie, jimiž jsme prošli, je naše školství (a nyní mám na mysli školství české i slovenské) jedna z věcí, na něž můžeme být alespoň v základních rysech hrdí. Úspěchy našich studentů, kteří se dostali do světa, jsou toho jasným dokladem.

Nikoliv tedy boj proti faktografii. Jen se snažím zdůraznit, že důležitější než **znát,** je **rozumět**. Důležitější než odříkávat odpovědi je umět klást otázky. Co to však znamená pro výuku?

Obrazu v galerii nemůže porozumět ten, kdo nemá ani ponětí o perspektivě, kompozici a neví, co to je zlatý řez. Proto nemůže dobrý vyučující estetické výchovy tvrdit, že ho matematika nezajímá a matematiku nemůže dobře učit ten, kdo se v životě nezadíval na obraz v galerii nebo alespoň do knihy o výtvarném umění.

Stejně tak pro pochopení vývoje v 17. století je důležitější zvrat v lidském myšlení, který znamenalo například dílo Newtonovo než biflování data, kdy se stal ruským carem Fjodor III. Toto konstatování je však naprosto symetrické, pokud jde o vzájemné vztahy exaktních a humanitních věd. Matematik nemůže správně pochopit Eukleidovy *Základy*, docenit jejich velikost a geniální stavbu, neví-li nic o Aristotelovi a Platonovi a neumí-li se orientovat v onom epochálním antickém období.

Snad i z těchto několika jednoduchých příkladů je zřejmé to základní, co je podstatou opravdové **humanizace** vzdělávání. Přitom není třeba zastírat, že taková humanizace je mnohem obtížnější, než pouhé nadekretování počtu hodin; a náročnost pro učitele je samozřejmě nesmírná. O to větší výzvou se však do budoucna stává.

Z uvedeného snad evidentně plyne, že postavení historie matematiky ve vzdělávání učitelů je nezastupitelné. Z řady vcelku průhledných důvodů přitom není překvapivé, že v minulém režimu historie (a tím spíše filozofie) matematiky prakticky zmizela z vysokoškolské výuky v odborném i učitelském studiu a situace dospěla do stavu, že většina současných středoškolských učitelů matematiky se v řádném.studiu s uvedenými disciplínami nesetkala. Tento stav byl po návratu do „normálních“ poměrů navíc komplikován tím, že v češtině (a samozřejmě i ve slovenštině) existovalo velmi málo dostupné literatury z daných oborů.

Ve vzdělání středoškolských učitelů se tak opakovala situace, kterou jsme museli cca o deset dříve řešit i na vysokých školách. Na počátku osmdesátých let se totiž historie matematiky do vzdělávání učitelů vrátila, i když pod kryptonázvem *Světonázorová výchova v matematice*. V tehdejším Československu však na fakultách vychovávajících učitele nebyl prakticky jediný přednášející specializovaný na historii matematiky. Na tuto situaci jsme tehdy zareagovali tak, že jsme pod hlavičkou Jednoty československých matematiků a fyziků začali pořádat každoročně letní školy věnované historii matematiky. U zrodu stála představa tří až pěti celostátních letních škol pro vysokoškolské učitele i další zájemce o historii matematiky, na nichž by byly probrány alespoň nejdůležitější partie z dějin matematiky a učitelům na vysokých školách by tak alespoň částečně byla situace usnadněna.

Zájem o historii matematiky však předčil původní očekávání a situace se vyvinula tak, že tyto letní školy se od r. 1980 dodnes konají každoročně, byť se jejich náplň postupně měnila.

Když jsme na počátku devadesátých let tedy stáli před problémem, jak zpřístupnit zájemcům o historii matematiky z řad středoškolských učitelů ty partie, které by pro ně byly zajímavé a ve výuce použitelné, rozhodli jsme se společně s doc. Bečvářem z MFF UK v Praze pořádat *Celostátní seminář z historie matematiky pro vyučující na středních školách*, který by se pravidelně střídal se seminářem *Filozofické problémy matematiky a fyziky*, který se konával – a dodnes koná – každé dva roky v srpnu.

První z takto založených seminářů se konal v Jevíčku v r. 1993, sedmý z těchto seminářů proběhl v srpnu 2005. Při přípravě sborníku z prvního semináře jsme se současně snažili reagovat na kritický nedostatek české literatury z oblasti historie matematiky. Připravený sborník *Historie matematiky I*, který obsahoval podstatně rozšířené verze základních přednášek ze semináře, se tak stal základem edice **Dějiny matematiky**¸ v níž jsme za uplynulých deset let vydali již pětadvacet svazků a v jejímž vydávání nadále pokračujeme.

V této edici byly dosud vydány následující knihy:

J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky I*, 1994
J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr (1852—1903)*, 1995
J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 19. století*, 1996
J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Člověk, umění, matematika*, 1996
J. Bečvář (ed.): *Jan Vilém Pexider (1874— 1914)*, 1997
Š. Schwabik, P. Šarmanová: *Malý průvodce historií integrálu*, 1996
J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky II*, 1997
P. Šišma: *Teorie grafů 1736—1963,* 1997
K. Mačák: *Počátky počtu pravděpodobnosti*, 1997
M. Němcová: *František Josef Studnička (1836—1903)*, 1998
J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků I*, 1998
J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*, 1999

M. Bečvářová: *Z historie Jednoty (1862—1869)*, 1999
K. Lepka: *Historie Fermatových kvocientů (Fermat—Lerch),* 2000
K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, 2001
J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků II*, 2001
E. Fuchs (ed.): *Mathematics troughout the Ages*, 2001
K. Mačák, G. Schuppener: *Matematika v jezuitském Klementinu v letech 1600—1740*, 2001
J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, 2001
M. Bečvářová: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady,* 2002
P. Šišma: *Matematika na německé technice v Brně*, 2002
M. Hykšová: *Karel Rychlík (1885—1968)*, 2003
J. Bečvář; M. Bečvářová; H. Vymazalová: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie,* 2003
J. Bečvář; E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků III*, 2004
E. Fuchs (ed.): *Mathematics troughout the Ages II*, 2004.

Adresa autora:
Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno
Česká republika
e-mail: fuchs@math.muni.cz

Modul matematickej analýzy v kurze ďalšieho vzdelávania učiteľov[3]

Jozef Fulier, Ján Gunčaga

Abstract. *We present our experience with teaching calculus supported by a computer program Derive. We outline a concept of definite integral and discus some related examples.*

Úvod

Počas trvania projektu „*Modernizácia a inovácia vyučovania matematiky a informatiky so zreteľom na budúcich učiteľov a celoživotné vzdelávanie*" podporeného EÚ prostredníctvom ESF prebieha ďalšie vzdelávanie učiteľov na *Katolíckej univerzite v Ružomberku* v rámci piatich modulov. Jedným z nich je aj *modul matematickej analýzy.* V rámci tohto modulu by sme chceli prezentovať určité podnety pre vyučovanie matematickej analýzy na strednej škole. Seminár tohto modulu má nasledovné predbežné osnovy:

1. *Využitie histórie matematiky vo vyučovaní matematickej analýzy* 4 h
2. *Propedeutika základných pojmov matematickej analýzy* 4 h
3. *IKT vo vyučovaní matematickej* analýzy 4 h
4. *Neštandardné funkcie a krivky* 4 h

V tomto článku si ukážeme niektoré možnosti *využitia informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní matematickej analýzy.*

Niekoľko všeobecných poznámok k vyučovaniu matematiky podporovanom počítačmi

Súčasný rozvoj informačných technológií sa nevyhnutne musel odraziť aj vo vzdelávacom procese, jeho modernizácii a zavádzaní nových technológií. Moderné *informačné a komunikačné technológie (IKT)* - reprezentované v prvom rade multimediálnymi počítačmi pripojenými k Internetu – významne menia doterajšie koncepciu vzdelávania v celej jej šírke, matematiku nevynímajúc. Je nepochybné, že vhodným využitím počítača vo vzdelávacom procese môže dôjsť k významnému skvalitneniu vzdelávaniu v matematike na všetkých typoch škôl.

Z didaktických aspektov fenoménu IKT vo vyučovaní matematiky je potrebné vyzdvihnúť najmä tieto:

– aspekt *vizualizácie,*

– aspekt *simulácie procesov,*

– aspekt *interakcie medzi počítačom a používateľom.*

[3]Článok vznikol aj vďaka projektu KEGA č. 3/3269/05 *Rekonštrukcia diela prof. Ing. Igora Kluvánka, CSc. k nedožitým 75. narodeninám*

Zastavme sa na chvíľu pri aspekte *vizualizácie (znázornenia)*, či v širšom ponímaní pri *aspekte reprezentácie* v matematike. Ako konštatujú FISCHER a MALLE v peknej práci [2] počítanie podľa pravidiel je sprevádzaný *aspektom reprezentácie a opisu.* V matematike sa operuje so symbolmi alebo postupnosťami symbolov, ktoré reprezentujú alebo opisujú abstraktný stav. Takéto reprezentácie sa musia vždy znovu nachádzať a interpretovať a v tomto procese nám môže situáciu veľmi uľahčiť počítač. K tradičným dôležitým *grafickým formám reprezentácie* v matematike dnes zaraďujeme najmä: *spôsoby písania čísel*, *formalizmus elementárnej algebry* vyvinutý v 15. a 16. storočí, *graf funkcie* (od 14. storočia), *Leibnizova symbolika* diferenciálneho a integrálneho počtu, vektory a *matice*, vrcholové *grafy*, *vývojové diagramy* a *množinovo – teoretický formalizmus.* Tieto reprezentácie môžu byť (v primeranej miere) prostredníctvom *pera a papiera*, resp. *kníhtlačou* graficky znázornené. Je však vhodné poznamenať, že v minulosti sa používali (a v istej forme sa používajú dodnes) aj *negrafické prostriedky prezentovania* matematických abstrakcií, napr. *abakusy a počítacie kamene.* Dnes žijeme v dobe, keď všetky tieto formy vrátane písomnej formy čiastočne nahrádza nová forma *materializácie matematiky*: ***počítač***. V súčasnosti už môžeme konštatovať, že počítač predstavuje najvyvinutejšiu formu *prezentácie abstraktných vzťahov*, resp. *procedúr v materiálnej forme.*

Z hľadiska *zvyšovania účinnosti vzdelávacieho procesu v matematike* je potrebné, ba priam nevyhnutné, aby *pasívne formy prijímania poznatkov*, boli čoraz viac nahradzované účinnejšími *aktivizujúcimi formami*, v ktorých sa výrazne presadzuje *samostatná a tvorivá práca študentov* ako jedného z najdôležitejších faktorov úspešnosti a efektivity vzdelávania v matematike. Toto je umocnené ešte i tým, že aj študent spoznáva svoje praktické schopnosti a zručnosti hlavne *v samostatnej aktívnej činnosti*, pričom jej úspešnosť následne kladne ovplyvňuje *motivačnú zložku* študentovej psychiky.

Počítače môžu významne pomáhať študentom tým, že im poskytnú bezpečné a pritom *podnetné prostredie na učenie.* Takéto počítače, okrem toho, že eliminujú a obmedzujú zdĺhavé a rutinné matematické výpočty, je možné "naučiť", aby kládli otázky, poskytovali užitočné informácie a boli *nekonečne trpezlivé*, keď sa užívateľ pokúša riešiť *matematické úlohy a problémy*, čo aj v budúcnosti celkom určite zostane *základom tvorivej práce v matematike.*

Pred učiteľom matematiky i jeho žiakmi sa otvárajú nové obzory, ktoré sa môžu stať účinným doplnkom osvedčených vzdelávacích metód v matematike. Totiž učiteľ matematiky môže využívať v celom edukačnom procese hlavne tieto aspekty práce s počítačom:

- *jeho komunikačnú funkciu a rýchlu dostupnosť informácií,*
- *individualizácia úloh* – každému žiakovi je možné zadať úlohy rôznej zložitosti s rozdielnou časovou náročnosťou na jej riešenie
- *jednoduchšia a účinnejšia prezentácia učiva* – v porovnaní s tradičnou študijnou literatúrou umožňuje počítač sprístupňovať informácie formou hypertextu, priebeh niektorých procesov formou grafických reprezentácií napr. v tvare *appletov,*
- *efektívnejšie učenie riešením problémov,*
- *opakovanie (precvičovanie) učiva, pestovanie výpočtových zručnosti a návykov (utvrdzovanie rozličných algoritmov)*, pre túto činnosť je možné počítače spravidla okamžite použiť,

– *kontrola vyučovacieho procesu aj učenia sa* – a to hlavne pomocou testov (vyhotovenie a vyhodnotenie zvládne počítač) a diagnostikovanie žiakov,

– *okamžitej spätnej väzby* – správne riešenie sa fixuje, nesprávne sa odstraňuje,

– *žiak sa stáva nielen objektom, ale aj subjektom vyučovacieho procesu* – zásahmi do programu, individuálnym tempom a pod.

– *motivovanie žiakov k učebnej činnosti* – počítače sú pre súčasnú generáciu študentov v obľube, čo je možné sprostredkovane využiť pre nasmerovanie ich záujmu aj na matematiku.

Aj keď hlavnými prostriedkami práce matematika, resp. učiteľa matematiky a jeho študentov určite zostane na ešte pomerne dlhú dobu *pero a papier (* resp. *krieda a tabuľa)*, počítače spolu s profesionálnymi *matematickými (resp. didakticko-matematickými) programovými balíkmi,* počítače pripojené na *Internet* určite významne zmenia charakter samostatnej práce študentov i samotný *proces vzdelávania v matematike.* Existujú vydarené programové produkty, ktoré je možné, bez dodatočných úprav s úspechom využiť nielen pri samoštúdiu, pri samostatnej práci študenta, ale aj priamo na vyučovacích hodinách z matematiky. Sem je možné zaradiť počítačové programy *dynamickej geometrie*, napríklad *Cabri Geometria či Euklides.* Veľmi významné použitie v matematike a v jej vyučovaní majú matematické softvérové produkty *typu CAS* (*Computer Algebra Systems*), ku ktorým patrí napríklad: *Derive*, *MatLab, Mathcad a Mathematica* a pod. Široké grafické možnosti týchto programov sú spojené s pomerne jednoduchou obsluhou, umožňujú pracovať žiakom a študentom s *modelmi matematických objektov* (napríklad s grafmi funkcií, s geometrickými krivkami, plochami či telesami) a tým rozvíjať názorné geometrické predstavy o týchto objektoch

V ďalšom chceme na jednoduchých príkladoch ukázať ako je možné využiť programový produkt *Derive* (je štandardnou výbavou softvérového balíčka pre základné a stredné školy z projektu *Infovek)* *vo vyučovaní matematickej analýzy* na stredných školách.

Experimentálna časť

Pojem určitého integrálu je úzko previazaný s pojmom obsahu rovinného útvaru. Z hľadiska fylogenézy zohrávajú dôležitú úlohu kvadratúry rovinných útvarov, ktoré sa vyskytujú už v starogréckej matematike. Pomerne známou je *Archimedova kvadratúra paraboly*. Podrobnejšie je popísaná v [4]. Jednoduchou modifikáciou *exhaustívnej metódy*, ktorú využil *Archimedes zo Syrakúz (287-212 pred Kr.)* je možné riešiť aj nasledovnú úlohu:

Úloha 1. *Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie* $y = x^2$*, osou x a priamkami* $x = 0$ *a* $x = 1$.

Pri riešení tejto úlohy so žiakmi môžeme využiť prístup uvedený v [1]. Pomocou programu DERIVE nakreslíme obrázok, ktorý použijeme na výpočet. Využijeme jednoduchý program s grafickým zobrazením príkazov #1, #6, #7, #8, #12:

#1: f(x) := x^2

#2: Bod(x) := [x, f(x)]

#3: ArPriem(u, v) := (u + v)/2

#4: [a := 0, b := 1]

#5: [A := Bod(a), B := Bod(b), C := Bod(ArPriem(a, b)),
D := ArPriem(A, B)]

#6: [f(x), [A, D, B, C, A]]

#7: [[b, 0], [b, f(b)]]

#8: [C, D]

#9: c := ArPriem(a, b)

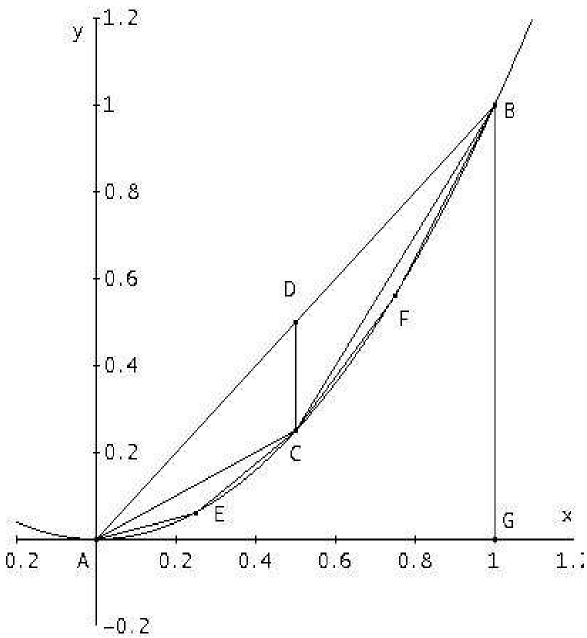
#10: E := Bod(ArPriem(a, c))

#11: F := Bod(ArPriem(c, b))

#12: [[A, E, C], [C, F, B]]

Po označení príslušných bodov dostaneme nasledovný obrázok (pozri obr.1). Najskôr vypočítame obsah útvaru ohraničeného grafom paraboly a priamkou AB (úsek paraboly ACB). Pri jeho výpočte priamo použijeme exhaustívnu metódu. Do úseku najprv vpíšeme trojuholník ABC, pričom x-ová súradnica bodu C je aritmetickým priemerom x-ových súradníc bodov A, B. Bod D je stredom úsečky AB. Trojuholníky BCD a ACD majú rovnaké obsahy, lebo strana CD je ich spoločná strana a výška na túto stranu má u oboch trojuholníkov rovnakú dĺžku. Preto obsah $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ACD}$. Pomocou programu Derive ho vypočítame:

Obsah(a,b) := ArPriem(f(a),f(b))-f(ArPriem(a,b)))·(b-a)/2. Trojuholník ABC pre prehľadnosť budeme nazývať *trojuholníkom 0-tého rádu.*



Obr. 1

V ďalšom kroku, vpíšeme do úsekov paraboly AC a CB, podobným spôsobom ako do úseku ACB trojuholníky AEC a CFB, ktoré nazveme *trojuholníkmi 1-rádu.* Ich obsahy môže program Derive vypočítať ako *Obsah(a,c),* resp. *Obsah(c,b).* Súčet obsahov týchto trojuholníkov je *Obsah(a,c)+ Obsah(c,b)*. Do úsekov paraboly AE, EC, CF, FB vpíšeme *trojuholníky 2. rádu.* Je zrejmé, že v tomto procese môžeme neobmedzene pokračovať. Súčet obsahov *trojuholníkov n-tého rádu* vypočítame pomocou DERIVE rekurzívne:

#13: Obsah(x,y,n):=IF(n=0,(ArPriem(f(x),f(y))-f(ArPriem(x,y))).(y-x)/2, Obsah(x, ArPriem(x, y), n - 1) + Obsah(ArPriem(x, y), y, n - 1))

Vo výpočte využívame hodnotu Obsah(a,b,n). Aby sme zistili ako vyzerajú hodnoty príslušných súčtov obsahov trojuholníkov *0-tého* až *5-teho rádu*, po zadaní príkazu

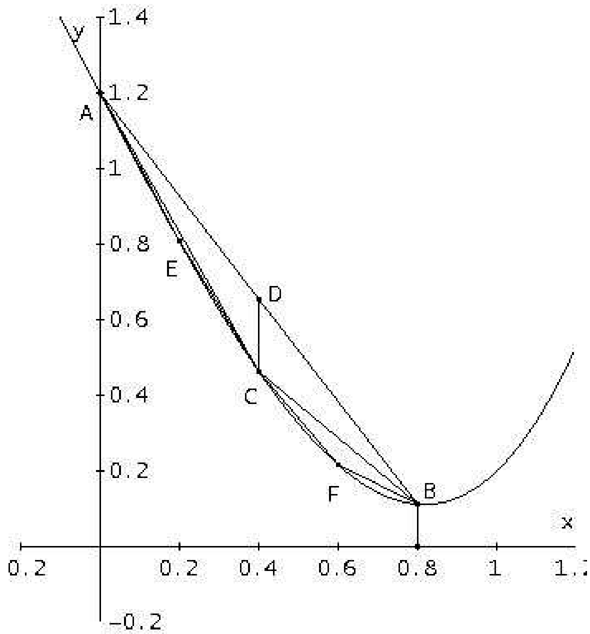
#14: VECTOR(Obsah(a, b, g), g, 0, 5),dostaneme $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, \frac{1}{512}, \frac{1}{2048}, \frac{1}{8192}\right]$.

Obsah úseku paraboly ACB vypočítame ako súčet nekonečného radu, ktorého členy sú obsahy trojuholníkov n − tého rádu pre n = 0, 1, 2,... . Ak by sme ho chceli vypočítať pomocou DERIVE štandardným príkazom *SUM(Obsah(a,b,n),n,0,inf)*, neuspejeme, lebo funkcia OBSAH je rekurzívne definovaná. Je preto potrebné zadať SUM(1/(8·4 n),n,0,inf) a výsledok dostaneme v tvare $\frac{1}{6}$.Keďže obsah trojuholníka AGB je $\frac{1}{2}$, po bezprostrednom zadaní 1/2 - 1/6 dostaneme *konečný výsledok* $\frac{1}{3}$.

Je vhodné poznamenať, že pomocou uvedeného programu v DERIVE môžeme vypočítať obsah daného útvaru nielen pre priamky x =0 a x =1, ale úlohu môžeme zovšeobecniť aj pre x =0 a x = b. Stačí v príkaze #4 nahradiť uvedený príkaz príkazom [a := 0, b :=]. Využitím príkazov #13, #14 je možné ukázať, že hľadaný obsah je $\frac{b^2}{3}$.

Uvedený program sa dá využiť aj pre ľubovoľné polynomické funkcie y = f(x), ktoré nadobúdajú na príslušnom intervale ⟨a,b⟩ kladné funkčné hodnoty a sú na tomto intervale aj konvexné. Ako príklad uvedieme nasledovnú úlohu:

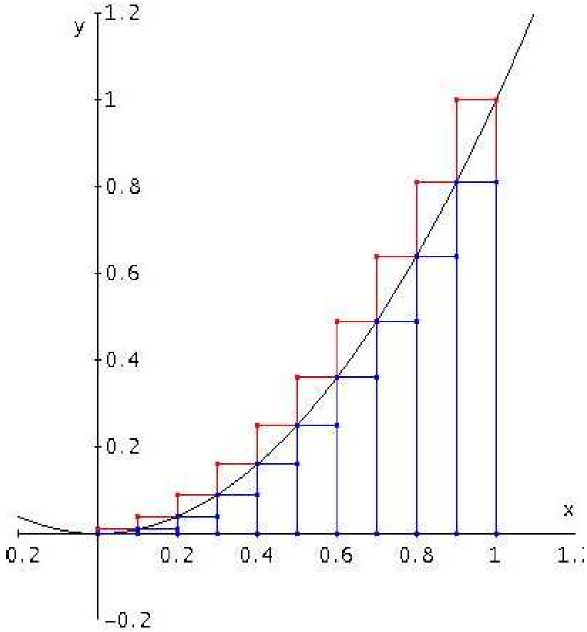
Úloha 2. *Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie f:* $y = = x^3 - 2x + 1,2$*; osou x a priamkami* $x = 0$ *a* $x = 0,8$. *Využite pritom exhaustívnu metódu a použite pri výpočte program Derive.*



Obr. 2

Úlohu 1 môžeme riešiť aj využitím integrálnych súčtov vyššie uvedenej funkcie. Použijeme modifikáciu postupu, ktorý použil známy anglický matematik *John Walis (1616 – 1703).* Najprv rozdelíme interval $\langle 0, 1\rangle$ na n rovnakých častí, potom prostredníctvom softvéru DERIVE vytvoríme horné a dolné integrálne súčty danej funkcie na intervale $\langle 0, 1\rangle$ a vypočítame ich hodnotu. Realizáciu zabezpečíme prostredníctvom krátkeho programu:

```
#1:  [a := 0, b := 1]

#2:  n := 10

#3:  Delenie(n, k) := a + k·(b - a)/n

#4:  Obdlznik(u, v, w) := [[u, 0],[u, w],[v, w],[v, 0]]

#5:  f(x) := x^ 2

#6:  [[a, 0],[a, f(a)]]

#7:  [[b, 0],[b, f(b)]]

#8:  VECTOR([Delenie(n, k), 0], k, 1, n-1)

#9:  HObdlznikDelenia(n, k) := Obdlznik(Delenie(n, k),
     Delenie(n, k + 1), f(Delenie(n, k + 1)))

#10: VECTOR(HObdlznikDelenia(n, k), k, 0, n - 1)

#11: DObdlznikDelenia(n, k) := Obdlznik(Delenie(n, k),
     Delenie(n, k + 1), f(Delenie(n, k)))

#12: VECTOR(DObdlznikDelenia(n, k), k, 0, n - 1)
```



Obr. 3

Keď prezentujeme tento program žiakom je vhodné obrázok v DERIVE vytvárať pred žiakmi postupne. Zobrazením príkazov #5, #6, #7 v grafickom okne zakreslíme útvar, ktorého obsah máme vypočítať. Pomocou príkazu #8 zobrazíme množinu deliacich bodov intervalu. Príkazom #10 dostaneme horné a príkazom #12 dolné integrálne súčty danej funkcie. Pre lepšiu prehľadnosť je vhodné príslušné dolné a horné súčty znázorniť rozličnými farbami. Finálnym produktom je schéma znázornená na obr. 3.

K tomu, aby sme vypočítali horný a dolný integrálny súčet funkcie f pre daný počet deliacich bodov intervalu (v našom prípade 10), môžeme postupovať nasledovne:

#13: ObsahDObdlznika(n, k) := f(Delenie(n, k))·(b - a)/n

#14: ObsahHObdlznika(n, k) := f(Delenie(n, k + 1))·(b - a)/n

#15: HornyIntegralnySucet:=SUM(ObsahHObdlznika(n,k),k,0,n-1)

#16: DolnyIntegralnySucet:= SUM(ObsahDObdlznika(n,k),k,0,n-1)

Vykonaním príkazov #15, #16 v programe DERIVE dostaneme horný aj dolný integrálny súčet danej funkcie f:

HornyIntegralnySucet := $\frac{77}{200}$, DolnyIntegralnySucet := $\frac{57}{200}$.

Ak by sme teraz v príkaze #2 menili hodnotu$n$ môžeme získať obrázky podobné ako na obr. 3, samozrejme ak znova zobrazíme príkazy #5, #6, #7, #8, #10, #12. Pomocou príkazov #15, #16 vypočítame aj hodnoty príslušných horných a dolných integrálnych súčtov.

Pre geometrickú interpretáciu faktu, ako sa menia hodnoty integrálnych súčtov s rastúcim počtom častí m na ktoré je interval $\langle 0,\ 1\rangle$ rozdelený, použijeme tieto príkazy:

#17: HornyIntegralnySucet(m):=SUM(ObsahHObdlznika(m,k),k,0,m-1)

#18: DolnyIntegralnySucet(m):=SUM(ObsahDObdlznika(m,k),k, 0, m - 1)

#19: HorneSucty := VECTOR(HornyIntegralnySucet(m),m,100,1000, 100)

#20: DolneSucty := VECTOR(DolnyIntegralnySucet(m),m,100,1000, 100)

Príkaz #19 vypíše horné integrálne súčty pre rozdelenie intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$ na $m$rovnakých častí, pričom. m sa mení od 100 do 1000 s krokom 100. Analogicky, príkaz #20 má tú istú funkciu, ale pre dolné integrálne súčty. Rozsah aj krok pre m môžeme samozrejme meniť.

Študenti sa môžu presvedčovať (aj keď iba na konečnom počte prípadov), že horné súčty s vysokou pravdepodobnosťou tvoria klesajúcu, zdola ohraničenú postupnosť, a dolné súčty rastúcu, zhora ohraničenú postupnosť. Toto vedie k presvedčeniu, že obe postupnosti sú konvergentné. Budú mať rovnakú limitu? Pre zistenie skutkového stavu stačí využiť nasledovné príkazy:

#21: ObsahH := LIM(HornyIntegralnySucet(m), m, inf)

#22: ObsahD := LIM(DolnyIntegralnySucet(m), m, inf).

Po vykonaní týchto príkazov dostaneme výsledky v tvare

ObsahH := $\frac{1}{3}$, ObsahD := $\frac{1}{3}$, čo znamená, že tieto *postupnosti majú spoločné limity.* Je preto celkom prirodzené, ak v následnom kroku stotožníme túto spoločnú limitu s veľkosťou obsah hľadaného útvaru.

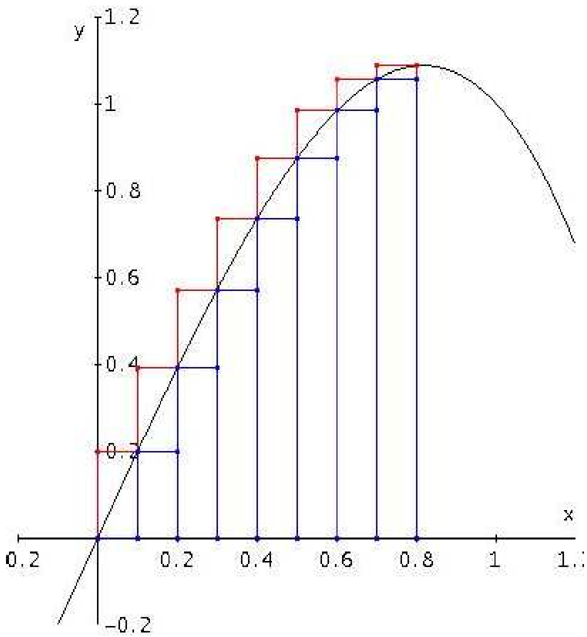
Poznámka. Pomocou tohto programu v DERIVE môžeme analogicky určiť aj obsah útvaru, ktorý by bol ohraničený aj inou polynomickou funkciou f : y = f(x), ktorá je rastúcou na intervale ⟨a, b⟩. Rovnako môžeme meniť aj parametre a, b v príkaze #1. Napríklad, ak zmeníme príkazy #1, #2, #5 takto:

#1: [a := 0, b := 0.8]

#2: n := 8

#5: f(x) := 2·x - x 3,

dostaneme nasledovný obrázok



Obr. 4

Následne je možné s využitím vyššie uvedeného programu zistiť, že obsah hľadaného útvaru je rovný $\frac{336}{625}$. Je pritom celkom prirodzené, že v procese zovšeobecňovania (vzhľadom na požiadavky kladené na funkciu f a interval $\langle a, b\rangle$) je možné ďalej pokračovať a získavať nové výsledky .

Záver

Prezentované programy poukazujú na možnosti využitie softvéru DERIVE pri zavedení pojmu *určitý integrál*. Konkrétne sme sa zamerali na *exhaustívnu metódu* a *metódu integrálnych súčtov*, ktoré nie sú v školskej matematike dostatočne využívané. Program DERIVE umožňuje tieto metódy pomerne pružne a rýchlo prezentovať pre polynomické funkcie, ktoré sú najčastejšie využívané v stredoškolskej matematike. Poznamenajme, že učiteľ matematiky môže v DERIVE vytvoriť i ďalšie programy uľahčujúce výklad nového učiva a pochopenie nových pojmov aj v iných tematických celkoch školskej matematiky. Podnety pre tvorbu programov okrem [4] možno nájsť aj v prácach [5], [6] a [7].

Literatúra

[1] Baumann R.: *Analysis 2. Ein Arbeitsbuch mit Derive*. Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig, Ernst Klett Verlag, 2002.

[2] Fischer,R – Malle, G.: *Matematika a spoločnosť*. Bratislava, SPN Bratislava 1992.

[3] Fulier J., Šedivý O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra, UKF, 2001.

[4] Gunčaga, J.: *Archimedova kvadratúra paraboly*. In: *III. Vedecká konferencia doktorandov*. Nitra, UKF, 2002, s. 43- 47.

[5] Koreňová L., Jodas V.: *Niektoré možnosti využitia Internetu a didaktického softvéru vo vyučovaní matematiky v základných a stredných školách*. Bratislava, MCMB, 2002.

[6] Kutzler B., Kokol-Voljc V.: *Úvod do Derive 6*. Linz, Guttenberg Druck, 2003.

[7] Wachnicki E., Powązka Z.: *Problemy analizy matematycznej w zadaniach. Część I*. Kraków, AP, 2002.

Adresa autorov:

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
E-mail: jfulier@ukf.sk

PaedDr. Ján Gunčaga, PhD.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta KU v Ružomberku
Nám. A. Hlinku 56
034 01 Ružomberok
E-mail: guncaga@fedu.ku.sk

Problém nekoordinovanosti učebných osnov matematiky a fyziky na gymnáziách

Peter Hanisko

Abstract. *In this paper are described problems of uncoordinating educational programmes of mathematics and physics at gymnasium in Slovak republic.*

Úvod

Matematike právom patrí hrdý titul „kráľovná vied“. Jej prístup k popisu sveta a používané metódy nachádzajú uplatnenie v mnohých oblastiach vedy aj techniky. Moderné matematické metódy nachádzajú široké uplatnenie aj v takých oblastiach, v ktorých sme v minulosti matematiku takmer nevyužívali, napr. biológia, psychológia, filozofia, jazykoveda a mnohé iné. Tomu významne napomáha aj rýchly rozvoj výpočtovej a informačnej techniky.

Vedná disciplína, ktorá je s matematikou bytostne spojená a vôbec sa bez nej nezaobíde, je fyzika. Fyzika využíva matematický aparát, od najjednoduchších operácií až po zložité výpočty využívajúce napr. tenzorovú analýzu. Vo výučbe fyziky na gymnáziách vo väčšine prípadov vystačíme bez znalosti vyššej matematiky. Príprava žiakov z matematiky na gymnáziách je dostatočná k zabezpečeniu výučby len elementárnych základov fyziky, bez hlbšieho matematického zdôvodnenia súvislosti medzi jednotlivými javmi a procesmi. Skúsenosti a návyky získané v gymnaziálnej matematike sa uplatňujú vo výučbe fyziky na gymnáziách vo využití len približných výpočtov a odhadov pri riešení úloh. Z hľadiska hlbšieho preniknutia do problémov modernej fyziky, súčasná úroveň matematiky, ktorá sa vyučuje na gymnáziách je nepostačujúca.

V predloženom príspevku sa kladie dôraz na nesúlad učebných osnov matematiky a fyziky a z toho prameniace ťažkosti a problémy žiakov pri pochopení základov fyziky. Nesúlad učebných osnov matematiky a fyziky na gymnáziách na Slovensku a v bývalom Československu je chronický a pretrváva už desiatky rokov. Pri jednotlivých školských reformách (v rokoch 1953, 1960, 1977 - 1980 a 1990 - 1997) a v obdobiach medzi nimi sa buď prehlboval alebo zmierňoval, ale nepodarilo sa ho odstrániť. Obrovské škody narobila nekvalifikovanými zásahmi do učebných plánov najmä reforma v rokoch 1977 - 1980, ktorá potom v roku 1985 bola vyhlásená za nevydarenú a nasledoval nie veľmi vydarený ozdravovací proces. K odstráneniu alebo aspoň zmierneniu uvedeného nesúladu má prispieť aj tento príspevok.

Problém nekoordinovanosti učebných osnov matematiky a fyziky na gymnáziách

Matematika a fyzika sa zaraďujú na gymnáziách medzi povinné vyučovacie predmety. Vyučujú sa vo viacerých formách, či už vo forme vyučovania povinného kurzu matematiky a fyziky, ktoré sú povinné pre všetkých žiakov bez rozdielu alebo ako nepovinné cvičenia alebo seminár z matematiky a fyziky, ktoré sú určené tým žiakom, ktorí majú hlbší záujem o obidva predmety. Učivo matematiky a fyziky, ktoré je povinné pre všetkých žiakov je určené učebnými osnovami matematiky a fyziky. Zvládnutie učiva obsiahnutého v učebných osnovách matematiky a fyziky si vyžaduje systematické štúdium oboch predmetov zo strany žiakov a zrozumiteľný výklad daného učiva zo strany učiteľa. Dôležité je, aby žiaci neboli preťažovaní učivom, ktoré je pre štúdium na gymnáziu príliš náročné a vyžaduje si pri štúdiu fyziky značné znalosti matematiky, ale aby učivo bolo vyberané tak, že sa postupne zvyšujú nároky a požiadavky na žiakov a aby bolo koncipované tak, že jeden tematický celok logicky nadväzuje na predchádzajúci a nie ako je to niekedy bežné, že žiaci sú vo fyzike postavení pred pochopenie učiva, ku ktorému potrebujú určitý matematický aparát, avšak tento ešte nepreberali. Bez znalosti matematického aparátu využívaného vo fyzike majú žiaci obrovské problémy počas vyučovania fyziky a pri jej správnom pochopení.

Obsah tematických celkov oboch predmetov by mal byť zladený tak, aby si jednotlivé tematické celky neodporovali a aby sa najmä vo fyzike nevyučovalo učivo, ktoré vyžaduje matematický aparát, ktorý sa preberá až neskôr v tom istom ročníku alebo čo je ešte horšie až vo vyšších ročníkoch. Takéto situácie však vo vyučovaní oboch predmetov na gymnáziách veľmi často existujú, čo spôsobuje nemalé problémy vo vyučovaní nielen učiteľom pri vysvetľovaní učiva, ale najmä žiakom pri chápaní takéhoto učiva. Problém nekoordinovanosti učebných osnov matematiky a fyziky na gymnáziách je vážny problém vo vyučovaní oboch predmetov, ktorý sprevádza žiakov a učiteľov pri štúdiu a vyučovaní oboch predmetov, ale najmä fyziky už od prvého ročníka gymnázia. Problém sa prejavuje najmä v skladbe učiva, v usporiadaní jednotlivých tematických celkov oboch predmetov a najmä v ich zaradení do jednotlivých ročníkov.

Problém nekoordinovanosti učebných osnov matematiky a fyziky na gymnáziu vznikli už pri vytváraní učebných osnov oboch predmetov. Tieto problémy vznikli z toho, že jednotlivé pracovné tímy, ktoré zostavovali učebné osnovy oboch predmetov medzi sebou vôbec nekomunikovali a nespolupracovali. Na základe toho vznikli závažné problémy, na ktoré doplácajú obidve strany, t. j. žiaci aj učitelia. Žiaci doplácajú na to tým, že vo fyzike sa musia učiť učivo, ktoré obsahuje matematický aparát, ktorý ešte nepreberali. Pre učiteľov je ťažké vysvetliť žiakom učivo tak, aby sa nemusel použiť daný matematický aparát a aby výklad učiva bol matematicky správny a korektný a najmä pre žiakov zrozumiteľný.

Tento problém sa výrazne prejavuje hneď v prvom ročníku vo vyučovaní fyziky pri tematickom celku mechanika a potom aj pri vyučovaní ďalších tematických celkov v ďalších ročníkoch, kedy sa od žiakov vyžaduje znalosť matematiky (najmä vektorového, diferenciálneho a integrálneho počtu), ktoré sa vyučujú až vo štvrtom ročníku, čo spôsobuje žiakom aj učiteľom mnohé ťažkosti.

Nekoordinovanosť učebných osnov matematiky a fyziky sa prejavuje asi najvýraznejšie vtedy, keď sa v matematike vo štvrtom ročníku preberajú tematické celky, ktoré sa vo fyzike vyžadujú takmer v každom tematickom celku hneď od prvého ročníka. Takmer všetky fyzikálne veličiny a vzťahy (rýchlosť, zrýchlenie, sila, hybnosť, elektrický prúd, magnetická indukcia apod.), ktoré sa využívajú vo fyzike hneď od prvého ročníka sú vektorového charakteru a ich korektné matematické odvodenie a vysvetlenie je možné jedine pomocou vektorového, diferenciálneho a integrálneho počtu.

Aj keď v prvom ročníku v tematickom celku fyzikálne veličiny a ich meranie je časť venovaná stručnému vysvetleniu základov vektorového počtu, jej význam je však len nepatrný, pretože žiaci sa doteraz s vektormi nestretli a nevedia o nich takmer nič a preto, len stručné uvedenie základných vlastnosti vektorov a pravidiel počítania s nimi sa tu míňa účinku, aký by zaradenie časti o vektoroch malo priniesť.

Podobne je to aj so štatistikou a pravdepodobnosťou. Tieto matematické disciplíny sa na gymnáziu vyučujú až vo štvrtom ročníku, ale ich použitie vo fyzike je podľa učebných osnov naplánované najmä v prvom až treťom ročníku, kedy sa vo fyzike vykonáva najviac laboratórnych cvičení. Štatistické metódy sa vo fyzike využívajú najmä pri experimentoch na hodnotenie správnosti nameraných experimentálnych dát a údajov. Bez využívania poznatkov štatistického hodnotenia experimentálnych údajov vo fyzike na laboratórnych cvičeniach je vyučovanie fyziky a potom aj vykonávanie laboratórnych cvičení hneď od prvého ročníka len akýmsi hrubým priblížením fyziky ku skutočnosti. Na základe toho, žiaci pri hodnotení nameraných výsledkov nie sú schopní korektne posúdiť ich vypovedaciu schopnosť, keďže nepoznajú chyby merania a ani vzájomnú koreláciu jednotlivých dát, čo má za následok, že laboratórne cvičenia nespĺňajú funkciu, na ktorú sú určené, t. j. priblížiť žiakom teoretické učivo praktickými príkladmi.

Tento krátky prehľad, kedy dochádza k najvýraznejšej nekoordinovanosti učebných osnov oboch predmetov je len „špičkou ľadovca" daného problému, pri ktorých sa to prejavuje najviac.

Zmeny tematických celkov matematiky a fyziky na gymnáziách

Hneď v úvode je potrebné poznamenať, že navrhované zmeny platia z veľkej časti len pre žiakov so zvýšeným záujmom o matematiku a fyziku, keďže nie je reálne a ani správne požadovať od všetkých žiakov bez rozdielu aby boli schopní hneď od prvého ročníka pochopiť niektoré tematické celky matematiky a fyziky bez výdatnej podpory samoštúdia a veľkého záujmu naučiť sa niečo nové z matematiky a fyziky.

Súčasná skladba učiva matematiky a fyziky na gymnáziách a jeho usporiadanie do jednotlivých tematických celkov a aj do ročníkov nie je vzájomne zladená a v mnohých prípadoch dochádza k situáciam, kedy sú žiaci postavení pred učenie sa učiva, najmä vo fyzike, ktoré používa matematický aparát, ktorý sa budú učiť až vo vyšších ročníkoch. Takýto stav nie je možné umelo udržiavať aj naďalej, a preto je nevyhnutné zmeniť usporiadanie jednotlivých tematických celkov oboch predmetov a ich zaradenie do ročníkov. K tomu, aby sa tento problém nekoordinovanosti učebných osnov matematiky a fyziky odstránil, by prvým krokom malo byť navrhnutie a realizácia zmeny tematických celkov oboch predmetov a usporiadanie ich učiva do jednotlivých ročníkov. Druhým krokom by bolo potom navrhnutie konkrétnych obsahov učiva v týchto novonavrhnutých tematických celkoch so súčasným vypracovaním nových učebníc oboch predmetov, ktoré by obsahovali všetky vykonané zmeny.

Na odstránenie nekoordinovanosti učebných osnov matematiky a fyziky na gymnáziách je potrebné úplne prepracovanie učebných osnov oboch predmetov. Ich vypracovanie by nemalo byť izolované, ale tímy, ktoré ich budú vypracovávať by mali koordinovať svoju činnosť nielen medzi sebou, ale mali by konzultovať aj s učiteľmi na základných a stredných školách a tiež s vyučujúcimi na vysokých školách. Takouto vzájomnou koordináciou medzi jednotlivými subjektami by sa malo predísť problémom, ktoré sú vo vyučovaní oboch predmetov často neprekonateľnou prekážkou kvalitnej výučby a tým aj zníženého záujmu zo strany žiakov o matematiku a fyziku.

Je potrebné zosúladiť učebné osnovy predmetov matematika, fyzika a prípadne aj chémia tak, aby sa tematické celky využívajúce príslušný matematický aparát preberali až po odučení príslušného tematického celku v matematike. V prípade gymnaziálnej matematiky, aj keď je táto požiadavka oprávnená, vysoko aktuálna a namieste, jej realizácia sa zdá byť viac menej nereálna, keďže v takomto prípade by sa chémia a najmä fyzika museli vyučovať najskôr až od druhého, poprípade tretieho ročníka, čím by sa nestihli odučiť ani všetky povinné tematické celky a rozhodnúť, ktorý tematický celok by sa vyradil a ktorý nie, by bol nesmierne odvážny krok. V takomto prípade by sa v prvom ročníku v matematike museli vyučovať všetky tematické celky (vektorový počet, diferenciálny a integrálny počet, štatistika), ktoré sú pre korektné a matematicky správne vysvetlenie fyziky a z časti aj chémie nevyhnutné. Vzhľadom k tomu, že pre vyučovanie diferenciálneho a integrálneho počtu je potrebné poznať vlastnosti jednotlivých funkcií a na gymnáziu sa tieto témy preberajú podľa v súčasnosti platných učebných osnov počas prvých troch ročníkov, z toho vyplýva, že vyučovanie tejto časti matematiky v povinnom predmete nie je veľmi reálne. Tento problém je možné vyriešiť jedine tak, že tieto časti matematiky sa budú vyučovať ako nepovinný predmet alebo voliteľný predmet cvičenia a seminár z matematiky pre tých žiakov, ktorí majú zvýšený záujem o matematiku a fyziku.

Pri tvorbe nových učebných osnov a učebného programu pre fyziku na gymnáziách je potrebné ako východisko a vodítko vziať základné interakcie elementárnych častíc (a teda hmoty) a tie sú štyri: ***gravitačné***, ***elektromagnetické***, ***slabé*** a ***silné***. Po tejto „osi“ sa vyvíjalo aj vedecké poznanie príslušných fyzikálnych javov - mechanika, elektrina a magnetizmus, fyzikálna optika, atómová fyzika (obalu) a jadrová fyzika. Geometrická optika sa začala vyvíjať paralelne s mechanikou a molekulová fyzika s elektromagnetizmom. Ak by sa narušila táto štruktúra, stratili by sa dôležité náväznosti a to by malo veľmi negatívny dopad na úspešnosť výučby. To sa stalo pri reforme učebných plánov na gymnáziách v rokoch 1977 - 1980.

Z analýzy učebných osnov matematiky a fyziky vyplývajú nasledujúce zmeny, ktoré by bolo aspoň pre čiastočné zmiernenie tohoto nepriaznivého stavu vo vyučovaní matematiky a fyziky a pre aspoň čiastočne odstránenie nekoordinovanosti učebných osnov oboch predmetov nutné realizovať a vykonať. Pre skvalitnenie výučby matematiky a fyziky na gymnáziách by tematické celky matematiky a fyziky mohli mať nasledujúcu štruktúru.

Tabuľka č. 1: Návrh tematických celkov z matematiky pre gymnázia.

Ročník	**Tematický celok**
1. ročník	
1	Teória čísel a komplexné čísla
2	Vektorový počet
3	Funkcie, rovnice a nerovnice I
4	Základy algebry
2. ročník	
1	Funkcie, rovnice a nerovnice II
2	Planimetria
3	Stereometria
3. ročník	
1	Analytická geometria
2	Kombinatorika
3	Pravdepodobnosť a štatistika
4. ročník	
1	Matematická analýza
2	Matematická logika

Tabuľka č. 2: Návrh tematických celkov z fyziky pre gymnázia.

Ročník	**Tematický celok**
1. ročník	
1	Mechanika
2	Molekulová fyzika a termodynamika
2. ročník	
1	Elektrina a magnetizmus
2	Základy elektroniky
3. ročník	
1	Elektromagnetické vlny
2	Optika (geometrická a fyzikálna)
4. ročník	
1	Atómová a jadrová fyzika, Jadrová energetika
2	Elementárne častice a základné interakcie
3	Astrofyzika, Teória relativity

Záver

Matematika a fyzika a s určitým oneskorením aj ich vyučovanie sa vždy dokázali prispôsobiť požiadavkám reálneho sveta. Dnešná matematika a fyzika sú toho dôkazom. Všetci, ktorí prichádzajú do styku s vyučovacím procesom a s jeho prípravou (tvorcovia pedagogickej dokumentácie, učitelia, ale aj samotní žiaci) by sa mali pričiniť o to, aby vyučovanie matematiky a fyziky ani v súčasnosti nezaostávalo za realitou súčasného sveta.

Záverom je potrebné konštatovať, že nie je možné očakávať, že všetci žiaci budú sa zaujímať o matematiku a fyziku v takom rozsahu ako je to uvedené v tomto návrhu. V tomto návrhu sú uvedené len tematické celky, ktoré by mali byť zaradené do povinných predmetov matematiky a fyziky a ktorý musia absolvovať všetci žiaci bez rozdielu. Konkrétny obsah týchto tematických celkov je možné dotvárať podľa potrieb jednotlivých gymnázií alebo aj tried. Pre žiakov so zvýšeným záujmom o matematiku a fyziku sú určené aj ďalšie témy, o ktoré majú záujem a najmä témy, ktoré patria do uvedených povinných kurzov oboch predmetov, avšak s podrobnejším a matematicky korektným spôsobom vysvetľovania učiva. S týmto matematickým aparátom, ktorý sa normálne na vyučovacích hodinách matematiky a fyziky nevyučuje, sa títo žiaci stretnú vo vyučovaní cvičení a seminárov z matematiky a fyziky, ktoré si zvolia ako nepovinné alebo voliteľné predmety.

Literatúra

[1] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Cvičenia z fyziky, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium, nepovinný predmet v* 1. 2. 3. a 4. *ročníku*, 1999. http://www.infovek.sk/predmety.

[2] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Cvičenia z fyziky, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium, voliteľný predmet v* 2. 3. a 4. *ročníku*, 1999. http://www.infovek.sk/predmety.

[3] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Cvičenia z matematiky, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium, nepovinný predmet v 1. 2. 3. a 4. ročníku*, 1999.
http://www.infovek.sk/predmety.

[4] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Cvičenia z matematiky, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium, voliteľný predmet v 2. 3. a 4. ročníku*, 1999. http://www.infovek.sk/predmety.

[5] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Fyzika, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium*, 1997. http://www.infovek.sk/predmety.

[6] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Matematika, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium*, 1997. http://www.infovek.sk/predmety.

[7] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Seminár z fyziky, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium*, 1999. http://www.infovek.sk/predmety.

[8] Ministerstvo školstva Slovenskej republiky: *Seminár z matematiky, učebné osnovy gymnázia, štvorročné štúdium*, 1999. http://www.infovek.sk/predmety.

Adresa autora:
PaedDr. Ing. Mgr. Peter Hanisko
Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku
Detašované pracovisko Levoča
Kláštorská 23
054 01 Levoča
e-mail: hanisko@fedu.ku.sk

Tvorba koncepcie výuky tématického celku „násobenie“

Milan Hejný

Abstract. *Semi-experimental research of multiplication is consider from 1) semantical, 2) structural, 3) operational, and 4) developmental point of view. A commented set of problems enhancing students' autonomous ways of understanding processes and concepts of multiplication is presented.*

1. Úvod

Cieľom štúdie je analýza tematického celku násobenie prirodzených čísel (NPČ). Text je adresovaný pracovníkom výskumu. Súbežne písaný text pre učiteľov bol dodaný do tlače a má byť v edícii Raabik k dispozícii do konca roku 2005.

NPČ patrí k hlavným tematickým celkom matematiky ZŠ. Sondami uskutočnenými medzi poslucháčmi pedagogických fakúlt a učiteľmi ZŠ (vyše 60 dotazníkov a rozhovorov) sme zistili, že respondenti za jadro tematického celku NPČ považujú zvládnutie násobilky a písomného algoritmu násobenia viacmiestnych prirodzených čísel. Násobenie celých čísel „je potom už jednoduché, stačí vtĺcť žiakom do hlavy, že mínus krát mínus je plus; náročnejšie je násobenie desatinných čísel; tu treba dať žiakom mnemotechnickú pomôcku“. Násobenie výrazov potom všetci učitelia považujú za iný typ nácviku, nezávislý na NPČ. Niektorí respondenti zmienili náročnosť idiómov „o koľko“ a „koľkokrát“, niektorí upozornili na dôležitosť zátvorky. Všetci oslovení učitelia zdôraznili ťažkosti niektorých žiakov s násobilkou a skoro všetci sú presvedčení, že bez zvládnutia malej násobilky nemožno začať písomné násobenie.

2. Metodológia

Databázou analýzy bol uvedený prieskum, pár desiatok seminárnych prác poslucháčov denného i diaľkového štúdia a veľa učebníc, učebných textov a metodických príručiek. Niektoré z prameňov uvádzame v literatúre, ale zámerne sa vyhýbame ich hodnoteniu.

Didaktický koncept „násobenie“ v tejto štúdii rozložíme do štyroch vrstiev:
sémantickej, v ktorej ležia väzby operácie násobenia na javy okolitého sveta,
štrukturálnej, ktorá opisuje násobenie ako časť sveta matematiky,
nácvikovej, ktorá je zameraná na zvládnutie procedúr žiakmi a
vývojovej, ktorá popisuje vývoj predstáv, znalostí a zručností žiaka.

Každú z uvedených vrstiev skúmame oddelene.

3. Sémantika násobenia

Hľadáme situácie každodenného života, v ktorých sa objaví násobenie. Inak povedané, hľadáme generické modely[4] operácie násobenia. Pracujeme s číslom v sémantickej

[4] V knihe [08], s. 23 je pojem osvetlený pod starým názvom „univerzálny model“; netreba ho osobitne vysvetľovať, lebo nasledujúce príklady ho dostatočne ozrejmia.

funkcii *stav* – *počet* resp. *možnosť* (tie počítame na kusy) a *veličina* (meriame ju jednotkou ako m, m^2, m^3, kg, Sk, hod, km/hod, ...),

operátor – *porovnania* či *zmeny* (má sémantické ukotvenie) a *skalár* (bez sémantického ukotvenia vyjadruje iba násobnosť). Uvedených 6 termínov označíme:
P = počet, M = možnosť, V = veličina, Op/Oz = operátor porovnania/zmeny, S = skalár. Dodajme, že P býva vnímaný ako koncept, ale M ako proces. Nasledujú príklady.
A. Opakované sčítanie. Tri tužky po 5 Sk stoja 5 Sk + 5 Sk + 5 Sk = 3×5 Sk = 15 Sk. Zúčastnené čísla majú dvojaké sémantické ukotvenie. Číslo 3 je skalár, čísla 5 a 15 sú veličiny s jednotkou 1 Sk. Iný príklad: v jednej lavici sedia 2 žiaci, v štyroch laviciach sedí 2 + 2 + 2 + 2 = 4×2 = 8 žiakov. Čísla 2 a 8 sú kusy a 4 je skalár. Iný príklad: dĺžka strany štvorcového dvora je 15 m. Obvod dvora je 4×15 m = 60 m. Čísla 15 a 60 sú veličiny (m), 4 je skalár. Typ tohto generického modelu: S × V = V resp. S × P = P.
B. Obsah obdĺžnika (kusy). Obdĺžnikový dvor je vydláždený štvorcovými kachľami. Na dĺžku je ich 16, na šírku 7. V dláždení je 16×7 = 112 kachlí. Čísla 16, 7 i 112 majú to isté sémantické ukotvenie: sú to kusy. Typ modelu: P × P = P.
C. Obsah obdĺžnika (veličina). Obdĺžnikový trávnik má rozmery 12 m a 15 m. Jeho obsah je 12×15 m^2 = 180 m^2. Všetky čísla sú veličiny, ale rozličného typu: čísla 12 i 15 sú dĺžky (V_1), číslo 180 obsah (V_2). Typ modelu: $V_1 \times V_1 = V_2$. Ďalej stručnejšie.
D. Objem hranola (kusy). Podobne ako u typu B máme typ P × P × P = P.
E. Objem hranola (veličiny). Podobne ako u typu C máme dva ďalšie typy:
$V_1 \times V_1 \times V_1 = V_3$ a $V_1 \times V_2 = V_3$. Tu: V_1 = dĺžka, V_2 = obsah, V_3 = objem.
F. Kombinatorické násobenie. Bábika má 2 sukne (červenú a bielu) a 3 svetre (modrý, zelený a žltý). Koľkými rôznymi spôsobmi možno bábiku obliecť? Je to 2 × 3 = 6 možností: čm, čz, čž, bm, bz, bž. Sémantické ukotvenie čísel 2, 3 a 6 je rovnaké – je to počet možností. Typ modelu: M × M = M. Dodajme, že modely B a F sú izomorfné, ale B je viac konceptuálny a F je viac procesuálny. Iný príklad: Z mesta A do B sa dá ísť 3 cestami, z mesta B do mesta C dvomi. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dá ísť z mesta A do C? Je to 2 × 3 = 6 možností. Typ modelu je opäť M × M = M, ale jeho charakter je viac procesuálny ako bol prípad s obliekaním bábiky.
G. Predĺženie a zväčšenie. Keď 400 metrovú bežeckou trasu predĺžime trojnásobne, bude jej dĺžka 3×400 m = 1200 m. Číslo 3 je operátor zmeny, čísla 400 a 1200 (m) sú veličiny. Typ modelu: O × V = V Iný príklad. Keď každý rozmer trávnika z prípadu B 2-násobne predĺžim, predĺži sa obvod obdĺžnika 2-násobne, ale jeho obsah 4-násobne. V jedinej situácii máme teraz i jednoduchý typ O × V = V i náročný typ. Ten možno zapísať ako zmenu $V_1 \times V_1 = V_2 \rightarrow (O \times V_1) \times (O \times V_1) = O' \times V_2$.
H. Zmena ceny. Cena svetra bola pôvodne 1200 Sk. Vo výpredaji bola cena znížená o 40%. Aká je nová cena svetra? Hoci je typ tejto situácie opäť O × V = V, rovnako ako v prípade G, väčšina učiteľov ZŠ, s ktorými sme o úlohe debatovali, ju nepovažovali za úlohu na násobenie. Riešením „nová cena je 0,6 × 1200 Sk = 720 Sk“ boli niektorí z nich prekvapení a považovali ho za nepresvedčivé. Typ modelu: S × V = V

Nepovažujeme za potrebné uvádzať ďalšie príklady. Upozorníme na tri závažné javy.
a) Zatiaľ čo pri sčítaní je rozšírenie počtu sčítancov sémanticky prosté (súčet 2 m + 3 m bez problémov rozšírime o 5 m + 4 m + 2m) je také rozšírenie u niektorých prípadov násobenia náročné, až nemožné. Napríklad pojem obsahu (prípad B) vedie na súčin 2 veličín, pojem objemu na súčin troch, ale súčin štyroch veličín tu už stráca geometrickú oporu. Mimochodom v gréckej matematike znamenala táto skutočnosť vážnu prekážku pre priznanie existencie štvrtej mocniny čísla.

b) Komutatívnosť násobenia je v niektorých prípadoch (napr. B a C) dobre viditeľná, v iných (napr. A, G a H) je ukrytá. Napríklad len veľmi málo z dospelých respondentov bolo schopných na bez počítania vyriešiť nasledujúcu diagnostickú úlohu:
Úloha 1. Bicykel X bol predávaný v obchodoch A a B za rovnakú cenu 7000 Sk. V júni v obchode A zlacnel o 10% a v obchode B zdražel o 10%. V júli v obchode A zdražel o 10% a; v obchode B zlacnel o 10%. V ktorom z obchodov je teraz bicykel X lacnejší?
c) Predchádzajúce dve poznámky poukazujú na potrebnosť otvoriť žiakom bohatý súbor sémantických situácií na násobenie. Ten je naviac potrebný pri aplikáciách.

4. Násobenie ako súčasť aritmetickej štruktúry

Odhliadnime od sémantického ukotvenia násobenia a pozrime na túto operáciu iba z hľadiska aritmetickej štruktúry. Poukážeme na 7 závažných myšlienok.
A. Násobenie je opakované sčítanie. Teda násobenie vyšlo z lona sčítania. Len čo dostalo vlastný symbol „×“ osamostatnilo sa od svojho životodarcu a začalo žiť autonómnym životom. Stalo sa partnerom operácie sčítania a prepojilo sa s ním distributívnym zákonom.
B. Vzájomné porovnanie operácií sčítania a násobenia ukazuje pozoruhodné spoločné vlastnosti: obe operácie sú komutatívne i asociatívne, obe majú neutrálny prvok (0 pre sčítanie a 1 pre násobenie). Matematik vyjadrí opísanú rovnakosť abstraktným pojmom. Obe špecifické štruktúry prehlási za špeciálne prípady tej istej abstraktnej štruktúry. V našom prípade tú štruktúru voláme komutatívna pologrupa s neutrálnym prvkom.
C. Bližší pohľad odhalí i vážne odlišnosti oboch štruktúr. Predovšetkým je to osobitná pozícia nuly voči násobeniu. Platí $0 \times$ čokoľvek $= 0$. Sčítanie žiaden taký prvok nemá. Uvedenú diferenciu odstránime, ak budeme o násobení uvažovať v obore prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, ...\}$ bez nuly a o sčítaní v obore $N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ prirodzených čísel vrátane nuly.
D. Druhú odlišnosť oboch štruktúr vytvára rozklad čísla na dva sčítance ($n = x + y$), resp. na dva súčinitle ($n = x \times y$).
V pologrupe $(N_0,+)$ je možné každé číslo n rozložiť na súčet dvoch nenulových čísel práve $m = [(n+1)/2]$ spôsobmi; tu [] označuje „celú časť čísla“.
V pologrupe $(N,\times)$ existuje nekonečne mnoho čísel, ktoré nemožno rozložiť na súčin dvoch čísel rôznych od 1. Sú to *prvočísla*. Tento pojem v pologrupe $(N_0,+)$ nemá partnera. Vzťahuje sa iba k násobeniu.
E. Didakticky veľmi závažná je otázka operácie *inverznej*, či *opačnej* k operáciám súčtu a súčinu. Vieme, že k sčítaniu je inverzné odčítanie a k násobeniu delenie. Lenže tento pohľad býva často iba intuitívny a treba ho upresniť. Začneme upresnením slova inverzný.
Inverznou k operácii ϕ nazveme takú operáciu ψ, ktorá eliminuje vplyv operácie ϕ. Ak operáciu + aplikujeme na čísla 12 a 5 dostaneme súčet $12 + 5 = 17$. Inak povedané, ak dáme dohromady 12 chlapcov a 5 dievčat, dostaneme 17 detí. Máme teda 17 detí a čo urobíme, aby sme eliminovali operáciu „dať dohromady“? Nebudeme odoberať či odčítať, budeme rozdeľovať. Rozdelíme 17 detí na 12 chlapcov a 5 dievčat. Podobne k operácii násobenia $7 \times 3 = 21$ nie je inverzné delenie, ale rozklad čísla 21 na súčin 7×3. O inverzii teda nemožno hovoriť všeobecne, ale vo väzbe na konkrétne číslo. Napríklad:
F. Vieme, že k operácii „pridaj 5“ je inverzná operácia „uber 5“. Ale platí to naopak? V siedmej triede áno, v druhej triede nie. Tam vo výpočte $(12 + 5) - 5 = 12$ môžeme

			+5		-5						×3		:3		
		12	→	17	→	12				7	→	21	→	7	
	K operácii „+5“ je inverzná „-5“								K operácii „×3“ je inverzná „:3“						

vymeniť operácie, lebo platí $(12-5)+5=12$, ale vo výpočte $(2+5)-5=2$ to už možné nie je, lebo v nápise $(2-5)+5=2$ je výraz $2-5$, ktorý nemá pre druhákov zmysel. Preto operácie „pridaj 5“ a „uber 5“ možno považovať za inverzné, až po zavedení záporných čísel. Rovnako o vzájomnej inverzii operácií „×5“ a „:5“ možno hovoriť až po zavedení zlomkov.

G. Vidíme, že myšlienka inverznej operácie vedie na rozširovanie číselných oborov. Mínus dáva zrod záporným číslam a delenie vedie k pojmu zlomok. Je pozoruhodné, že v histórii sa zlomky objavili omnoho skôr ako záporné čísla, hoci operácia delenia je náročnejšia, ako operácia odčítania. Čo je príčinou tak silného narušenia paralely medzi ontogenézou a fylogenézou?

5. Nácvik

Nácvikové procesy sú neuralgický bod konfliktu teórie a praxe. Mnohí teoretici DM tvrdo odmietajú nácviky, ako činnosti ducha ubíjajúce. Väčšina učiteľov ich považuje za jadro vyučovania. Naše názory formulujeme v štyroch bodoch.

A. Pamäťové učenie sa násobilky je ľahké pre tie deti, ktoré majú k tomu dobré mentálne dispozície. Pre deti bez dispozícií je také učenie sa úmorné, niekedy až frustrujúce. Preto sme presvedčení, že optimálny didaktický prístup akceptuje individualitu dieťaťa a umožní mu jeho vlastnú cestu k zvládnutiu malej násobilky. Tá je založená na troch princípoch:

a) časovej voľnosti (nie sú dané časové limity dokedy treba vedieť násobilku spamäti),

b) permanentného používania tabuľky násobenia (každý žiak ju má stále pri sebe),

c) autoregulácii nácviku (žiaci si v svojej tabuľke postupne zaslepujú tie údaje, ktoré už vedie celkom bezpečne; tým monitorujú svoje napredovanie).

Naše skúsenosti s uvedenou metódou nácviku sú veľmi dobré. Nielenže aj tí žiaci, ktorých pamäť je slabšia dobre zvládnu v priebehu 7-8 mesiacov celú tabuľku, ale pri nácviku berú zodpovednosť práce na seba a naučia sa metódu, ako podobné pamäťové situácie zvládať i v iných oblastiach. Napríklad pri vymenovaných slovách.

B. Nácvik písomného algoritmu nie je bezduchou činnosťou, ako sa viacerí didaktici nazdávajú. Má svoje miesto vo vývoji dieťaťa, pokiaľ sa s ním dieťa stretáva na prvom stupni ZŠ. V čom je význam takého nácviku? Pri učení sa algoritmu je treba do organickej súčinnosti priviesť viaceré mentálne funkcie, najmä: *stratégiu*, ktorá riadi jednotlivé kroky postupu, *dlhodobú pamäť* (t.j. násobilkové spoje), *krátkodobú pamäť* (ak v priebehu výpočtu vyšlo napríklad 28, číslo 8 zapíšem na príslušné miesto a číslo 2 vložím do krátkodobej pamäti) a *operácie nižšej aritmetickej úrovne*. V [09] je táto myšlienka opísaná a podporená experimentami a argumentami. Preto považujeme taký nácvik za prospešný pre kognitívny a metakognitívny vývoj žiakov. Samozrejme, iba ak nie je nátlakový.

C. Tí žiaci, ktorí nie sú schopní písomný algoritmus zvládnuť, potrebujú aspoň dočasne alternatívny algoritmus, napríklad indické, či brahmínske násobenie (pozri [08], s. 103), ktoré výrazne zjednoduší stratégiu algoritmu. Neskôr, keď zvládnu súčinnosť dlhodobej i krátkodobej pamäte s operáciami nižšej aritmetickej úrovne, ľahko zvládnu i tradičné algoritmus násobenia.

D. Závažná je otázka motivácie. Tradičné stereotypné úlohy v ktorých sa opakovane nacvičuje procedúra, sú pre žiakov domotivujúce a pre matematicky zdatných žiakov úmorné. Preto odporúčame rámovať opakujúce sa výpočty do zaujímavých kontextov, ktoré preberú úlohu motivačného nosiča. Niektoré z kontextov, s ktorými máme dobré skúsenosti z nášho experimentálneho vyučovania uvedieme ilustratívnymi úlohami. Úlohy 2 a 3 sú dominantne zamerané na nácvik písomného násobenia, úlohy 4 a 5 idú hlbšie do štruktúry násobenia.
<u>Úloha 2</u>. Dané sú 3 rôzne číslice (napríklad 2, 5, 7). Z nich zostavíme dve čísla. Jedno dvojmiestne a jedno jednomiestne (napr. 57 a 2). Čísla vynásobíme (57 $\times$ 2 $=$ 114). Koľko rôznych súčinov možno takto vytvoriť? Ktorý z nich bude najväčší, ktorý najmenší? Ktorý z nich bude najbližšie k číslu 350? Aký bude súčet S všetkých týchto súčinov?
<u>Komentár</u>. Ak pracujeme s číslicami/číslami[5] $A < B < C$, tak najmenšie je číslo $BC \times A$, najväčšie je číslo $BA \times C$ a súčet všetkých 6 súčinov je $S = 22(AB + AC + BC)$. To umožní úlohu rozšíriť o výzvu: výsledok S vydeľte číslom 11 (prípadne 2, prípadne 22). Úlohu možno ďalej rozširovať na súčiny $ABC \times D$ (tých je 24 a súčet všetkých týchto čísel je $S = 222(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$) alebo na súčiny $AB \times CD$ (tých je 12 a súčet všetkých týchto čísel je $S = 242(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$) atď. Žiaci, ktorí vyriešia viacero úloh uvedeného typu, začnú v postupoch objavovať zákonitosti.
<u>Úloha 3</u>. Zoberme jednomiestne číslo a_1 a vytvorme postupnosť čísel a_2, a_3, a_4, ... takto: číslo a_{n+1} je posledné dvojčíslie čísla $a_n \times a_1$. Napríklad pre $a_1 = 7$ je $a_2,= 49$, $a_3,= 43$ (lebo49 $\times$ 7 $=$ 343), $a_4,= 1$ (lebo343 $\times$ 7 $=$ 2401),$a_5,= 7$, $a_6,= 49$, atď. Štyri čísla 7, 49, 43, 1 sa periodicky opakujú. Pre $a_1 = 4$ bude mať postupnosť periódu tvorenú 10 číslami: 4, 16, 64, 56, 24, 96, 84, 36, 44, 76. Rovnako i pre $a_1 = 9$ nájdeme 10 prvkovú periódu.
<u>Komentár</u>. Zovšeobecnenie úlohy 3. je jednoduché: za číslo a_1 budeme dvoj-, prípadne i štvor- miestne čísla a namiesto posledného dvojčíslia nového čísla budeme brať posledné trojčíslie či dokonca štvorčíslie. Úlohy toho typu prispievajú aj k rozvoju intuície tak závažných pojmov ako sú postupnosti, závislosť, periodicita, či rekurencia. Tieto mentálne funkcie sú rozvíjané i v tom prípade, keď žiak násobenie nerobí písomne, ale pomocou kalkulačky. Osobitne významná na týchto úlohách je možnosť objavovať zákonitosti. Napríklad pre postupnosť s číslom $a_1 = 4$ je $a_1 + a_6 = 100, a_2 + a_7 = 100, a_3 + a_8 = 100, a_4 + a_9 = 100, a_5 + a_{10} = 100$.
<u>Úloha 4</u>. Iba pomocou rímskych čísel vynásobte a) XII$\times$ X, b) XI $\times$XII, c) XXII $\times$ XV, d) CCLXII $\times$ XVII, e) XV $\times$ IV, f) XIX $\times$ XVII, g) CXCVIX $\times$ CVI, h) XCVI $\times$ XIV.
<u>Komentár.</u> Z didaktických dôvodov odporúčame uvolniť pravidla pre zápis rímskeho čísla. Pripustíme aj inak zakázané zápisy ako IIIII namiesto predpisového V, či XXXX namiesto XL, alebo CCCCLL, namiesto D. Teda počet rovnakých znakov C, X, I neobmedzíme na tri a počet rovnakých znakov V, L a D neobmedzíme na jediný.
<u>Úloha 5</u>. Keď vo výpočte 473$\times$ 62 $=$ 29 326 číslice nahradíme písmenami, dostaneme nápis $ABC \times DE = EF\ CED$, ktorým je výpočet zakódovaný. Taký algebrogram je vlastne úlohou: žiada aby sme nahradili každé z písmen A, B, C, D, E, F jednou číslicou tak, aby vznikol správny výpočet. Rovnaké písmená musíme nahradiť rovnakými číslicami, rôzne písmená, rôznymi číslicami. Tu je súbor pomerne jednoduchých algebrogramov:
<u>Komentár 5</u>. Tvorba algebrogramov je výživná činnosť pre každého učiteľa. Pomáha

[5] Z kontextu je jasné, kedy znaky A, B, C považujeme za číslicfe a kedy za čísla.

a) $A \times A = A$,	b) $A \times A = B$,	c) $A \times A = BA$,
d) $AB \times AB = ABB$,	e) $AA \times AA = ABA$,	f) $AA \times AA = CBC$,
g) $AA \times B = BB$,	h) $AA \times AA = CCBB$,	i) $AA \times B = CCD$,
j) $AA \times AA = BCDA$	k) $AB \times BA = ACA$	l) $ABA \times BAB = CCCDB$

mu získať intímnejší vzťah k násobeniu, motivuje ho k dynamickejšej práci s tými žiakmi, ktorí budú jeho úlohy riešiť. Dáva mu možnosť účinne im pomáhať radami.

6. Vývoj žiakových predstáv o násobení

Za hlavný nedostatok *nácvikového prístupu* k násobeniu prirodzených čísel považujeme jeho krátkozrakosť. Je egoisticky zahľadené do seba a k ďalšiemu rozvoju predstáv násobenia prispieva vo veľmi obmedzenej miere. Nácvikový prístup neposkytuje žiakovi skúsenosti, ktoré mu v budúcnosti umožnia
a) nazerať na súčin ako na koncept,
b) porozumieť násobeniu čísel celých, desatinných a zlomkov,
c) pochopiť jednotný princíp násobenia čísel a výrazov a
d) vstúpiť do tematického celku deliteľnosť s dobrou propedeutickou výbavou.

Najvážnejším následkom nácvikovo orientovanej koncepcie vyučovania násobenia nie je popísané zbrzdenie kognitívneho rozvoja, ale strategické nasmerovanie žiakovho štýlu učenia sa matematiky. Tým, že sa žiak učí násobenie iba pamäťovo a imitovaním, vytvára si metakognitívny návyk používať tento štýl učenia sa i v ďalších oblastiach matematiky, najmä v tých, ktoré na násobenie prirodzených čísel priamo nadväzujú.

Ku každej zo 4 vyššie uvedených kritických poznámok doložíme osvetľujúci komentár.

6.1 Nazerať na súčin ako na koncept znamená vidieť prepojenie medzi vzťahmi. Napríklad pod vzťahom $2 \times 3 = 6$ vidieť aj vzťahy $3 \times 2 = 6$, $6 = 2 \times 3$, $6{:}3 = 2$, $20 \times 3 = 60$, $4 \times 9 = 36$, atď., atď. Každá z úloh 2 až 5 napomáha takému videniu násobenia. Užitočné sú i ďalšie multiplikatívne situácie, v ktorých sa viacero súčinov navzájom viaže. Uvedieme tri ilustrácie. Každú z nich je možné použiť aj v prípade, keď obor prirodzených čísle rozšírime na čísla racionálne.

Úloha 6. Vytvorte násobilkový magický štvorec 3×3: do 9 polí štvorca napíše 9 rôznych prirodzených čísel tak, aby súčin troch čísel v každom stĺpci, každom riadku a oboch diagonálach dal rovnaké číslo s; autor pozná riešenie v ktorom $s < 17\,000$.

Úloha 7. Násobilkový trojuholník je obdobou sčítacieho trojuholníka.

Ilustrácia trojuholníka dimenzie 3 je na priloženom obrázku. Nájdite všetky trojuholníky dimenzie 3 ktorých dolné číslo je 49 resp. 8. Dokážte, že v trojuholníku dimenzie 4, v ktorom je 10 čísel je možné z troch rohových čísel vypočítať jedno vnútorné.

5	2	3
	10	6
	60	

Úloha 8.V každom riadku i stĺpci priloženej tabuľky je tretie číslo súčinom prvých dvoch ($4{\times}5 = 20$, $5{\times}3 = 15$, $8{\times}15 = 120$,...).

a) Poznáme iba diagonálne čísla 4, 3 a 120. Koľkými rôznymi spôsobmi možno doplniť

chýbajúcich 6 čísel (pravidlo o súčinoch treba zachovať)?
b) Poznáme iba diagonálne čísla 4, 9 a 1296. Doplňte 6 chýbajúcich čísel tak, aby v tabuľke bolo deväť (resp. osem, resp. sedem, resp. šesť) rôznych čísel.

4	5	20
2	3	6
8	15	120

Zaujímavá a ešte neprebádaná je možnosť preniesť ideu *sčítacej a odčítacej rodinky* do násobenia. Pojmy zaviedli Pavol Černek a Vladimír Repáš. Ich cieľom bolo, aby žiaci „samostatne prichádzali na to, že sčítacia rodinka a odčítacia rodinka je vlastne to isté, aby intuitívne cítili vzťah medzi operáciami sčítania a odčítania...“ ([11], s. 13). Autor tejto štúdie poukázal na hlbší kognitívny význam nového pojmu: sčítanie, uložené vo vedomí žiaka ako proces, sa v pojme „rodinka“ stáva konceptom a smeruje k proceptu. Obom rodinkám dal spoločné meno *triáda* a navrhol jeho didaktický výskum. Ten uskutočnila J. Kratochvílová (pozri [10]). Pozri tiež výzvu 5 v Závere.

6.2 Porozumieť násobeniu čísel celých, desatinných a zlomkov znamená prekročiť úroveň návodov a viesť žiakov k vhľadu do príčin. Prečo mínus krát mínus je plus, prečo pri násobení desatinných čísel v súčine dáme desatinnú čiarku tam, kde ju dáme, prečo zlomky násobíme ta, ako ich násobíme? Cesty, ktorými k porozumeniu dochádza sú v princípe dve: buď je žiakovi na začiatku pravidlo prezradené a on potom neskôr, riešením náročnejších úloh porozumie, prečo pravidlo znie tak, ako znie (to sa týka najmä súčinu dvoch záporných čísel), alebo sa k pravidlu dopracuje samostatne, riešením gradovanej série úloh (to sa týka násobenia desatinných čísel a zlomkov). Podrobnejší didaktický rozbor týchto námetov by vyžiadal dlhší článok.

6.3 Pochopiť jednotný princíp násobenia čísel a výrazov je možné rôznymi spôsobmi. Napríklad porovnaním roznásobenia čísel a polynómov:

$492 \times 67 = (400 + 90 + 2) \times (60 + 7) = 400{\times}60 + 90{\times}60 + 2{\times}60 + 400{\times}7 + 90{\times}7 + 2{\times}7 = 24000 + 5400 + 120 + 2800 + 630 + 14 = 20000 + (4{+}5{+}2){\times}1000 + (4{+}1{+}8{+}6){\times}100 + (2{+}3{+}1){\times}10 + 4 = 32964$

$(2x^2 - 3x + 6) \times (4x + 7) = 2x^2{\times}4x - 3x{\times}4x + 6{\times}4x + 2x^2{\times}7 - 3x{\times}7 + 6{\times}7 = 8x^3 + (14\text{-}12)x^2 + (\text{-}21{+}24)x + 42 = 8x^3 + 2x^2 + 3x + 42$

V oboch prípadoch je násobenie založené na troch krokoch: rozložení súčiniteľov na elementy, vynásobení elementov metódou „každý s každým“ a sčítaní získaných elementárnych súčinov. Číslo rozkladať musíme (napríklad 492 = 400 + 90 + 2), pri polynómoch to robiť netreba, lebo tie sú už v takom tvare zapísané. Viacerým žiakom je ale bližšie tabulované násobenie brahmínskeho typu:

<table>
<tr><td>400</td><td>90</td><td>2</td><td></td><td rowspan="4">Pod každou tabuľkou je súčet všetkých 6 čísel či výrazov zo šiestich okienok tabuľky.</td><td>$2x^2$</td><td>-3x</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>24000</td><td>5400</td><td>120</td><td>60</td><td>$8x^3$</td><td>$-12x^2$</td><td>24x</td><td>4x</td></tr>
<tr><td>2800</td><td>630</td><td>14</td><td>7</td><td>$14x^2$</td><td>-21x</td><td>42</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="4">2.10000+(2+4+5).1000+
(8+6+4+1).100+(3+1+2).10+4</td><td colspan="4">$8x^3 + (14\text{-}12)x^2 +$
$(\text{-}21{+}24)x + 42$</td></tr>
</table>

6.4 Vstúpiť do tematického celku deliteľnosť s dobrou propedeutickou výbavou znamená mať dobre zažité niektoré základné skúsenosti, najmä:
a) vzťahy „ n je deliteľom čísla k“ a „číslo k je násobkom čísla n“ hovoria to isté,
b) ak je n deliteľom čísel p i q, tak je deliteľom aj ich súčtu a rozdielu

c) sčítaním či odčítaním viacerých násobkov čísla n dostanem opäť násobok čísla n,
d) ak je n deliteľom čísla m a číslo m je deliteľom čísla k, tak n je deliteľom čísla k,
e) párne čísla končia číslicou 0, 2, 4, 6, alebo 8; nepárne číslicou 1, 3, 5, 7, alebo 9,
f) násobok čísla 10 končí nulou, násobok čísla 5 buď nulou, alebo päťkou.

7. Záver

Záverom päť námetov pre čitateľa na rozmýšľanie, prípade i na výskum.
1. Pri nácviku násobilky sa žiak stretáva s množinami $\mathrm{mN}_0 = \{0, \mathrm{m}, 2\mathrm{m}, 3\mathrm{m}, ...\}$ kde $\mathrm{m} = 2, 3, 4, ...$ Tým sa zoznamuje s podpologrupami $(\mathrm{mN}_0, +)$ pologrupy $(\mathrm{N}_0, +)$. Vytvorte úlohy, ktoré túto, často iba na nácvik orientovanú činnosť, obohatia o hlbšie myšlienky.
2. Rovnakú didaktickú úlohu riešte pre operáciu násobenia.
3. Premyslite, či zobrazenie $\mathrm{n} \to 2^n$ je izomorfizmus a navrhnite jeho didaktické využitie.
4. Vytvorte gradovanú sériu úloh vychádzajúcu z tematiky niektorej z úloh 2 až 8 a experimentálne odskúšajte jej edukačnú silu.
5. Myšlienka aditívnej triády uvedená v závere časti 6.1. núka zaujímavý výskum. Ide o prenos aditívnych triádach do oblasti násobenia. Navrhujeme zaviesť *multiplikatívnu triádu* ako usporiadanú trojicu (a, b, c) prirodzených čísel pre ktorú platí: $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$, $\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \mathrm{c}$. Z aditívnych triád sem preniesť viacero ďalších pojmov, predovšetkým pojem *potomka, predka* a *súrodenca*. Každá triáda (a, b, c) má dvoch potomkov: (a,c,ac) a (b,c,bc); potomkami triády (2,3,6) sú triády (2,6,12) a (3,6,18) tie sú zároveň i súrodencami. Ich spoločným predkom je triáda (2,3,6), ktorá v obore prirodzených čísel nemá predka, ani súrodenca; v obore čísel racionálnych jej predkom je triáda (3/2, 2, 3) a jej súrodencom triáda (3/2,3,9/2). Bolo by zaujímavé paralelne k výskumu J. Kratochvílovej uskutočniť výskum multiplikatívnych triád a overiť edukačné možnosti tohto pojmu.

Poznámka. Článok bol vypracovaný s podporou grantu GAČR 406/05/2444

Literatúra

[1] Bero, P., Števíková, M.: *Násobilka na každú lavicu*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1995

[2] Bero, P., Pytlová, Z., *Chcem byť dobrým piatakom*, Exam, Bratislava, 1997.

[3] Blažková, R. a kol.: *Matematika pro 3. ročník základních škol 1. díl*, ALTER, Praha.

[4] Burjan, V., Bastlová, A.: *Matematika základnej školy v testoch*, Exam, Bratislava, 2001.

[5] Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F.: *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 4. ročník*, Prométheus, Praha, 1999.

[6] Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F.: *Svět čísel a tvarů.* Metodická příručka k výuce matematiky v 3. ročníku základní a obecné školy, Prométheus, Praha, 1999.

[7] Hejný, M.: *Mechanizmus poznávacího procesu.* In: Hejný, Novotná, Stehlíková (eds): *Dvacet pet kapitol z didaktiky matematiky*, Karlova Univerzita v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 2004, s. 23-42.

[8] Hejný, M.a kolektív: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bartislava, 1989.

[9] Hejný, M.: *Ciele vyučovania matematiky.* Pedagogické rozhľady (Metodické centrá Slovenska), 1, str. 12-16.

[10] Kratochvílová, J.: *Triády jako prostředí výzkumu a výuky.* In: Kapitoly v publikaci M. Hejný, J.Novotná, N. Stehlíková: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky 1. a 2. díl*, Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, 2004, s. 409-420.

[11] Repáš, V. a kolektív: *Matematika pre 5. ročník základných škůl*, Metodické poznámky, Orbis Pictus Istropolitana, Bratilsva, 1998.

Adresa autora:
Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
Česká republika
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz

Jak nepropadnout stereotypu v pedagogické praxi

Jitka Hlaváčková

Abstract. *The article deals with the efficiency of using some of the project method´s principles at the primary school. It also shows the links between different subjects.*

V poslední době poutá pozornost mnoha učitelů nejen na základních školách tzv. projektové vyučování. Stejně jako didaktické hry, coby invenční součást vyučovacího procesu, si i projekty pomalu získávají své stoupence. Projekt, didaktická hra, jakož i další netradiční složky vyučovacího procesu slouží k obohacení (klasické) frontální výuky.

Co nového může žákům i učiteli projekt přinést? Především velice důležitý – prožitek. Proces učení se totiž odehrává ve třech rovinách najednou. První rovinu tvoří obsah / cíl učení (rovina věcná). Druhou pak žákovy pocity (rovina prožitková) a v neposlední řadě rovina vztahová (co pociťuje učitel). Učiteli se může stát, že se příliš zaměří na samotný cíl výuky bez ohledu na pocity žáka.V takových případech by se mohla osvědčit sebereflexe, která může rozkrýt projekční formu komunikace. Kret se domnívá, že v tomto případě lze jednoduše napravit svou chybu – vrátit se do dětských let[6]. A odhalí-li učitel svou chybu v jakémkoli ohledu, lze prostřednictvím zpětné vazby provést korekci zvyšující efektivitu výuky.

Při přechodu z mateřské do základní (národní, obecné) školy dítě získává nespočet nových zkušeností, vstřebává sumu nových impulsů (práv a povinností) se kterými si mnohdy neví rady. Empirie potvrzuje, že nejvíce problémové bývá nastolení školního řádu a jeho neustále kontrolované plnění. I když nutno přiznat, že je potřeba dát žákům pevná pravidla.

Žáci někdy těžko chápou, proč pan učitel/paní učitelka vynakládá tolik síly na vysvětlení obtížně pochopitelného obsahu výuky a tak málo síly na hry, soutěže apod. (na něž byli zvyklí). Děti si od své přirozenosti rády hrají, což poskytuje velkou příležitost pro realizaci projektů, didaktických her a dalších netradičních metod včleněných do vyučovacího procesu. Zvláště pak na školách nižšího stupně.

Už na školách I. stupně se můžeme setkat s otázkou typu: „A proč se to máme učit? K čemu nám to bude?. . . " směrovanou od žáků k učitelům. Po detailní analýze vzniklé situace nejspíš dospějeme k závěru, že žáky probírané téma nezaujalo nebo mu neporozuměli. Učitel by měl objektivně posoudit připravovaná témata a způsob jejich implementace do výuky. Ve chvíli, kdy je učitel připraven žákům předložit zajímavé zpracování (jinak docela standardního) matematického tématu, bude účinněji motivován a probírané téma bude lépe přijato.

Teorie (historie) projektového vyučování sahá do doby na přelomu 19. a 20. století. Šlo především o výtky „tradiční" škole, se kterými se setkáváme i v dnešní době. Nejvíce je a bylo tradiční škole vytýkáno omezování svobody žáka, nerespektování jeho zájmů, zkušeností a nedostatečné využívání žákových individuálních předpokladů. Učivo je žákům předkládáno izolovaně, bez širších vazeb a vztahů, které by v řadě odvětvích mohly žákům spíše napomoci. A jak už jsem zmínila – dochází spíše ke kopírování vědního oboru a transferu současné úrovně vědeckého poznání do výuky (přijatelným způsobem), než k řešení konkrétních životních situací, čímž může žák ztrácet přehled a jistotu o funkčnosti onoho oboru. Našli bychom i další nedostatky v

[6]Kret Ernst: Učíme (se) jinak. Portál, Praha 1995.

tradiční škole, ale právě ty výše jmenované přispěly ke vzniku projektů a projektového vyučovaní.

Největší rozkvět zažila tato metoda okolo roku 1918 v New Yorku, kde tehdy čerstvý profesor William Heard Killpatrick napsal článek The Project Method. Uveďme alespoň jednu definici projektové metody, a to právě podle Killpatricka: „Projekt jest určitě a jasně navržený úkol, který můžeme žáku předložiti tak, aby se mu zdál životně důležitý tím, že se blíží skutečné činnosti lidí v životě.“[7]

Podle různých definic lze vyjádřit hlavní myšlenku projektové metody do jednoho slova: „koncentrace“. Tedy neučit odděleně předměty bez návaznosti, ale hledat novou strukturu učiva, pro lepší pochopení a přijetí žáky. Podle Valenty není životní realita složena ze „systematizovaných řad logicky uspořádaných struktur vědy, ale z celistvých jevů a situací“[8]. A toho by se měl učitel snažit využít v co největší možné míře, poněvadž tak usnadní žákům danou problematiku pochopit a naučí se s ní pracovat. Nehledě na to, že škola I. stupně má větší možnosti oproti II. stupni, neboť učitel/ka ve své třídě učí zpravidla většinu předmětů (v lepším případě všechny).

Projekt přináší kromě nutnosti koncentrace mnoho dalších užitečných hodnot. Nejen že učí žáky sociálnímu chování a svým způsobem je nutí spolupracovat se spolužáky, ale také musí hledat souvislosti mezi jednotlivými vědními obory.

Důležitým aspektem projektu je jeho realizace. Pokud by žáci vynaložili mnoho práce na přípravu a realizace by neproběhla, veškerá motivace je na tomto místě naprosto zbytečná. Přičemž nutno dodat, že motivace je základním hnacím motorem každé žákovy práce. U žáků mladšího školního věku je důležitý tento fakt: má-li být žák motivován, musí být přesvědčen, že lze vytyčeného cíle dostupnými prostředky a metodami dosáhnout.

Uvedené teoretické přístupy je možné aplikovat v konkrétním příkladě. Žák mnohem raději vypočítá dráhu a čas z místa A (Bruselu) do místa B (Paříže) ve svém vysněném automobilu oblíbené značky, než obyčejnou úlohu tohoto typu. Dokážeme při tom využít mnoho mezipředmětových vazeb, aniž bychom použili projektové vyučování jako takové. Ve výtvarné výchově se žák zaměří na ztvárnění jeho vysněného vozidla a v zeměpisu (vlastivědě) si na mapě ukáže nejen startovní a cílové město, ale všechna města, jež bude na své cestě projíždět. Také řeky a hory, které bude přejíždět. Nejenže se můžeme přenést pomocí jedné úlohy v matematice do mnoha míst Evropy, ale zároveň využít další schopnosti a dovednosti žáků v oblasti výtvarné či hudební (písně o konkrétních městech, místech Evropy apod.). V jazykové přípravě žáků - např. slohová cvičení na témata související s cestou po Evropě, atd.

Jistě by se nám podařilo na této „modelové“ situaci nalézt další vazby k různým vědním oborům a tím dát žákům prostor k individuálnímu rozvoji a podpořit u nich tvořivost.

V současné době prochází školství v České Republice změnami, týkajícími se vzdělávacích programů. Nově si musí každá základní škola vytvořit tzv. Rámcový vzdělávací program (dále jen RVP), ve kterém má být učivo ve všech ročnících členěno na jednotlivá (na sebe navazující) témata. Pokud by se v každé škole našli alespoň dva až tři učitelé, kterým není lhostejný způsob předávání vědomostí našim nejmladším, mohlo by se docílit vhodného uspořádání témat tak, aby bylo možné propojovat učivo z různých předmětů. Ve chvíli, kdy RVP vzniká, lze takovou myšlenku mezi kolegy prokonzultovat a později (snad) i realizovat. Podle mého soudu není největším nepřítelem projektové metody a integrované výuky neochota je ve školách realizovat,

[7] Viz Valenta, J.: Pohledy (Projektová metoda ve škole a za školou). IPOS, Praha, 1993. str. 4–5

[8] Viz Valenta, J.: Pohledy (Projektová metoda ve škole a za školou). IPOS, Praha, 1993. str. 2–3

ale v momentě skládání RVP nalézt dostatek času a vlastní invence k jejich domyšlení. To by mohlo usnadnit práci kolegům v průběhu školního roku, jehož výuka již bude probíhat dle platných RVP.

Literatúra

[1] Kret, E.: *Učíme (se) jinak.* Portál, Praha 1995.

[2] Havlínová, E. a kol.: *Jak změnit a rozvíjet vlastní školu?* Strom, Praha 1994.

[3] Valenta, J.: *Pohledy (Projektová metoda ve škole a za školou).* IPOS, Praha 1993.

Adresa autora:

Mgr. Jitka Hlaváčková
Katedra matematiky PF UJEP
Hoření 13
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: hlavackova@pf.ujep.cz
tel.: 00420/475282291

Tvorba maturitných zadaní z matematiky – modul kombinovanej formy vzdelávania učiteľov matematiky

Jana Hnatová

Abstract. *We wanted to show on the advantages of IKT work for Mathematics teacher in the contribution article. We have concentrated on the further education area as well. Teachers have experienced the work with PC and Internet at presented modul Mathematics Topics for Final Examination thanks to the new realisation form of blended-learning. The results of teacher team work was created tasks databasis usable for Mathematics Topics according to the new conception of Maturita Examination.*

Úvod

Vzdelávanie založené na rôznych dištančných formách s využitím informačno – komunikačných technológií (IKT) sa v súčasnosti javí ako zaujímavá a progresívna forma vzdelávania použiteľná v kontinuálnom vzdelávaní učiteľov. Rozvoj IKT posúva možnosti kontinuálneho vzdelávania k rozširovaniu edukačných prostredí, ktoré podporujú tvorbu vzdelávacích modulov zameraných na osvojenie si konkrétnych technických, odborných alebo pedagogických kompetencií. Získavanie a výmenu nových informácií dopĺňajú IKT o komunikačné možnosti medzi zúčastnenými učiteľmi a lektormi navzájom, takže sa vytvára dojem „virtuálnej“ triedy. V nej môže každý účastník postupovať vlastným tempom a diskutovať o svojich názoroch či vzniknutých problémoch s lektorom alebo inými kolegami. Stráca sa tým pocit izolovanosti a naopak zažíva sa „na vlastnej koži“ pocit individuálneho prístupu lektora. Prínosom takejto formy vzdelávania je tiež jej finančná a časová výhodnosť, zjednodušená správa a riadenie celého procesu vzdelávania, pružnosť a rýchla prispôsobiteľnosť požiadavkám konkrétnych vzdelávacích skupín. Práve posledná vlastnosť nám umožnila reagovať na výzvu v podobe metodickej a odbornej pomoci pri príprave učiteľov na prechod k novej koncepcii maturitnej skúšky.

Priebežné vzdelávanie „Tvorba maturitných zadaní internej časti maturitnej skúšky z matematiky po novom“

Nóvum tohto vzdelávania je možné pochopiť hneď dvoma spôsobmi. Bez ohľadu na výhody či úskalia novej koncepcie maturitnej skúšky bola pred každú predmetovú komisiu učiteľov pripravujúcich svojich študentov na skúšku pred zeleným stolom predložená požiadavka prepracovať podľa schválenej vyhlášky [1] nové znenia maturitných zadaní ústnej časti maturitnej skúšky z matematiky. Na pôde Metodicko-pedagogického centra v Prešove sa preto v šk.roku 2003/04 a 2004/05 opakovane realizovalo priebežné vzdelávanie s názvom „Tvorba maturitných zadaní ústnej formy internej časti z matematiky“, ktoré bolo určené pre učiteľov matematiky na stredných školách a osemročných gymnáziách Košického a Prešovského kraja. Cieľom priebežného vzdelávania bolo poskytnúť učiteľom matematiky najnovšie informácie, metodickú a odbornú pomoc pri tvorbe maturitných zadaní internej časti maturitnej skúšky z matematiky.

Novým bol i spôsob realizácie týchto vzdelávaní. Experimentálne sme overovali možnosti použitia kombinovanej formy vzdelávania v ďalšom vzdelávaní učiteľov tzv. blended-learning, ktorý spája prvky prezenčnej a dištančnej formy vzdelávania v jeden celok.

Priebežné vzdelávanie (PV) pozostávalo zo siedmych stretnutí, z toho štyri boli realizované dištančnou a tri prezenčnou formou. Vo vytvorenej diskusnej skupine na Yahoo!, kde sa účastníci na prvom prezenčnom stretnutí zaregistrovali, prebiehala v prvej fáze realizácie projektu konzultačná a diskusná činnosť. Na základe ponúknutých materiálov prechádzali učitelia jednotlivými tematickými okruhmi a výsledkom ich snaženia boli v elektronickej podobe spracované návrhy úloh vhodných na zaradenie do maturitných zadaní z matematiky. Všetky návrhy boli zúčastneným učiteľom priebežne sprístupňované na internete, pričom v závere druhej fázy sa konalo prezenčné stretnutie venované posúdeniu jednotlivých návrhov a diskusii o požiadavkách a nárokoch kladených na vznikajúcu databázu úloh a zadaní tak, aby spĺňali všetky legislatívne požiadavky. [2] V ďalšom sa špecifikovali možnosti jej ďalšieho využitia na hodinách matematiky a v domácej príprave učiteľa na hodiny. V tretej fáze bola vytvorená databáza v prostredí MS Access 2000 a následne i metodická príručka práce s touto databázou.

Za predpokladu základnej počítačovej gramotnosti vyžadujúcej prácu s textovým editorom, editorom rovníc a prácu s internetom, umožňuje táto databáza učiteľovi:

- zadávať nové úlohy a rozširovať si už vytvorenú databázu vhodných úloh,
- editovať úlohy v databáze,
- vytvárať a editovať jednotlivé maturitné zadania z matematiky,
- vytlačiť si maturitné zadania jednotlivo, ale i celú sadu zadaní naraz,
- priebežne sledovať a v závere i vytlačiť štatistiku relatívnej početnosti zastúpenia jednotlivých tematických celkov vo výslednej databáze zadaní,
- získať v printovej podobe zbierku úloh roztriedenú podľa jednotlivých tematických okruhov, ktorú je možné použiť pri príprave študentov na ústnu formu internej časti maturitnej skúšky z matematiky.

Nakoľko sme predpokladali u učiteľov len základné zručnosti pri práci s počítačom, a nebolo našou snahou naučiť ich samostatne vytvárať a spravovať databázové systémy v prostredí MS Access 2000, databázy boli doplnené prepínacími panelmi umožňujúcimi ich ovládanie a spravovanie pomocou ovládacích tlačidiel.

obr.č. 1 Titulný panel databázy zadaní IČÚF maturitnej skúšky z matematiky pre úroveň A

obr.č. 2 Titulný panel databázy zadaní IČÚF maturitnej skúšky z matematiky pre úroveň B

Na zvládnutie konkrétneho prostredia tvorby a správy databázy, existuje na našom trhu dostatočné množstvo slovenskej i českej odbornej literatúry prístupnej v knižnej alebo elektronickej podobe, ktorú je možné prípadným záujemcom odporúčať.

Priebežné vyhodnotenia

V nasledujúcich tabuľkách uvádzame niekoľko číselných údajov hovoriacich o priebehu a výsledkoch priebežného vzdelávania.

	šk. rok 2003/04	šk.rok 2004/05
počet prihlásených učiteľov	29	44
počet absolvovaných učiteľov	25	38
percento úspešnosti	**86,21 %**	**86,37 %**

tab. č. 1 Percento úspešnosti učiteľov

Percento učiteľov, ktorí úspešne absolvovali priebežné vzdelávanie bolo dosť vysoké. Naše obavy z nižšej úspešnosti vychádzali z predpokladu, že nutnosť aktívnej práce s počítačom môže byť pre učiteľa – začiatočníka v oblasti práce s IKT, demotivujúca. Učitelia však viac ocenili fakt, že boli prinútení s počítačom zmysluplne pracovať v čase, ktorý im osobne najviac vyhovoval a radšej využili možnosť komunikácie s lektorom a ostatnými účastníkmi bez nutnosti cestovať. Problémy pri práci s počítačom sa vďaka kombinácii foriem podarilo väčšine prekonať bez toho, aby ich od ďalšej spoločnej práce odradili.

úroveň A *téma*		šk. rok 2003/04				šk.rok 2004/05			
		1.úloha	2. úloha	3. úloha	Spolu	1.úloha	2. úloha	3. úloha	Spolu
1.	Základy matematiky	30	38	79	147	28	44	64	136
2.	Funkcie	54	60	116	220	41	57	132	230
3.	Planimetria	36	45	79	160	29	7	84	120
4.	Stereometria	28	30	55	113	21	14	64	99
5.	Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika	25	19	53	97	18	13	52	83
	spolu:	174	194	385	737	138	137	399	668

tab. č. 2 Počet spracovaných úloh pre úroveň A

úroveň B *téma*		šk. rok 2003/04			šk.rok 2004/05		
		1.úloha	2. úloha	Spolu	1.úloha	2. úloha	Spolu
1.	Základy matematiky	31	70	101	47	102	149
2.	Funkcie	41	71	112	65	123	188
3.	Planimetria	29	58	87	38	99	137
4.	Stereometria	32	45	77	29	94	113
5.	Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika	21	39	60	31	73	104
	spolu:	155	285	437	211	493	691

tab. č. 3 Počet spracovaných úloh pre úroveň B

V súhrne boli v každom roku vytvorené dve osobitné databázy úloh pre jednotlivé úrovne s naplnenosťou cez 600 úloh v úrovni A a cez 400 úloh v úrovni B. Potreba takto vysokého počtu úloh vychádzala z dovtedy platného maturitného poriadku, kde bol počet maturitných zadaní odvodený od počtu maturantov na škole a reálne sa odhadovala nutnosť vypracovať napríklad na školách gymnaziálneho typu 80-90 maturitných zadaní z matematiky. Učitelia si preto vlastnú prácu a možnosť spolupráce pri tvorbe databázy pod odborným vedením cenili veľmi vysoko. Výsledný produkt bol vždy ponúknutý absolventom konkrétneho vzdelávania, a ak došlo k dohode medzi účastníkmi i vo viacerých skupinách, tak sa výsledná databáza naplnila úlohami vytvorenými vo všetkých skupinách. Učitelia, ktorí sa daného vzdelávania nezúčastnili, však reálny prístup k naplnenej databáze úloh nemajú.

Záver

Záverom jedna dobrá správa. Za predpokladu, že máte záujem vytvoriť si databázu vlastných úloh použiteľných v maturitných zadaniach a necítite potrebu vyskúšať si nové formy vzdelávania, ktoré ponúka Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, sú vzorové databázy pre úroveň A i B volne prístupné na stránke www.mcpo.sk [3] v časti Publikácie – Prírodovedné predmety – Matematika. Ku dňu odovzdania príspevku sme evidovali 1165 stiahnutí. Veľkosť oboch zozipovaných databáz neprekračuje kapacitnú veľkosť diskety. Obe databázy sú ošetrené vstupným heslom, ktoré sa prístupní po rozbalení stiahnutého súboru Databazy a šikovnejší učitelia si ho môžu bez väčších problémov zmeniť. Metodická príručka pre prácu s databázou bude v elektronickej podobe prístupná na tej istej webovej stránke v dohľadnej dobe.

Týmto príspevkom sme sa pokúsili ukázať možnosti využitia IKT v edukačnom procese, ktorý vedie vyučujúci učiteľ, i v procese kontinuálneho vzdelávania samotného učiteľa, kde zvládnutie základov práce s informačnými technológiami prináša úžitok obom zúčastneným stranám, učiteľovi i jeho žiakom.

Literatúra

[1] MŠ SR: *Vyhláška MŠ SR c. 510/2004 o ukoncovaní štúdia na stredných školácha o ukoncovaní prípravy na odborných školách, ucilištiach a praktických školách z 23. augusta 2004* Dostupné na internete: http://www.statpedu.sk/maturita/510_Vyhlaska_z_23-8-2004_ciastka512.pdf

[2] ŠPÚ: *Cielové požiadavky na vedomosti a zručnosti absolventa strednej školy.* Dostupné na internete: http://www.statpedu.sk/maturita/cielove_ poziadavky.htm

[3] Metodicko-pedagogické centrum v Prešove [cit24-06-05][homepage] Dostupné na internete: http://www.mcpo.sk/modules/wmpdownloads/viewcat.php?cid=19

Adresa autora:
RNDr. Jana Hnatová
MPC Prešov
Ul. Tarasa Ševčenka 11
080 20 Prešov
e-mail: hnatova@mcpo.sk

Aplikační programy v geometrii

Jitka Hodaňová

Abstract. *Technical development requires an inclusion of modern methods in school. It is possible to use software AutoCAD for construction tasks in geometry and technical drawing lessons. The drawing with help of a pair of compasses, a ruler and a pencil is replaced by computer support drawing. The big accuracy of construction performed on monitor of computer represents a big advantage of drawing.*
Key words: *elementary school, geometric constructions, computer software AutoCAD*

Vývoj v oblasti počítačové grafiky umožňuje zařazení moderních metod rýsování do vyučování geometrie na školách. V hodinách geometrie je vhodné propojit matematické znalosti s možností aplikovat poznatky při práci s počítačem. Jedna z možností je využití grafických systémů, například programu AutoCAD nebo programu Cabri Geometrie, při rýsování v geometrii a v technickém kreslení.

Software AutoCAD se stal již pojmem v oblasti grafických CAD systémů na platformě osobních počítačů. Software AutoCAD se učí používat studenti na středních průmyslových školách, kteří se připravují na práci konstruktérů. Tento počítačový program je využíván ve strojírenství, stavebnictví a v elektrotechnice. Grafický CAD systém je možné využít i pro konstrukci geometrických úloh na základní škole. Klasická metoda rýsování pomocí pravítka, kružítka a tužky tak může být nahrazena konstrukcí za podpory počítače. Významnou předností tohoto způsobu rýsování je velká přesnost. Právě přesnost v rýsování je pro mnohé žáky náročnou dovedností. Opakovaný neúspěch v grafickém projevu s papírem a tužkou brání žákům prožít si radost z dobře zvládnuté práce. Moderní metody práce s počítačovými programy umožňují i méně nadaným žákům narýsovat dokonalý výkres. Také žáci s různými postiženími mohou na počítači vyrýsovat úlohu stejně dobře jako žáci bez tělesného postižení.

Použití programu AutoCAD vyžaduje seznámit se se základními funkcemi tohoto programu. Žáci se musí naučit nastavit výkres, seznamují se se souřadným systémem a s kreslicími pomůckami. Dále je třeba seznámit žáky s kreslicími příkazy pro vytváření objektů jak v 2D, tak ve 3D prostoru. Učí se rýsovat úsečky, křivky, kružnice a 3D objekty.

Významnou součástí výkresu v technickém kreslení je kótování. Je třeba seznámit žáky se způsoby kótování v AutoCADu. Po zvládnutí základních funkcí programu AutoCad je možné se zaměřit na konstrukční úlohy. Při konstrukci jednotlivých úloh se naučené dovednosti procvičují a zdokonalují. Práci s počítačovým programem AutoCAD je možné využít například v těchto tematických celcích: množiny bodů daných vlastností, shodná a podobná zobrazení, kuželosečky, pravoúhlé promítání na jednu průmětnu, pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, atd.

Geometrické úlohy je možné konstruovat na počítači také pomocí programu Cabri Geometrie. Tento program je určený především pro školskou matematiku. Cabri Geometrie je počítačový program, který umožňuje vytvářet na obrazovce počítače geometrické objekty, manipulovat s nimi, experimentálně zkoumat a objevovat geometrické zákonitosti. Dnes je program využíván na mnohých základních a středních školách.

Ve svém příspěvku uvádím úlohu, která je narýsována pomocí základních funkcí programu AutoCAD.

Příklad: K elipse e sestrojte tečny z nevlastního bodu $P\infty$, který je určený směrem s.

Rozbor: Hledané tečny t_1, t_2 jsou rovnoběžné s přímkou s . Kolmice k sestrojená na tečny
t_1, t_2 ohniskem F_2 je také kolmá k přímce s. Paty P_1, P_2 této kolmice na tečnách t_1, t_2, leží na kružnici v o středu S a poloměru a. Konstrukce bodů P_1, P_2byla provedena podle věty: *Množina všech pat kolmic, které jsou spuštěny z ohnisek elipsy na její tečny, je kružnice opsaná okolo středu elipsy poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy.*

Sestrojíme tedy bodem F_2 kolmici na přímku s a průsečíky této kolmice s kružnicí v označíme P_1, P_2. Body P_1, P_2 vedou hledané tečny t_1, t_2 rovnoběžně s přímkou s. Bod dotyku T_1na tečně $t_1$sestrojíme tak, že sestrojíme spojnici bodů F_1Q_1 (bod Q_1 je souměrný bod k ohnisku F_2 podle tečny t_1) a tato spojnice F_1Q_1 protíná tečnu t_1 v bodě dotyku T_1. Obdobně sestrojíme bod dotyku T_2 na tečně t_2. Nalezené tečny i s body dotyku jsou navzájem souměrně sdružené podle středu S (viz. obr.).

Postup konstrukce:

1. Dáno *A, B, C, D,* $F_1, F_2, P\infty$

2. Sestrojíme elipsu e, nevlastní bod $P\infty$ je určený přímko s

3. k; $k \perp s \wedge F_2 \in k$
   v; $v(S,\ a)$

4. P_1, P_2; $k \cap \quad v = \{P_1,\ P_2\}$

5. t_1; $t_1 \| s \wedge P_1 \in t_1$

   t_2; $t_2 \| s \wedge P_2 \in t_2$

6. T_1; $F_1Q_1 \cap t_1 = \{T_1\}$

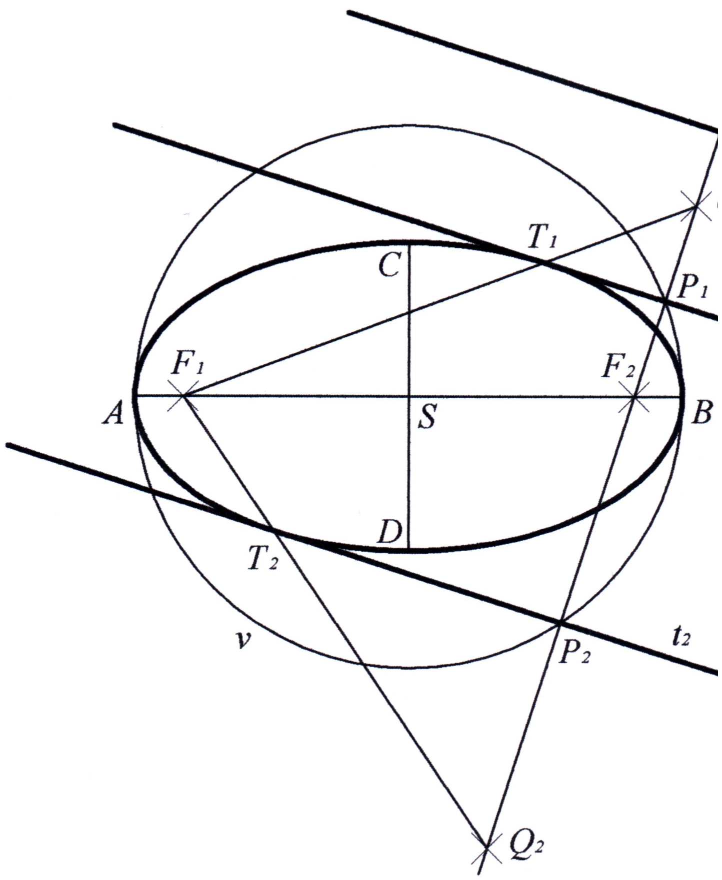
   $T_2; F_1Q_2 \cap t_2 = \{T_2\}$

Diskuse: Kolmice k sestrojená ohniskem F_2 k přímce s protíná vrcholovou kružnici v ve dvou bodech P_1, P_2. Se zadanou přímkou s lze tedy těmito body sestrojit dvě přímky, které jsou tečnami zadané elipsy e. Tato úloha má vždy dvě řešení.

Poznámka: Pro řešení této úlohy lze rovněž využít větu:

Množina všech bodů, které jsou souměrně sdružené s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen, je kružnice se středem v druhém ohnisku o poloměru rovném velikosti hlavní osy elipsy.

Konstrukce sestrojená v programu AutoCAD má velmi pěkné technické provedení. Nevýhodou tohoto programu je ale vysoká prodejní cena, která je důvodem, proč školy tento program nezakoupí. Program AutoCAD je také velmi složitý. Je učený pro kostruktéry a proto zahrnuje mnoho funkcí, které se ve školské geometrii nevyužívají. Program se ovšem využívá v technické praxi a bylo by vhodné seznámit alespoň technicky nadané žáky s tímto programem.



Obr. : Tečna elipsy z nevlastního bodu $P\infty$, který je určený směrem s.

Literatúra

[1] Program AutoCAD

[2] Fort, P., Kletecka, J. *Učebnice AutoCAD 2002.* Praha: Computer Press, 2002. ISBN 80-7226-679-9.

[3] Ríha, O. *Konstrukční geometrie II.* Brno: Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2184-5.

Adresa autora:
Mgr. Jitka Hodaňová, PhD.
PdF UP
Žižkovo nám. 5
771 40 Olomouc
e-mail: hodan@pdfnw.upol.cz

Buffonova úloha o štvorci[1]

Lucia Ilucová

Abstract. *The Buffon problem of squares is one of the beautiful problems solved via geometric probability. The conditions of the game* franc-carreau *can be changed and the shape of tiles can be triangular (equilateral triangle) or hexagonal (regular hexagon).*

Úvod

Počiatok pravdepodobnosti v histórii ľudstva je možné spojiť s hazardnými hrami, z ktorých najstaršie sú hry v kocky. Boli známe už v starom Egypte, Mezopotámii i v Indii, hrali sa v antickom Grécku i Ríme. Počiatok pravdepodobnosti ako matematickej disciplíny je všeobecne spájaný s menami B. Pascal a P. Fermat, ktorí vo svojej korešpondencii z roku 1654 riešili dlho odolávajúce problémy hier založených na náhode. O histórii teórie pravdepodobnosti je možné viac sa dočítať napríklad v [1].

Pravdepodobnosť v školskej matematike je takisto spojená s hrami, najmä v úvode tejto témy sa žiakom a študentom predkladajú úlohy o pravdepodobnosti hodu určitej hodnoty na kocke alebo pádu jednej zo strán mince. Typickým problémom na vysokej škole je Buffonova úloha o ihle, pri ktorej je ako nástroj riešenia predkladaný integrálny počet. Úlohy zaradené do pravdepodobnosti v školskej matematike vedú väčšinou k použitiu klasickej definície pravdepodobnosti, teda k porovnaniu počtu priaznivých prípadov ku konečnému počtu všetkých možných prípadov. Geometrická pravdepodobnosť je síce súčasťou osnov matematiky pre gymnáziá (je zaradená aj k požiadavkám pre maturitnú skúšku formy A z matematiky), ale často je chápaná ako doplnková téma a preto sa niekedy vynecháva. Príčinou je pravdepodobne skutočnosť, že prípadov, o ktorých sa uvažuje, je nespočítateľne veľa a namiesto ich počítania je potrebné ich popisovať geometrickými mierami. Miery priaznivých prípadov a všetkých možných prípadov však musia byť nezávislé na posunutí alebo pootočení celej úlohy a naviac musia mať ešte ďalšie vlastnosti - nezápornosť, monotónnosť či spojitosť a aditivitu. Takými mierami sú napríklad dĺžková miera (dĺžka úsečky na priamke alebo dĺžka oblúka na krivke), plošná miera (obsah obrazca v rovine) alebo objemová miera (objem telesa v priestore). Geometrickú pravdepodobnosť potom definujeme ako pomer odpovedajúcich mier priaznivých prípadov k miere všetkých možných prípadov, pričom obe miery musia byť rovnakého typu. Teda ak napríklad mierou priaznivých prípadov je dĺžka a mierou všetkých možných prípadov obsah, tak geometrická pravdepodobnosť je nulová (nulová je napríklad pravdepodobnosť, že bod štvorca leží na krivke ľubovoľnej dĺžky v štvorci ležiacej). Je zrejmé, že nezáleží na tom, či uvažujeme oblasť otvorenú či uzavretú, pretože napríklad plocha štvorca sa nezmení, keď k nemu nebudeme počítať jeho hranicu.

Buffonovu úlohu o štvorci je možné zadať už na vyučovaní matematiky základnej školy (ak je téma pravdepodobnosti zaradená), pretože ponúka bohaté prostredie pre experimentovania v oblasti pravdepodobnosti s použitím základných poznatkov o výpočte obsahov rovinných útvarov.

[1]Tento článok bol napísaný s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

Hra *Franc-Carreau*

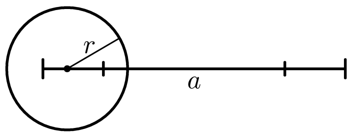
Na určenie pravdepodobností jednotlivých situácií, ktoré môžu pri hazardnej hre nastať, sa zameral gróf Buffon. Článok *Mémoire sur le jeu de franc-carreau* (1733) začínal Buffon diskusiou o vtedajšej obľúbenej hre šľachticov nazývanej *franc-carreau* („na štvorce“) a pokračoval „problémom ihly“. V ňom sa po prvýkrát v teórii pravdepodobnosti objavilo Ludolfovo číslo π, a to ako miera možných orientácií nie ihiel, ale tyčiniek pri náhodnom hádzaní na vydláždenú podlahu.

Hra *franc-carreau* spočívala v hádzaní mince s polomerom r na podlahu vydláždenú zhodnými štvorcovými dlaždicami. Bodovo boli hodnotené prípady, keď obvod mince preťal špáry medzi dlaždicami v dvoch, troch a štyroch bodoch, pričom na výsledky hodu boli uzavierané stávky. Určiť pravdepodobnosti jednotlivých situácií z tejto hry je obsahom práve Buffonovej úlohy o štvorci.

Riešenie úlohy

Buffonova úloha o štvorci nie je zložitá z hľadiska konečného výpočtu pravdepodobností jednotlivých situácií, najzložitejšou časťou riešenia úlohy je etapa jej uchopenia. Pre pochopenie problému je preto vhodné začať s alternatívou úlohy v jednorozmernom prípade.

Máme úsečku dĺžky a a mincu s polomerom r (nech $a > 2r$). Aká je pravdepodobnosť, že minca pretne úsečku v jednom a dvoch bodoch za predpokladu, že jej stred padne na úsečku?



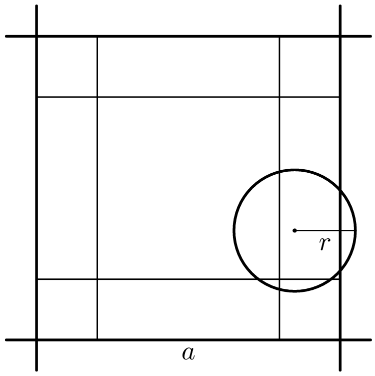
Obrázok 1: *Riešenie úlohy závisí od polohy stredu mince vzhľadom k úsečke.*

Aby minca preťala úsečku v jednom bode, tak jej stred musí ležať v jednej z „okrajových“ častí úsečky s dĺžkou r. Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(1) = 2r/a$, t. j. pomer súčtu dĺžok vyhovujúcich častí úsečky k celkovej dĺžke úsečky. Minca pretne úsečku v dvoch bodoch, ak jej stred leží na úsečke dĺžky a mimo „okrajových“ častí so súčtom dĺžok $2r$ (teda na časti úsečky s dĺžkou $a - 2r$). Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(2) = (a - 2r)/a$. (Žiaci základnej školy môžu pracovať s konkrétnymi číselnými údajmi.)

Z predchádzajúcej úlohy je zrejmé, že problém polohy mince vzhľadom k systému špár z hry *franc-carreau* sa redukuje na problém polohy stredu mince vzhľadom k hranici jednej dlaždice. Pravdepodobnosti jednotlivých situácií Buffonovej úlohy o štvorci, kedy minca pretne špáry medzi dlaždicami v dvoch, troch alebo štyroch bodoch, je teda možné nájsť na základe obsahov útvarov, v ktorých sa stred mince v jednej dlaždici v jednotlivých situáciách nachádza.

Označme a dĺžku strany štvorcovej dlaždice a r polomer mince; ich pomer označíme q ($q = r/a$). Rozlišujeme potom štyri nasledujúce situácie (príslušné oblasti sú zakreslené v obr. 2):

1. Minca sa nedotýka, ani nepretína hranicu dlaždice v prípade, že stred mince je vo väčšej vzdialenosti od hranice dlaždice ako je polomer mince, teda že leží v „sústrednom“ štvorci s obsahom $(a - 2r)^2$.



Obrázok 2: *Štvorec rozdelený na časti prislúchajúce jednotlivým situáciám.*

Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(0) = (a - 2r)^2/a^2 = (1 - 2q)^2$, t. j. pomer obsahu plochy, v ktorej stred mince musí ležať, aby minca nepretínala okraj štvorca a obsahu celej plochy, v ktorej tento stred leží.

2. Ak minca pretína hranicu dlaždice v dvoch bodoch, tak stred mince musí ležať v jednom zo štyroch obdĺžnikoch s obsahom $r(a - 2r)$.

   Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(2) = 4r(a - 2r)/a^2 = 4q(1 - 2q)$.

3. Prienikom mince a dlaždice sú tri body, ak stred mince leží na „vnútornej" strane jedného z „vrcholových" štvorcov. Dĺžka každej z týchto úsečiek je r.

   Z definície geometrickej pravdepodobnosti vyplýva, že pravdepodobnosť tejto situácie sa rovná nule, t. j. $\mathrm{P}(3) = 0$.

4. Minca pretína hranicu dlaždice v štyroch bodoch, ak stred mince leží v jednom zo štyroch „vrcholových" štvorcoch s obsahom r^2.

   Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(4) = 4r^2/a^2 = 4q^2$.

Pre konkrétne hodnoty a, r dostaneme konkrétne číselné hodnoty pravdepodobností príslušných situácií, napríklad nech $q = 0{,}1$ (polomer mince je desatina dĺžky strany štvorcovej dlaždice). Pomer pravdepodobností je potom 0,64: 0,32: 0: 0,04.

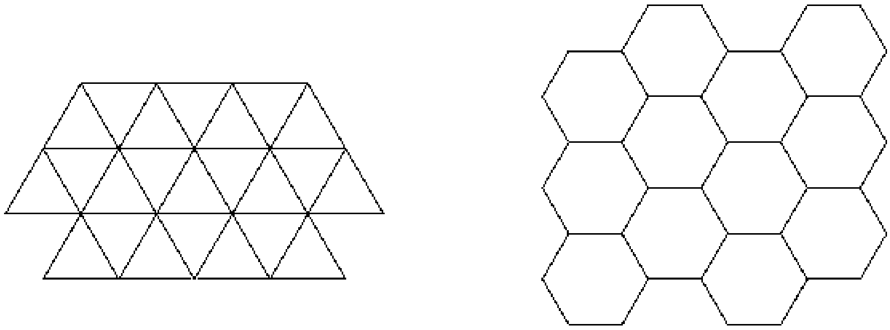
Samozrejme musí platiť $\mathrm{P}(0) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(4) = 1$. Ak by sme uzatvárali stávky na rovnaké šance výhry situácie s pravdepodobnosťou P(0) proti situáciám s P(2) + P(4), tak by muselo platiť q $\approx$ 0,15. (Teda, ak by mala byť pravdepodobnosť, že minca nepretne dlaždicu rovnaká ako pravdepodobnosť, že ju pretne dvakrát alebo štyrikrát, tak by polomer mince musel byť 0,15-násobkom dĺžky strany štvorcovej dlaždice.)

Alternovaná úloha

Zaujímavým variantom danej úlohy je hádzanie mince na podlahu vydláždenú inými dlaždicami ako štvorcovými. Úlohu z prostredia geometrickej pravdepodobnosti je tak možné obohatiť o problematiku teselácií[2], ktorá predstavuje zdroj zaujímavých matematických problémov. Alternatívou k štvorcovej dlaždici je dlaždica tvaru rovnos-

[2]Pojem *teselácia* je odvodený od anglického *tessellation* (*planar tessellation*), ktoré sa používa pre pokrytie roviny útvarmi bez medzier a prekrytí.

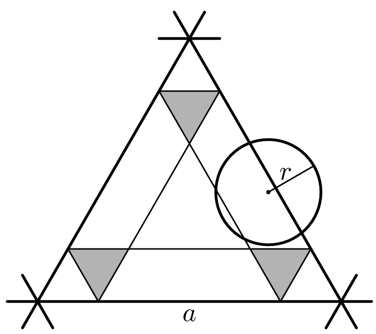
tranného trojuholníka alebo pravidelného šesťuholníka[3]. Potom sa úloha o štvorci mení na úlohu o rovnostrannom trojuholníku alebo pravidelnom šesťuholníku.



Podlaha vydláždená zhodnými dlaždicami tvaru rovnostranného trojuholníka a pravidelného šesťuholníka.

Aká je pravdepodobnosť jednotlivých situácií v spomínanej hre *franc-carreau* pre dlaždice tvaru rovnostranného trojuholníka, keď minca môže preťať systém špár v dvoch, štyroch alebo v šiestich bodoch?

Označme a dĺžku strany trojuholníkovej dlaždice a r polomer mince (z riešenia vyplýva podmienka $a > 2\sqrt{3}r$, ich pomer označíme q $(q = r/a)$. Rozlišujeme potom štyri[4] nasledujúce situácie (príslušné oblasti sú zakreslené v obr. 4):



Obrázok 3: *Trojuholník rozdelený na časti prislúchajúce jednotlivým situáciám.*

1. Minca sa nedotýka, ani nepretína hranicu dlaždice v prípade, že stred mince leží v „sústrednom“ rovnostrannom trojuholníku so stranou $a - 2\sqrt{3}r$ (obsah trojuholníka je $\sqrt{3}(a - 2\sqrt{3}r)^2/4$).
   Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(0) = (a - 2\sqrt{3}r)^2/a^2 = (1 - 2\sqrt{3}q)^2$.

2. Prienikom mince a dlaždice sú práve dva body, ak stred mince leží v jednom z troch lichobežníkov so základňami $a - 4\sqrt{3}r/3$, $a - 2\sqrt{3}r$ a výškou r(súčet obsahov je $(3a - 5\sqrt{3}r)r$).
   Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $\mathrm{P}(2) = 4(\sqrt{3}a - 5r)r/a^2 = 4(\sqrt{3} - 5q)q$.

[3]Len tri pravidelné mnohouholníky vytvárajú teseláciu: rovnostranný trojuholník, štvorec a pravidelný šesťuholník.

[4]Pravdepodobnosť situácie, že minca sa dotýka hranice dlaždice v dvoch bodoch, je nulová, pretože to nastáva len vtedy, keď stred mince leží v jednom z troch vrcholov "sústredného" rovnostranného trojuholníka so stranou $a - 2\sqrt{3}r$.

O situácii troch dotykových bodov mince a dlaždice je možné hovoriť len pri podmienke $r = \sqrt{3}a/6$, keď stred mince leží v strede trojuholníkov. Príslušná pravdepodobnosť sa tiež rovná nule.

3. Minca pretína dlaždicu v štyroch bodoch, ak stred mince leží v jednom z troch sivých rovnostranných trojuholníkoch s výškou r(súčet obsahov je $\sqrt{3}r^2$). Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $P(4) = 4r^2/a^2 = 4q^2$.

4. Ak stred mince leží v jednom z troch „vrcholových" rovnostranných trojuholníkoch s výškou r, tak minca pretína systém špár v šiestich bodoch (súčet obsahov je $\sqrt{3}r^2$).
Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $P(6) = 4r^2/a^2 = 4q^2$.

Určenie príslušných častí trojuholníkovej dlaždice a výpočet ich obsahov je zložitejší ako v prípade štvorcovej dlaždice, ale riešenie vyžaduje taktiež len základné vzťahy pre výpočet rovinných útvarov a goniometrické funkcie. Pre konkrétnu hodnotu $q = 0{,}1$ je pomer pravdepodobností situácií 0,43: 0,49: 0,04: 0,04.

Záver

V prípade úlohy s dlaždicami tvaru pravidelného šesťuholníka má zmysel hovoriť o situáciách, kedy minca pretína systém špár v dvoch alebo troch bodoch. Návodom môže byť hodnota 0,78, ktorá predstavuje pravdepodobnosť, že minca s polomerom, ktorý je desatinou dĺžky strany pravidelného šesťuholníka, systém špár nepretne.

Buffonovu úlohu o štvorci je možné použiť nielen v rámci témy geometrická pravdepodobnosť, je zaujímavou problémovou situáciou aj pre výpočet obsahov rovinných útvarov. Pri práci môžu deti kresliť, vystrihnúť si model dlaždice a mince a skúmať, kde by stred mince v daných prípadoch musel ležať. Pre stredoškolskú matematiku sa ponúka priestor pre diskusiu a tvorivú spoluprácu.

Dodatok

Gróf *Buffon* (1707 - 1788), vlastným menom *Georges-Louis Leclerc*, bol francúzskym prírodovedcom, ktorého dielo ovplyvnilo ďalšie dve generácie vedcov, vrátane Ch. Darwina. Prezývka *Buffon* vznikla na základe názvu malej dedinky neďaleko Montbardu, ktorá sa stala súčasťou majetku jeho rodiny. Široký obsah tém, o ktorých písal, obsahuje nielen matematiku a teóriu pravdepodobnosti (objavil aj binomický zákon), ale aj astronómiu, fyziku (najmä optiku), botaniku (fyziológia rastlín) a lesníctvo (od roku 1739 bol správcom kráľovskej botanickej záhrady *Jardin du Roi* v Paríži). Práve na základe *Mémoire sur le jeu de franc-carreau*, v ktorej zaviedol do teórie pravdepodobnosti diferenciálny a integrálny počet, bol Buffon zvolený do Kráľovskej akadémie vied v Paríži. Je známy aj svojou prácou *Histoire naturelle, génerale et particulière* (1749 - 1788) v 36 zväzkoch (ďalšie zväzky boli pridané až po jeho smrti), ktorá obsahuje do toho času všetko známe o prírodnom svete. V práci okrem iného uvažuje o podobnostiach medzi ľuďmi a opicami a o možnostiach spoločného pôvodu. V roku 1778 Buffon v diele *Les époques de la nature* diskutoval o pôvode slnečnej sústavy a vypočítal vek Zeme na 75 000 rokov na základe rýchlosti ochladzovania železa (podľa [2]).

Literatúra

[1] Mačák, K.: *Počátky počtu pravděpodobnosti.* Dějiny matematiky, svazek 9. Prometheus, Praha, 1997.

[2] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *Georges Louis Leclerc Comte de Buffon.* http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Buffon.html[5]

[5] Stránka aktuálna k dátumu 14. 6. 2005.

[3] Saxl, I. : Geometrická pravděpodobnost. In: Antoch, J., Hlubinka, D., Saxl, I. (eds.): *Pravděpodobnost a statistika na střední škole.* MATFYZPRESS, Praha, 2005.

Adresa autora:
RNDr. Lucia Ilucová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha
Česká republika
e-mail: ilucova@gmail.com

Kombinatorické úlohy – rovnaké a predsa iné

MARTINA JANÁČKOVÁ

ABSTRACT. *The aim of the paper is to discuss some aspects of the combinatorial thinking of secondary school students. We took a small sample of 6 students and gave them 4 isomorphic testing problems. The student's solutions of particular problems were analysed and compared.*

Úvod

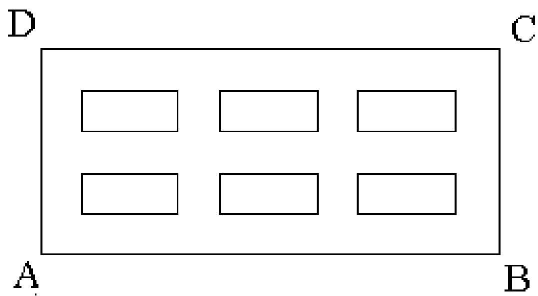
Cieľom mnohých kombinatorických úloh je určiť počet prvkov nejakej množiny. Žiaci sa na hodinách matematiky stretávajú s viacerými metódami, ktorými možno dospieť k správnemu výsledku. Napriek tomu, žiacke riešenia týchto úloh sú známe vysokým počtom chýb. Aby sme mohli zistiť, čo vplýva na náročnosť úloh a zároveň zodpovedať otázku položenú v nadpise, porovnáme žiacke riešenia tzv. *izomorfných úloh* resp. *izomorf*. *Siegler* tento pojem v [5, s. 395] definuje takto: „Izomorfy sú problémy, ktoré sú formálne identické, ale rozdielne v ich povrchových štruktúrach". Žiaci stredných škôl sa s nimi stretávajú bežne pri klasickom vyučovaní kombinatoriky, keď sú nútení priradiť každú úlohu k jednému zo základných typov kombinatorických úloh. Vedieť pochopiť myslenie žiakov je jedna z dôležitých schopností učiteľa, ak chce žiakom poskytnúť účinnú pomoc pri prekonávaní ťažkostí.

Nástroj a jeho aplikácia

Ako východisko sme použili 4 izomorfné kombinatorické úlohy:

Úloha „Mesto"

Na obrázku sú obdĺžnikmi vyznačené domy. Medzi nimi sú ulice. Koľkými rôznymi cestami sa môžeme dostať z miesta A do miesta C, ak budeme chodiť ulicami mesta len smerom nahor a vpravo?



Úloha „Hokej"

Hokejový zápas sa skončil 2:3. Koľkými spôsobmi sa mohlo vyvíjať skóre zápasu?

Úloha „Priehradky"

Napíšte všetky možnosti, ktorými sa dá rozdeliť 5 gúľ A, B, C, D, E do 2 priehradiek u,$v$tak, aby v priehradke u boli 2 a v priehradke v 3 gule.

Úloha „Rad"

Koľkými možnými spôsobmi možno usporiadať do radu 3 ◯ a 2 □?

Každá možnosť, ktorá je časťou riešenia predchádzajúcich úloh, sa dá prepísať do poradia troch symbolov **0** a dvoch **1**, kde symbol **0** označuje:

1. v úlohe „Mesto“ úsek cesty „vpravo“
2. v úlohe „Hokej“ gól, ktorý dalo druhé mužstvo
3. v úlohe „Priehradky“ výber gule do priehradky v
4. v úlohe „Rad“ ◯

Symbol **1** označuje:

1. v úlohe „Mesto“ úsek cesty „nahor“
2. v úlohe „Hokej“ gól, ktorý dalo prvé mužstvo
3. v úlohe „Priehradky“ výber gule do priehradky u
4. v úlohe „Rad“ □

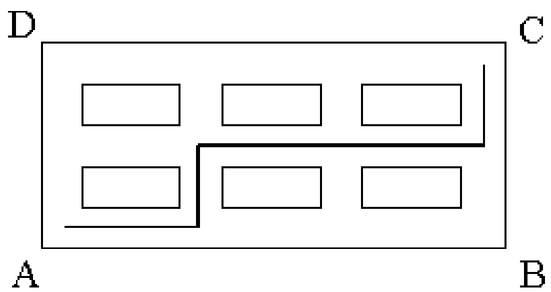
Každá z týchto úloh sa teda dá transformovať na známy typ úlohy P'$_{2,3}$(5).

Ako dôležitý pojem sa pre vyjadrovanie v ďalšom texte ukázal pojem „pozícia“. Pod týmto pojmom budeme rozumieť:

1. v úlohe „Mesto“ poradové číslo úseku na ceste z A do C
2. v úlohe „Hokej“ poradové číslo gólu
3. v úlohe „Priehradky“ gule A, B, C, D, E (guľa A = 1. pozícia,...)
4. v úlohe „Rad“ umiestnenie v rade

Pre ľahšie pochopenie uvádzame príklad:

V úlohe “Mesto“ sa dá každá cesta z miesta A do miesta C rozložiť na päť úsečiek dvoch typov: tri “vpravo“ a dve “nahor“. Táto skutočnosť umožňuje prepísať každú z ciest do poradia troch núl a dvoch jednotiek, kde symbol **0** označuje úsek “vpravo“ a symbol **1** úsek “nahor“. Na obrázku je vyznačená cesta **01001**.



pozícia	1.p.	2.p.	3.p.	4.p.	5.p.
cesta	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

Úlohy boli zadané šiestim žiakom 2 ročníka gymnázia (16 rokov). Riešenia boli natáčané videokamerou a následne spracované vo forme protokolov. Tieto sme následne podrobne analyzovali.

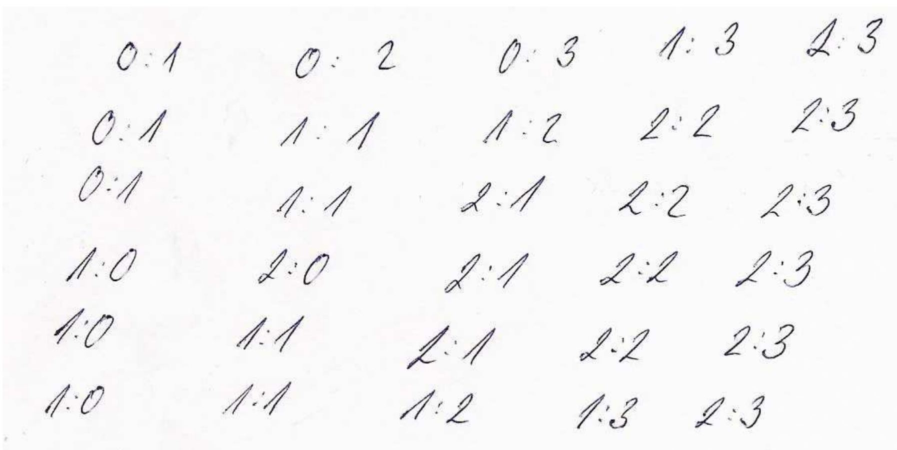
Výsledky

Počty nájdených možností v riešeniach jednotlivých úloh šiestich žiakov znázorňuje tabuľka:

Poradové č. žiaka	„Mesto“	„Hokej“	„Priehradky“	„Rad“
1	9	7	10	10
2	10	6	10	10
3	10	4	10	10
4	9	6	10	10
5	10	6	10	10
6	9	6	10	9

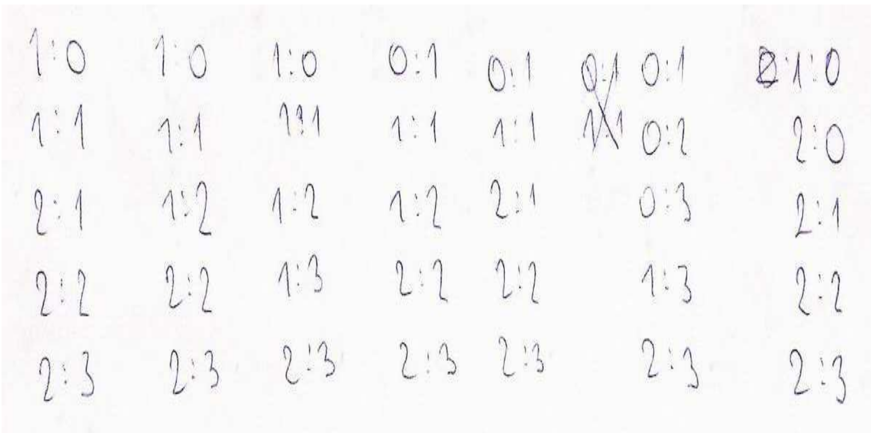
Vo všetkých riešeniach úloh „Priehradky“, „Rad“ a “Mesto“ bolo nájdených 9 alebo 10 (plný počet) možností. Hoci po matematickej stránke sú všetky úlohy rovnaké, priemerný počet nájdených priebehov v úlohe “Hokej“ je podstatne nižší (približne 6). Skôr, ako sa pokúsime odpovedať na otázku “Prečo?“, mali by sme sa zamyslieť nad tým, v čom sa táto úloha odlišuje od zvyšných troch.

Kým pri vypisovaní jednotlivých permutácií vo všetkých ostatných úlohách zapisujem po každom priradení objektu pozícii len jeden symbol (◯ alebo □, čiaru “nahor“ alebo “vpravo“, jedno z písmen A, B, C, D, E), v úlohe „Hokej“ dva symboly (počet gólov, ktoré dalo 1. mužstvo i počet gólov, ktoré dalo 2. mužstvo). Okrem toho treba zobrať do úvahy predchádzajúci gólový stav, na ktorý treba nadviazať. Nestačí teda uvažovať len o tom, ktoré mužstvo dalo gól, ale tento treba pripočítať k výslednému stavu po predchádzajúcom góle. Obe skutočnosti zapríčiňujú, že priebehy zápasov sú na 1. pohľad neprehľadné. Tým sa systematické vypisovanie permutácií bez možnej spätnej kontroly stáva náročné. Žiak preto radšej volí len nejaký – na vonkajších znakoch založený – menej dokonalý systém. Dokazuje to aj komentár Martiny k jej postupu pri riešení tejto úlohy (obr. 1). V hranatých zátvorkách uvádzame časť riešenia, na ktoré žiačka v danom momente ukazovala : „*najprv som začínala, že som si ich rozdelila na prvé a druhé družstvo. Najskôr vyhrávalo prvé družstvo a druhé sa to snažilo dorovnať.* [1. riadok] *Potom som dala tak, že sa naháňali viac-menej. Že dal prvý, potom to dorovnal* [1:1, 2. riadok]*, potom dal znova ten* [1:2]*, zas dorovnal* [2:2] *a tak. Tu som si dala preskakovano. Tento dal prvý gól* [0:1]*, ten dal tiež – dorovnal* [1:1]*, ale vzápätí na to dal ďalší gól* [2:1]*, tento ich vzápätí dobehol* [2:2] *a vzapätí znova dal o gól viac* [2:3]. *To isté som urobila tu, lenže opačne* [4. riadok].“



Obr. 1

Pre ďalšie úvahy bola pre nás podnetná 1. Martinina veta: *„...som si ich rozdelila na prvé a druhé družstvo.“* Domnievame sa, že nejde o uvedomenie si dvoch aktérov úlohy (1. a 2. družstvo), ale ňou popisuje rozdelenie riešenia úlohy na dve časti: 1. “Hľadaj všetky možnosti, keď prvý gól dá prvé družstvo“, 2. “Hľadaj všetky možnosti, keď prvý gól dá druhé družstvo“. Takýto postup sa vyskytol v piatich riešeniach. Domnievame sa, že žiak má potrebu vniesť do neprehľadnej množiny priebehov všetkých zápasov určitý systém. Už prvý krok – ktoré mužstvo dalo 1. gól – umožňuje členiť všetky priebehy na dve podmnožiny, čím súčasne dochádza k transformácií úlohy na dve úlohy s menšou pracovnou množinou a tým aj k jej zjednodušeniu. Častým (5 zo 6 riešení) sprievodným javom bolo však to, že žiaci pri hľadaní priebehov všetkých zápasov druhej skupiny v poradí (v tomto prípade ide o zápasy, keď 1. gól dalo 2. družstvo) napodobňujú priebeh zápasov prvej skupiny s výnimkou prvého kroku: *„To isté som urobila tu, lenže opačne.“* Dôvodom môže byť zdanie, že „ak je možnosť, že dá prvý gól 1.družstvo s možnosťou, že najskôr bude skórovať 2. družstvo rovnocenná, potom budú rovnocenné aj obe skupiny zápasov“. Tento spôsob tvorby možností je tiež nenáročný na rozmýšľanie, pričom jeho aplikáciou vznikajú permutácie nové. V prípade, že v 1. skupine neboli vyčerpané všetky možnosti a ani pri asymetrických úlohách (počet riešení 1. skupiny sa odlišuje od počtu 2. skupiny) však ku kompletnému riešeniu zvyčajne nevedie. Z rovnakého dôvodu nevedie k úspechu ani samotné uplatnenie myšlienky, že počet zápasov v oboch skupinách bude rovnaký. Predpokladanie symetrie, či už počtu zápasov alebo samotných priebehov v jednotlivých skupinách, je očividné v Janinom riešení (obr. 2):



(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
10100	**10010**	**10001**	**01010**	**01100**	**01**	**00011**	**11000**

Obr. 2

V priebehu (d) je zamenené každé družstvo, ktoré v priebehu zápasu (a) skórovalo, za opačné až po 5. gól v poradí, kde už zmena nebola z dôvodu presne stanoveného počtu gólov 1. a 2. družstva možná. Podobný vzťah je aj medzi priebehmi (e) a (b). Priebeh (f) je nedokončený a preškrtnutý. Jedno zo zdôvodnení takéhoto javu by mohlo byť práve to, že Jana možnosti (d)-(f) vytvára popísaným spôsobom podľa možností (a)-(c) (symetria priebehov v skupinách). Tým má však skupina zápasov, kde dalo 1. gól 2. družstvo, o priebeh menej. Po prestávke pripisuje priebeh (g). V zápätí sa pýta: *„Šesť ich je tých možností?“* K našim úvahám o tendencii zachovať rovnaký počet permutácií v oboch skupinách nás priviedli 3 postrehy:

1. Jana sa neuspokojila s vypísanými priebehmi (a)-(e), hoci podľa systému, ktorým boli vytvárané, už ďalšie neexistujú.

2. Priebeh (g) začína gólom 2. družstva ako aj (d) a (e).

3. Zopakovaním predchádzajúceho postupu by mohla vytvoriť ďalší priebeh ((h)), ale neurobí to a riešenie vyhlási za konečné.

Na základe týchto postrehov sa domniavame, že menší počet zápasov v 2. skupine ((d)-(e)) vyvolalo potrebu túto doplniť o jeden zápas, ktorý začína gólom 2. družstva. Vieme si predstaviť, že dokončenie riešenia sa mohlo riadiť nasledovnou úvahou: "Keďže zápasy 1. skupiny boli vypísané systematicky, táto skupina je z hľadiska vypísania všetkých možností vyčerpaná. Z dôvodu symetrie 2. skupina tiež. Toto sú teda všetky možnosti."

Všetky spomínané fenomény môžu prispievať k tomu, že riešenia úlohy „Hokej“ sa budú vyznačovať nižšou úspešnosťou z hľadiska vypísania všetkých možností než riešenia všetkých ostatných úloh.

Záver

Hoci žiaci riešili úlohy, ktoré boli z matematického hľadiska identické, príslušné riešenia jednotlivých úloh sa od seba odlišovali počtom nájdených možností i ich poradím. Naše pozorovania sú v súlade s pozorovaniami iných autorov (*Tőrner* [6], *Bauersfeld* [1], *English* [2], *Hefendehl-Hebeker* and *Törner* [3], *Hesse* [4], ...). Domnievame sa, že tieto rozdiely môžu byť podmienené aj inými skutočnosťami než je uvedené v článku, napr.:

- či ide o úlohu, u ktorej je zrejmá príslušnosť k niektorému zo základných typov úloh
- grafickým znázornením prostredia úlohy
- či zadanie úlohy navádza k prehľadnému zápisu jednotlivých možností a pod..

Okrem získaných informácií má pre učiteľov uskutočňovanie podobných analýz aj ďalší význam – núti nás vcítiť sa do myslenia žiakov. Vedieť, čo sa deje v hlave žiaka, keď rieši úlohu, je jedna z dôležitých podmienok pre poskytnutie účinnej pomoci žiakom v pedagogickej praxi.

Literatúra

[1] Bauersfeld, H.: *Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und –lehrens.* In: Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Dörfler, W., Fischer, R.. Wien: Hölder, Pichler, Tempsky; Stuttgart: Teubner 1985, s. 7 – 25.

[2] English, L.: *Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning.* In: Developing mathematical reasoning, K-12. Stiff, L. V., Curcio F. R.. National Council of Teachers of Mathematics. 1999, s. 22 – 36.

[3] Hefendehl-Hebeker, L., Törner, G.: *Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik.* In: Didaktik der Mathematik 4, 1984, s. 245 – 262.

[4] Hesse, F. W.: *Vergleichende Analyse kognitiver Prozesse bei semantisch unterschiedlichen Problemeinbettungen.* In: Sprache und Kognition. 1985, 4 (3), s. 139 – 153.

[5] Siegler, R.: *The twenty questions game as a form of problem solving.* In: Child-Development. 1977, v. 48 (2), s. 395-403.

[6] Törner, G.: *Isomorphie – ein unterrichtsrelevanter Aspekt in der Kombinatorik.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 1987, v. 3, s.118 – 123.

Adresa autora:
RNDr. Martina Janáčková
Gymnázium Veľká okružná,
Veľká okružná 22,
010 01 Žilina.
e-mail: janackova@gvoza.sk

Podnety pre rozvoj matematických schopností (zaujímavé a primerané úlohy)

Dušan Jedinák

Abstract. *The four chosen examples should show, that stimulating impulses for mathematical mind can be offered during last years of elementary school already or at high school.*

Úvod

Každý výber úloh pre zvolený zámer školskej matematiky patrí do didaktickej výbavy zodpovedného učiteľa. Postupne zvládnuté rozširovanie a prehlbovanie základných vedomostí a zručností kladne motivuje žiakov aj ich vyučujúcich. Predložené úlohy s naznačeným riešením môžu v posledných ročníkoch základnej školy alebo v prvých triedach stredoškolského štúdia poukázať na užitočnosť účinných nenáročných matematických postupov (strom logických možností, využitie vhodných pomerov, prvočíselný rozklad a vlastnosti prirodzených čísiel).

Strom logických možností

Úloha: Ak žiadne z troch prirodzených čísel nie je deliteľné tromi, tak je deliteľný tromi súčet buď dvoch alebo troch týchto čísel. Dokážte toto tvrdenie.

Riešenie:

Tieto tri čísla môžeme vyjadriť vo vzťahu k deliteľnosti tromi takto:

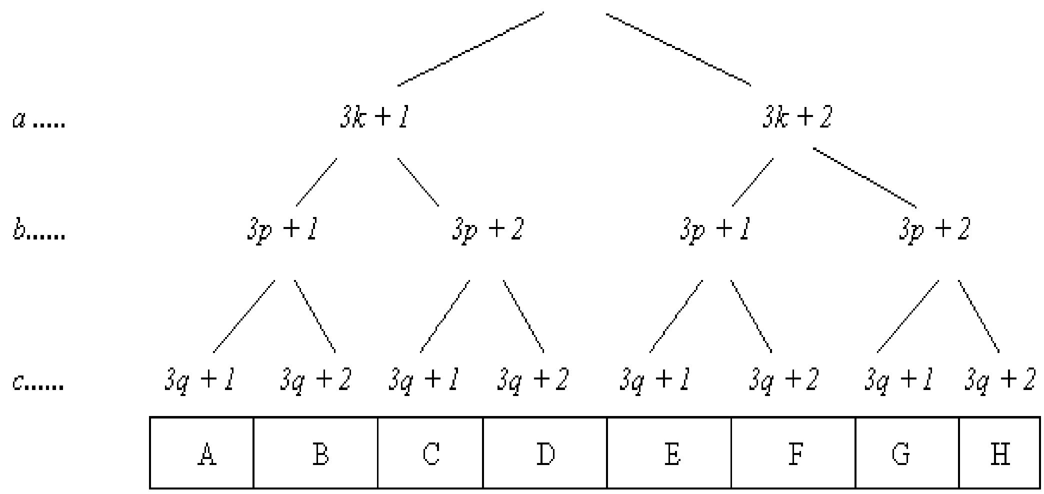
Existujú také prirodzené čísla k, p, q, pre ktoré platí

$a = 3k + 1$ alebo $a = 3k + 2$

$b = 3p + 1$ alebo $b = 3p + 2$

$c = 3q + 1$ alebo $c = 3q + 2$

Predstavme si všetky možnosti, ktoré môžu nastať (strom logických možností):

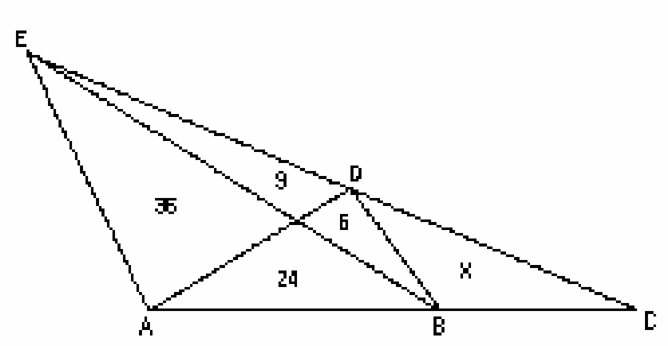


Vidíme, že v prípadoch A, H treba zobrať tri čísla, aby ich súčet bol deliteľný tromi

$[3k+1+3p+1+3q+1=3(k+p+q+1), 3k+2+3p+2+3q+2=3(k+p+q+2)]$.

V ďalších prípadoch stačí sčítať buď posledné dve (B, C, F, G) alebo prvé s tretím (D, E). Napríklad B: $3p+1+3q+2=3(p+q)+3=3(p+q+1)$
alebo D: $3k+1+3q+2=3(k+q+1)$.

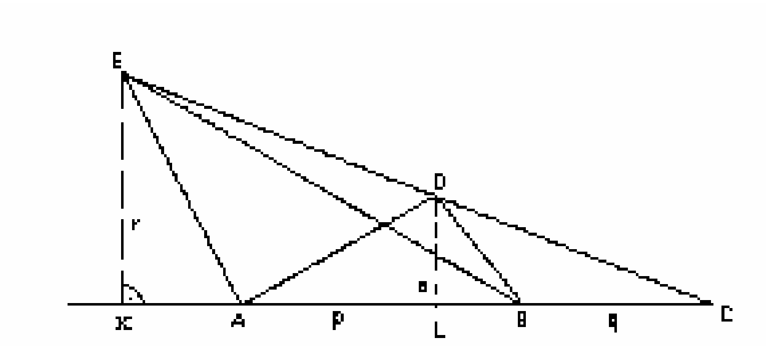
Dajme do pomeru



Úloha: V obrázku čísla znamenajú veľkosti obsahov príslušných trojuholníkov. Stanovte x, t.j. obsah trojuholníka BCD.

Riešenie:

A: Označme si $|AB|=p, |BC|=q$



a spoločné výšky trojuholníkov (podľa obr.) $|EK|=r, |DL|=s$

Potom platí :

$$S_{\Delta ABE}=\frac{p\cdot r}{2}=60$$
$$S_{\Delta BCE}=\frac{q\cdot r}{2}=15+x$$
$$S_{\Delta BCD}=\frac{q\cdot s}{2}=x$$
$$S_{\Delta ABD}=\frac{p\cdot s}{2}=30$$

Dajme do pomeru:

$$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABE}}=\frac{q}{p}=\frac{15+x}{60}$$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABD}}=\frac{q}{p}=\frac{x}{30}$$

Z toho vyplýva, že $\frac{15+x}{60}=\frac{x}{30}$, potom $x=15$ **.**

B: Pretože $S_{\Delta ABE}=\frac{p\cdot r}{2}=60$, $S_{\Delta ABD}=\frac{p\cdot s}{2}=30$, tak $\frac{r}{s} = 2$, teda $r = 2 \cdot s$.

Vidíme, že $S_{\Delta BCE} = \frac{q \cdot r}{2} = \frac{q \cdot 2 \cdot s}{2} = q \cdot s = 15 + x$, $S_{\Delta BCD} = \frac{q \cdot s}{2} = x$, teda $q \cdot s = 2 \cdot x = 15 + x$, potom $x = 15$.

Najmenšie a prirodzené

Úloha: Určte trojicu najmenších po sebe idúcich prirodzených čísiel, ktorých súčet je druhou a zároveň aj treťou mocninou nejakých prirodzených čísiel.

Riešenie:

Označme si: $p+ (p + 1) + (p + 2) = 3p + 3 = 3(p+1)$, kde $p \in$ N.

Nech existujú prirodzené čísla m, n tak, aby $3.(p+ 1) = m^2 = n^3$.

Potom, ale existujú aj prirodzené čísla x, y tak, že platí

$$3(p+1) = 3^2.x^2 = 3^3y^3 \text{ (prvočíselný rozklad prirodzených čísiel).}$$

Z toho vyplýva, že $p + 1 = 3x^2 = 3^2y^3$ a teda aj $x^2 = 3y^3$.

Tomuto vyhovujú najmenšie prirodzené $y = 3$ a $x = 9$. Potom $p= 242$.

Hľadaná najmenšia trojica prirodzených čísiel s požadovanými vlastnosťami je

$$242 + 243 + 244 = 729 = 27^2 = 9^3 .$$

Roky plynú, vážení ...

Úloha: V ktorom roku devätnásteho storočia sa narodil nemenovaný matematik, ak v roku 1901 bol súčet cifier roku jeho narodenia rovnaký ako súčet cifier počtu dovtedy prežitých rokov ?

Riešenie: Zamyslime sa, začnime uvažovať a zapisovať:

Narodil sa v roku 1 8 xy, (x, y sú cifry, prirodzené čísla od 0 do 9) .

V roku 1901 mal (1901 − 18xy) rokov.

Ak by $y>$ 1, odčítaním rokov

```
  1 9 0 1
 -1 8 x y
 ________
    (9-x) (11-y)     (prechod cez desiatku)
```

dostaneme cifry jeho veku (9-x) a (11-y).

Potom by podľa zadania úlohy malo platiť $1 + 8 + x + y =$ (9-x) + (11-y), teda $x + y =$ 5,5. Také prirodzené čísla x, y zrejme neexistujú.

Ak by $y \leq 1$ (t.j. buď 0 alebo 1) po odčítaní rokov dostaneme cifry veku (10-x) a (1-y).

Potom má platiť $1 + 8 + x + y =$ (10-x) + (1-y), teda $x + y = 1$.

Ak bude $y = 1$, musí byť $x = 0$. No vtedy by bolo $1901 - 1801 = 100$, ale súčet cifier roku narodenia je 10 a súčet cifier veku iba 1.

To nevyhovuje zadaniu úlohy.

$$
\begin{array}{r}
1\ 9\ 0\ 1 \\
-\ 1\ 8\ x\ y \\
\hline
\end{array}
$$

$(10\text{-}x)\ \ (1\text{-}y)$ (nie je prechod cez desiatku)

Ešte je možnosť $y = 0$. Vtedy musí byť $x = 1$. Potom rok narodenia by bol 1810 a vek (v roku 1901) je 91 rokov, to vyhovuje (1+8+1+0=10, 9+1=10).

Nemenovaný matematik sa narodil v roku 1810.

Želajme si príjemne prežité roky budúce.

Záver

Tieto a podobné úlohy rád predkladám aj v príprave budúcich učiteľov, aby sme sa inšpirovali pre našu školskú matematicko-didaktickú činnosť. Vyučovanie matematiky stále potrebuje didakticky vhodné a motivačne účinné, zaujímavé a primerané myšlienkové podnety aj pre rozvoj základných matematických schopností.

Literatúra

[1] Cirjak, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh.* Prešov: Essox, 2000.

[2] Konforovič, A.G.: *Významné matematické úlohy.* Praha: SPN, 1989.

[3] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: Acta UP, 1999.

[4] Kuřina, F.: *Umení videt v matematice.* Praha: SPN, 1990.

[5] Pereľman, J.I.: *Zajímavá algebra.* Praha: SNTL, 1985.

[6] Thiele, R.: *Matematické důkazy.* Praha: SNTL, 1985.

[7] Zhouf, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky.* Praha: Prometheus, 1997.

Adresa autora:
RNDr. Dušan Jedinák
Trnavská univerzita
Pedagogická fakulta
Priemyselná 4
918 43 Trnava
e-mail: djedinak@truni.sk

Používanie IKT ako predpoklad a nástroj zmeny obsahu aj metód vyučovania matematiky

Vladimír Jodas

Abstract. *This paper has aim to show concrete examples, as possible by means of ICT positively modify Contents but also methods of mathematics teaching.*

Východiská

Podľa mňa nedostatky vo vyučovaní matematiky sú špecifickým prejavom nedostatkov celej našej vzdelávacej sústavy. Uvediem len dva, podľa mňa najvážnejšie:

- nesprávna formulácia vzdelávacích cieľov, ktorá preceňuje hromadenie poznatkov a potláča rozvoj kompetencií,
- ignorovanie potrieb vzdelávaných subjektov, ignorovanie reality, vychádzajúce z pomýlenej pedagogickej zásady že „Vyučovací predmet je didaktickou modifikáciou príslušného vedného odboru". Konkrétne vyučovanie matematiky je pre žiakov málo osožné. Nie je pragmatické, nepomáha im pri riešení ich bežných súčasných i neskôr očakávaných problémov.

Nedostatky signalizujú výsledky medzinárodných výskumov (PISA, SITES), pociťuje ich trh práce, varujú nás predstavitelia Svetovej banky, na alarm volajú odborníci z nevládnych organizácií, len náš pedagogický front je nemiestne pokojný.

Pri hľadaní riešení by sme mali vychádzať z toho, že :

- Ľudia si začínajú uvedomovať, že ich úspešnosť v živote závisí od získaného vzdelania. Je len otázkou času, kedy tlak konzumentov vzdelávacích služieb donúti vzdelávaciu sústavu prispôsobiť ciele a metódy výchovy a vzdelávania potrebám vzdelávaných subjektov.
- Obklopuje nás čoraz väčšia záplava informácií. Žiaducimi sa stávajú nové ľudské kompetencie – vyznať sa v tejto záplave, vedieť nájsť potrebné informácie, porozumieť im, vedieť ich usporiadať, spracovať, vyhodnotiť, posúdiť, zaujať k nim stanovisko a najmä ich zužitkovať.
- Začína byť nezmyselné iba hromadenie poznatkov. Začína byť dôležitejšia celoživotná schopnosť získavať nové poznatky vlastnou činnosťou.

Pre vyučovanie matematiky to znamená:

- Prehodnotiť ciele vyučovania matematiky, vykonať rozsiahlu redukciu a zmenu obsahu učiva, vypustiť z neho nadmerné hromadenie vedomostí a pestovanie zastaraných zručností.
- Nutnosť zakomponovať do vyučovania nové zručnosti a kompetencie ktoré používanie informačných a komunikačných technológií umožňuje, resp. ich vyžaduje. Taktiež treba výrazne rozšíriť poučenie o spracovávaní dát, pravdepodobnosti a štatistike.

- Prechod od odovzdávania poznatkov ku konštruktívnemu spôsobu ich tvorby. Tu hrajú informačné a komunikačné technológie kľúčovú úlohu. Umožňujú vytvoriť žiakom tvorivé prostredie, v ktorom môžu vlastnou činnosťou, experimentovaním a pozorovaním nielen objavovať nové poznatky, ale najmä rozvíjať a pestovať také potrebné kompetencie a schopnosti ako sú schopnosť komunikovať (prijímať, spracovať, overovať a odovzdávať informácie), schopnosť uvažovať a schopnosť nachádzať príčinné súvislosti, schopnosť riešiť problémy a schopnosť prezentovať a prezentovať sa.

Naše hlavné hriechy

Pre obmedzené časové aj priestorové možnosti sa zameriam len na tému ***Riešenie rovníc, nerovníc a ich sústav,*** lebo pri jej vyučovaní sa dopúšťame najväčšieho množstva hriechov.

Školská matematika frázou ***„vyriešiť rovnicu“***

$$\boldsymbol{Ľ(x) = P(x)\ (1)}$$

kde $\boldsymbol{Ľ(x)}$ aj $\boldsymbol{P(x)}$ sú výrazy premennej $\boldsymbol{x}$, ktorá nadobúda hodnoty z nejakej množiny $\boldsymbol{D}$, tzv. oboru premennej[6], rozumie proces, ktorý po ***konečnom počte krokov*** vedie k vyjadreniu všetkých takých hodnôt premennej (takzvaných „koreňov“ rovnice), pre ktoré platí ***(1).***

Pritom spôsob, ako k vyjadreniu koreňov dôjsť, závisí od toho, aká je podoba výrazov $\boldsymbol{Ľ(x)}$ a $\boldsymbol{P(x)}$. Učíme preto deti zvlášť riešiť rovnice lineárne a kvadratické, zvlášť rovnice exponenciálne a logaritmické a zvlášť rovnice goniometrické. Obvykle ich naučíme riešiť tzv. základné rovnice, t. j. vtlčieme im do hláv vzorce na vyjadrenie koreňov pomocou výrazov obsahujúcich len koeficienty rovnice (a konštanty), v ktorých sa používajú podľa možnosti len operácie sčitovania, násobenia, delenia a ***symboly odmocnín***. V prípade rovníc, pre ktoré recept nie je známy, sa požívajú tzv. ***úpravy rovnice.*** Presnejšie povedané, proces riešenia rovnice znamená zostrojenie takej postupnosti rovníc $\boldsymbol{Ľ_i(x) = P_i(x)}$, ktorá začína danou rovnicou a končí rovnicou, na ktorej riešenie už existuje štandardný postup. Pritom pre vzťah medzi jednotlivými členmi tejto postupnosti platí :

$\boldsymbol{Ľ_i(x) = P_i(x) \Rightarrow Ľ_{i+1}(x) = P_{i+1}(x)}$, alebo $\boldsymbol{Ľ_i(x) = P_i(x) \Leftrightarrow Ľ_{i+1}(x) = P_{i+1}(x)}$.

- Hriechom je, že sme tréningovú metódu (riešenie exponenciálnych, logaritmických a goniometrických rovníc bolo v minulosti dobrým tréningom na pochopenie vlastností týchto funkcií) povýšili na cieľ, že sme riešenie rovníc „fetišizovali“[7].

- Druhým hriechom je naša naivná predstava, že riešením rovníc pestujeme u žiakov samostatné tvorivé myslenie. Skutočnosť je taká, že hodnotíme dobre tých žiakov, ktorí dokážu čo najvernejšie zopakovať naoktrojovaný spôsob riešenia.

- Treťou tragédiou je fakt, že takéto vyučovanie je absolútne neúčelné, nepraktické. Reálne problémy sa nedajú riešiť iba polynomickými rovnicami stupňa

[6]Ak to nie je uvedené, alebo to nevyplýva z kontextu úlohy, tak sa oborom premennej chápe množina všetkých reálnych čísel.

[7]Kto neverí, nech si pozrie rôzne príručky pre uchádzačov o štúdium na hociktorej univerzite na Dolnozemskej ceste v Bratislave.

najviac štvrtého, reálne problémy vedú k riešeniu rovníc, ktoré nerešpektujú naše škatuľkovanie rovníc na také či onaké.

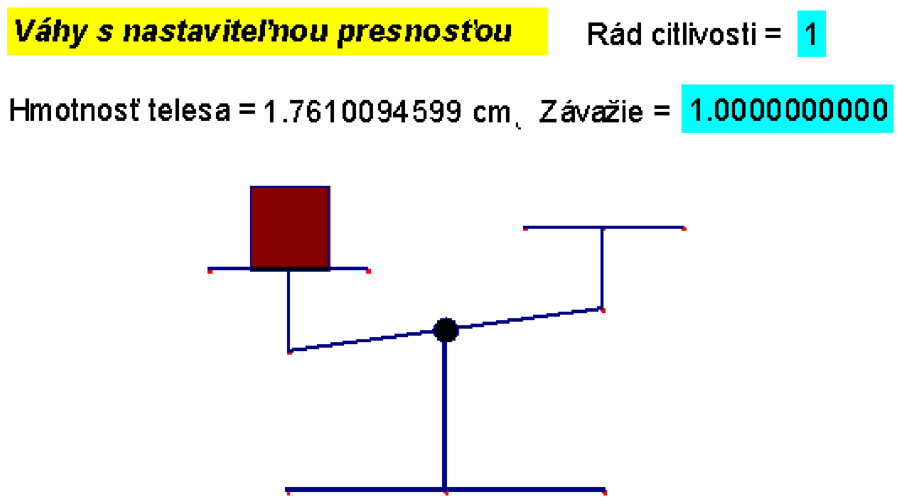
- Štvrtým hriechom je, že žiakom podávame falošný obraz matematiky. matematika bola, je a iste aj bude vedou na výsosť praktickou. Takí matematici ako Archimedes, Newton, Leibniz, Gauss, atď. nikdy neignorovali riešenie praktických problémov.

- Piatym hriechom je fakt, že vo vyučovaní matematiky ignorujeme prostriedky ktoré sa stávajú bežnou súčasťou života každého z nás. „Není hodno výtečných mužů, aby mařili celé hodiny jako otroci výpočetní dřinou, která by mohla být bezpečně svěřena komukoli jinému, kdyby se používali stroje.“ Týmito slovami zdôvodňoval Gottfried Wilhelm von ***Leibniz*** v roku 1672 svoje pokusy o zostrojenie mechanického kalkulátora. Zoberme si poučenie z jeho slov a ponechajme strojom to, čo patrí strojom a ľuďom to, čo patrí ľuďom. Toho, čo môže urobiť (zatiaľ?) len človek, je aj tak stále dosť.

- Najhorším (šiestym) hriechom je, že drezírujeme žiakov v riešení najrôznejších druhov rovníc, ale podstatnú matematickú kompetenciu – schopnosť matematizovať daný problém, schopnosť zostaviť rovnicu, ktorej korene sú riešením problému, resp. nájsť funkciu, ktorej optimálne (pre daný účel) hodnoty sú riešením problému, tú nepestujeme, tú zanedbávame.

Ako sa hore uvedených hriechov vyvarovať a na čo sa sústrediť, o tom bude reč v nasledujúcich príkladoch.

Návrh východísk



Mali by sme žiakov naučiť najzákladnejšie spôsoby hľadania hodnôt neznámych veličín. Zamyslime sa nad spôsobom, ako sa zisťuje hmotnosť neznámeho telesa na rovnoramenných váhach. Na obrázku vidíte začiatok váženia. Vo vážení by sme pokračovali tak, že by sme postupne pridávali ďalšie závažia hmotnosti jedna. Keď sa váhy „prevážia“ na druhú stranu, odoberieme posledné závažie, zvýšime citlivosť o jeden rád a začneme postupne pridávať závažia hmotnosti jedna desatina. Ak sa váhy ... atď. Takýmto spôsobom môžeme zistiť hmotnosť váženého telesa s presnosťou, ktorá je limitovaná presnosťou váh. (Ak máte tento text v elektronickej podobe, otvorte si Cabri výkres ***Váhy***, kde môžete interaktívne sledovať celý proces.

Tento primitívny, ale účinný spôsob môžeme použiť aj pri riešení rovnice $x^2 - 2x - 1 = 0$. Možno budete namietať, že podľa vzorca pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice sú riešením čísla $1 \pm \sqrt{2}$ a že niet čo riešiť. Tým sme však nič nevyriešili, iba sme neznáme čísla pomenovali. Pozrime sa do excelovského ***zošitu 1***.

	step = 0,001
x	x ^2 - 2x - 1
2,41	-0,0119
2,411	-0,009079
2,412	-0,006256
2,413	-0,003431
2,414	-0,000604
2,415	0,002225
2,416	0,005056
2,417	0,007889
2,418	0,010724
2,419	0,013561
2,42	0,0164

Riešenie rovnice $x^2 - 2x - 1 = 0$ postupným zjemňovaním odhadu.
Zvolíme si začiatočnú hodnotu premennej x a step. Za novú počiatočnú hodnotu premennej zvolíme poslednú hodnotu premennej, pre ktorú je výraz v druhom stĺpci ešte záporný a zmeníme step na desatinu pôvodnej hodnoty. Takto postupne určíme hľadanú hodnotu s požadovanou presnosťou.

Viem si predstaviť protesty, prečo máme riešiť kvadratickú rovnicu takýmto nezmyselným spôsobom. Vtip je v tom, že ten spôsob nie je nezmyselný. Práve naopak. Je to spôsob, ktorý je zrozumiteľný a prístupný (vďaka existencii výpočtovej techniky) aj žiakom základných škôl a navyše umožňuje vyriešiť aj takú rovnicu akou je napr.:

$x + \sin x = 2$

Stačí zmeniť vzorec pre výpočet výrazu v druhom stĺpci tabuľky a zmeniť podmienené formátovanie buniek tohto stĺpca (aby boli zelené, pokiaľ je ich hodnota menšia ako 2) a uplatnením rovnakého princípu ako v minulom prípade vyriešime aj túto rovnicu s ľubovoľnou (prípustnou) presnosťou. Pozrite si 2. hárok ***zošitu 1***.

Výhoda ponúkanej metódy tkvie v tom, že je jednoduchá, prakticky použiteľná, ale najmä poskytuje priestor pre pestovanie kompetencie riešiť problémy. Skúsme ešte jeden

Príklad

DUO banka poskytuje hypotekárne úroky do výšky troch miliónov korún s maximálnou splatnosťou 20 rokov, vo forme rovnakých mesačných splátok. Pritom požičané peniaze úveruje p % mesačným úrokom. Zostrojte excelovskú tabuľku, z ktorej určíte výšku $P(n)$ dlhu po n mesiacoch, v závislosti na celkovej výške $P(0)$ pôžičky, mesačnej úrokovej miere p a na výške s mesačnej splátky.

Riešenie úlohy dostatočne intelektuálne vyťaží riešiteľa. Musí sám dôjsť k objaveniu rekurentného vzťahu:

$$\boldsymbol{P(n+1) = P(n) \cdot \frac{100+p}{100} - s}$$

Stanovenie výšky mesačnej splátky.	
P(0) =	150000
p =	0,5
n =	?
splátka :	4500
zaplatené spolu :	
n	Dlh po n splátkach
0	150000
1	146250
2	142481,25
3	138693,66
4	134887,12
5	131061,56
6	127216,87
7	123352,95
8	119469,72
9	115567,07

Na obrázku je výsek z tabuľky, ktorá je zostrojená v 3. hárku ***zošitu 1***. Táto práca (jej ťažiskom je vytvorenie správneho vzorca pre bunky v 2. stĺpci), by mala byť výsledkom spolupráce učiteľa s celou triedou. Dôležité je, že takto vytvorená tabuľka môže slúžiť na vyriešenie celej rodiny úloh s touto problematikou. Poďme si napr. kúpiť auto za 300000 Sk. Dajme tomu, že polovicu sumy máme, stačí si požičať $\boldsymbol{P(0) = 150000}$ Sk. V peňažnej inštitúcii, ktorú sme si zvolili, je $\boldsymbol{p = 0{,}5}$. Banka trvá na tom, že dlh musíme splatiť buď za 3 roky, alebo za 5 rokov. Preto budeme skúmať dva prípady jeden pre 36 splátok, druhý pre 60 splátok. My si môžeme dovoliť maximálnu mesačnú splátku vo výške 5000 Sk. Ak dosadíme tieto vstupné hodnoty, zistíme, že po tridsiatich dvoch splátkach by už bol dlh menší ako 3000 Sk. Preto prípad pre 60 splátok nemusíme skúmať. Výšku splátky môžeme „doladiť" menením výšky splátky, alebo môžeme žiakov naučiť používať excelovský nástroj „hľadanie riešenia". Jeho použitím dostávame príslušnú výšku mesačnej splátky (zaokrúhlene) 4563,3 Sk. Je rozumné si spočítať aj celkovú zaplatenú sumu, v našom prípade to bude 164279 Sk, čo je cca o 9,5 % viac ako suma, ktorú sme si požičali.

Túto primitívnu metódu môžeme vo vyšších ročníkoch strednej školy pre všetkých žiakov rozšíriť o poučenie o rôznych špecializovaných softvéroch a pre časť žiakov zaujímajúcich sa o matematiku môžeme postupne pridávať také problémy ako

- Určenie počtu koreňov, ich separácia (s výdatným použitím IKT pri kreslení grafov funkcií),

- Nájdenie „rýchlejších" algoritmov na približný výpočet koreňov (Newtonova metóda dotyčníc, iteračná metóda a pod.)

Pritom IKT treba používať „osvietene", t. j. nezabúdať na prípady, keď aj najzložitejšia technika nestačí a kde je potrebné použiť ľudský potenciál.

Záver

Pre krátkosť času a nedostatok miesta som uviedol len jeden konkrétny návrh. Množstvo ďalších nájdete v mojej ***matematickej elektronickej čítanke,*** ktorú vydá fy. ešte v tomto roku.

Literatúra

[1] Coveney, P. – Highfield, R. (1995) *Mezi chaosem a řádem,* Mladá fronta, Praha, 2003.

[2] Devlin, K. (1976) *Jazyk matematiky,* Nakladatelství Argo a Dokořán, Praha, 2002.

[3] Feynmann, R. P. (1985) *To nemyslíte vážně, pane Feynmane!* Aurora, Praha, 2001.

[4] Jodas, V. (2005) *Matematická elektronická čítanka,* Siemens Business Services, Bratislava.

[5] Wieleitner, H. (1920) *Istorija matematiki ot Dekarta do serediny XIX. stoletija,* Gosudarstvennoe izdateľstvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva, 1960.

Adresa autora:
RNDr. Vladimír Jodas
Mierovo č. d. 120
930 41 Kvetoslavov
e-mail: +421905332034@orangemail.sk

Přijímací řízení z hlediska matematiky

Marika Kafková, Pavel Tlustý

Abstract. *This article deals with the problem of an entrance examination before different types of schools and institutions.*

Úvod

Všechny střední školy, učiliště, vyšší odborné školy a i vysoké školy každoročně řeší problém přijímacího řízení. Cílem každé instituce je vybrat z přihlášených jedinců ty nejlepší, tedy vytvořit takový přijímací mechanismus, který by zaručoval přijetí těch nejlepších.

Při přijímacím řízení jednotlivých škol se nabízí dvě možné alternativy, pomocí kterých se zjišťují vědomosti přihlášených žáků (vzhledem k našim zkušenostem se omezíme na přijímací pohovory z matematiky):

1. typická písemná práce, kde žáci řeší jednotlivé příklady na papír,
2. test, který dává žákům na výběr z několika možných odpovědí, z nichž je právě jedna správná (tzv. multiple choice testy).

Obě možné varianty mají samozřejmě své výhody i nevýhody. K výhodám první varianty, tj. typická písemná práce, patří např. to, že učitel, který opravuje dané písemné práce, může sledovat postupy řešících žáků a může i sledovat, jak žáci uvažují. Dále, je-li za správné řešení určitého příkladu např.10 bodů a příklad je vyřešen jen z části, může učitel obodovat daný příklad jen několika body. Naopak k nevýhodám patří nesporný fakt, že takové opravování je velmi pracné. Opravuje-li jeden příklad více učitelů, může docházet k subjektivnímu hodnocení a výsledky nemusí být objektivní.

Také test má své přednosti i nedostatky. Výhodné je, že oprava testů může probíhat podle šablony a tudíž opravovat může i neodborník v daném oboru. Oprava je bezesporu rychlá a obodování je snadné. Největší nevýhodou však je, že nelze sledovat, jak žák uvažuje, jak postupuje. Je tu i další a možná i závažnější problém – možnost hádání správné odpovědi. Má-li žák písemnou práci, kde musí napsat to, co ví, tzn. nevybírá z několika nabídnutých odpovědí jako při testu, je jisté, že odpovědi či řešení, které vytvořil, nehádal. U testu ale tomu tak není. Test je sice z hlediska klasifikace objektivní, protože všichni zájemci o danou školu mají stejný test, kde u každé otázky mají na výběr z několika odpovědí, přičemž právě jedna jediná je ta správná. Neví-li tedy žák správnou odpověď, může se jí pokusit tipnout.

Poslední době se většina škol přiklání ke druhé variantě, tzn. k multiple choice testům. S testováním v rámci přijímacích zkoušek pomáhá školám v České republice též komerční organizace SCIO, která pro ně dané testy zhotovuje. I když jsou tyto testy velmi pečlivě vypracovány, stává se velmi často, že se na školu dostane i žák, který pak bojuje s jejím vystudováním a někdy se ani to nepodaří a žák v průběhu studia odchází. Jedním z důvodů, proč se tak děje může být, že žák při přijímacím řízení ty otázky, které nevěděl, hádal a měl štěstí, že hádal správně. Důsledkem takového hádání je pak to, že je přijat žák, který na danou školu nepatří. Bohužel, jen někteří uživatelé testů si tento problém uvědomují. Je však nutné říci, že neexistuje způsob konstrukce testu, který by možnost hádání zcela eliminoval. Snadno lze ukázat, že ani odčítání bodů za nesprávně zaškrtnutou odpověď situaci neřeší.

Konkrétní výsledky

Ukažme si konkrétní příklad testu u přijímacího řízení a šance hádajícího žáka.

Příklad 1.

Přijímací test obsahuje 60 otázek. U každé otázky jsou 4 možné, stejně pravděpodobné odpovědi, přičemž správná odpověď je právě jedna. Prvních 40 otázek je snadných a dalších 20 otázek je těžkých. Předpokládejme, že se na danou školu hlásí 300 žáků, z toho 100 žáků to jde jen zkusit (nejsou dostatečně připraveni a tedy některé otázky pouze hádají). Dále předpokládejme, že prvních 40 otázek vyřeší správně všichni žáci, protože tyto otázky jsou snadné. Tedy nepřipravení žáci hádají správné odpovědi u posledních 20 otázek. V neposlední řadě předpokládejme, že odpoví-li žák alespoň na 10 otázek z posledních dvaceti správně, je přijat – budeme mluvit o tzv. zlomu neboli hranici úspěšnosti. Klíčovou roli tedy hraje posledních 20 otázek, na základě kterých se rozhodne, zda je žák přijat či nikoli.

Jaká je pravděpodobnost, že v přijímacím řízení obstojí alespoň jeden žák, který posledních 20 otázek nevěděl a pouze hádal?

Poznámka.

Budeme opírat o pravidlo tzv. praktické jistoty. Budeme-li mít velmi málo pravděpodobný jev, můžeme si být prakticky jisti, že tento jev nenastane. Nemůžeme si být jisti, neboť šance, že daný jev nastane, existuje. Můžeme si být ale skoro jisti, tedy prakticky jisti. Takový jev se považuje za prakticky nemožný. Zpravidla se za velmi málo pravděpodobný považuje jev, jehož pravděpodobnost je menší než 0,05. Tedy jev je prakticky nemožný, je-li jeho pravděpodobnost menší než číslo $\alpha = 0{,}05$. Číslo α se nazývá „hladina významnosti". Naopak jev je prakticky jistý, jestliže je jeho pravděpodobnost větší než číslo 1- α, tzn. větší než 0,95.

Řešení:

Z předpokladu plyne, že nemá cenu zabývat se prvními 40 otázkami. Dále tedy budeme uvažovat pouze test obsahující 20 otázek (jde o těch 20 nejtěžších otázek).

Má-li být žák přijat, musí zodpovědět alespoň 10 otázek z 20 správně. Je jedno, jestli zodpoví správně 12 nebo 18 otázek, podstatné je, že jich správně zodpověděl více než 9. Taková pravděpodobnost pro jednoho žáka je rovna

$$\sum_{i=10}^{20} \binom{20}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{20-i} = 0{,}013\ 864$$

Pravděpodobnost, že žák nezodpoví alespoň 10 správných odpovědí, je rovna

$$1 - \sum_{i=10}^{20} \binom{20}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{20-i} = 0{,}986\ 136$$

Pravděpodobnost, že se žádný žák ze 100 nedostane na danou školu, tzn. že žádný žák nezodpoví alespoň 10 otázek správně, je rovna

$$\left[1 - \sum_{i=10}^{20} \binom{20}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{20-i}\right]^{100} = (0{,}986136)^{100} = 0{,}247\ 560$$

Pravděpodobnost, že se alespoň 1 nepřipravený žák ze 100 na školu dostane, je tedy rovna

$$1-\left[1-\sum_{i=10}^{20}\binom{20}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-i}\right]^{100} = 0,752\,440 \geq 0,05$$

Jak je vidět, taková pravděpodobnost je velmi vysoká.

Nabízí se otázka, jak se bude měnit výsledná pravděpodobnost, budeme-li měnit počet otázek; hranici úspěšnosti, přes kterou když žák přejde, je přijat; počet hádajících žáků, kteří vykonávají přijímací řízení a počet nabídnutých odpovědí.

1. Změna počtu otázek

   Řešme situace, kdy test obsahuje 25, 30 otázek a hranice úspěšnosti se nezmění, tj. žák bude přijat, pokud zodpoví správně 10 otázek. Označme

   P_1 – pravděpodobnost 1 žáka (nepřipraveného žáka, tj. jednoho ze 100), že úspěšně udělá přijímací zkoušky

   P_2 – pravděpodobnost 1 žáka, že nebude přijat

   P_3 – pravděpodobnost, že žádný nepřipravený žák nebude přijat

   P_4 – pravděpodobnost, že alespoň jeden nepřipravený žák bude přijat

	P_1	P_2	P_3	P_4
25 otázek	0,071 328	0,928 672	0,000 611	0,999 388
30 otázek	0,196 593	0,803 407	0,000 001	0,999 999

   Samozřejmě je vidět, že touto situací bychom nepřipraveným žákům připravili lepší příležitost dostat se na danou školu.

   Jak to tedy bude vypadat, snížíme-li počet otázek a hranice úspěšnosti zůstane na 10 otázkách (žáci vybírají ze 4 odpovědí a nepřipravených žáků je 100)?

	P_1	P_2	P_3	P_4
16 otázek	0,001 644	0,998 356	0,848 248	0,151 752
14 otázek	0,000 342	0,999 658	0,966 385	0,033 615
13 otázek	0,000 126	0,999 874	0,987 466	0,012 534

   Z tabulky je patrné, že budeme-li chtít si být téměř jisti, že se na školu nedostane ani jeden „tipující“ žák, počet otázek bychom museli snížit na 14.

2. Změna hranice úspěšnosti

   Změna hranice úspěšnosti úzce souvisí se změnou počtu otázek. Čím více bylo otázek, tím byla i větší pravděpodobnost, že se na školu dostane žák hádající otázky. Podobné to bude i s hranicí úspěšnosti. Budeme-li tuto hranici snižovat, výsledná pravděpodobnost se bude zvětšovat a naopak. Zkusme tedy najít takovou hranici úspěšnosti, při které bude pravděpodobnost P_4 (pravděpodobnost, že alespoň jeden nepřipravený žák bude přijat) menší než číslo 0,05. Zachováme test o 20 otázkách.

hranice úspěšnosti/ P	P_1	P_2	P_3	P_4
12 otázek	0,000 935	0,999 065	0,910 663	0,089 338
13 otázek	0,000 184	0,999 816	0,981 796	0,018 204
14 otázek	0,000 030	0,999 970	0,997 053	0,002 947

Položíme-li hranici úspěšnosti na 12 otázkách, nezaručuje nám to, že se na školu nedostane žák, který pouze hádá. Bude-li ale hranice úspěšnosti na 13 otázkách, můžeme si být skoro jisti, že žáci, kteří jsou přijati, nehádali.

3. Změna počtu nabízených odpovědí

Jak to bude vypadat, změníme-li počet distraktorů (nabízených odpovědí)? Je zřejmé, že při menším počtu distraktorů, žákům, kteří hádají, situaci ulehčíme. Uvažujme test o 20 otázkách, hranice úspěšnosti nechme na 10 otázkách a počet hádajících žáků je 100. Zkusme si vyřešit situaci, že žáci vybírají ze tří, pěti a šesti nabízených odpovědí.

počet nabízených odpovědí / P	P_1	P_2	P_3	P_4
3	0,091 896	0,908 104	0,000 065	0,999 935
5	0,002 595	0,997 405	0,771 190	0,228 810
6	0,000 599	0,999 401	0,941 889	0,058 111

Vidíme, že ani u 6 nabízených odpovědí není výsledná pravděpodobnost P_4 menší než 0,05. To by nastalo až situaci, kdy nabízíme 7 možných odpovědí. V tomto případě je

P_4= 0,016 284.

Uvědomme si ale, že zvyšování počtu distraktorů není příliš vhodné, neboť je velmi obtížné, ne-li nemožné, žákům v testu předkládat stejně pravděpodobné odpovědi a tím znesnadňovat jejich hádání.

4. Různý počet řešících žáků, kteří hádají

Dosud jsme předpokládali, že hádá právě 100 studentů. Ukažme nyní jak se mění uvažované pravděpodobnosti v závislosti na měnícím se počtu uchazečů. Jaký vliv to bude mít na sestavení testu? Předpokládejme, že test obsahuje 20 otázek, žáci vybírají ze čtyř nabízených odpovědí a hranice úspěšnosti je stanovena na 10 otázkách. Ověřme si, že snížíme-li počet hádajících žáků, výsledná pravděpodobnost, tj. že se na danou školu dostane alespoň jeden „hádající“ žák, bude nižší.

počet hádajících žáků / P	P_1	P_2	P_3	P_4
150	0,013 864	0,986 136	0,123 167	0,876 833
80	0,013 864	0,986 136	0,327 288	0,672 712
50	0,013 864	0,986 136	0,497 544	0,502 456
5	0,013 864	0,986 136	0,932 574	0,067 426
3	0,013 864	0,986 136	0,958 981	0,041 019

Z tabulky vidíme, pouze v situaci kdy se na školu hlásí 3 studenti, kteří to jdou jen zkusit, tzn. že otázky pouze hádají, si můžeme být téměř jisti, že ani jeden z nich nebude přijat.

Závěr

Z jednotlivých výsledků je vidět, že není vůbec snadné vytvořit takový test pro přijímací zkoušky, který by zabránil úspěšnému složení testu žákům, kteří typují správné odpovědi. Nemůžeme přeci vědět, kolik žáků bude naše otázky typovat. Nelze tedy vyloučit, že na školu jsou přijati i žáci, kteří sem „nepatří“.

Závěrem tedy můžeme říci, že přijímací řízení, při kterém se využívají multiple choice testy, nejsou ze shora uvedených důvodů řadě případů příliš vhodné.

Literatúra

[1] Kafková, M., *Věrohodnost testového zkoušení z hlediska matematiky*, diplomová práce, PF JU v Českých Budějovicích, 2005

Adresa autorov:
Mgr. Marika Kafková, Doc. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
Katedra aplikované matematiky
ZF JU České Budějovice
Studentská 1
37 001
e-mail: maja.k@email.cz,tlusty@pf.jcu.cz

Od činnosti k poznatku

Pavel Klenovčan

Abstract. *We introduce our workshop which focuses on mathematics as part of the scientific endeavour and then on mathematics as a process, or way of thinking. Probably the most effective way of learning mathematics is by actively participating in it. Our aim is to show possibilities of an inquiry approach to the mathematics education. Some mathematical ideas we present in historical content. We show an example of the process of building new knowledge by using the well-known Four-Colour Problem*

Počas trvania projektu „*Modernizácia a inovácia vyučovania matematiky a informatiky so zreteľom na budúcich učiteľov a celoživotné vzdelávanie*“ prebieha ďalšie vzdelávanie učiteľov v rámci piatich modulov. Je to projekt PF KU v Ružomberku a je spolufinancovaný Európskou úniou. Jedným z modulov je „***Matematika na 1. a 2. stupni ZŠ***“. V rámci tohto modulu sme pripravili pracovnú dielňu. Väčšinu materiálov sme čerpali z dvoch už realizovaných dielní (P. Klenovčan, 2000 a M. Haviar, P. Klenovčan, 2001).

Pravdepodobne najúčinnejší spôsob ako sa učiť matematiku je byť účastníkom jej tvorby. Prostredníctvom našej pracovnej dielne chceme ukázať možnosti bádateľského prístupu k matematickému vzdelávaniu. Cieľom našej pracovnej dielne je, aby účastníci dielne mali možnosť zamyslieť sa nad náplňou matematiky, nad jej poslaním a prostredníctvom vlastnej práce spoznať pocity pri objavovaní pre nich neznámych skutočností.

Pred teóriou vyučovania matematiky sú aj v súčasnosti vážne úlohy, ktorých cieľom by malo byť poukázanie na zdroje matematických abstrakcií, aproximácie pri skúmaní reálnych dejov, na potrebu experimentov s prípadným využitím výpočtovej techniky. Ide o úlohy značne náročné nielen z hľadiska zohľadnenia mentálnych možností žiakov a študentov, ale aj z hľadiska „matematického nadhľadu“ a ovládania širokého spektra matematických metód a poznatkov. V súčasnosti, ako zdôrazňuje J. Hromkovič (J. Hromkovič, 2000), „Vo výuke chýba prezentácia experimentálneho myslenia, ktoré je súčasťou intelektuálnej práce matematika. Chýbajú atraktívne, danému stupňu vývoja žiakov dostupné motivácie a príklady užitočnosti naštudovaných matematických metód. Úplne vynechaná je najkľúčovejšia vec – genéza pojmotvorby. matematika sa neučí ako metóda poznávania, ale ako čisto formálna hra s bezobsažnými symbolmi, ktorej pravidlá sú síce formálne presne vymedzené, avšak zmysel týchto pravidiel ostáva nejasný.“

Schopnosť spracovať a využiť narastajúce množstvo informácií je čoraz dôležitejšia. Mnohé z konkrétnych vedomostí, ktoré žiaci získajú v škole, už o pár rokov stratia na svojej aktuálnosti a význame. Preto aj v školskej praxi je často dôležité nie to, ktoré konkrétne informácie žiaci získajú, ale práve spôsob ako ich získajú, schopnosť tvorivo ich využiť a riešiť pomocou nich problémy v danej oblasti. Naviac je dôležité uvedomiť si, že motívom matematického skúmania často nie je len snaha priamo prispievať k riešeniu praktických problémov reálneho života. Mnohokrát je skutočným motívom radosť a vzrušenie z objavovania právd matematického sveta. Práve odraz týchto právd v reálnom svete je niekedy užitočným a matematickú pravdu je možné potom aplikovať na reálne objekty.

Využitie matematiky na vyjadrenie myšlienok z rôznych oblastí vedy a praktického života alebo na riešenie problémov zahŕňa niekoľko fáz:

- **Abstraktná reprezentácia reálnych objektov**. Reálne objekty sú často mimoriadne zložité a nie je možné ich presne popísať. Na základe lokálnych informácií reálneho objektu sa vytvorí matematický model.

- **Manipulácia s abstraktnými symbolmi podľa logických pravidiel**. Vytvorený abstraktný model umožní skúmať daný jav globálne, predpovedať jeho vývoj, robiť kvantitatívne hodnotenie zmien, ktoré v ňom prebiehajú. Manipulácia so symbolmi nahrádza manipuláciu s predmetmi. Tento krok patrí k základným a dôležitým krokom matematiky.

- **Zistenie, či nové (objavené) vzťahy hovoria niečo užitočné o pôvodných objektoch**. Priamy odraz manipulácie so symbolmi sa niekedy nepodarí v reálnom svete nájsť, ale niekedy je až prekvapivo úspešným a užitočným.

Pracovnú dielňu sa snažíme koncipovať tak, aby všetky tieto myšlienky našli v nej svoj odraz, aj keď samozrejme len vo veľmi skrátenej a zhustenej podobe. Niektoré matematické myšlienky prezentujeme v historickom kontexte. Tak môžeme lepšie odhaliť zmysel toho ako sa matematika rozvíjala a menila na ceste k súčasnému stavu. Aj úlohy, ktoré na tejto ceste zohrali matematici môžu pomôcť porozumieť týmto procesom.

Pre pracovnú dielňu sme vybrali tematiku z *teórie grafov*. Dôvodom je, že táto téma nie je štandardným učivom základnej školy a preto sa môže stať vhodným spájajúcim elementom ako pre učiteľov 1. stupňa, tak aj pre učiteľov 2. stupňa ZŠ. Rozdelili sme ju do dvoch častí, **A)** a **B)**, ktoré stručne popíšeme.
A) Základné pojmy a vlastnosti. Ako motivačnú môžeme zvoliť napríklad úlohu:
Úloha 1. *Na večierku sa stretlo 9 ľudí.* **a)** *Každý podal ruku presne štyrom.* **b)** *Každý podal ruku presne trom.* ***Znázornite danú situáciu.***

Úlohou účastníkov dielne je v prípade **a)** popísať alebo graficky znázorniť situáciu (tabuľkou, grafom a pod.) a v prípade **b)** sa pokúsiť zdôvodniť neúspech. Jednotlivé skupiny prezentujú svoje riešenie. V rámci expozície nasleduje zavedenie (napr. s využitím obohatenej prednášky) pojmov **graf, vrchol grafu, hrana, stupeň vrchola** a objavovanie ďalších situácií bežného života, ktoré je možné znázorniť pomocou popísanej grafovej štruktúry. Každá skupina dostane za úlohu vyriešiť nasledovný problém (alebo jeho jednoduchú obmenu):
Úloha 2. *Na športovom turnaji je 5 družstiev. Pomocou grafu znázornite situáciu, že dve družstvá odohrali po dva zápasy, dve družstvá po tri zápasy a jedno družstvo odohralo štyri zápasy.*

Po vyriešení môžeme spoločne vyplniť tabuľku nasledovného typu:

graf skupiny číslo	1.	2.	3.	4.
súčet stupňov všetkých vrcholov	14			
počet hrán	7			

V tabuľke je vyplnený len prvý stĺpec, ktorý odpovedá predchádzajúcej úlohe. Hodnoty v ďalších stĺpcoch doplnia účastníci na základe konkrétnych vyriešených úloh. Zovšeobecnením výsledkov z tabuľky „objavíme“ jednu zo základných vlastností grafov:
V každom grafe sa súčet stupňov vrcholov rovná dvojnásobku počtu hrán.

Už tento jednoduchý výsledok umožní (napr. v rámci fixácie a reflexie) riešiť a zostavovať zaujímavé úlohy. Požiadame účastníkov, aby v skupinách sformulovali vlastné úlohy „pre svojich budúcich žiakov“, v ktorých využijú získané poznatky.

Každá skupina prezentuje svoju vytvorenú úlohu. Ako ukážku uvedieme jednu vytvorenú „študentskú“ úlohu:

Úloha 3. *Sedem trpaslíkov malo v októbri denné upratovacie služby v domčeku takto: Hapčí 6x, Vedko 5x, Dudroš 3x, Kýblik 3x, Spachtoš 1x, Smieško 4x a Plaško 4x. Službu mali vždy vo dvojici. Kýblik a Smieško sa pohádali a nemohli spolupracovať. Zistite, kto s kým mal službu a koľko dní sa v októbri upratovalo.*

V diskusii (ak sú účastníkmi dielne učitelia alebo študenti učiteľstva) sa zameriame na reflektovanie nasledovných problémov:

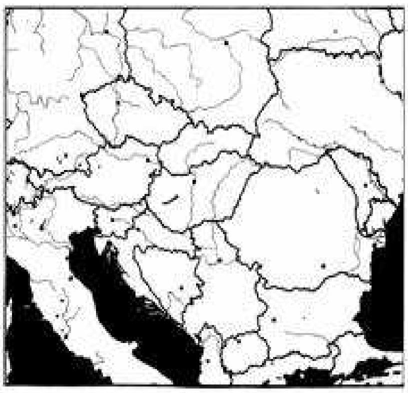
- kooperatívne riešenie problémov,
- rovnováha medzi samostatným a učiteľom riadeným skúmaním,
- reflexia naučeného učiva.

B) Problém štyroch farieb. Prostredníctvom tohto problému máme príležitosť nahliadnuť do zákulisia modernej matematiky a jej zaujímavej histórie. Je to jeden z najslávnejších problémov matematiky a pritom jeho formulácia je taká jednoduchá, že do problému je možné zasvätiť aj mladších žiakov.

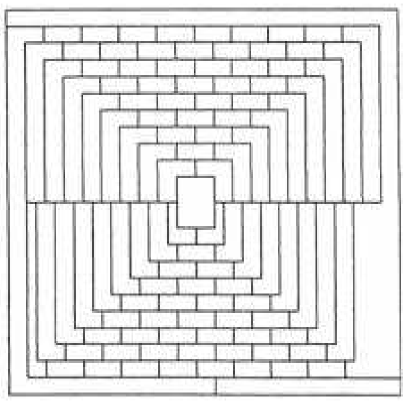
Historické poznámky, ktoré dopĺňajú a striedajú vlastnú výskumnú prácu účastníkov pracovnej dielne (alebo bádateľskej hodiny) čerpáme z (R. Fritsch, 1998 a S. Singh, 2001) a v tomto príspevku ich neuvádzame.

Problém štyroch farieb sformuloval v roku **1852** príležitostný matematik **Francis Guthrie**. Jedného odpoludnia, keď si krátil čas vyfarbovaním mapy grófstiev Británie, napadla ho hádanka, ktorá vyzerala jednoducho, ale ktorú nedokázal vyriešiť. Chcel vedieť, **či štyri farby stačia na vyfarbenie ľubovoľnej mapy tak, aby oblasti alebo krajiny, ktoré majú spoločný úsek hranice boli vyfarbené odlišne.**

Počas celej pracovnej dielne, majú jej účastníci možnosť, za pomoci série úloh, postupne vnikať do spomínanej problematiky a spoznávať krásu a vzrušenie z objavovania. Z množstva úloh uvedieme na ilustráciu štyri.



Obr. 1a



Obr. 1b

Úloha 4. *Mapu časti Európy* (**obr. 1a**), *vyfarbite štyrmi farbami tak, aby štáty, ktoré majú spoločný úsek hranice boli vyfarbené rôznymi farbami.*

Úloha 5. *Vyskúšajte teraz, že s použitím len troch farieb sa táto mapa nedá vyfarbiť požadovaným spôsobom.* ***Pokúste sa zdôvodniť, prečo je tomu tak.***

Úloha 6. *Vymyslite a nakreslite mapu s čo najmenším počtom oblastí tak, aby sa nedala vyfarbiť tromi farbami (susedné oblasti musia byť vyfarbené rôznymi farbami).*

Úloha 7. *Mapu* (**obr. 1b**), *ktorú uverejnil Martin Gardner v časopise Scientific American v roku 1975, vyfarbite s použitím štyroch farieb.*

Ďalší postup závisí od toho, aké ciele s danou skupinou sledujeme. V tejto etape môže byť užitočným zaviesť aj ďalšie pojmy teórie grafov a máme pripravený aj materiál pre budovanie základných poznatkov teórie grafov, ktorej rozvoj bol podporený aj dlhoročným vzrušujúcim riešením problému štyroch farieb.

Za určitý úspech môžeme považovať, ak účastníci našej pracovnej dielne (učitelia a študenti učiteľstva) budú ochotní hľadať a používať nové prístupy k vyučovaniu tých tematických celkov, s ktorými pracujú vo svojej praxi. Didakticky spracovať vybraný tematický celok pre niektorý ročník ZŠ (napr. *riešenie lineárnych rovníc, slovné úlohy, operácie so zlomkami, konštrukčné úlohy, objemy a povrchy telies* a pod.), urobiť v triede experiment a vypracovať výslednú správu je užitočnou reflexiou vlastnej práce a poskytne ďalšie cenné podnety pre skvalitňovanie matematickej prípravy.

Literatúra

[1] Haviar, M., Klenovčan, P.: *Stačia štyri farby na prípravu politickej mapy?* In: Orava journal, metodicko-odborný štvrťročník. II. Ročník, december 2001, s.35-37. ISSN-1335-3497.

[2] Fritsch, R. and G.: *The Four – Color Theorem.* Springer-Verlag, 1998.

[3] Hromkovič, J.: *Quo vadis matematika.* Obzory matematiky, fyziky a informatiky 2/2000(29).

[4] Klenovčan, P.: *Podať ruku.* In: Inovácia v škole, zborník z celoslovenskej konferencie, Podbanské, 2000, s. 17. ISSN-1335-3497.

[5] Singh, S.: *Velká Fermatova věta.* Academia, 2001.

Adresa autora:
Doc. RNDr. Pavel Klenovčan, CSc.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Univerzity Mateja Bela
Ružová 13
974 11 Banská Bystrica
e-mail: pklenovcan@pdf.umb.sk

Mathematics and blind people

Iveta Kohanová

Abstract. *This article describes pre-experiment that was done as component of doctoral thesis on the subject of mathematics and visual impaired people. Results of this experiment are helping us to continue in further research which is in progress.*

Nowadays, we notice use of mathematics in lot of disciplines, not only in those that are very nearly related to mathematics, but also in unusual like biology, medicine, psychology or linguistics. We are witnesses to rapid expansion of information technologies that requires new technicians all the time. Hence, we can not marvel about attendance of blind people who would like to engage in study of mathematics. Thus it is needed to create acceptable conditions for studying and deal with problems, which blind people encounter.

These facts have inspired us to pay more attention to study of mathematics of visual impaired people. At first, we specified following aims:
to find out the attitude of blind people towards mathematics by interview with them
to acquaint oneself with problems they have/had in conjunct with mathematics at education
to detect their ability to solve mathematical problems, even at the moment they strictly don't have to/didn't have to deal with mathematics at all
to compare approaches and procedure of solving problems of blind and sighted people
to investigate which part of mathematics is most difficult for blinds and why

In order to find answers to mentioned questions, we studied history of reading codes for the blind; Braille notation of some countries and its limitations in field of mathematics. As next we dealt with personality of visual impaired child and its development. After loss of the sight the system of reception and recognition of reality is rebuild. The process of formation of sensual experience of visually impaired persons is retarded. By help of teacher and special pedagogical instruments child adopts system of knowledge and step by step develops ability to use aural, kinetic, cutaneous and others analysers. So the sensual base is build that makes possible to develop more complicated psychic processes - perception, imagination, memory, thought and speech. We also have mapped the actual situation in Slovakia concerning teaching of mathematics of visual impaired students on each level (primary, secondary, university).

The most important part of our up-to-now research is experiment that has been realized in Bratislava and Palermo. We have prepared questionnaire which consists of 4 problems: one problem of algebra, one problem of analytic geometry, one business problem and one problem of Euclidean geometry. Its text was as follows:

Open problems

Solve the following problems. We don't mind the way of solution, but we take great interest in all used procedures. You are required to explain the strategy and all adopted reasoning you have used.

A father is 42 years old and his son is 16. In how many years will the father's age be triple than son's age? How would you interpret the obtained result?

Which are the symmetric points of the points P[3,2], Q[-2,3] as regard to the origin O[0,0]? Which are the symmetric points of these points P, Q as regard to the bisector belonging to the 1^{st} and 3^{rd} quadrant?

In period of the end of the season bag costs Euro 2.50 less. Then its price is lowered in 30 % again, so the bag costs Euro 28. What was the initial price?

Two triangles are given by having two proportional sides and the angle placed between them equal. How are these triangles related? A side belonging to the smaller triangle is 2 cm long, the corresponding side in the bigger triangle is 6 cm. The other side in smaller triangle is 3,2 cm long, the corresponding one is 9,6 cm long. How are the sizes of these triangles related?

As follows we made analysis apriori of possible and expected solutions of given problems. All that is part of phase of action of didactic situation; phase of formulation and phase of validation ensue. The theoretical framework is theory of didactic situations of Guy Brousseau [1].

Mentioned questionnaire was submitted in form of recorded interview to 4 blind Italians and 5 blind Slovaks. As it stands in questionnaire, we have focused on the strategy and approach used by solving the problems. As well as on particular mathematical languages of interviewed persons. In order to have true image about interviewed persons, first they introduced themselves. We were interested in their "level"(knowledge) of mathematics and its particular parts, type of education and story of their blindness.

65 sighted students of Secondary Grammar School - Grösslingova, Bratislava, were asked to solve the same 4 problems. It deals with students of common classes 4.C and 4.D (18-19 years old), who had time of 20 minutes to solve given problems. We needed this sample of sighted respondents in order to be able compare if there are differences between blinds and sighted in approaches by solving of these mathematical problems. It is necessary to say that time of 20 minutes was satisfactory for students to reckoning. The blind respondents were not limited by time.

In analysis aposteriori we made qualitative and quantitative analysis of obtained answers. We present the conclusion of our experiment:

By our experiment we found that blind people are able to solve mathematical problems, although their approach and way of solution is a bit different than approach of the sighted persons. As regard to the algebra and arithmetic we discovered that mostly they prefer arithmetic. They don't use variable very often compares to the sighted students who do so many times. Nevertheless, we see analogies among the other used strategies.

As a next we researched the field of geometry. Most of sighted students drew a picture by solving given problems of analytical and Euclidean geometry. On the other hand, blinds have to use imagination, all object (solids and plane figures) are first touched and then stored. Geometry is for them kind of adaptation to the environment. We think this adaptation is dynamic in sense that they continually change the system of operation of environment that explores. Since every environment is a new environment he/she has to store all information (tactile, auditory, olphactive, etc.) and so make mental images. It is interesting for us to research more in field of geometry in connection with blind people, to see how they are adapted to various environments, what are their personnel tools. We would like to study more in the next research of the thesis how the blind people perceive the changing of the area and volume. Our expectation we define in following hypotheses:

H1: The blind people and sighted people have different point of view on geometry.

H2: The point of view on geometry of blind people is point of perception and it is dynamic.

H3: The point of view on geometry of sighted people is static.

We will verify these hypotheses experimentally. At the moment we are in the phase of preparation of new problems to solve.

Literatúra

[1] Brousseau G.: *Theory of didactical situations in mathematics.* Edited and translated by Balacheff, Kluwer academic publishers, 1997.

[2] Csocsan E., Klingenberg O., Koskinen K. L., Sjostadt S.: *MATHS "seen" with other eyes: a blind child in the classroom: teacher's guide to mathematics.* Ekenas Tryckeri Aktiebolag, 2002. ISBN 951-50-1300-3

[3] Čálek O., Holubář Z., Cerha J.: *Vývoj osobnosti zrakově těžce postižených*, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha, 1991.

[4] Jesenský Ján: *Organizace a řízení rozvoje prostorové orientace a samostatného pohybu zrakově postižených*, Svaz invalidů, Praha, 1982.

[5] Jesenský Ján: *Výber z pedagogiky zrakovo chybných*, SPN, Bratislava, 1973.

[6] Kohanová Iveta: *Možnosti sprístupňovania matematických textov v elektronickej forme nevidiacim.* Diploma thesis. FMFI UK, Bratislava, 2003.

[7] Kohanová Iveta: *Blind people and mathematics*, Project of the doctoral thesis, FMFI UK, Bratislava, 2004.

[8] Piaget Jean, Inhelder Bärbel: *The Child's Conception of Space*, Routledge & Kegan Paul, London, 1956.

[9] Požár L. a kol. - *Školská integrácia detí a mládeže s poruchami zraku*, Univerzita Komenského, Bratislava, 1996.

[10] *Pravidlá zápisu slovenského braillovho písma.* Únia nevidiacich a slabozrakých Slovenska, Bratislava, July 1996.

[11] Roubíček Filip: *Vyučování integrovaného nevidomého žáka matematice (na 2. Stupni základní školy).* Diploma Thesis, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 1997.

[12] Spagnolo Filippo: *Ethno Mathematics, Languages, History.* In: Zborník 4 Bratislavkého seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2001, p. 71-80.

[13] Spagnolo Filippo : *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria.* translated by Ján Čižmár, Brno 2003, ISBN 80-210-3193-X

Adresa autora:
PaedDr. Iveta Kohanová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava
e-mail: ifka11@pobox.sk

Indukce a dedukce ve školské matematice

Jan Kopka

Abstract. *Induktivní a deduktivní myšlení má při budování matematických teorií zásadní a nezastupitelný význam. Jejich postavení ukazuje následující příklad zkoumání určité matematické situace.*

Uspořádání čísel do určitých geometrických obrazců (např. číselné trojúhelníky nebo čtverce) je velmi vhodnou situací pro zkoumání. My se zde budeme zabývat čtvercovou tabulkou[8].

Co z matematiky předpokládáme? Předpokládáme znalost trojúhelníkových čísel, tj. čísel 1, 3, 6, 10, 15, ... a vzorce pro výpočet n-tého trojúhelníkového čísla, tj. $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tento vzorec můžeme objevit např. experimentováním.

Problematiku můžeme využít např. při probírání aritmetických posloupností nebo při úpravách algebraických výrazů.

Problém 1: Uvažujme číselnou tabulku 1.

1	2	3	4	5	6	.....
2	4	6	8	10	12	.....
3	6	9	12	15	18	.....
4	8	12	16	20	24	.....
5	10	15	20	25	30	
...	...	...	...	...	...	...

Tabulka 1

Úkol: Nejprve si pozorně prohlédněte, jak tabulka vznikla a potom pokračujte ve čtení.
a) Zkoumejte součty čísel v takových čtvercích jako jsou vyznačené v tabulce 1.
Např. součet v druhém nejmenším čtverci je $1 + 2 + 2 + 4 = 9$
b) Zkoumejte součty čísel v „koridorech“ mezi čtverci.
Např. součet čísel v koridoru za druhým čtvercem je $3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$.

Problém a) Experimentování (systematické)**:**
Součty čísel ve čtvercích jsou po řadě:

$C_1 = 1$
$C_2 = (1 + 2) + (2 + 4) = 3 + 6 = 9$
$C_3 = (1 + 2 + 3) + (2 + 4 + 6) + (3 + 6 + 9) = 6 + 12 + 18 = 36$
$C_4 = (1 + 2 + 3 + 4) + \dots\dots\dots + (4 + 8 + 12 + 16) = 10 + 20 + 30 + 40 = 100$

Je vidět, že jako součty dostáváme některá čtvercová čísla:

$C_1 = 1 = 1^2$, $C_2 = 9 = 3^2$, $C_3 = 36 = 6^2$, $C_4 = 100 = 10^2$.

Jsou to druhé mocniny trojúhelníkových čísel. Nyní můžeme použít induktivní úvahu a náš objev zobecnit. Dostaneme tak následující hypotézu:

[8] Problém je převzat z knížky [1].

Hypotéza: Pro libovolné přirozené číslo n platí: součet čísel v n-tém čtverci je druhou mocninou n-tého trojúhelníkového čísla.
Nyní můžeme hypotézu ověřit pro některá další n. Např. pro $n = 5$, 6, 12.
Protože věříme, že naše hypotéza je pravdivá, můžeme přistoupit k jejímu důkazu.

Důkaz hypotézy**:** Uvažujme $n-$tý čtverec. Pak platí:
Součet čísel v prvním řádku: $R_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Součet čísel ve druhém řádku: $R_2 = 2R_1$.
$\vdots$
Součet čísel v řádku k: $R_k = kR_1$.
Součet všech čísel ve čtverci C_n:

$$C_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{n(n+1)}{2} + \ldots. + n\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = T_n^2$$

C_n je tedy skutečně druhou mocninou n-tého trojúhelníkového čísla. Vyslovená hypotéza se tak stává větou. Vyslovme ji ještě jednou:

Věta 1: Uvažujme číselnou tabulku na obr. 1 a v ní vyznačený typ čtverců. Pro libovolné nenulové přirozené číslo n platí, že součet čísel ve čtverci n je $C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Tak např. součet čísel v pátém čtverci $C_5 = 15^2 = 225$.

Problém b) Experimentování (systematické)**:**
Součty čísel v koridorech jsou po řadě:

$K_2 = 2 + 4 + 2 = 8$
$K_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$
$K_4 = 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 64$
$K_5 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 = 125$

Dokonce bychom (při dobré vůli) mohli prohlásit, že $K_1 = 1$.
Je vidět, že dostáváme kubická čísla:

$K_1 = 1 = 1^3$, $K_2 = 8 = 2^3$, $K_3 = 27 = 3^3$, $K_4 = 64 = 4^3$, $K_5 = 125 = 5^3$.

Pomocí indukční úvahy můžeme náš objev zobecnit a vyslovit:

Hypotéza: Pro libovolné nenulové přirozené číslo n je součet čísel v n-tém koridoru n-té kubické číslo.

Důkaz: Nechť n je libovolné přirozené číslo. Pak součet čísel v n-tém koridoru je:
$K_n = n+2n+3n+\ldots+(n-1)n+n\cdot n+(n-1)n+\ldots+3n+2n+n = 2n+4n+6n+\ldots+ 2(n-1)n+n\cdot n = n[2(1+2+3+\ldots+(n-1))+n] = n\cdot[2\frac{n(n-1)}{2}+n] = n^3-n^2+n^2 = n^3$
Nyní můžeme hypotézu přejmenovat na větu.

Věta 2: Uvažujme číselnou tabulku na obr. 1 a v ní vyznačené koridory. Pro libovolné přirozené číslo n platí, že součet čísel v koridoru n je $K_n = n^3$.

Obě výše uvedené věty jsme objevili pomocí indukce. Nyní však vzniká nová situace.
Protože platí:

$$K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n = C_n,$$

je jednoduchým důsledkem tohoto vztahu a vět 1 a 2 následující věta:

Věta 3: Pro libovolné nenulové přirozené číslo n platí, že součet prvních n kubických čísel je roven čtverci n-tého trojúhelníkového čísla.
Symbolicky (K_i, T_i značí $i-$té kubické a trojúhelníkové číslo):

$$(\forall n \in N) K_1 + K_2 + \ldots + K_n = T_n^2.$$

Zapišme větu 3 ještě přehledněji:

$$(\forall n \in N) 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Získali jsme velmi zajímavý vztah. Např.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = T_5^2 = \left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2 = 225.$$

Poznamenejme, že větu 3 jsme získali pomocí deduktivní úvahy. Měli jsme již k dispozici věty 1 a 2 a pomocí nich jsme mohli dedukovat větu 3. Indukce tedy předcházela před dedukcí. Podobná situace se vyskytuje nejen při rozvíjení matematických teorií, ale měla by se na vhodných místech vyskytovat i ve školské matematice.

Literatúra

[1] Kopka, J.: *Výzkumný přístup při výuce matematiky.* Ústí nad Labem, UJEP, Acta Universitatis 2004.

Adresa autora:

Prof. RNDr. Jan Kopka, CSc.
KM PF UJEP
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
Česká republika
e-mail: kopkaj@pf.ujep.cz

Informatická transpozícia

Ingrida Kraslanová

Izolovanie určitých pojmov a vlastností z prostredia, v ktorom majú svoj pôvod, zmysel, motiváciu ako i pôvodné využitie a ich zaradenie do prostredia v rámci vyučovacieho procesu nazýva Brousseau **didaktickou transpozíciou**. Rozumieme ňou proces transformácie vedomosti na objekt poznávania (veda), potom na objekt určený na vyučovanie (učiteľ - didaktik) a nakoniec na objekt vyučovania (učiteľ, žiak). Rozlišujeme tri fázy, ktoré nasledujú postupne za sebou:

1. proces dekontextualizácie a depersonalizácie (vedeckí pracovníci) – upravenie nových vedeckých poznatkov k ich oficiálnemu zverejneniu,
2. rekontextualizácia a repersonalizácia (didaktik, učiteľ),
3. redekontextualizácia a redepersonalizácia (učiteľ a žiak).

Prof. Spagnolo rozumie pod pojmom didaktická transpozícia činnosť („prácu“), ktorá uspôsobuje premenu objektu poznania pre vzdelávanie na objekt poznania na vyučovanie. Najdôležitejšie prechody v didaktickej transpozícii možno sledovať na nasledovnej schéme (Schéma č. 1).

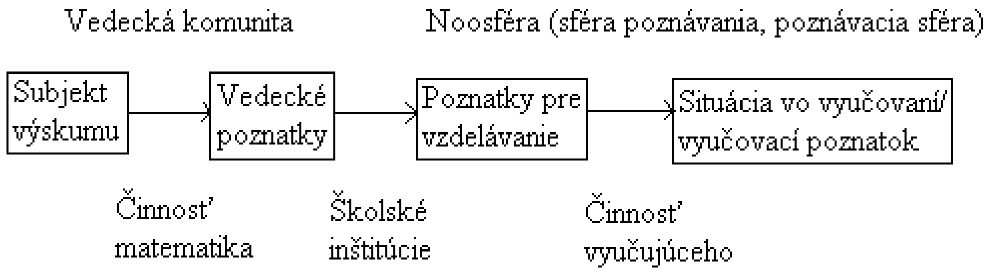


Schéma č. 1

Rozvoj informačných technológií a ich zavedenie do škôl a školiacich stredísk sprevádzajú nové fenomény rovnakého druhu ako tie, ktoré sprevádzajú didaktickú transpozíciu. Balacheff zavádza termín **informatická transpozícia** ako termín adaptovaný z didaktickej transpozície do informatického prostredia. Tieto dva termíny smerujú ku koexistencii, pretože:

– *informatická transpozícia* hľadá objasnenie prechodov medzi informatickými jazykmi a matematickými objektmi vnímanými žiakom,

– *didaktická transpozícia* hľadá vysvetlenie prechodu od vedeckého poznatku k poznatku sprostredkovanému vyučovaním.

To, čo si obyčajne predstavíme pod pojmom informatizácia, neznamená iba jednoduchú transliteráciu. Informatické výučbové prostredia sú totiž výsledkom konštrukcie, ktorá je miestom novej transformácie objektov pre výuku.

Takýto proces nazveme **informatická transpozícia.**

Pod informatickým zariadením rozumieme celý komplex tvorený materiálmi a softvérmi, ktoré spojazdnia počítač. Takéto zariadenie rozdeľuje „svet“ na tri časti:

1. **Vnútorné univerzum** – tvoria ho rôzne elektronické komponenty a programovacie jazyky (symbolická úroveň), ktoré má operátor k dispozícii v počítači.

2. **Rozhranie** – miesto komunikácie medzi používateľom a informatickým zariadením. Rozhranie v informatických multimediálnych systémoch zahŕňa verbálnu i neverbálnu komunikáciu. Pojem rozhranie zahŕňa priamu manipuláciu a vizualizáciu abstraktných entít:

   – v matematike je *vizualizácia* používaná pri grafických reprezentáciách funkcií, v geometrii pri zostrojovaní obrázkov, taktiež pri predkladaní zdôvodnení vo forme grafov. (Softvéry umožňujúce kresliť grafy numerických funkcií sa opierajú o približnú reprezentáciu reálnych čísel a na procedúry diskretizácie, ktoré umožňujú zostrojiť obrázky grafov.)

   – *priama manipulácia* umožňuje vstup do rozhrania, v ktorom sa všetko deje tak, akoby mal užívateľ priamy prístup k objektom, vďaka čomu sa do zoznamu možných prostriedkov komunikácie zavádza vizuálno-pohybová dimenzia. V matematike je jej prínos nesmierne významný pre manipuláciu grafických reprezentácií, pretože manipulácia obrázkov umožní pozorovať ich deformáciu a teda aj ich geometrické vlastnosti, ktoré sú počas samotnej manipulácie „nemennými“ prvkami obrázka.

   Keďže zámer učiaceho sa závisí od rozhrania (napr. grafické riešenie s väčším počtom bodov umožní vznik rozličných koncepcií matematických objektov alebo ich vzťahov) rozhranie sa stáva veľmi dôležitou zložkou prostredia.

3. **Vonkajšie univerzum** – je súbor študovaný nástrojmi vlastnými didaktike. Opis vnútorného univerza ako aj prezentácia rozhrania má základný význam pre štúdium vonkajšieho univerza. Rozhranie reprezentuje prvok prostredia zameraný na spojenie s prostredím prislúchajúcim vonkajšiemu univerzu (napr. schéma č. 2).

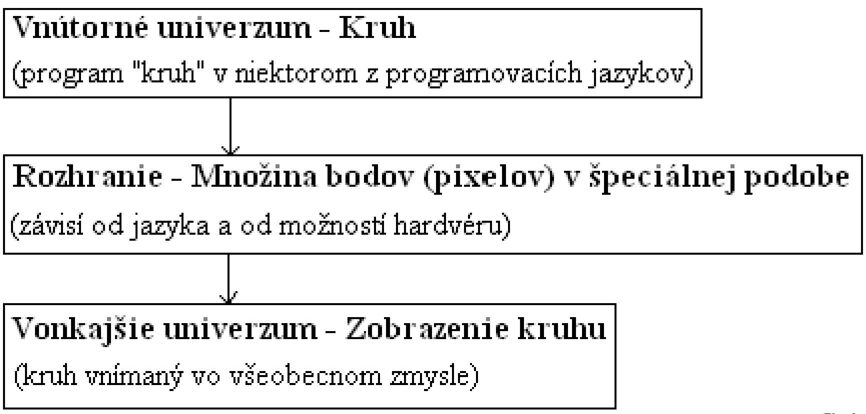


Schéma č. 2

V didaktickej transpozícii sa prvý prechod týka analýzy vedeckého poznatku, zvyčajne to je úlohou matematickej profesijnej komunity. V situácii vyučovanie/osvojovanie za pomoci počítača je vedecký poznatok už zmanipulovaný ako vo vnútornom univerze výberom programovacieho jazyka, tak i výberom technologických nástrojov, a tým aj rozhrania. V tejto manipulácii môže byť ten istý matematický obsah modifikovaný.

Množinu vzťahov, ktoré existujú v informatickej transpozícii, zhrnul Balacheff v nasledovnej schéme (Schéma č.3):

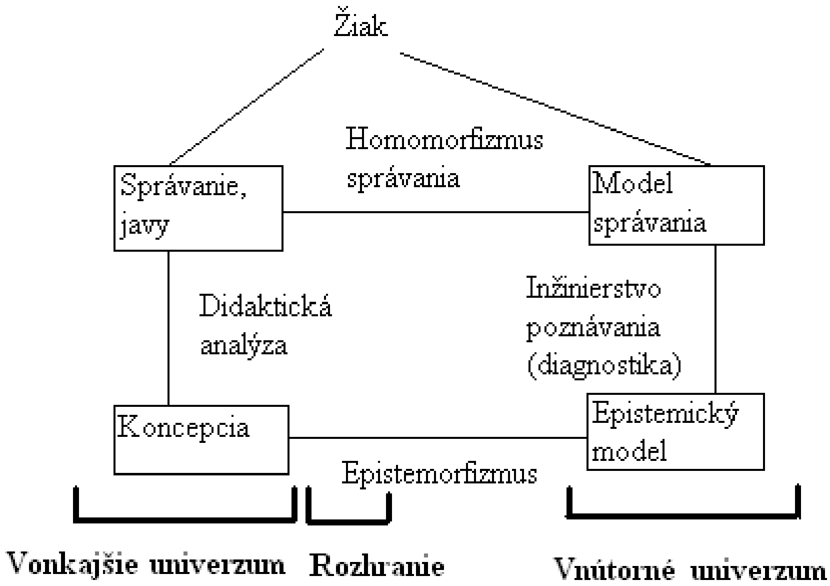


Schéma č. 3

Vo *vonkajšom univerze* v kontakte so žiakom si všímame pozorovateľné správanie a javy i koncepcie vzťahujúce sa na toto správanie zaznamenané didaktickou analýzou, pomocou ktorej sú modelované.

Vo *vnútornom univerze* v kontakte so žiakom máme k dispozícii model správania odvodený z jazyka alebo z programu a epistemický model, ktorý sa pokúša dať význam tomuto modelu správania. Prechod od modelu správania k epistemickému modelu zabezpečuje diagnostika alebo inžinierstvo poznávania (t.j. práca programátorov za pomoci odborníkov danej disciplíny a didaktiky tejto disciplíny).

Pre pozorovateľa vonkajšieho univerza – o **homeomorfizme správania** hovoríme, ak vnútorný model správania informuje nielen o výsledkoch, ale aj o vnútornej organizácii.

Ak sa dá priamo vyšetriť vzťah medzi epistemickým modelom a poznaním žiaka, stojíme podľa Balacheffa zoči – voči **epistemorfizmu.** Epistemický model (vnútorný model skonštruovaný pomocou počítača) má na zreteli štrukturálne a konceptuálne vlastnosti opísané v poznaní, ktoré žiakovi prisudzujeme. Rozlišujeme dva typy epistemického modelovania:

1. **Procedurálne modelovanie** – správanie sa môže identifikovať s procedúrami. Procedúry sa vzďaľujú od správania v prípade, v ktorom prisudzujeme žiakom stratégie alebo ciele.

2. **Konceptuálne modelovanie** – týka sa vedomostí žiaka, ktoré zastrešujú voľbu konkrétnych prostriedkov spustenia danej procedúry.

Rozhranie tvorí akýsi filter, ktorého charakteristiky rozsiahle ovplyvňujú možnosti tvorby vhodného modelu správania.

Literatúra

[1] Balacheff, N. (1993): *La transposition informatique.* In: Artigue et al. (eds.) *20 ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.

[2] Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, AH Dordrecht, The Netherlands, 1997.

[3] Spagnolo, F. (1998): *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, la Nuova Italia Edirice, Scandicci, Firenze, 1998.

[4] Šatanková, I. (1998): *Teória situácií.* In: *Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky*, Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998, s. 67-68.

Adresa autora:
PaedDr. Ingrida Kraslanová
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: ingrida.kraslanova@gmail.com

Výsledky žiakov z matematiky v rámci medzinárodnej štúdie TIMSS 2003

Jozef Kuraj

Abstract. *This article presents the student's achievement in Mathematics in the TIMSS study – Trends in International Mathematics and Science Study. The aim of this article is the comparison between the Slovak and international results in mathematic achievement.*

Úvod

TIMSS 2003 - Trendy vo výskume matematiky a prírodovedných predmetov je medzinárodná štúdia, ktorá sa realizovala na Slovensku po tretíkrát (predchádzajúce štúdie prebehli v rokoch 1995, 1999). Tento výskum realizuje Medzinárodná asociácia pre evaluáciu výsledkov vzdelávania (IEA – The International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Národným koordinačným centrom reprezentujúcim Slovenskú republiku v IEA je štátny pedagogický ústav v Bratislave. Hlavným cieľom štúdie TIMSS je skúmať podstatu, príčiny a vplyv rozdielov vo výsledkoch vzdelávania v medzinárodnom meradle. V roku 2003 sa medzinárodnej štúdie TIMSS zúčastnilo 46 krajín z celého sveta a spolu bolo testovaných viac ako 240 000 žiakov 8. ročníka.

Výberový súbor

Výberový súbor škôl a žiakov tvorilo 179 škôl a 4 428 žiakov z 8. ročníka a kvarty osemročných gymnázií vybraných stratifikovaným výberom zo základného súboru podľa premenných, ktorými boli vzdelávacia koncepcia (základná škola a gymnázium s osemročným štúdiom) a región (kraj).

Tabuľka 1: *štruktúra výberové súboru škôl a žiakov podľa vzdelávacej koncepcie školy v kraji*

Kraj	Školy					Žiaci				
	ZŠ		OGY		Spolu	ZŠ		OGY		Spolu
	Počet	*v %*	*Počet*	*v %*	*Počet*	*Počet*	*v %*	*Počet*	*v %*	*Počet*
BA	12	60,0	8	40,0	**20**	276	53,5	240	46,5	**516**
TT	17	81,0	4	19,0	**21**	432	81,4	99	18,6	**531**
TN	14	82,4	3	17,6	**17**	324	79,2	85	20,8	**409**
NR	21	70,0	9	30,0	**30**	464	66,1	238	33,9	**702**
ZA	18	85,7	3	14,3	**21**	437	83,4	87	16,6	**524**
BB	16	80,0	4	20,0	**20**	396	77,3	116	22,7	**512**
PO	22	84,6	4	15,4	**26**	529	79,8	134	20,2	**663**
KE	20	83,3	4	16,7	**24**	453	79,3	118	20,7	**571**
Spolu v SR	**140**	**78,2**	**39**	**21,8**	**179**	**3311**	**74,8**	**1117**	**25,2**	**4428**

Vysvetlivky: Zš – základná škola, OGY – gymnázium s osemročným štúdiom, BA – Bratislavský kraj, TT – Trnavský kraj, TN – Trenčiansky kraj, NR – Nitriansky kraj, ZA – žilinský kraj, BB - Banskobystrický kraj, PO – Prešovský kraj, KE – Košický kraj, SR – Slovenská republika

Štatistické spracovanie

Pri analýze výsledkov žiakov v štúdii TIMSS 2003 sa pre každého žiaka vypočítalo *hrubé skóre a Raschovo skóre.* Raschovo skóre bolo vypočítané pomocou teórie IRT (item response theory), ktorá bola následne štandardizovaná na Z – škálu. Hodnoty Raschovho skóre umožňovali porovnávať výsledky žiakov medzi sebou navzájom. Porovnávanie výsledkov žiakov v každej krajine vzhľadom k medzinárodnému priemeru sme testovali Studentovým t-testom na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ (5%). Výkon chlapcov a dievčat sme porovnávali párovým Studentovým t-testom na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Výsledky dosiahnuté v roku 2003 oproti roku 1999 sme vyhodnotili prostredníctvom úspešnosti dosiahnutej pri riešení trendových položiek.

Tabuľka 2: *štruktúra výskumnej domény matematika*

Výskumná doména matematika	
1. Obsahová dimenzia	*2. Poznávacia dimenzia*
Výskumné oblasti	**Výskumné oblasti**
1.1 Aritmetika	**2.1 Ovládanie faktov a postupov**
1.2 Algebra	**2.2 Používanie pojmov**
1.3 Meranie	**2.3 Riešenie problémových úloh**
1.4 Geometria	**2.4 Argumentácia**
1.5 Údaje	

Štruktúra výskumnej domény matematika

V tabuľke 2 sme uviedli štruktúru výskumnej domény matematika. Rámec hodnotenia výskumnej domény matematika pre TIMSS 2003 obsahoval dve dimenzie - obsahovú a poznávaciu.

Celkové výsledky žiakov z matematiky

Priemerné Raschovo skóre v matematike bolo zoškálované na hodnotu 467 bodov tak, aby bolo porovnateľné s medzinárodným priemerným skóre v prírodovedných predmetoch (Tabuľka 3).

Maximálne skóre dosiahli žiaci zo Singapurskej republiky – 605 bodov. Zo všetkých 46 zúčastnených krajín dosiahli signifikantne lepšie výsledky ako medzinárodný priemer žiaci v 26 krajinách (54,3%). Medzi európske krajiny, ktoré dosiahli signifikantne lepšie výsledky ako medzinárodný priemer patrili: Belgické kráľovstvo – flámska časť, Estónska republika, Maďarská republika, Lotyšská republika, Holandské kráľovstvo, **Slovenská republika**. Najvyššie skóre spomedzi európskych krajín dosiahli žiaci z Belgického kráľovstva – 537 bodov.

Výsledky na úrovni medzinárodného priemeru dosiahli žiaci v 2 krajinách: Rumunská republika a Moldavská republika.

Výsledky signifikantne horšie ako medzinárodný priemer dosiahli žiaci v 18 krajinách (36,9%). Z európskych krajín do tejto kategórie patrili Cyperská republika a Macedónska republika. Minimálne priemerné skóre dosiahli žiaci z Juhoafrickej republiky – 264 bodov. Rozdiel medzi výkonom žiakov z krajiny s najvyšším skóre a najnižším skóre v matematike predstavoval 341 bodov (pozri tabuľku 3).

Výsledky žiakov podľa pohlavia

Chlapci zo všetkých zúčastnených krajín dosiahli v matematike medzinárodný priemer 466 bodov a dievčatá medzinárodný priemer 467 bodov. Medzi výsledkami chlapcov a dievčat nebol zistený signifikantný rozdiel. V Slovenskej republike dosiahli chlapci aj dievčatá rovnaké skóre 508 bodov a takisto neboli zistené intersexuálne rozdiely.

Porovnaním výsledkov chlapcov a dievčat v tabuľke 4 sme zistili, že najväčšie rozdiely mali žiaci v Bahrajnskom štáte (rozdiel 33 bodov) a v Jordánskom hašimovskom kráľovstve (rozdiel 27 bodov) v prospech dievčat a zistený rozdiel bol štatisticky významný. Naopak, najväčšie rozdiely vo výsledkoch chlapcov a dievčat, ale v prospech chlapcov bol zistené v Tuniskej republike (rozdiel 24 bodov). Maximálne skóre dosiahli chlapci zo Singapurskej republiky (611 bodov) a minimálne skóre chlapci z Juhoafrickej republiky (264 bodov). Maximálne skóre dosiahli dievčatá zo Singapurskej republiky (601 bodov) a minimálne skóre dosiahli dievčatá z Juhoafrickej republiky (262 bodov, pozri tabuľku 4).

Tabuľka 3: *Celkové medzinárodné výsledky žiakov z matematiky*

Krajiny	Priemerný vek	Priemerné skóre		
Singapúrska republika	14,3	605	(3,6)	▲
Kórejska republika	14,6	589	(2,2)	▲
Hong Kong - Čína	14,4	586	(3,3)	▲
Taiwan - Čínska republika	14,2	585	(4,6)	▲
Japonsko	14,4	570	(2,1)	▲
Belgicko (flámska časť)	14,1	537	(2,8)	▲
Holandské kráľovstvo	14,3	536	(3,8)	▲
Estónska republika	15,2	531	(3,0)	▲
Maďarská republika	14,5	529	(3,2)	▲
Malajzia	14,3	508	(4,1)	▲
Lotyšská republika	15,0	508	(3,2)	▲
Ruská federácia	14,2	508	(3,7)	▲
Slovenská republika	14,3	508	(3,3)	▲
Austrálsky zväz	13,9	505	(4,6)	▲
Spojené štáty americké	14,2	504	(3,3)	▲
Litovská republika	14,9	502	(2,5)	▲
Švédske kráľovstvo	14,9	499	(2,6)	▲
Škótsko	13,7	498	(3,7)	▲
Izraelský štát	14,0	496	(3,4)	▲
Nový Zéland	14,1	494	(5,3)	▲
Slovinská republika	13,8	493	(2,2)	▲
Talianska republika	13,9	484	(3,2)	▲
Arménska republika	14,9	478	(3,0)	▲
Srbsko	14,9	477	(2,6)	▲
Bulharská republika	14,9	476	(4,3)	▲
Rumunská republika	15,0	475	(4,8)	○
Medzinárodný priemer	14,5	467	(0,5)	
Nórske kráľovstvo	13,8	461	(2,5)	▼
Moldavská republika	14,9	460	(4,0)	○
Cyperská republika	13,8	459	(1,7)	▼
Macedónska republika	14,6	435	(3,5)	▼
Libanonská republika	14,6	433	(3,1)	▼
Jordánske hašim. kráľovstvo	13,9	424	(4,1)	▼
Iránska islamská republika	14,4	411	(2,4)	▼
Indonézska republika	14,5	411	(4,8)	▼
Tuniská republika	14,8	410	(2,2)	▼
Egyptská arabská republika	14,4	406	(3,5)	▼
Bahrajnský štát	14,1	401	(1,7)	▼
Palestína	14,1	390	(3,1)	▼
Čilská republika	14,2	387	(3,3)	▼
Marocké kráľovstvo	15,2	387	(2,5)	▼
Filipínska republika	14,8	378	(5,2)	▼
Botswanská republika	15,1	366	(2,6)	▼
Saudskoarabské kráľovstvo	14,1	332	(4,6)	▼
Ghanská republika	15,5	276	(4,7)	▼
Juhoafrická republika	15,1	264	(5,5)	▼
Anglicko	14,3	498	(4,7)	▲

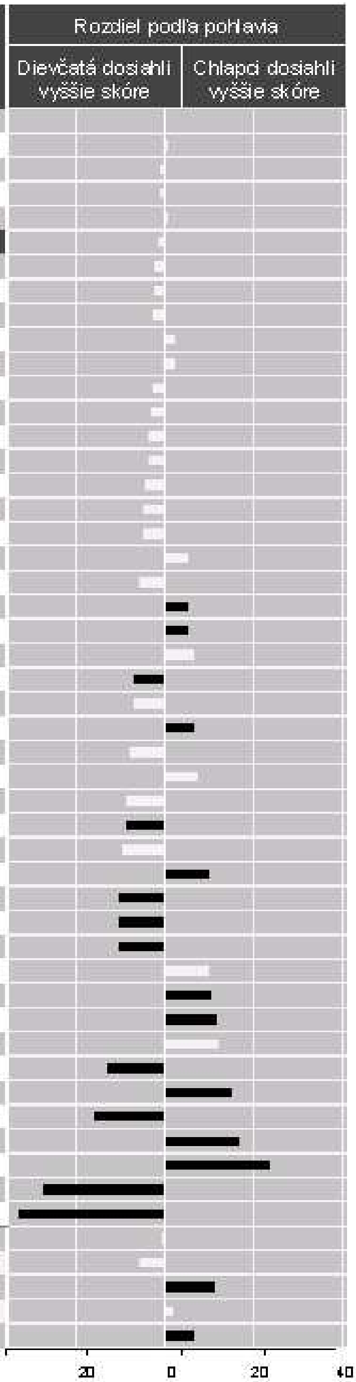
Poznámka: Čísla v zátvorkách udávajú štandardnú chybu priemeru.

Vysvetlivky:

● - priemerné skóre krajiny je signifikantne vyššie ako medzinárodný priemer,
● - priemerné skóre krajiny je signifikantne nižšie ako medzinárodný priemer,
○ - medzi priemerným skóre krajiny a medzinárodným priemerom nie sú signifikantné rozdiely

Tabuľka 4: *Medzinárodné výsledky žiakov z matematiky rozdelené podľa pohlavia*

Krajiny	Dievčatá		Chlapci		Rozdiel (v absolútnej hodnote)
	Percento študentov	Priemerné skóre	Percento študentov	Priemerné skóre	
Slovenská republika	48 (1,3)	508 (3,4)	52 (1,3)	508 (4,0)	0 (3,5)
Švédske kráľovstvo	51 (0,9)	499 (3,0)	49 (0,9)	499 (2,7)	1 (2,2)
Indonézska republika	50 (0,7)	411 (4,9)	50 (0,7)	410 (5,3)	1 (3,0)
Egyptská arabská republika	46 (2,7)	407 (4,4)	54 (2,7)	406 (5,0)	1 (6,4)
Bulharská republika	48 (1,3)	476 (5,5)	52 (1,3)	477 (4,3)	1 (4,7)
Medzinárodný priemer	50 (0,2)	467 (0,6)	50 (0,2)	466 (0,6)	1 (0,6)
Hong Kong - Čína	50 (2,4)	587 (3,8)	50 (2,4)	585 (4,6)	2 (5,1)
Estónska republika	50 (1,0)	532 (3,4)	50 (1,0)	530 (3,3)	2 (3,0)
Nový Zéland	52 (1,7)	495 (4,8)	48 (1,7)	493 (7,0)	3 (5,7)
Japonsko	49 (1,2)	569 (4,0)	51 (1,2)	571 (3,6)	3 (6,4)
Juhoafrická republika	51 (0,9)	262 (6,2)	49 (0,9)	264 (6,4)	3 (5,8)
Nórske kráľovstvo	50 (0,8)	463 (2,7)	50 (0,8)	460 (3,0)	3 (2,8)
Ruská federácia	49 (1,2)	510 (3,5)	51 (1,2)	507 (4,4)	3 (2,8)
Slovinská republika	50 (0,9)	495 (2,6)	50 (0,9)	491 (2,6)	3 (2,8)
Botswanská republika	51 (0,7)	368 (2,6)	49 (0,7)	365 (2,9)	3 (1,8)
Rumunsko	52 (0,9)	477 (5,1)	48 (0,9)	473 (5,0)	4 (3,3)
Litovská republika	50 (0,9)	503 (2,9)	50 (0,9)	499 (3,0)	5 (2,9)
Škótsko	50 (1,3)	500 (4,3)	50 (1,3)	495 (3,8)	5 (3,5)
Kórejska republika	48 (2,8)	586 (2,7)	52 (2,8)	592 (2,6)	5 (3,1)
Lotyšská republika	49 (0,8)	511 (3,3)	51 (0,8)	506 (3,7)	6 (2,9)
Spojené štáty americké	52 (0,7)	502 (3,4)	48 (0,7)	507 (3,5)	6 (1,9)
Talianska republika	50 (0,9)	481 (3,0)	50 (0,9)	486 (3,9)	6 (2,8)
Holandské kráľovstvo	49 (1,2)	533 (4,1)	51 (1,2)	540 (4,5)	7 (3,6)
Srbsko	49 (0,8)	480 (2,9)	51 (0,8)	473 (2,9)	7 (2,8)
Taiwan - Čínska republika	48 (1,0)	589 (4,9)	52 (1,0)	582 (5,2)	7 (4,2)
Maďarská republika	50 (1,0)	526 (3,7)	50 (1,0)	533 (3,5)	7 (3,2)
Malajzia	50 (1,8)	512 (4,7)	50 (1,8)	505 (4,5)	8 (4,2)
Izraelský štát	52 (1,6)	492 (3,3)	48 (1,6)	500 (4,5)	8 (4,0)
Palestína	55 (2,4)	394 (3,9)	45 (2,4)	386 (4,7)	8 (5,9)
Macedónska republika	49 (0,9)	439 (4,0)	51 (0,9)	431 (3,9)	9 (3,5)
Iránska islamská republika	40 (4,1)	417 (4,3)	60 (4,1)	408 (4,2)	9 (7,2)
Libanonská republika	57 (1,8)	429 (3,6)	43 (1,8)	439 (3,9)	10 (4,0)
Arménska republika	53 (0,7)	483 (3,3)	47 (0,7)	473 (3,4)	10 (3,0)
Moldavská republika	51 (0,8)	465 (4,1)	49 (0,8)	455 (4,8)	10 (3,5)
Singapúrska republika	49 (0,8)	611 (3,3)	51 (0,8)	601 (4,3)	10 (2,9)
Saudskoarabské kráľovstvo	43 (2,3)	326 (7,9)	57 (2,3)	336 (5,5)	10 (9,7)
Belgicko (flámska časť)	54 (2,1)	532 (3,5)	46 (2,1)	542 (3,8)	11 (4,8)
Marocké kráľovstvo	50 (1,8)	381 (2,8)	50 (1,8)	393 (3,0)	12 (3,1)
Austrálsky zväz	51 (2,2)	499 (5,8)	49 (2,2)	511 (5,8)	13 (7,0)
Filipínska republika	58 (0,9)	383 (5,2)	42 (0,9)	370 (5,8)	13 (3,4)
Čilská republika	48 (1,6)	379 (3,5)	52 (1,6)	394 (4,3)	15 (4,5)
Cyperská republika	49 (0,6)	467 (1,9)	51 (0,6)	452 (2,3)	16 (2,7)
Ghanská republika	45 (0,9)	266 (5,1)	55 (0,9)	283 (4,9)	17 (3,1)
Tuniská republika	53 (0,7)	399 (2,6)	47 (0,7)	423 (2,2)	24 (1,9)
Jordánske hašimovské kráľovstvo	49 (1,7)	438 (4,6)	51 (1,7)	411 (5,8)	27 (6,8)
Bahrajnský štát	50 (0,4)	417 (2,4)	50 (0,4)	385 (2,4)	33 (3,3)
Anglicko	50 (2,4)	499 (5,3)	50 (2,4)	498 (5,8)	0 (6,0)
Baskitsko, Španielsko	49 (1,7)	490 (2,5)	51 (1,7)	484 (3,7)	6 (3,1)
Štát Indiána, Spojené štáty	49 (1,2)	502 (5,1)	51 (1,2)	514 (5,8)	12 (3,4)
Provincia Ontário, Kanada	51 (0,9)	520 (3,4)	49 (0,9)	522 (3,4)	2 (2,8)
Provincia Quebec, Kanada	50 (1,6)	540 (3,7)	50 (1,6)	546 (3,3)	7 (3,3)



ZDROJ: Štúdia IEG - Trendy vo vyučovaní matematiky a prírodovedných predmetov - TIMSS 2001
Poznámka: Čísla v zátvorkách udávajú štandardnú chybu priemeru.

Porovnanie výsledkov žiakov v roku 1999 a 2003

Aby sa mohli porovnávať výkony žiakov krajín v priebehu niekoľkých cyklov štúdie, zaraďujú sa do testovacích zošitov trendové položky. V testovacích zošitoch v rámci TIMSS 2003 bolo spolu 79 trendových položiek z matematiky. Ako trendovú položku označujeme testovú položku, u ktorej sa nemení zadanie, grafická úprava a nemôže sa zverejniť.

Tabuľka 6: *Výsledky slovenských žiakov v trendových položkách podľa obsahových oblastí*

Obsahová oblasť	Počet položiek	Priemerná úspešnosť v roku 1999 (v %)	Priemerná úspešnosť v roku 2003 (v %)
Aritmetika	25	62	55
Algebra	16	55	49
Meranie	16	53	44
Geometria	12	61	53
Údaje	10	71	64

Pri porovnaní výsledkov slovenských žiakov v trendových položkách v roku 1999 oproti roku 2003 sme zistili, že slovenskí žiaci dosiahli v roku 1999 priemernú úspešnosť z matematiky 59%, v roku 2003 priemernú úspešnosť 52%.

Analýzou výsledkov žiakov v trendových položkách rozdelených podľa obsahových oblastí matematiky sme zistili, že najviac klesla priemerná úspešnosť v oblasti meranie – o 9%, v ostatných oblastiach bol tento pokles od 6% do 8%.

Záver

Porovnanie výsledkov žiakov z matematiky medzi zúčastnenými krajinami poukazuje na veľký rozdiel v dosiahnutých výsledkoch. žiaci v 26 krajinách dosiahli signifikantne lepšie výsledky ako bol medzinárodný priemer.

Výsledky slovenských žiakov z matematiky môžeme interpretovať ako signifikantne horšie v roku 2003 ako v roku 1999. Toto zhoršenie identifikujeme vo všetkých obsahových oblastiach matematiky - aritmetika, algebra, meranie, geometria, údaje.

Medzi výsledkami chlapcov a dievčat v matematike neboli zistené signifikantné rozdiely. Signifikantne lepšie výsledky dosiahli dievčatá len v obsahovej oblasti algebra, zatiaľ čo v ostatných obsahových oblastiach dosiahli chlapci lepšie výsledky ako dievčatá.

Literatúra

[1] Kuraj, J., Stopková, J.: *štúdia TIMSS 2003 na Slovensku.* In: Pedagogické spektrum, ročník XIII, číslo 9/10, 2003. ISSN 1335-5589

[2] Mullis, I.V.S. – Martin, M.O. – Gonzales, E.J. – Chrostowski, S. J. – *TIMSS 2003: International Mathematics Report.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2004. ISBN 1-889938-34-3

[3] Mullis, I.V.S. – Martin, M.O. – Gonzales, E.J. – Chrostowski, S. J. – *TIMSS 2003: International Science Report.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2004. ISBN 1-889938-33-5

[4] Mullis, I.V.S. – Martin, M.O. – Gonzales, E.J. – Chrostowski, S. J. – *TIMSS: Assessment Frameworks and Specifications 2003.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2001. ISBN 1-8899398-30-0

Adresa autora:
PaedDr. Jozef Kuraj
Štátny pedagogický ústav
Úsek monitorovania a evaluácie vo vzdelávaní
Pluhová 8
830 00 Bratislava
e-mail: Jozef.Kuraj@statpedu.sk

Vybrané testové položky z výskumnej domény matematika v medzinárodnej štúdii TIMSS 2003

Janka Kurajová Stopková

Abstract. *This article presents the particular test items and their attributes in TIMSS study. We specify the topic areas of the research in Mathematics. We publish 5 items with their attributes - comparing the international and national index of difficulty.*

Úvod

TIMSS je medzinárodná komparatívna štúdia z matematiky a prírodovedných predmetov. Výskum TIMSS má precízne vypracovanú metodiku konštruovanú medzinárodným tímom odborníkov a overovanou na veľkých vzorkách populácie. Na Slovensku sa v štúdii TIMSS 2003 skúmala populácia 2, ktorú tvorili žiaci 8. ročníka základných škôl a kvarty gymnázií s osemročným štúdiom. Vo výberovom súbore Slovenskej republiky bolo 179 škôl a 4 428 testovaných žiakov.

Charakteristika výskumných meracích nástrojov

Testovacie nástroje sa žiakom zadali v písomnej forme testovacích zošitov. Administrovaných bolo spolu 12 druhov testovacích zošitov. Rôznorodosť školských kurikulárnych dokumentov zúčastnených 46 krajín kládla vysoké nároky pri plánovaní, vývoji a tvorbe testovacích nástrojov. Cieľom bolo vytvoriť testové položky, ktoré by nezvýhodňovali niektoré krajiny alebo vybrané skupiny žiakov a boli vhodné pre všetky zúčastnené krajiny. Zároveň bolo nutné, aby testové položky dobre rozlišovali výkony žiakov z participujúcich krajín. Testy v štúdii TIMSS sa konštruovali tak, aby mali vysokú reliabilitu a v súlade so zámermi výskumu aj vysokú validitu.

Štatistické spracovanie vlastností testových položiek

Charakterizovali sme obťažnosť testovej položky, ktorú sme posudzovali podľa toho, koľko žiakov ju dokázalo správne vyriešiť [1]. Z nevážených dát sme vypočítali hodnotu *indexu obťažnosti P*, ktorý predstavuje podiel počtu žiakov, ktorí odpovedali správne a celkového počtu žiakov, ktorí mali na uvedenú testovú položku odpovedať. Kategória neplatná odpoveď obsahuje počet žiakov, ktorí uvedenú testovú položku vynechali, alebo z časového hľadiska nedosiahli. Pri interpretácii indexu obťažnosti testových položiek sme použili hodnoty [4]: (0% – 20%) – veľmi obťažná, (21% - 40%) – obťažná, (41% - 60%) – stredný stupeň obťažnosti, (61% - 80%) – ľahká, (81% - 100%) – veľmi ľahká.

Počet a druh testových položiek

Testovacie zošity obsahovali spolu 194 testových položiek z matematiky. Z toho bolo 128 (66%) položiek s výberom odpovede a 66 s tvorbou krátkej odpovede.

V rámci výskumných oblastí obsahovej dimenzie prevládali položky z matematickej oblasti učiva – aritmetika (29,4%).

Tabuľka 1: Rozdelenie testových položiek podľa obsahovej dimenzie

Výskumné oblasti obsahovej dimenzie	**Počet**	**v %**
Aritmetika	57	29,4
Algebra	47	24,2
Meranie	31	16,0
Geometria	31	16,0
Údaje	28	14,4
Spolu:	**194**	**100,0**

Tabuľka 2: Rozdelenie testových položiek podľa poznávacej dimenzie

Výskumné oblasti poznávacej dimenzie	**Počet**	**v %**
Ovládanie faktov a postupov	45	23,2
Používanie pojmov	37	19,1
Riešenie problémových úloh	70	36,1
Argumentácia	42	21,6
Spolu:	**194**	**100,0**

Ak sme položky rozdelili podľa výskumných oblastí poznávacej dimenzie, tak prevládali položky zamerané na riešenie problémových úloh (36,1%).

Tematické okruhy v rámci výskumnej domény matematika
matematické testové položky boli rozdelené do uvedených tematických okruhov (tabuľka 3).

Tabuľka 3: Hlavné tematické okruhy rozdelené podľa výskumných oblastí matematiky

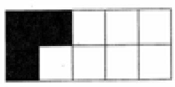
Výskumná oblasť	**Hlavný tematický okruh**
Aritmetika	prirodzené čísla, zlomky a desatinné čísla, celé čísla, úmernosť, pomer a percentá
Algebra	číselné a algebraické vzorce (pravidlá), algebraické výrazy, rovnice a nerovnice, algebraické vzťahy
Meranie	veličiny a jednotky, meradlá, postupy a vzorce
Geometria	priamky a uhly, dvojrozmerné a trojrozmerné útvary, zhodnosť a podobnosť, poloha a priestorové vzťahy
Údaje	zhromažďovanie a triedenie údajov, zobrazovanie údajov, interpretácia údajov, neurčitosť a pravdepodobnosť

Príklady testových položiek a ich vlastnosti

V ďalšej časti sme uviedli príklad zadania testovej položky z každej výskumnej obsahovej oblasti. Z toho boli 4 položky s výberom odpovede a 1 otvorená testová položka. Symbolom N sme vyjadrili počet testovaných žiakov.

Príklad testovej položky č. 1 z výskumnej obsahovej oblasti aritmetika

Koľko ďalších štvorcov treba na obrázku vyfarbiť, aby potom bolo $\frac{4}{5}$ vyfarbených malých štvorcov?



A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Kľúč: A

© IEA, TIMSS 2003

Testová položka, ktorej cieľom bolo overiť znázornenie zlomku vo štvorcovej sieti patrí do hlavného tematického celku – zlomky a desatinné čísla a zameriava sa na používanie pojmov. Vedomosti potrebné na vyriešenie položky si žiaci SR osvojili v rámci učiva 6. ročníka v tematickom celku zlomky. K tejto položke sa viažu aj požiadavky na vedomosti a zručnosti žiakov uvedené vo vzdelávacom štandarde [6]: "správne chápať zlomok" a „časť celku zapísať zlomkom".

Tabuľka 4: Voľba alternatív odpovede v testovej položke – príklad testovej položky č.1, N = 1034

Štatistický parameter v %	A	B	C	D	E	Neplatná odpoveď
Medzinárodný priemer	**49,2**	6,2	11,9	11,5	16,4	4,8
Celoslovenský priemer	**57,7**	5,5	7,3	10,7	13,8	5,0

Pre žiakov v Slovenskej republike aj v medzinárodnom porovnaní patrila položka medzi stredne obťažné. Z distraktorov si žiaci najčastejšie vyberali odpoveď E, ktorá identifikovala to, že žiaci uvažovali nesprávnym spôsobom a k 3 vyfarbeným malým štvorcom chceli vyfarbiť už len 1 tak, aby boli spolu vyfarbené 4 malé štvorce.

Príklad testovej položky č. 2 z výskumnej obsahovej oblasti algebra

Gabriel má dvakrát toľko kníh ako Braňo. Dávid má o 6 kníh viac ako Braňo. Ak má Braňo x kníh, ktorý z nasledujúcich výrazov vyjadruje celkový počet kníh, ktoré majú títo traja chlapci? A. 3x + 6 B. 3x + 8 C. 4x + 6 D. 5x + 6 E. 8x + 2
Kľúč: C ©IEA, TIMSS 2003

Testová položka, ktorej cieľom je priradiť algebraický výraz k slovne sformulovanej úlohe patrí do hlavného tematického celku algebraické výrazy a zameriava sa na používanie pojmov. Žiaci mali čítať text s porozumením a na základe písaného textu správne zapísať výrazy s premennou. Uvedený cieľ obsahujú aj učebné osnovy [4] v rámci učiva 7. ročníka v tematickom celku výraz a jeho úprava.

Tabuľka 5: Voľba alternatív odpovede v testovej položke – príklad testovej položky č. 2, N = 1055

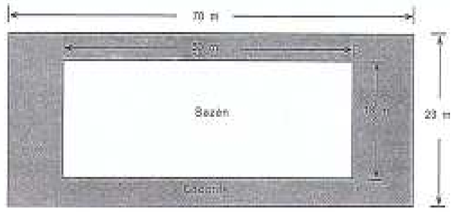
Štatistický parameter v %	A	B	C	D	E	Neplatná odpoveď
Medzinárodný priemer	38,2	9,9	**29,6**	5,9	9,9	6,5
Celoslovenský priemer	34,6	5,8	**39,9**	3,3	7,8	8,6

Z nesprávnych odpovedí si žiaci najčastejšie vyberali možnosť odpovede A, ktorá identifikovala chybu, že žiaci k počtu Gabrielových kníh ($2x$) a počtu Dávidových kníh ($x + 6$), zabudli pripočítať počet Braňových kníh. V medzinárodnom vyhodnotení si tento distraktor A vyberali žiaci častejšie ako správnu odpoveď. Možnosť odpovede E identifikovala žiakov, ktorí neporozumeli pojmom a nevedeli zapísať výraz 2 – násobok čísla xa výraz o 6 viac ako číslo x, lebo celkový počet kníh zapísali ako $(x + 2) + 6x + x$ a výraz zjednodušili na tvar 8x + 2. Položka patrila medzi obťažné pre žiakov SR.

Príklad testovej položky č. 3 z výskumnej obsahovej oblasti meranie

Bazén má tvar obdĺžnika, okolo ktorého je znázornený vydláždený chodník.
Aká je plocha vydláždeného chodníka?
A. 100 m^2 B. 161 m^2 C. 710 m^2 D. 1 610 m^2

Kľúč: C



Testová položka patrí do hlavného tematického celku meradlá, postupy a vzorce a zameriava sa na ovládanie faktov a postupov. Podobné zadania slovných úloh naši žiaci riešili v rámci učiva 5. ročníka v tematickom celku obsah obrazca (obdĺžnik, štvorec).

Tabuľka 6: Voľba alternatív odpovede v testovej položke – príklad testovej položky č. 3, N = 1044

Štatistický parameter v %	A	B	C	D	Neplatná odpoveď
Medzinárodný priemer	11,2	23,5	**38,6**	20,7	6,0
Celoslovenský priemer	5,8	20,1	**50,3**	11,5	12,3

Podľa hodnoty indexu obťažnosti usudzujeme, že položka bola pre slovenských žiakov stredne obťažná, ale pre žiakov v medzinárodnom porovnaní patrila medzi obťažné. Veľmi častou chybou, ktorú žiaci urobili bolo to, že na výpočet obsahu chodníka, použili len číselné údaje uvedené na náčrte, ktoré spočítali $70+23+50+18$ a vybrali si možnosť odpovede B. Žiaci, ktorí si vybrali možnosť D, zabudli od obsahu obdĺžnika (bazén a chodník spolu), odpočítať obsah bazénu. Žiaci, ktorí uvažovali a postupovali tak, že vynásobili $(70-50)$ a $(23-18)$ si vybrali nesprávnu odpoveď A.

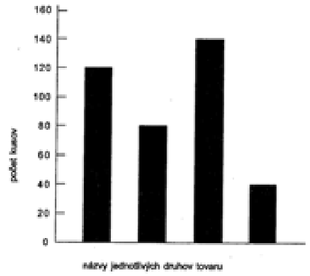
Príklad testovej položky č. 4 z výskumnej obsahovej oblasti údaje

Testová položka patrí do hlavného tematického celku interpretácia údajov a zameriava sa na argumentáciu. V rámci učiva 7. ročníka v tematickom celku percentá naši žiaci riešili jednoduché slovné úlohy, graficky znázorňovali údaje z tabuliek pomocou kruhového alebo stĺpcového diagramu.

Graf zobrazuje počet pier, ceruziek, pravítok a gúm, ktoré sa v obchode predali za jeden týždeň. V grafe chýbajú názvy tovarov. Zo všetkých druhov tovaru sa najviac predávali perá, najmenej gumy. Predalo sa viac ceruziek ako pravítok. Koľko ceruziek sa predalo?

A. 40 B. 80 C. 120 D. 140

Kľúč: C



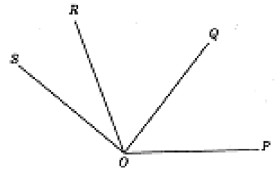
Tabuľka 7: Voľba alternatív odpovede v testovej položke – príklad testovej položky č. 4, N = 1055

Štatistický parameter v %	A	B	C	D	Neplatná odpoveď
Medzinárodný priemer	4,6	13,4	**67,6**	11,9	2,5
Celoslovenský priemer	1,9	13,6	**76,0**	4,3	4,2

Žiaci s porozumením prečítali text zadania, správne čítali graf pre závislú premennú a porovnávali hodnoty pre nezávislú premennú. Táto testová položka bola pre slovenských žiakov podľa obťažnosti ľahká a potvrdili to aj medzinárodné výsledky.

Príklad testovej položky č. 5 z výskumnej obsahovej oblasti geometria

Veľkosť uhla POR na obrázku je 110°, veľkosť uhla QOS je 90° a veľkosť uhla POS je 140°. Aká je veľkosť uhla QOR?
Odpoveď: ....



Kľúč: 60°

©IEA, TIMSS 2003

Otvorená testová položka s tvorbou krátkej odpovede patrí do hlavného tematického celku – priamky a uhly a zameriava sa na argumentáciu. S riešením podobných grafických úloh sa žiaci zaoberali v rámci učiva 5. ročníka v tematickom celku uhol a jeho veľkosť, operácie s uhlami. Výsledky, ktoré dosiahli slovenskí žiaci pri riešení tejto úlohy (P=36,5%) aj žiaci v medzinárodnom porovnaní (P=28,1%) potvrdili, že táto položka patrila medzi obťažné.

Záver

Testové položky z matematiky boli pre našich žiakoch stredne obťažné, lebo priemerná hodnota indexu obťažnosti P, dosiahla hodnotu 52,6% (štandardná odchýlka 18,4%). V rámci výskumných obsahových oblastí boli naši žiaci úspešnejší pri riešení položiek z výskumnej oblasti aritmetika ($P = 56,5\%$) a z výskumnej oblasti geometria ($P = 54,3\%$). Na úrovni priemernej hodnoty indexu obťažnosti všetkých testových položiek z matematiky boli položky z výskumnej oblasti meranie ($P = 52,3\%$). S menšou úspešnosťou žiaci riešili položky z algebry ($P = 50,6\%$) a položky z výskumnej oblasti údaje ($P = 46,8\%$).

Ak sme obťažnosť testových položiek vyhodnotili podľa výskumných oblastí poznávacej dimenzie zistili sme, že naši žiaci boli úspešní pri riešení položiek, ktoré sa zamerali na používanie pojmov ($P = 60,6\%$) a na ovládanie faktov a postupov ($P = 59,7\%$). Obťažné pre žiakov boli položky zamerané na riešenie problémových úloh ($P = 49,0\%$) a argumentáciu ($P = 44,1\%$).

Pri analýze obťažnosti položiek rozdelených podľa hlavných tematických okruhov sme zistili, že pre žiakov boli najobťažnejšie položky z algebry, ktoré boli z okruhu číselné a algebraické vzorce ($P = 37,9\%$) a z výskumnej oblasti údaje položky z okruhu interpretácia dát ($P = 41,3\%$).

Ak sme vyhodnotili obťažnosť položiek podľa formátu zadania, tak stredne obťažné boli pre žiakov testové položky s výberom odpovede ($P = 59,4\%$) a obťažné položky s tvorbou krátkej odpovede ($P = 39,5\%$).

Výsledky ukazujú, že naši žiaci majú najväčšie problémy s riešením úloh, ktoré vyžadujú rozšíriť algebraické výrazy alebo číselné rady, zovšeobecniť vzťahy, vypísať niekoľko členov postupnosti, objaviť vzorec pre výpočet chýbajúceho člena, vyjadriť neznámu zo vzorca, interpretovať údaje vyjadrené graficky – v tabuľke alebo diagrame, prepájať informácie medzi tabuľkou a diagramom, urobiť záver z údajov, zhodnotiť údaje s ohľadom na správnosť a úplnosť interpretácie a odhadnúť výsledok riešenia.

Literatúra

[1] Kalhous, Z. – Obst, O. a kol.: *Školní didaktika*, Praha : Portál, 2002, str. 228-229. ISBN 80-7178-253-x

[2] Kuraj, J. – Stopková, J.: *Medzinárodná štúdia TIMSS 2003 na Slovensku,* In: Pedagogické spektrum, Bratislava : ŠPÚ, č. 9/10, 2004, ročník XIII, str. 85-100. ISSN 1335-5589

[3] Mullis, I.V.S. – Martin, M.O. – Gonzales, E.J. – Chrostowski, S. J.: *TIMSS 2003 International Mathematics Report.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2004. ISBN 1-889938-34-3

[4] Seebauerová, R. : *Informační testové postupy v kontextu pedagogické evaluace a kontroly kvality,* In SEEBAUEROVÁ, R., HELUS, Z., KOLIADIS, E. (ed.): Kvalita cestou kvalifikace, Brno: Paido, 2000, str. 112. ISBN 80 – 85931 – 93 - 1

[5] *Učebné osnovy matematika pre 5. až 9. ročník základnej školy* – č. 1640/97-151, MŠ SR, Bratislava, 1997.

[6] *Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre 2. stupeň základnej školy* – č.117/2002-41, MŠ SR, Bratislava, 2002.

Adresa autora:
PaedDr. Janka Kurajová Stopková
Pluhová 8
831 00 Bratislava
e-mail: Janka.Stopkova@statpedu.sk

Historické korene problémov s vyučovaním pojmu funkcie

Ladislav Kvasz

Abstract. *The aim of the paper is to compare the historical development of the notion of function, which is one of the central notions of mathematics, with the way it is taught at secondary school level.*

Úvod

Pri zavádzaní pojmu funkcie sú medzi stredoškolskými učebnicami rozdiely. Niektoré učebnice volia viac neformálny prístup a pojem funkcie definujú pomocou termínu ***predpis***, ktorý nechávajú len v intuitívnej polohe. Iné učebnice postupujú striktnejšie, a pojem funkcie zavádzajú ako zvláštny prípad pojmu ***zobrazenia***, pričom zobrazenie definujú pomocou aparátu teórie množín. Asi netreba zvýrazňovať, že posledne menovaný prístup je presnejší z matematického hľadiska, kým intuitívny prístup je ľahšie pochopiteľný pre študentov. Vzniká tak dojem, ako by matematická presnosť musela ísť na úkor zrozumiteľnosti.

Je prekvapivé, ako ukazuje dizertácia RNDr. Aleny Kopáčkovej, ako veľký je nepomer medzi obmedzenou škálou prístupov k pojmu funkcie v školskej matematike a bohatstvom štádií v historickom vývine tohto pojmu. Kopáčková rozborom definícií z 25 stredoškolských učebníc zistila, že vo vyučovaní sa vyskytuje len prvé a posledné vývinové štádium. Chápanie funkcie ako predpisu pochádza od Johanna Bernoulliho, ktorý roku ***1718*** prvý definoval tento pojem, kým chápanie funkcie ako množiny usporiadaných dvojíc je od Felixa Hausdorffa z roku ***1914***. Takže v prípade funkcie sa konceptuálny vývoj, ktorý sa odohral medzi rokmi 1718 a 1914, z vyučovacieho procesu vytratil. Cieľom príspevku je stručne priblížiť zmeny v chápaní pojmu funkcie a ich význam pre vyučovanie.

Základné etapy vo vývine pojmu funkcia

Pojem funkcie má dlhú prehistóriu v podobe funkčnej závislosti, ktorá je známa už od nepamäti. Človek asi od nepamäti vedel, že čím väčšiu korisť ulovil, tým sa viac nadrie, kým ju dovlečie domov. So vznikom písma sa rôzne funkčné závislosti začali vyjadrovať pomocou tabuliek, a vznikol pojem priamej a nepriamej úmernosti. Trvalo však pomerne dlho, kým sa jazyk matematiky tak rozvinul, že dokázal pojem funkcie aj explicitne vyjadriť.[1)] Tým sa začína proces, ktorý nás zaujíma.

Formálne chápanie pojmu funkcie (Bernoulli až Euler)

Ako bolo uvedené vyššie, prvá definícia pojmu funkcie pochádza od Johanna Bernoulliho (1667-1748) z roku ***1718***:

> *Funkciou premennej veličiny sa nazýva veličina zostavená ľubovoľným spôsobom z tejto premennej veličiny a konštánt.*

Podobnú definíciu uvádza roku ***1748*** Leonard Euler (1707-1783) vo svojej učebnici *Introductio in analysin infinitorum* (Úvod do analýzy nekonečných – myslí sa nekonečne malých aj nekonečne veľkých):

> *Funkcia premennej veličiny je analytický výraz, zostavený akýmkoľvek spôsobom z tejto premennej veličiny a čísel alebo konštantných veličín.*

Teda zhruba po dobu jednej generácie sa pojem funkcie nemení. Pritom z hľadiska formálneho chápania pojmu funkcie je to, čo dnes nazývame absolútnou hodnotou, vlastne dvojicou funkcií. Pre záporné a pre kladné čísla je absolútna hodnota zadaná rôznymi predpismi (-x, resp. x), a teda ide vlastne o rôzne funkcie.

Fyzikálne chápanie pojmu funkcie (Euler až Fourier)

Roku ***1755*** vydáva Euler ďalšiu zo série svojich slávnych učebníc, *Institutiones calculi differencialis* (Základy diferenciálneho počtu), kde uvádza úplne inú definíciu, ako pred siedmimi rokmi:

> *Ak určité veličiny závisia od iných veličín takým spôsobom, že ak posledné sú zmenené, aj prvé podľahnú zmene, tak prvé veličiny sa nazývajú funkciami posledných. Toto vymedzenie zahŕňa každý spôsob, pomocou ktorého jedna veličina môže byť určená inými.*

Táto definícia sa od predošlej Eulerovej definície líši v tom, že nezávisí od jazyka. Kým prv uznával Euler ako funkcie iba tie závislosti, ktoré je možné vyjadriť vo formálnom jazyku matematiky (a teda jeho obor funkcií bol spočítateľný), jeho nová definícia zásadne prekračuje hranice jazyka a pojem funkcie sa snaží urobiť od jazyka nezávislým. Čo ho k tejto zmene názoru na pojem funkcie priviedlo?

Bola to diskusia o tom, čo sa deje na koncertoch vážnej hudby, teda o kmitaní struny. D'Alembert, Eulerov protivník v uvedenej diskusii, tvrdil, že hudobník určí počiatočný tvar struny, ktorým musí byť dvakrát diferencovateľná funkcia (aby ju bolo možné dosadiť do diferenciálnej rovnice opisujúcej kmitanie struny) a ďalej je už všetko v réžii príslušnej diferenciálnej rovnice. Teda možno povedať, že hudobníci sú špeciálne školení zadávatelia počiatočných riešení diferenciálnych rovníc. Podľa d'Alemberta však hudobníci smeli vyberať len medzi funkciami, ktoré sú predmetom pôvodnej Eulerovej definície z roku 1748. A tu si Euler uvedomil, že prírodu (a rovnako aj strunu) predsa nemôže obmedzovať to, že aký jazyk používajú matematici. Funkcie, spomedzi ktorých hudobníci volia počiatočné riešenia pre svoje hudobné nástroje nesmú podliehať umelým obmedzeniam jazyka. Preto sa pokúsil o novú definíciu, ktorá by bola od jazyka úplne nezávislá.

Z hľadiska didaktiky je zaujímavé, že tento zásadný krok a jeho motivácia úplne vypadli z vyučovania. Študent sa tak nikdy nedozvie, prečo matematika opustila chápanie funkcie ako predpisu.

Teória funkcií reálnej premennej (Fourier, Dirichlet, Riemann)

V odpútavaní pojmu funkcie od formálneho jazyka pokročil ešte ďalej Joseph Fourier (1768-1830), ktorý v práci *Théorie analytique de la chaleur* (Analytická teória tepla, kniha v ktorej zaviedol Fourierove rady a Fourierov integrál) roku ***1822*** dáva nasledovnú definíciu funkcie:

> *Vo všeobecnosti funkcia f(x) predstavuje sled hodnôt, alebo ordinát, z ktorých každá je ľubovoľná. Vôbec sa nepred-pokladá, že tieto ordináty sa riadia nejakou zákonitosťou; môžu nasledovať po sebe celkom ľubovolne.*

Radikálna novosť tejto definície spočíva v tom, že nepredpokladá žiadnu zákonitosť, ktorá by zväzovala hodnoty, ktoré funkcia nadobúda. Takto vzniká všeobecný ***pojem funkcie reálnej premennej***. Rad slávnych matematikov ako Lejeune Dirichlet (1805-1859), Bernhard Riemann (1826-1866) a Henri Lebesgue (1875-1941) sa venovali skúmaniu reálnych funkcií. Teória Fourierových radov motivovala sériu zmien v analýze, predovšetkým pojmu integrálu (Riemannov aj Lebesguov integrál sa zrodili v tejto oblasti), ale aj pojmu konvergencie a limity radu. Asi najvýznamnejší „vedľajší produkt“ teórie Fourierových radov bola teória množín. Cantor totiž dospel k teórii množín práve skúmaním Forurierových radov.

Z hľadiska didaktiky je dôležité si uvedomiť, že opäť študentov síce oboznamujeme s rôznymi výdobytkami teórie funkcií reálnej premennej, napríklad s Riemannovým integrálom, ale bez toho, aby sme im ukázali problémy, ktoré priviedli Riemanna k jeho novému chápaniu integrálu. Študentom tak dávame odpovede na otázky, ktoré nepoznajú.

Množinové chápanie pojmu funkcie (Hausdorff)

Zhruba sto rokov po Fourierovej práci Felix Hausdorff (1863-1942) v knihe *Grundzüge der Mengenlehre* (*Základy teórie množín*) z roku ***1914*** prvýkrát definuje funkciu ako množinu usporiadaných dvojíc. Je pozoruhodné, že množinová definícia pojmu funkcie nepochádza od zakladateľov teórie množín, od Richarda Dedekinda (1831-1916) či Georga Cantora (1845-1918). Bolo to spôsobené tým, že títo matematici považovali množiny a funkcie za dva zásadne odlišné objekty, a preto ich ani nenapadlo, že by aj funkciu bolo možné považovať za množinu.[2)]

To je dôležité z hľadiska didaktiky matematiky, lebo keď študentom predkladáme definíciu funkcie ako množiny usporiadaných dvojíc, často sa stáva, že študenti nám nerozumejú. Ale nemalo by nás to prekvapiť. Chápanie funkcie ako množiny usporiadaných dvojíc bolo neprijateľné dokonca aj pre samotných tvorcov teórie množín.

Hausdorffova definícia usporiadanej dvojice bola ťažkopádna, a zakladala sa na predpoklade existencie dvoch špeciálnych objektov, ktoré Hausdorff označil ako 1 a 2. S ich pomocou definoval usporiadanú dvojicu $<$a, b$>$ ako {{a, 1}, {b, 2}}. Dnešná definícia usporiadanej dvojice v tvare {{a}, {a, b}}, ktorá už nepotrebuje žiadne špeciálne objekty, je od Kazimierza Kuratovského (1896-1980) z roku ***1921***.

Keď výuku pojmu funkcia začíname hneď týmto elegantným Kuratovského trikom, nútime študentov v jednom kroku urobiť dva abstrakčné zdvihy. Prvým je premena funkcie na množinu usporiadaných dvojíc (čo je náročný krok, veď aj Cantor by ho odmietol) a druhým krokom je zakódovanie usporiadanej dvojice pomocou Kuratovského triku. Je pravidlom, že technické detaily tohto druhého kroku plne zatienia prvý a tak sa študenti síce naučia pracovať s usporiadanými dvojicami, ale samotný pojem funkcie ako množiny im ostane cudzí.

Poznámky

1. Dôležitým krokom v rozvoji jazyka matematiky bol vznik pojmu neznámej (pozri Kvasz 2000, s. 795 – 800). Neskôr, najmä pod vplyvom analytickej geometrie a mechaniky za z neznámej zrodila premenná.

2. Samozrejme, Hausdorffovou definíciou vývin pojmu funkcie nekončí. Ďalšie dôležité podnety prišli z oblasti funkcionálnej analýzy, kde sa ukázalo ako dôležité zahrnúť definičný obor a obor hodnôt funkcie explicitne do jej definície. Neskôr teória kategórií priniesla ďalšie zovšeobecnenie chápania tohto pojmu.

Literatúra

[1] C. Edwards: *The Historical Development of the Calculus*, Springer, 1979.

[2] I. Grattan-Guiness (ed.): *From the Calculus to Set Theory*, London, 1980.

[3] H. Jahnke: *Geschichte der Analysis*, Spektrum, Heildelberg, 1999.

[4] Kopáčková, A.: *Pojmotvorný proces konceptu funkce.* Doktorská disertační práce, Ped. F UK v Praze, 2003.

[5] Kvasz, L.: *Dejiny mocninných radov.* In: *Mat. obzory*, 41 (1994), s. 1-26.

[6] Kvasz, L.: *Použitie histórie matematiky vo vyučovaní matematickej analýzy.* In: *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in* Ružomberok Vol. III (2003), No. 3, s. 51-56.

[7] P. Zlatoš: *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*, Bratislava, 1995.

Adresa autora:
Doc. Dr. Ladislav Kvasz
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava
e-mail: kvasz@fmph.uniba.sk

Poďakovanie: Príspevok je súčasť grantového projektu 1/0223/03.

Iterace lineární funkce

Jitka Laitochová

Abstract. *Iteration of linear functions are discussed with zero or one fixed point. Worked examples use mathematical induction, geometric series, inequalities.*

Označme$J = (-\infty, \infty)$, Nmnožinu všech přirozených čísel, Z množinu všech celých čísel, $C_0(J)$ množinu spojitých funkcí definovaných na intervalu J.

Nechť ryze monotónní funkce $\varphi \in C_0(J)$ zobrazuje interval J na sebe. Množinu takových funkcí φ budeme značit S.

Iterace funkce

Definice 1. Iterace funkce $\varphi = \varphi(x), \varphi \in S$, pro nezáporný exponent definuje předpisem

$$\varphi^0(x) = x$$

$$\varphi^{n+1}(x) = \varphi\varphi^n(x), n = 0, 1, 2, \tag{1}$$

a pro záporný exponent

$$\varphi^{n-1}(x) = \varphi^*\varphi^n(x), n = 0, -1, -2, ..., \tag{2}$$

kde φ^*značí inverzní funkci k funkci φ.

Poznámka 1. Z definice dané vzorcem (2) pro $n = 0$ dostáváme $\varphi^{-1}(x) = \varphi^*(x)$. Je tedy (-1)-ni iterace funkce φ její inverzní funkce φ^*.

Poznámka 2. Body x, které vyhovují rovnici $\varphi(x) = x$, vyhovují rovnici $\varphi^\mu(x) = x, \quad \mu \in Z$.

Definice 2. Body $[x, \varphi(x)]$, pro něž $\varphi(x) = x$, nazveme pevné body iterace. Mluvíme také o pevném bodě funkce φ.

Lemma 1. Je-li buď $\varphi(x) > x$ nebo $\varphi(x) < x$, $x \in J$, $\varphi \in S$, nemá iterace pevné body.

Opravdu, vyplývá to přímo z definice pevného bodu iterace.

Lemma 2. Je-li $\varphi \in S$ rostoucí resp. klesající na J, je i $\varphi^*(x)$ rostoucí resp. klesající na J.

Opravdu, je to vlastnost inverzní funkce.

Lemma 3. Je-li $\varphi \in S$ rostoucí funkce, pak všechny iterace $\varphi^\mu(x),\ \mu \in Z$, jsou rostoucí funkce. .Je-li $\varphi \in S$ klesající funkce, pak všechny iterace $\varphi^{2\mu}(x),\ \mu \in Z$, jsou rostoucí funkce a všechny iterace $\varphi^{2\mu-1}(x),\ \mu \in Z$, jsou klesající funkce.

Lemma 4. Nechť funkce $\varphi(x)$ má právě jeden pevný bod x_0, v němž platí $\varphi(x_0) = x_0$. V množině funkcí S mohou nastat tyto situace:

φ je rostoucí na J a je

$1^o \quad \varphi(x) > x$ pro $x \neq x_0$,

$2^o \quad \varphi(x) < x$ pro $x \neq x_0$,

$3^o \quad \varphi(x) < x$ pro $x < x_0$, $\varphi(x) > x$ pro $x > x_0$,

$4^o \quad \varphi(x) > x$ pro $x < x_0$, $\varphi(x) < x$ pro $x > x_0$,

φ je klesající na J a je

$5^o \quad \varphi(x) > x$ pro $x < x_0$, $\varphi(x) < x$ pro $x > x_0$.

Lemma 5. Nechť $\varphi \in S$ je rostoucí funkce na J. Nechť

1. $\varphi(x) > x$,
2. $\varphi(x) < x$.

Potom pro iterace platí nerovnosti

Ad 1. $\varphi^{\mu}(x) < \varphi^{\mu+1}(x)$, tj. oboustranná posloupnost iterací $\{\varphi^{\mu}\}_{\mu=-\infty}^{\infty}$ je rostoucí,

Ad 2. $\varphi^{\mu+1}(x) < \varphi^{\mu}(x)$, tj. oboustranná posloupnost iterací $\{\varphi^{\mu}\}_{\mu=-\infty}^{\infty}$ je klesající.

Důkaz.

Ad 1. Je-li $\varphi(x) > x$, je také $\varphi^2(x) > \varphi(x) > x$, obecně $\varphi^n(x) > \varphi^{n-1}(x) > ... > \varphi(x) > x$, $n \in N$, ale $\varphi^{-1} = \varphi^*(x) < x$, tedy také $\varphi^{-2}(x) < \varphi^{-1}(x) < x$, obecně $\varphi^{-n}(x) < \varphi^{-n+1}(x) < ... < \varphi^{-1}(x) < x$, $n \in N$. Odtud dostáváme, že oboustranná posloupnost iterací $\{\varphi^{\mu}\}_{\mu=-\infty}^{\infty}$ je rostoucí.

Ad 2. Je-li $\varphi(x) < x$, je také $\varphi^2(x) < \varphi(x) < x$, obecně $\varphi^n(x) < \varphi^{n-1}(x) < ... < \varphi(x) < x$, $n \in N$, ale $\varphi^{-1} = \varphi^*(x) > x$, tedy také $\varphi^{-2}(x) > \varphi^{-1}(x) > x$, obecně $\varphi^{-n}(x) > \varphi^{-n+1}(x) > ... > \varphi^{-1}(x) > x$, $n \in N$. Odtud dostáváme, že oboustranná posloupnost iterací $\{\varphi^{\mu}\}_{\mu=-\infty}^{\infty}$ je klesající.

Iterace lineární funkce

Uvažujme lineární funkci

$$\varphi(x) = ax + b, a \neq 0. \tag{3}$$

Jejím grafem je přímka p. Budeme uvažovat tři případy poloh přímky p:

1^o přímka p je totožná s grafem funkce $y = x$,

2^o přímka p je rovnoběžná s grafem funkce $y = x$,

3^o přímka p protíná graf funkce $y = x$.

Koeficienty rovnice (3) jsou v jednotlivých případech tyto:

1^o $a = 1, b = 0$,

2^o $a = 1, b \neq 0$,

3^o $a \neq 1, a \neq 0, b$ libovolné.

Pevné body iterace zjistíme, položíme-li

$$ax + b = x \tag{4}$$

$$(a-1)x = -b \tag{5}$$

Rovnice (5) je splněna pro každé $x \in J$ v případě 1^o.
Rovnice (5) není splněna pro žádné $x \in J$ v případě 2^o.
Rovnice (5) je splněna pro $x = -\frac{b}{a-1}$ v případě 3^o.

Případ 1^o
Rovnice lineární funkce je $\varphi(x) = x$.
Všechny body $[x, x]$ jsou pevné body iterací.
Iterace jsou identity $\varphi^\mu(x) = x, \mu \in Z$.
Případ 2^o
Rovnice lineární funkce je $\varphi(x) = x + b, \quad b \neq 0$.
V tomto případě neexistují pevné body iterací.
Iterace jsou funkce $\varphi^\mu(x) = x + \mu b, \quad \mu \in Z, \quad b \neq 0$.
Ptáme se, kdy je v tomto případě $\varphi(x) > x$ a kdy $\varphi(x) < x$.
Je-li $b > 0$, je $\varphi(x) > x$ a pro iterace platí nerovnosti

$$... < \varphi^{-\mu} < ... < \varphi^{-2} < \varphi^{-1} < \varphi^0 < \varphi^1 < \varphi^2 < ... < \varphi^\mu < ...$$

tj.

$$... < x - \mu b < ... < x - 2b < x - b < x < x + b < x + 2b < ... < x + \mu b < ...$$

Je-li $b < 0$, je $\varphi(x) < x$a pro iterace platí nerovnosti

$$... > \varphi^{-\mu} > ... > \varphi^{-2} > \varphi^{-1} > \varphi^0 > \varphi^1 > \varphi^2 > ... > \varphi^\mu > ...$$

tj.

$$... > x - \mu b > ... > x - 2b > x - b > x > x + b > x + 2b > ... > x + \mu b > ...$$

Případ 3^o
Rovnice lineární funkce je $\varphi(x) = ax + b, a \neq 0, a \neq 1$.
V tomto případě existuje jeden pevný bod iterací, a to

$$x = -\frac{b}{a-1}.$$

Spočítáme iterace
$\varphi^0 = x$,
$\varphi^1 = ax + b, a \neq 1, b \neq 0$,
$\varphi^2 = \varphi\varphi(x) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b$,
$\varphi^3 = \varphi\varphi^2(x) = a[a^2x + (a + 1)b] + b = a^3x + (a^2 + a + 1)b$,
obecně

$$\varphi^n = \varphi\varphi^{n-1}(x) = a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1)b \tag{6}$$

Vzorec (6) dokážeme matematickou indukcí:
Předpokládáme, že vzorec platí pro $n \in N$, dokážeme jeho platnost pro $(n+1)$. Máme

$$\varphi^{n+1} = \varphi\varphi^n(x) = a[a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1)b] + b = a^{n+1}x + (a^n + a^{n-1} + ... + 1)b.$$

Použijeme-li v (6) vzorec pro prvních n členů geometrické posloupnosti, můžeme psát, že

$$a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

tedy vzorec (6) lze zapsat ve tvaru

$$\varphi^n = a^n x + \frac{a^n - 1}{a-1} b, n = 1, 2, ...$$

Pro $n = 0, -1, -2, ...$ je $\varphi^{n-1}(x) = \varphi^* \varphi^n(x)$, kde φ^* je inverzní funkce k φ. Z rovnice $y = ax + b$ dostaneme, že $x = \frac{y-b}{a}$, $a \neq 0$. Tedy

$\varphi^{-1} = \varphi^*(x) = \frac{x-b}{a}$,kde $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$,

$$\varphi^{-2} = \varphi^* \varphi^{-1}(x) = \frac{\frac{x-b}{a} - b}{a} = \frac{x - (a+1)b}{a^2},$$

$$\varphi^{-3} = \varphi^* \varphi^{-2}(x) = \frac{\frac{x-(a+1)b}{a^2} - b}{a} = \frac{x - (1 + a + a^2)b}{a^3},$$

obecně

$$\varphi^{-n} = \frac{x - (1 + a + ... + a^{n-1})b}{a^n} = \frac{x - \frac{a^n - 1}{a-1} b}{a^n} = \frac{x}{a^n} - \frac{\frac{a^n-1}{a-1} b}{a^n} = a^{-n} x + \frac{a^{-n} - 1}{a-1} b.$$

Platí tedy, že iterace jsou funkce

$$\varphi^\mu(x) = a^\mu x + \frac{a^\mu - 1}{a-1} b, \mu \in Z.$$

Ptáme se, kdy je v tomto případě

1. $\varphi(x) > x$,

2. $\varphi(x) < x$.

Ad 1. $\varphi(x) > x$,

$$ax + b > x, a \neq 1, b \neq 0,$$

$$(a-1)x + b > 0.$$

Tedy $\varphi(x) > x$ pro $x > -\frac{b}{a-1}$, je-li $a > 1$ a $x < -\frac{b}{a-1}$, je-li $a < 1$.

Ad 2. $\varphi(x) < x$,

$$ax + b < x, a \neq 1, b \neq 0,$$

$$(a-1)x + b < 0.$$

Tedy $\varphi(x) < x$ pro $x < -\frac{b}{a-1}$, je-li $a > 1$ a $x > -\frac{b}{a-1}$, je-li $a < 1$.

Literatúra

[1] Kuczma , M., *Functional equations in a single variable*, PWN (Warszawa, 1968).

[2] Kuczma, M., Choczewski, B. and Ger, R., *Iterative Functional Equations*, Cambridge University Press (Cambridge, Warszawa, 1990).

Adresa autora:
RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Katedra matematiky PdF UP Olomouc
Žižkovo nám. 5
771 40 Olomouc
Česká republika

Analýza dvoch praktických aplikácií z finančnej matematiky

Jozef Majerčák

Abstract. *V príspevku sú popísané a na príkladoch interpretované dve praktické aplikácie z finančnej matematiky, ktoré nie sú vo finančnej praxi náležite využívané, a to:*

- *efektívna úroková sadzba a úroková intenzita*
- *časová hodnota peňazí.*

Key words: *úroková sadzba, úroková intenzita, efektívna úroková sadzba a úroková intenzita, peniaze, časová hodnota peňazí*

Efektívna úroková sadzba a úroková intenzita

Je všeobecne známe, že pri rovnakej úrokovej sadzbe je pre vkladateľa výhodnejšie, ak sa úroky v banke pripisujú viackrát ročne, lebo sa opäť úrokujú. Zohľadnenie výšky úrokovej sadzby pri skracovaní úrokovej doby nazývame efektívnosť úrokovej sadzby.

Pred niekoľkými rokmi som sa zaoberal problematikou finančnej matematiky a v súčasnosti pri vyučovaní matematiky na FVT TU som sa do tejto problematiky nečakane dostal opäť, ale z komplexnejšieho pohľadu, a to z hľadiska uplatnenia limít pri efektívnej úrokovej sadzbe a numerických výpočtov.

Pre efektívnu úrokovú sadzbu platí:

$$1 + i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \Rightarrow i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \tag{7}$$

pričom i_e je efektívna úroková sadzba.

Vieme, že

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e \approx 2,718281828$$

kde e je Eulerové číslo, základ prirodzených logaritmov. Zo vzťahu (7) dostaneme:

$$i_e = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^i - 1 = e^i - 1$$

Nech $i = f$, lebo i je označením úrokovej sadzby, potom platí:

$$i_e = e^f - 1,$$

z čoho

$$f = ln(1 + i_e) \tag{8}$$

pričom f je úroková intenzita.

Ak pri úrokovaní $m \to \infty$, hovoríme o spojitom úrokovaní, pričom platí:

$$k_t = k_0 e^{f.t},$$

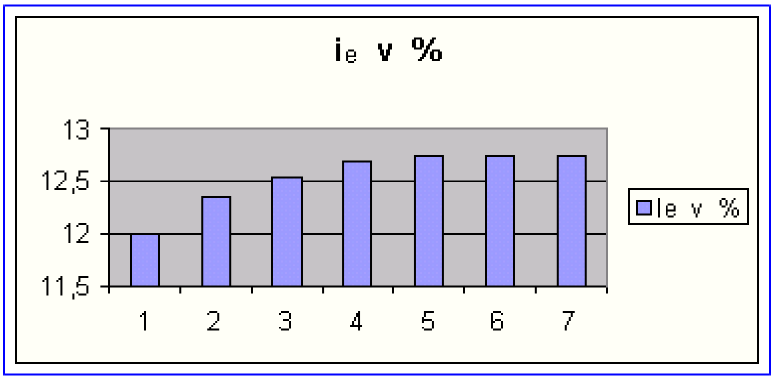
z čoho

$$k_0 = k_t e^{-f.t} \tag{9}$$

k_t je hodnota kapitálu v čase t, k_0 je počiatočná hodnota kapitálu.

Úloha 1. Nájdite efektívnu úrokovú sadzbu, ktorá odpovedá 6 % ročnej úrokovej sadzbe pri ročnom, polročnom, štvrťročnom, mesačnom, týždennom, dennom a spojitom úrokovaní.

Obdobie úrok.		Vzorec pre i_e	Výpočet i_e	$i_e v$ %
1	1	$1{,}12^1 - 1$	0,12	12
2	2	$1{,}06^2 - 1$	0,1236	12,36
3	4	$1{,}03^4 - 1$	0,12550881	12,55
4	12	$1{,}01^{12} - 1$	0,12682503	12,68
5	52	$1{,}00231^{52} - 1$	0,12740987	12,74
6	360	$1{,}0003^{360} - 1$	0,12747431	12,747
7	∞	$e^{0,12} - 1$	0,12749685	12,7497



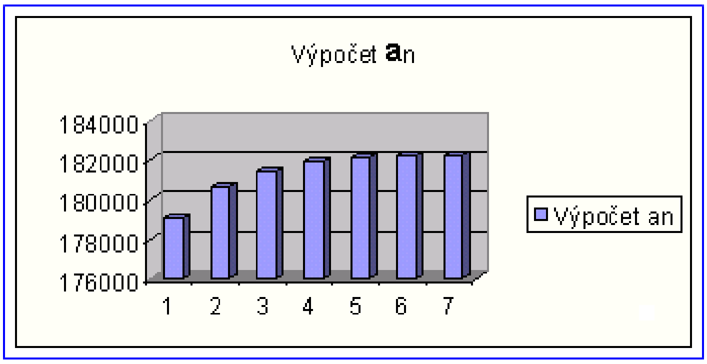
Úloha 2. Aká je výsledná hodnota kapitálu 100.000 Sk, ktorý je uložený v banke pri 6 % úrokovej miere p.a. na 10 rokov pri ročnom, polročnom, štvrťročnom, mesačnom, týždennom, dennom a spojitom úrokovaní? (Nech základ pri ročnom úrokovaní je 100 %).

Riešenie

Obdobie úrok.		Vzorec pre a_n	Výpočet a_n	$a_n v$ %
1	1	$100000.1{,}06^{10}$	179084,7697	100,00 %
2	2	$100000.1{,}03^{20}$	180611,1235	100,85 %
3	4	$100000.1{,}015^{40}$	181401,8409	101,29 %
4	12	$100000.1{,}005^{120}$	181939,6734	101,59 %
5	52	$100000.1{,}001153845^{520}$	182148,7569	101,71 %
6	360	$100000.1{,}00016667^{3600}$	182204,9568	101,742 %
7	∞	$100000.e^{0,6}$	182211,8800	101,746 %

Časová hodnota peňazí

Základným princípom časovej hodnoty peňazí je, že štátna mena (napr. koruna) má dnes väčšiu hodnotu , akú bude mať o rok. Časová hodnota peňazí ovplyvňuje kapitálový trh a finančné rozhodovanie.



Napr. máme 100 Sk. Uložíme ich do banky pri 5 % úrokovej sadzbe. O rok budeme mať 104,25 Sk (15 % je daň z úrokov). Ale zo 100 korún, ktoré dostaneme o rok budeme mať iba 100 Sk.

Pre výpočet súčasnej hodnoty h_S a budúcej hodnoty h_B *platí vzťah:*

$$h_S = h_B.(1+r)^{-n} \text{ alebo } h_B = h_S.(1+r)^n,$$

pričom $r-$ je úroková sadzba, $n-$ je počet rokov.

Úloha 1. Otec odkázal svojim trom deťom 600 tis. Sk takto: každé dieťa dostane rovnaký diel po dosiahnutí 18 rokov z peňazí, ktoré sú uloŽené v banke pri 5 % úrokovej miere a polročnom úrokovaní (p.s.). V tom čase mali deti 12, 14, 17 rokov. Akú čiastku dostane kaŽdé dieťa po dosiahnutí 18 rokov? Bol otec spravodlivý?

Riešenie 1

$600000 = x.(1 + 0{,}025\ )^{-2} + x.(1 + 0{,}025\ )^{-8} + x.(1 + 0{,}025\ )^{-12}$

$600000 = x.(\ 0{,}951814 + 0{,}820747 + 0{,}743556\ )$

$600000 = x.\ 2{,}516117 \Rightarrow \quad x = 238\ 462{,}68$ Sk

Spolu vyplatených: $s = 3\ .\ 238\ 462{,}68 = 715388{,}04$ Sk

Analýza riešenia 1

Počiatočný vklad 600000 Sk, stav vkladu po roku $1{,}025^2\ .\ 600000 = 630\ 375$ Sk.
Vyplatenie dieťaťa A – 238 462,68 Sk, zostatok 391 912,32 Sk.
Stav vkladu po ďalších troch rokoch $1{,}025^6\ .\ 391\ 912{,}32 = 454498{,}14$ Sk.
Vyplatenie dieťaťa B – 238 462,68, zostatok 216 035,46 Sk.
Stav vkladu po ďalších dvoch rokoch $1{,}025^4\ .\ 216\ 035{,}46 = 238\ 462{,}72$ Sk.
Z tejto čiastky bolo vyplatené dieťa C.
(Rozdiel + 4 haliere vznikol zaokrúhlením.)
Otec nebol spravodlivý, lebo nezohľadnil časovú hodnotu peňazí.

Riešenie 2

$a = 1{,}025^2\ .\ 200000 = 210\ 125{,}00$ Sk.

$b = 1{,}025^8\ .\ 200000 = 243\ 680{,}58$ Sk.

$c = 1{,}025^{12}\ .200000 = 268\ 977{,}76$ Sk.

Spolu vyplatené čiastky: $s = a + b + c = 722\ 783{,}34$ Sk.

Analýza riešenia 2

Zhodnotenie kapitálu 600 000 Sk po roku $1{,}025^2\ .\ 200000 = 210\ 125{,}00$ Sk.
Vyplatenie tretiny kapitálu dieťaťu a $=630\ 375\ /\ 3 = 210\ 125{,}00$ Sk. Zostatok kapitálu 420 250 Sk, zhodnotíme tri roky $1{,}025^6.420\ 250 = 487\ 361{,}16$ Sk.
Vyplatenie polovice zostatku kapitálu dieťaťu $b = 487\ 361{,}16\ /\ 2 = 243680{,}58$ Sk.
Zostatok kapitálu 243 680,58 Sk zhodnotíme dva roky $1{,}025^4.243\ 680{,}58 =$ 268 977,76 Sk.

Záver riešenia úlohy 1

Z analýzy riešenia 2 vidíme, že výsledky odpovedajú výsledkom riešenia 2.

Medzi výsledným zhodnotením kapitálu v riešení 1 a riešení 2 je rozdiel 7395,30 Sk.

Tento rozdiel v prospech riešenia 2 vyšiel preto, lebo v riešeniach bol zvolený rôzny prístup k časovej hodnote peňazí a zmenil sa aj princíp rozdelenia peňazí medzi tri deti.

Úloha 2. Mladá rodina dostala od štátneho fondu rozvoja bývania na stavbu bytu pôžičku vo výške 600 000 Sk s dobou splatnosti 30 rokov pri 3 % úrokovej miere (p. a.). Vypočítajte mesačné splátky tohto hypotekárneho úveru a výslednú splatnú čiastku celej pôžičky.

Riešenie

a_{360}= 600 000 i =3 / (12.100) = 0,0025 t =30v =1 / (1 + i) n= 30.12 = 360

x =(a_{360}. i)/(1 - (1 + i)$^{-n}$) = (600 000 . 0,0025) / (1 - 1, 0025^{-360})

x =1500 / (1 - 0,407026546) = 1500 / 0,592973454 = **2529,6242 Sk**

v = n . x = 360 . 2529,6242 = 910664,7125 Sk

Výpočet banky bol takýto:

Mesačnú splátku 2530 Sk zaplatiť 359–krát . . . 908270,00 Sk

Posledná splátka 2394,70 Sk . . . . 2394,70 Sk

Výsledná splátka celej pôžičky podľa banky 910664,70 Sk

Rozdiel 1 halier medzi našim výpočtom a výpočtom banky vznikol zaokrúhlením.

Odpoveď: Mesačná splátka hypotekárneho úveru je 2529, 6242 Sk

Výsledná splátka celej pôŽičky činí 910664,7125 Sk

Záver

Širšie uplatnenie efektívnej úrokovej sadzby a úrokovej intenzity, ako aj časovej hodnoty peňazí v praxi umožňuje spestriť finančné rozhodovanie v živote a dá sa vhodne využiť vo výučbe numerickej matematiky, ako aj pri výučbe odborných a voliteľných predmetov na technickej univerzite.

Literatúra

[1] Majerčák, J.: *Finančná matematika a kapitálový trh*, PVT Bratislava, divízia Prešov, 1996.

[2] Hrubina, K. a kol.: *Riešené úlohy algoritmami numerických metód*, INFORMATECH, Košice, 2002.

[3] Cipra, T.: *Finanční matematika v praxi*, EDICE HZ, Praha, 1993.

Adresa autora:

RNDr. Jozef Majerčák

Technická univerzita Košice

Katedra informatiky, matematiky a fyziky

Bayerova 1

080 01 Prešov

e-mail: majercak.jozef@fvt.sk

O experimente v triede pre nadané deti

Anna Machalová, Mária Majherová

Abstract. *We support teaching principles of statistics and probability as early as possible. This can be achieved via statistical analysis of appropriate real life situations and problems. We describe a statistical experiment related to the eye colour of children and parents in the fourth grade of a primary schol.*

Úvod

Pravdepodobnosť a štatistika sú časti matematiky, kde môže učiteľ naplno využívať reálne situácie. Zdá sa však, že takých príkladov z reálneho sveta je v učebniciach málo, resp. nezaujmú. Pri sledovaní obľúbenosti, tejto matematickej disciplíne patria už dlhšie obdobie koncové miesta. Možno aj to bolo príčinou, prečo sa výučba zaradila do posledných ročníkov. Na Slovensku však existujú nielen základné školy, ale aj stredné, kde sa žiakom vedomosti z týchto oblastí matematiky vôbec nesprostredkúvavajú. Učitelia ako hlavný dôvod uvádzajú predimenzovanosť učiva v ročníkoch, do ktorých sú tieto oblasti matematiky zaradené (Ácsová, 2004).

V súčasných osnovách sú prvé úlohy z pravdepodobnosti v 8. ročníku. Úlohy sú spojené s osvojením si pojmov náhodný pokus, náhodná udalosť a relatívna početnosť. Žiaci sa učia zaznamenať výsledky náhodných pokusov a vypočítať relatívnu početnosť, ktorú vyjadrujú zlomkom, desatinným číslom alebo percentami (Šedivý, 2001). V 9. ročníku sa zoznamujú s pojmami štatistický súbor, štatistická jednotka, znak, početnosť, relatívna početnosť, aritmetický priemer a s grafickým znázornením údajov (Šedivý, 2002).

Diskusie na konferenciách a odborných seminároch nás podnietili k tomu, aby sme aj my „overili“ tézu, že aj nižšie ročníky zvládnu základy nepopulárnej pravdepodobnosti a štatistiky. Pripravili sme preto malý projekt. Podľa Ácsovej (2004) sme sa zamerali najskôr na „zber dát“, lebo práve oblasť štatistiky vychádza z empirických skúseností žiakov a paralelne sme ku štatistike predstavili aj poznatky z pravdepodobnosti.

Popis experimentu

Tento projekt sme realizovali na ZŠ Šmeralova v Prešove so žiakmi triedy pre nadané deti. Išlo o 4. ročník a prieskum prebehol na konci školského roka. Námetom bola farba očí a následne vyslovená hypotéza (tento termín sme pred žiakmi nevyslovili), že dieťa má väčšiu šancu zdediť po rodičoch tmavú farbu očí ako svetlú. Úlohou žiakov bolo zozbierať štatistické údaje a spracovať ich.

Celý experiment sa začal rozhovorom so žiakmi. Dozvedeli sme sa, že nevedia akú farbu očí majú ich spolužiaci a tak bol problém odpovedať na otázku „Častejšie stretneš „svetlookého“ alebo „tmavookého“ spolužiaka?“. O čom boli presvedčení, bolo to, že deti majú väčšinou takú farbu očí, ako jeden z ich rodičov, ale nemusí to byť pravidlom. Žiaci poznajú také rodiny, kde len jeden z rodičov má hnedú farbu očí a všetky ich deti majú hnedé oči. Teda sa zdá, že deti budú mať častejšie hnedé oči, keď aspoň jeden z ich rodičov má hnedé oči. (To nás viedlo k vysloveniu hypotézy.)

Vyzvali sme žiakov, aby nám pomohli zozbierať čo najviac potrebných údajov. Úlohou dvojice, príp. trojice bolo v priebehu týždňa vyplniť pripravenú tabuľku (so záhlavím meno, trieda, vek, farba očí, farba očí matky, farba očí otca, farba očí súrodenca) pre daný určený ročník. Z nazbieraných údajov sme získali štatistický súbor, ktorý mal 189 jednotiek. Doplnili sme ho dodatočne na 200 (kvôli jednoduchšiemu počítaniu). Celý súbor sme potom rozdelili na 7 menších disjunktných podsúborov s rozsahmi 20, 20, 25, 33, 33, 40 a 29. Podsúbor s počtom 29 jednotiek sme spracovali bez žiakov, ostatné spracovali vytvorené skupiny (dvojice až trojice žiakov).

Spracovanie zozbieraných dát a diskusia

Žiaci mali najskôr zistiť početnosti výskytu obmien znaku (farba očí) u detí, t. j. spočítať koľko detí má čierne oči (č), koľko hnedé (h), modré (m), modrozelené (mz), sivé (s), sivomodré (sm), zelené (z), zelenohnedé (zh). Vytvorenie tabuľky sme ukázali na tabuľu, aby bola jednotná pre všetky skupiny. Jednotlivé početnosti sme potom zapísali do spoločnej tabuľky (na tabuli), pozri tabuľku 1.

Tabuľka 1: Početnosti obmien farby očí v jednotlivých skupinách a celková početnosť.

f. očí	**20**	**20b**	**25**	**33**	**33b**	**40**	**29**	**200**	**100%**
č	0	0	0	2	0	0	0	2	1%
h	12	6	11	17	16	17	13	92	46%
m	2	4	5	7	9	10	5	42	21%
mz	1	0	2	2	1	4	2	12	6%
s	0	0	2	0	0	0	0	2	1%
sm	0	0	0	1	1	0	0	2	1%
z	4	6	5	1	6	8	9	39	19,5%
zh	1	4	0	3	0	1	0	9	4,5%

Sčítaním jednotlivých početností po riadkoch sme získali príslušné početnosti pre celý súbor. Nič z doteraz uvedených úkonov nerobilo žiakom problém. Myslíme si, že takéto úlohy môžu tvoriť celkom dobré námety na precvičovanie sčítania, ale aj odčítania už na 1. stupni ZŠ.

Ďalším krokom bol výpočet relatívnej početnosti. V 4. ročníku síce žiaci poznajú jednoduché zlomky, ale nevedia ich porovnávať, nepracujú ani s desatinnými číslami, či percentami, preto sa výpočet javil ako problém. Zdalo sa, že najschodnejšia cesta je vyjadrenie relatívnej početnosti v percentách, pretože žiaci o nich mali aspoň intuitívnu predstavu, nakoľko ich písomné práce boli vyhodnocované práve týmto spôsobom.

Prepočet sme robili najskôr spoločne na tabuli pre celý štatistický súbor. Otázka: Koľko detí by malo hnedé oči, ak by sme z našich 200 vybrali len 100, viedla k správnej úvahe. Žiaci nemali problém prísť na to, že detí s hnedými očami bude 2 krát menej ako je všetkých detí s hnedými očami, teda 46, podobne s modrými očami bude 42:2=21, z vybraného počtu 100 detí. Pomocou nájdeného algoritmu (vydelením 2) sme prepočítali početnosti pre všetky znaky a overili sme si, či vypočítané početnosti v jednotlivých skupinách tvoria 100 (%). Žiakom sme vysvetlili, že to, čo sme spoločne vypočítali, je tzv. relatívna početnosť vyjadrená v percentách. Pomocou nej môžeme ľahko porovnať rôzne veľké štatistické súbory, ktoré sledujú tie isté znaky.

Žiaci potom dostali za úlohu vypočítať relatívne početnosti v percentách pre svoje podsúbory. Spoločne sme však našli pravidlo (ako sa z danej početnosti dostať ku 100 vynásobením, príp. delením). Žiaci zistili, že keď celý súbor má 20 jednotiek, tak musia každú početnosť vynásobiť číslom 5, podobne pre 25 jednotiek číslom 4. Pri 40 tiež rýchlo vznikol návrh vydeliť číslom 2 a vynásobiť číslom 5. Najväčší problém vznikol pri 33 člennom súbore. Po krátkej diskusii sme sa dohodli na tom, že pomerne presný výpočet získame vynásobením číslom 3, pozri tabuľku 2.

Tabuľka 2: Vypočítané relatívne početnosti pre rôzne rozsahy podsúborov.

f. očí	**20**	**100%**	f. očí	**25**	**100%**	f. očí	**33**	**99%**
č	0	0%	č	0	0%	č	2	6%
h	12	54%	h	11	44%	h	17	51%
m	2	10%	m	5	20%	m	7	21%
mz	1	5%	mz	2	8%	mz	2	6%
s	0	0%	s	2	8%	s	0	0%
sm	0	0%	sm	0	0%	sm	1	3%
z	4	20%	z	5	20%	z	1	3%
zh	1	5%	zh	0	0%	zh	3	9%

Získané relatívne početnosti v jednotlivých podsúboroch sme porovnali s relatívnymi početnosťami celého súboru. Žiaci si všimli, že najväčšie diferencie boli pri súboroch s malými početnosťami. Uvedomili si fakt, že ak chceme mať čo najpresnejší výsledok, musíme mať zistených čo najviac dát.

V poslednej časti hodiny sme sa vrátili k vyslovenej hypotéze o dedení tmavej farby očí (z úvodu hodiny). Na jej overenie sme použili znamienkový test (Riečan, Komorník, 2005). Kvôli jednoznačnosti sme vylúčili možnosť nezdedenia farby, vyškrtnutím riadku. Potom žiaci mali nájsť a označiť znamienkom + tie riadky, kde mama alebo otec, práve jeden z nich, má tmavé oči (hnedé alebo čierne) a spočítať počet znamienok. Ďalej v riadkoch, ktoré boli označené znamienkom + mali nájsť a opäť označiť (do ďalšieho stĺpca) znamienkom + tie riadky, kde dieťa zdedilo tmavé oči a znovu spočítať počet znamienok. Výsledky sme zapisovali na tabuľu, pozri tabuľku 3.

Tabuľka 3: Počty „+“ v jednotlivých skupinách.

skupina	1	2	3	4	5	6	7	8
pôvodný počet	20	20	25	33	33	40	29	200
upravený počet	7	7	17	19	16	24	21	111
počet zdedených								
tmavých očí (počet +)	4	3	8	14	9	12	10	60
svetlých očí	3	4	9	5	7	12	11	51

Žiakom sme vysvetlili, že ak chceme, aby naše tvrdenie platilo skoro s istotou, musí aj dostatočne veľká časť detí zdediť tmavú farbu očí po rodičoch. Ukázali sme im tabuľku (Riečan, Komorník, 2005, strana 18), ktorá uvádza potrebný počet detí pre rôzne počty rodičovských párov na uznanie nášho tvrdenia. Potom sme spoločne pomocou tejto tabuľky zisťovali, či aspoň v jednej skupine sa podarilo potvrdiť hypotézu. Stalo sa tak len v jednej 33 člennej skupine. Nakoniec sme získané výsledky spočítali pre celý súbor a výsledok našu hypotézu nepotvrdil. Mohli sme teda konštatovať, že v našom zmenšenom súbore (z pôvodných 200 „iba“ 111), neplatí, že deti dedia tmavú farbu očí častejšie ako svetlú.

Záver

Pri tomto experimente sa o.i. ukázalo aj nadšenie detí pri získavaní údajov a následné vyhodnotenie „ako to dopadlo“. Podobných námetov môže učiteľ nájsť viac aj pri rôznych hrách, kedy „zber dát“ žiakov baví.

Základné pojmy sme nemuseli definovať, žiaci ich intuitívne tušili. Nevieme však, ako si tieto pojmy zapamätali, pretože na overenie, či by boli schopní použiť ich aj pri iných reálnych situáciách sme nemali čas (k dispozícii bola len jedna vyučovacia hodina). Myslíme si, že na tomto stupni by ani nemalo byť cieľom vedieť presnú definíciu štatistického termínu, ale aby žiaci mohli začať získavať prvé kontakty s týmito pojmami. Tým, že nový pojem používa učiteľ, postupne si ho osvojí aj žiak.

Ďalšie pozitívum bolo, keď žiaci pochopili, že presnosť výsledkov závisí od počtu údajov. Čím viac údajov získame, tým môžeme presnejšie určiť hodnoty (v našom prípade relatívne početnosti).

Vzhľadom k tomu, že sme experiment robili v triede pre nadané deti, nevieme ako by dopadol u ich rovesníkov v klasických triedach. Predpokladáme, že reakcie by boli pomalšie a tým by bol potrebný aj dlhší čas pri spracovávaní. Priestor pre overenie týchto našich tvrdení sa ukazuje buď v čase, keď je pred prázdninami, alebo aj v rámci rozširujúceho učiva v 5. ročníku v spojení s témami „Elementárne poznatky z logiky“ (označ práve jeden, ...), príp. „Kalkulačka a počítanie s využitím kalkulačky“ (relatívna početnosť a jej vyjadrenie pomocou desatinného čísla).

Literatúra

[1] Ácsová,S.: *Kedy a ako vyučovať pravdepodobnosť a štatistiku na ZŠ a SŠ*. Zborník z konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra“. KU Ružomberok, 2004.

[2] Riečan, B., Komorník, J.: *Pravdepodobnostné modely reálnych situácií.* Ružomberok: Pedagogická fakulta, 2005.

[3] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 8. ročník ZŠ, 2. časť.* Bratislava: SPN, 2001.

[4] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 9. ročník ZŠ, 2. časť.* Bratislava: SPN, 2002.

Adresa autorov:
Mgr. Anna Machalová
Katedra matematiky FHPV PU
ul. 17. novembra č.1
081 16 Prešov
e-mail: machala@unipo.sk

Mgr. Mária Majherová
Katedra matematiky FHPV PU
ul. 17. novembra č.1
081 16 Prešov
e-mail: majherov@unipo.sk

Uwagi na temat elementów obrazu pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów III roku matematyki

Joanna Major

Abstract. *This paper presents some remarks on understanding of the absolute value of a real number by the students.*

Zagadnienia dotyczące rozumienia i procesu kształtowania w umyśle uczącego się pojęć matematycznych są przedmiotem badań wielu dydaktyków. Prowadzone przeze mnie badania dotyczą także tych zagadnień. Opisywane w niniejszym artykule uwagi stanowią fragment wyników badań wstępnych dotyczących rozumienia przez studentów pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Jak wiadomo kształtowanie się pojęć matematycznych jest procesem długotrwałym, który wymaga bardzo wielu zabiegów dydaktycznych na wszystkich etapach kształcenia (por. Nowecki, 1985; Sierpińska, 1985; Stachurska, 1985). Jednocześnie: *Problem kształtowania pojęć matematycznych ma w nauczaniu matematyki szczególne znaczenie. Bez rozumienia tych pojęć, w odpowiednim dla danego poziomu nauczania zakresie, nie jest możliwe uzyskanie zadowalających wyników nauczania matematyki* (Nowecki, 1985). A. Sierpińska stwierdza, że *budowanie pojęć wymaga stałego wzajemnego oddziaływania między uczniem a sytuacjami problemowymi, oddziaływania dialektycznego, w którym angażowałby swoją poprzednią wiedzę, poprzednie koncepcje, poddawał je rewizji, modyfikował, uzupełniał lub odrzucał w celu wykształcenia nowych koncepcji* (Sierpińska, 1985).

Zauważmy, że każdym z pojęć matematycznych uczniowie i studenci wiążą pewne wyobrażenia myślowe, reguły, schematy, strategie operowania nimi, intuicje, fakty, własności przyjęte jako prawdziwe w wyniku logicznej analizy lub zaakceptowane jako obowiązujące, choć niekoniecznie zgodne z intuicjami. Taką całość, strukturę poznawczą, A. Sierpińska nazywa *koncepcją pojęcia* (por. Sierpińska, 1985). W literaturze dydaktycznej funkcjonują także terminy *concept image* lub *obraz pojęcia* (por. Tall, Vienner, 1981, Bugajska-Jaszczołt, 2001, Przeniosło, 2001). W strukturze tej istotne jest dostrzeganie zależności między jej elementami i związków z obrazami innych pojęć. Przy czym nie wszystkie elementy struktury bywają uświadomione, a niektóre mogą pozostawać w sprzeczności ze sobą. Obrazów pojęć powstałych w umyśle ucznia i studenta nie można obserwować bezpośrednio. O ich istnieniu możemy dowiedzieć się poprzez analizę działań, sformułowań i rozwiązań proponowanych przez uczącego się. (por. Sierpińska, 1985).

W dalszej części omówię trzy komponenty obrazu pojęcia wartości bezwzględnej posiadane przez studentów III roku matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Będą to: *baza intuicyjno-skojarzeniowa* (tj. wyobrażenia i intuicje), *elementy systemowe* (m. in. związki z innymi pojęciami, zależności pomiędzy elementami odnoszącymi się do danego pojęcia) oraz *konteksty sytuacyjne* (obrazy pewnych sytuacji, rzutujące na związki danego pojęcia z innymi, zadania, w których mamy do czynienia z pojęciem).

Wyróżnione części poszczególnych komponentów obrazu pojęcia zostały przeze mnie określone na podstawie analizy wytworów działania 30 studentów. W czasie badań studenci zamieszczali pisemne odpowiedzi na pytania kwestionariusza. Poniżej zamieszczę część zadań z kwestionariusza badań, które przyczyniły się do scharakteryzowania poszczególnych komponentów obrazu pojęcia wartości bezwzględnej.

1. Z czym kojarzy Ci się pojęcie wartości bezwzględnej?

2. Podaj przykłady 3 zadań (problemów), w których występuje pojęcie wartości bezwzględnej oraz przedstaw schematyczny plan rozwiązania tych zadań.

3. Czy dostrzegasz związki wartości bezwzględnej z pojęciem odległości? Swoją odpowiedź uzasadnij.

4. Opisz związki wartości bezwzględnej z innymi znanymi Ci pojęciami.

5. Opisz znane Ci zastosowania pojęcia wartości bezwzględnej.

6.Czy znane Ci są uogólnienia pojęcia wartości bezwzględnej? Jeśli tak to krótko je opisz.

Na podstawie analizy zebranego materiału badawczego stwierdziłam, że *bazę intuicyjo-skojarzeniową* pojęcia wartości bezwzględnej u badanych studentów stanowią:

- definicje pojęcia,
- znaki graficzne (skojarzone z „pionowymi kreskami"),
- symbole, rozumiane jako „znaki do działania" („coś trzeba zrobić"),
- narzędzia wykonawcze, związane z rozwiązywaniem zadań, w których występuje pojęcie,
- różne nazwy omawianego pojęcia.

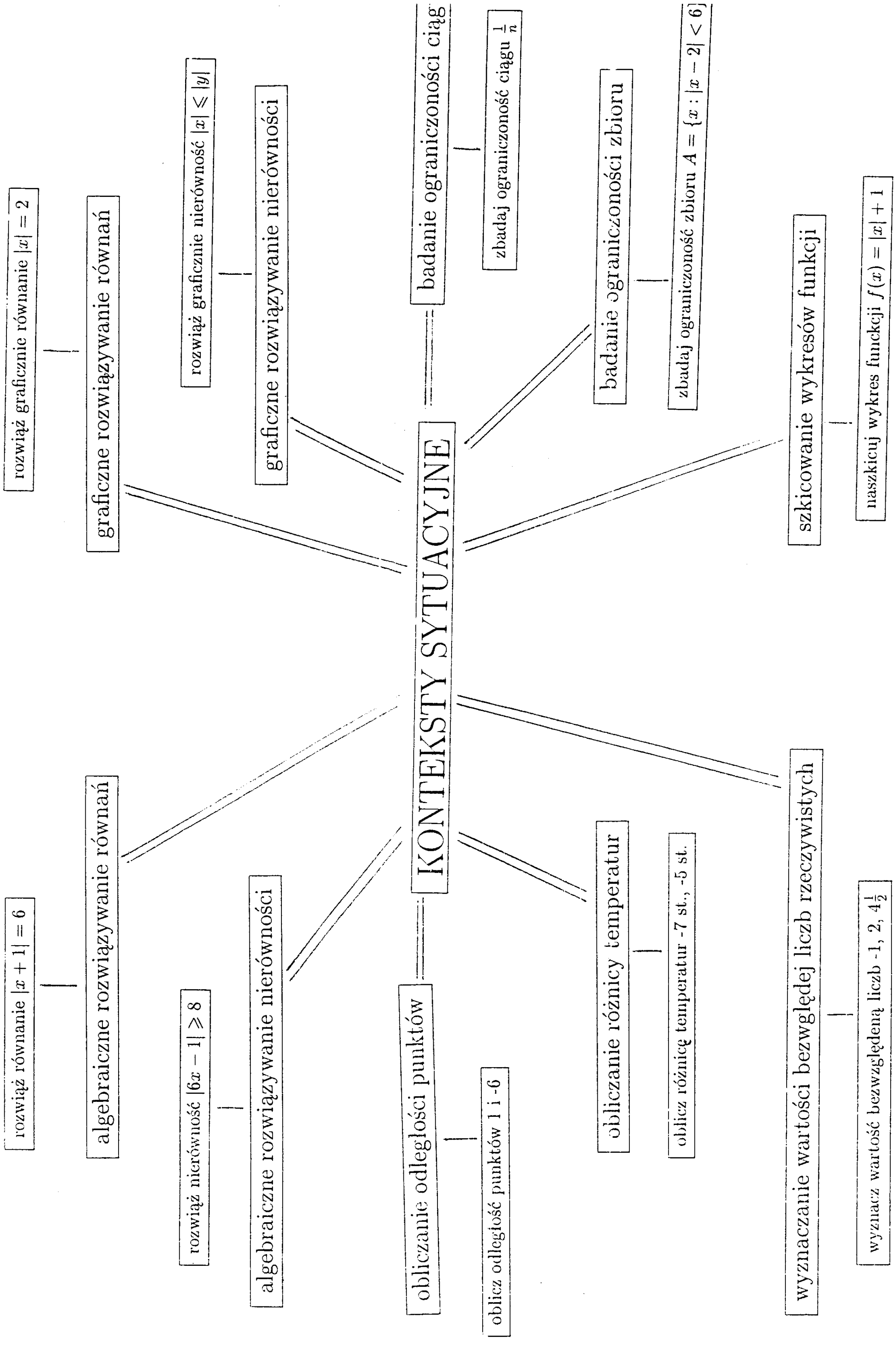
W bazie intuicyjnyjno-skojarzeniowej niektórych studentów można ponadto wyróżnić element związany z postrzeganiem wartości bezwzględnej jako funkcji, operatora działającego ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Do bazy intuicyjno-skojarzeniowej należą także inne pojęcia matematyczne takie jak: oś liczbowa, odległość oraz liczba.

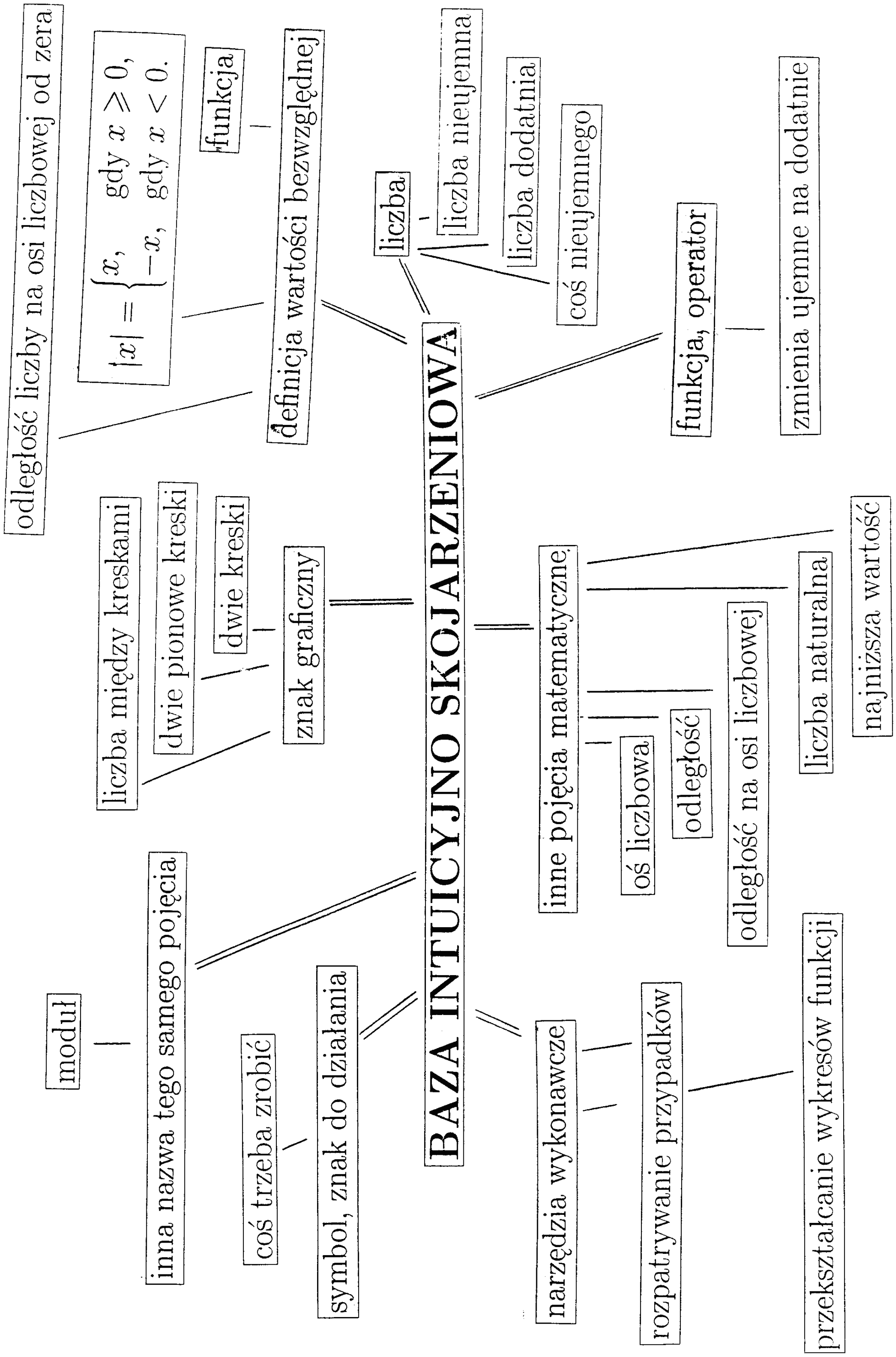
Opisując *elementy systemowe* stanowiące element obrazu pojęcia wartości bezwzględnej należy stwierdzić, że wielu studentów podaje tu związki wartości bezwzględnej z pojęciami, które pozwalają definiować wartość bezwzględną liczby rzeczywistej (pierwiastek drugiego stopnia liczby rzeczywistej nieujemnej, znak liczby i odległość). Niektóre osoby wiązały omawiane pojęcie z równaniami, nierównościami i funkcjami, w których występuje wartość bezwzględna. Badani wskazywali więc na wybrane konteksty (zadania), w których mieli do czynienia z wartością bezwzględną. Ponadto 1 osoba podała uogólnienie omawianego pojęcia, którym jest norma. Badani wiążą także wartość bezwzględną z pojęciami czasu i liczby naturalnej. Według studentów pojęcia te posiadają podobne cechy (są nieujemne).

Charakteryzując *konteksty sytuacyjne* należy stwierdzić, że u większość badanych do tego elementu obrazu wartości bezwzględnej należą:

- algebraiczne rozwiązywanie równań i nierówności,
- graficzne rozwiązywanie równań i nierówności,
- szkicowanie wykresów funkcji,
- wyznaczanie wartości bezwzględnych liczb rzeczywistych,
- obliczanie odległości punktów,
- badanie ograniczoności ciągu oraz zbioru oraz
- obliczanie różnicy temperatur.

Na uwagę zasługuje fakt, że badani studenci posiadają bardzo ubogi kontekst, w którym osadzają pojęcie wartości bezwzględnej, nie dostrzegają oni często wielości jego zastosowań jak i możliwych uogólnień. Zarówno baza intuicyjno-skojarzeniowa, elementy systemowe jak i konteksty sytuacyjne stanowiące elementy obrazu pojęcia wartości bezwzględnej poszczególnych studentów związane są w większości z nich


KONTEKSTY SYTUACYJNE
graficzne rozwiązywanie równań
rozwiąż graficznie równanie $|x| = 2$
graficzne rozwiązywanie nierówności
rozwiąż graficznie nierówność $|x| \leqslant |y|$
badanie ograniczoności ciąg
zbadaj ograniczoność ciągu $\frac{1}{n}$
badanie ograniczoności zbioru
zbadaj ograniczoność zbioru $A = \{x : |x - 2| < 6\}$
szkicowanie wykresów funkcji
naszkicuj wykres funckji $f(x) = |x| + 1$
algebraiczne rozwiązywanie równań
rozwiąż równanie $|x + 1| = 6$
algebraiczne rozwiązywanie nierówności
rozwiąż nierówność $|6x - 1| \geqslant 8$
obliczanie odległości punktów
oblicz odległość punktów 1 i -6
obliczanie różnicy temperatur
oblicz różnicę temperatur -7 st., -5 st.
wyznaczanie wartości bezwzględej liczb rzeczywistych
wyznacz wartość bezwzględną liczb -1, 2, $4\frac{1}{2}$


BAZA INTUICYJNO SKOJARZENIOWA
definicja wartości bezwzględnej
odległość liczby na osi liczbowej od zera
$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$
funkcja
liczba
liczba nieujemna
liczba dodatnia
coś nieujemnego
funkcja, operator
zmienia ujemne na dodatnie
znak graficzny
dwie kreski
dwie pionowe kreski
liczba między kreskami
inne pojęcia matematyczne
najniższa wartość
liczba naturalna
odległość na osi liczbowej
odległość
oś liczbowa
inna nazwa tego samego pojęcia
moduł
symbol, znak do działania
coś trzeba zrobić
narzędzia wykonawcze
rozpatrywanie przypadków
przekształcanie wykresów funkcji

tylko z elementarnymi pojęciami matematycznymi poznawanymi w szkole podstawowej i średniej. Można tu postawić hipotezę, iż większość studentów nie rozumie istoty omawianego pojęcia. Możnaby powiedzieć, że wiele badanych osób nie dostrzega także związków zachodzących pomiędzy pojęciami matematyki wyższej i „szkolnym“ pojęciem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Jednocześnie wyniki prowadzonych przeze mnie badań wskazują, że studenci potrafią, w wielu stereotypowych sytuacjach „posługiwać“ się omawianym pojęciem pojawiającym się w kontekście pojęć matematyki wyższej, nieujawniając przy tym powierzchownego rozumienia (albo całkowitego braku rozumienia) wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Literatúra

[1] Bugajska-Jaszczołt B.: 2001, O rozumieniu pojęcia kresu zbioru ograniczonego przez uczniów liceum, *Roczniki Polskiego Towarzystwa matematycznego, Seria V, Dydaktyka matematyki* 23, 51-93.

[2] Nowecki, B.∼J.: 1985, Błędy w definiowaniu pojęć matematycznych, *Oświata i Wychowanie*, wersja B, 21–25.

[3] Przeniosło, M.: 2001, Trudności związane z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa matematycznego, Seria V, Dydaktyka matematyki* 23, 95-124.

[4] Sierpińska, A.: 1985, O niektórych pojęciach w uczeniu się pojęcia granicy - na podstawie studium przypadku, *Roczniki Polskiego Towarzystwa matematycznego, Seria V, Dydaktyka matematyki* 4,107-167.

[5] Stachurska, B.: 1985, Kontrola rozumienia pojęć matematycznych, *Oświata i Wychowanie*, wersja B, 39–43.

[6] Tall, D., Vienner S.: 1981, Concept Image and Concept Definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Adresa autora:
Mgr. Joanna Major
Instytut matematyki
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Ul. Podchorażych 2
30-084 Kraków
Poľsko
e-mail: jmajor@ap.krakow.pl

Uwagi na temat wiedzy studentów III roku matematyki w zakresie szkolnych treści rachunku prawdopodobieństwa

Maciej Major

Abstract. *The paper deals with intuitive understanding of probability by III year students before their starting learn theory of probability.*

Opisywane w tym artykule wyniki stanowią kontynuację badań prowadzonych przeze mnie od 10 lat, a dotyczących stanu wiedzy probabilistycznej studentów matematyki sekcji nauczycielskich. Opisywane tu badania prowadzone były wśród 37 studentów III roku Akademii Pedagogicznej w Krakowie przed rozpoczęciem ich akademickiego kursu rachunku prawdopodobieństwa. Wyniki badań miały z jednej strony pokazać jak studenci subiektywnie oceniają poziom swojej wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa ze szkoły średniej i jaki jest aktualny poziom ich wiedzy z tej dziedziny matematyki (ile pamiętają ze szkoły średniej). Z drugiej zaś strony mogą być one płaszczyzną odniesienia do wyników jakie zamierzam uzyskać w badaniach, które będą przeprowadzone w tej samej grupie po zakończeniu kursu rachunku prawdopodobieństwa. Badania te korespondują z badaniami prowadzonymi w Polsce w latach 1986-1990 przez zespół pracujący w ramach Resortowego Programu Badań Podstawowych RP. III. 30. na temat stanu wiedzy i przygotowania matematycznego studentów sekcji nauczycielskich.

Studenci otrzymali do wypełnienia kwestionariusz, który składał się z 8 pytań i zadań.

KWESTIONARIUSZ BADAŃ

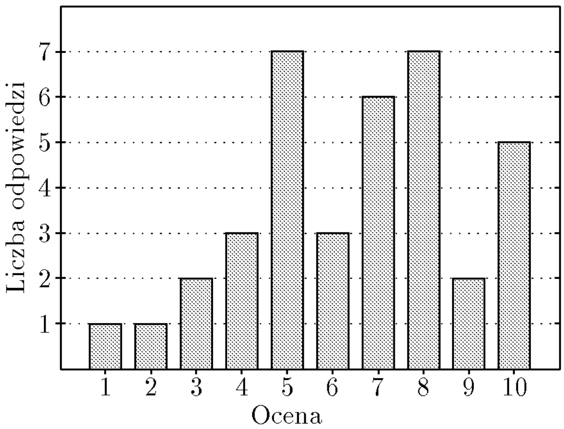
Oceń w skali od 1 do 10 następujące stwierdzenia.
Uwaga: 1 oznacza, że całkowicie nie zgadzasz się z danym stwierdzeniem, zaś 10, że całkowicie się z nim zgadzasz.
Rachunek prawdopodobieństwa znałem(am) dobrze ze szkoły średniej ......
Rachunek prawdopodobieństwa sprawiał mi w szkole średniej trudności ......
Pojęcie prawdopodobieństwa znałem(am) ze szkoły średniej ......
Pojęcie prawdopodobieństwa sprawiało mi w szkole średniej trudności ......
Własności prawdopodobieństwa znałem(am) dobrze ze szkoły średniej ......
Z czym kojarzy Ci się pojęcie prawdopodobieństwa? Zapisz swoją odpowiedź.
Podaj definicję prawdopodobieństwa.

Wyobraź sobie sytuację, w której musisz opowiedzieć koleżance lub koledze co to jest prawdopodobieństwo. Zapisz jak objaśniłbyś znaczenie tego terminu.
Opisz związki prawdopodobieństwa z innymi znanymi Ci pojęciami.
Opisz znane Ci zastosowania prawdopodobieństwa.
Podaj znane Ci twierdzenia dotyczące prawdopodobieństwa.
Podaj przykłady 3 zadań (problemów), w których występuje pojęcie prawdopodobieństwa oraz przedstaw schematyczny plan rozwiązania tych zadań.

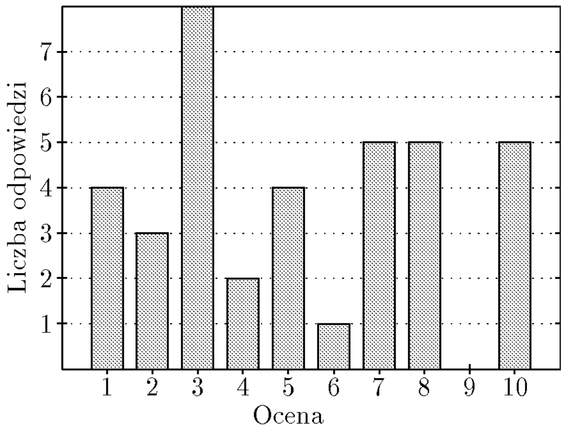
W tym artykule omówię tylko wyniki uzyskane podczas analizy odpowiedzi na pytania 1, 2, 5 oraz 6.

Pytanie 1 miało na celu poznanie subiektywnej oceny studentów w zakresie ich szkolnych pojęć rachunku prawdopodobieństwa. Poniższe diagramy prezentują zestawienie odpowiedzi studentów na omawiane pytanie.

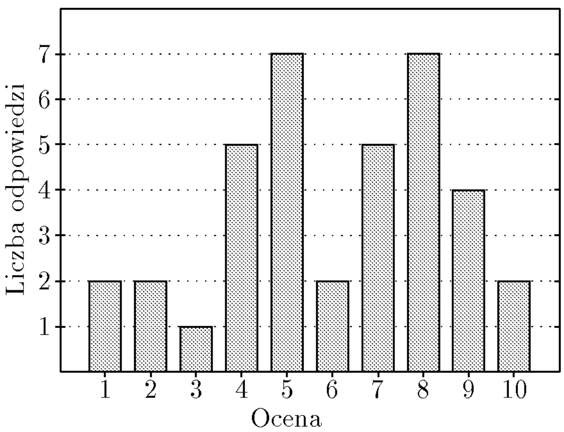
Pytanie 1a



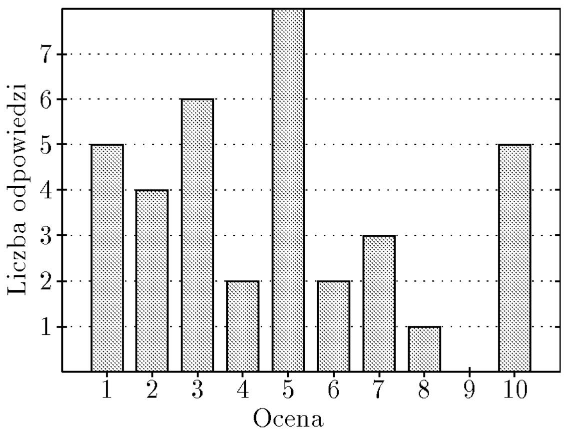
Pytanie 1b



Pytanie 1c



Pytanie 1d



Z przedstawionych diagramów wynika, że badani studenci dość wysoko ocenili swoją znajomość (ze szkoły średniej) rachunku prawdopodobieństwa, a w szczególności pojęcia prawdopodobieństwa. Uznali też, że dość dobrze, w momencie ukończenia szkoły średniej, znali własności prawdopodobieństwa. Odpowiedzi uzyskane na pozostałe dwa pytania są nieco gorsze. Średnie uzyskane dla pytań 1a, 1c, 1e wynoszą odpowiednio: 6.48, 6.03, 5.81, natomiast dla pytań 1b i 1d są bliskie 5 i wynoszą 5.21 i 4.59. Analizując zebrany materiał można stwierdzić, że wyniki są dość zróżnicowane w przypadku poszczególnych osób, niemniej badani na ogół dość wysoko oceniają swoje wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.

Pytanie 2 miało na celu ustalenie z jakimi pojęciami lub też obiektami badani kojarzą pojęcie prawdopodobieństwa. Badani podawali najczęściej po kilka skojarzeń. Analizując ich odpowiedzi można wyróżnić 5 grup skojarzeń. Rachunek prawdopodobieństwa kojarzy się badanym z:

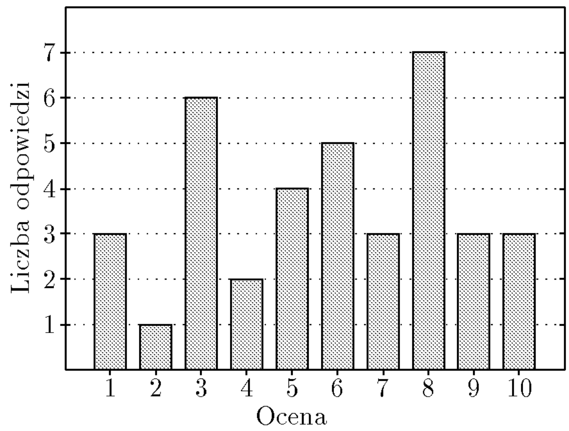
I. pojęciami kombinatorycznymi (21 odpowiedzi);

II. pojęciami teorii rachunku prawdopodobieństwa (6 odpowiedzi);

III. różnymi doświadczeniami losowymi (8 odpowiedzi);

IV. grami losowymi i hazardowymi (9 odpowiedzi);

Pytanie 1e



V. oceną lub przewidywaniem szans wystąpienia zdarzenia (15 odpowiedzi);

VI. matematyzacją sytuacji z życia (1 odpowiedź).

Wśród odpowiedzi zaliczonych do grupy I najczęściej występują kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz permutacje. Badani wymienili tu też pojęcie silni i zbioru.

W grupie II znalazły się pojęcia: zdarzenia losowego, przestrzeni zdarzeń elementarnych, prawdopodobieństwa zdarzenia, schematu Bernoulliego i losowania.

Do grypy III zostały zakwalifikowane te skojarzenia, które odwołują się do doświadczeń losowych. Badani wymienili tu rzut monetą, rzut kostką do gry, losowanie kuli z urny, losowanie osób.

Studenci kojarzą też rachunek prawdopodobieństwa z grami losowymi i hazardowymi. W odpowiedziach zaliczonych do grupy IV badani wskazywali na różne gry hazardowe, wymienili w szczególności totolotek oraz lotto.

Stosunkowo dużo skojarzeń należy do grupy V. Najczęstszą odpowiedzią była: *możliwość zdarzenia się jakiejś sytuacji.* Wystąpiły też odpowiedzi:

z czymś co mogło się zdarzyć,

z przypadkiem losowym,

z wyznaczaniem szansy zajścia zdarzenia,

z przewidywaniem wystąpienia jakiegoś zjawiska,

z obliczaniem na ile może coś się wydarzyć, z szansą na zajście jakiegoś zdarzenia,

z pewną skutecznością zaistnienia zjawiska, itp.

Podsumowując, można stwierdzić, że bardzo dużo skojarzeń dotyczy pojęć kombinatorycznych, a więc jednego z narzędzi wykorzystywanych przy obliczaniu prawdopodobieństw zdarzeń.

Pytanie 5 jest w pewnym stopniu podobne do pytania 2. Celem tego pytania było poznanie jakie związki prawdopodobieństwa z innymi pojęciami matematycznymi zauważają badani studenci. Na to pytanie nie odpowiedziało aż 13 studentów. Niektórzy z nich stwierdzali, że nie znają związków, inni pozostawiali puste miejsce. Stosunkowo w największej liczbie wypowiedzi (29 odpowiedzi) wskazywano na związki rachunku prawdopodobieństwa z kombinatoryką. Wymieniono tu: rachunki związane ze zliczaniem liczby wariacji, obliczaniem liczby permutacji, kombinacji, obliczaniem silni, wyznaczaniem mocy zbiorów.

Podawano też związki prawdopodobieństwa z innymi dziedzinami: statystyką matematyczną (5 odpowiedzi), genetyką (5 odpowiedzi), budownictwem (1 odpowiedź).

Część badanych dostrzega związki prawdopodobieństwa z innymi pojęciami rachunku prawdopodobieństwa takimi jak: zmienna losowa (4 odpowiedzi), przewidywanie wyniku (2 odpowiedzi) czy zdarzenie (1 odpowiedź).

Odpowiedzi na pytanie 6 kwestionariusza dopełniają informacje uzyskane w wyniku analizy odpowiedzi na pytania 2 i 5. Odpowiadając na to pytanie najwięcej osób wskazało bądź na zastosowanie prawdopodobieństwa do oceny lub obliczania szans wygrania w różnych grach losowych i hazardowych, bądź do oceny sprawiedliwości gier bądź do ich projektowania. Wskazywano tu w szczególności na lotto, ruletę, grę w kości, gry z wykorzystaniem monety. Wskazywano też na zastosowanie prawdopodobieństwa w statystyce matematycznej oraz ekonomii: ocena ryzyka przedsięwzięcia finansowego, zagadnienia związane z giełdą papierów wartościowych. Wskazano też na zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa w policji, budownictwie (prawdopodobieństwo zawalenia się np. mostu), medycynie(prawdopodobieństwo zachorowania np. na raka), genetyce, przy planowaniu potomstwa (prawdopodobieństwo zajścia w ciążę) oraz w przepowiadaniu pogody. Zwrócono też uwagę na fakt, że prawdopodobieństwo (funkcja „random") wykorzystywana jest przez informatyków przy pisaniu programów komputerowych. Wśród odpowiedzi, były też takie, które wskazywały na zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań, w których występują treści z rachunku prawdopodobieństwa.

Przeprowadzona analiza pokazuje, że studenci III roku matematyki, pomimo iż dość wysoko oceniają swoje wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, posiadają ubogą wiedzę na ten temat. Związki jakie dostrzegają pomiędzy pojęciem prawdopodobieństwa a innymi pojęciami matematycznymi oraz niematematycznymi, ograniczają się w istocie do potocznego rozumienia prawdopodobieństwa, gier losowych oraz do pojęć kombinatorycznych. Prawdopodobieństwo postrzegane jest przez większość badanych przez pryzmat zadań jakie rozwiązywali oni w trakcie nauki w szkole średniej. Przykłady zadań, jakie proponowali studenci dotyczą prawdopodobieństwa klasycznego. Moim zdaniem na odpowiedzi studentów udzielane w pytaniach 2, 5, 6 niebagatelny wpływ ma duży nacisk kładziony w szkole średniej w procesie rozwiązywania zadań na zastosowanie kombinatorycznych wzorów (na liczbę permutacji, wariacji, kombinacji). Wielu studentów rozpoczynających kurs rachunku prawdopodobieństwa rozwiązywanie zadań wiąże nierozerwalnie z obliczaniem mocy zbioru Ω.

Jednostronne postrzeganie prawdopodobieństwa może być źródłem błędów i trudności na dalszym etapie kształcenia w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. Dlatego licencjackich kurs rachunku prawdopodobieństwa w Akademii Pedagogicznej w Krakowie ma m. in. za zadanie wielostronnie kształtować szkolne pojęcia rachunku prawdopodobieństwa.

Literatúra

[1] Brydak, D. (red): 1990, *Resortowy Program Badań Podstawowych RP. III.30. V1: Diagnoza skuteczności kształcenia nauczycieli matematyki* (synteza badań za lata 1986-1990 oraz przykładowe opracowania pod redakcją Dobiesława Brydaka), Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej, Kraków.

[2] Płocki, A.: 1997, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała.

[3] *Plany i programy studiów dla kierunku matematyka*, http://www.ap.krakow.pl/mat

Adresa autora:
Dr. Maciej Major
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Ul. Podchorażych 2
30-084 Kraków
Poľsko
e-mail: mmajor@ap.krakow.pl

História „nejednej“ pravdepodobnosti

Ivan Masaryk

Abstract. *The aim of this paper is to give some overview of the historical development of the probability theory, as well as to mention some aspects in the teaching of the probability at the primary schools in Slovakia. Here, the history of the probability is studied from the cognitive process point of view, which consists of the motivation, creating the separated and universal models, abstraction and finally generalization.*

Úvod

Do bežnej slovnej zásoby ľudí patrí mnoho výrazov týkajúcich sa náhody a pravdepodobnosti, pretože sa s nimi v bežnom živote stretávajú na každom kroku. Už žiaci na základnej škole používajú slová či zvraty ako „*šanca*“, „*pravdepodobnejší*“, „*možno*“, „*určite*“, „*spravím to na 100 percent*“, či dokonca „*donesiem ti to na 200 percent*“ a iné. Je zaujímavé, že pravdepodobnosť je v bežnej reči zrozumiteľná, naproti skúsenostiam s vyučovaním matematickej teórie pravdepodobnosti. S touto teóriou má problémy ako mnoho študentov tak aj mnoho učiteľov. Skúmanie tohoto rozdielu ma priviedlo i k štúdiu histórie pravdepodobnosti. Túto históriu si uvedieme v modeli poznávacieho procesu, ktorý je prevzatý z [3, s. 23] i keď tu bol použitý v iných súvislostiach. Model sa skladá z

- motivácie,
- tvorby separovaných modelov,
- tvorby univerzálneho modelu,
- poznatku,
- a zovšeobecňovania (kryštalizácie).

Motivácia pojmu pravdepodobnosti – hazardné hry

Ku vzniku teórie pravdepodobnosti prispelo viacero udalostí. Jej vznik sa datuje do druhej polovice 17. storočia, avšak ľudia sa hrali hazardné hry od pradávnych čias. Podľa [1, s. 4] existujú archeologické nálezy, ktoré poukazujú na existenciu doskových hier už počas vlády prvej dynastie v Egypte (cca. 3500 pnl.). Tieto hry sa hrali pomocou malých kostí zvierat (astragali). Práve tieto astragali pripomínajú kocky. Sú však trochu nepravidelné a tak nepadajú rovnako často na každú stranu. Používali sa v rôznych kultúrach zväčša pri náboženských rituáloch, hazardných hrách i pri veštení a komunikácií s bohmi. V Malej Ázií sa pomocou týchto kostičiek veštilo. Spôsob nižšie popísaného rituálu [7] sa podobá modernej hre Poker. Pri veštení sa hádzalo 5 astragali, ktoré mali šesť očíslovaných stien podobne ako naše kocky. Na stenách mali niekedy vyryté i rôzne ornamenty. Jednotlivé figúry boli potom spájané s bohmi a človek dostal od veštca aj radu do života. Napríklad figúra (1, 3, 3, 4, 4) bola spájaná s Diom a bola znakom povzbudzujúcej aktivity. Na druhej strane bola figúra (4, 4, 4, 6, 6) predstavujúca nešťastie, nakoľko sa spájala s Chronom, ktorý pojedal deti a radou bolo, aby sa všetci známy mali na pozore pred nebezpečenstvom a nešťastím.

Hlinené kocky sa našli už v egyptských hrobkách z pred roku 2000 pnl. a neskôr v čase rozkvetu antiky boli už kocky takmer všade. Svedčí o tom i slávny výrok ***Gaiusa Juliusa Caesara (100 – 44 pnl.)*** z roku 49 pnl. pri prekročení rieky Rubikon hranice medzi Galiou a Itáliou na severe dnešného Talianska. Prekročením Rubikonu začala v Ríme päťročná občianska vojna medzi Caesarom a ***Pompeiom (106 – 48 pnl.)***, resp. jeho synmi.

Alea iacta est.

(Kocky sú hodené.)

Počas antického obdobia hrá náhoda stále rolu mystického, ale hlavne rolu spravodlivého. Napríklad v starovekom Grécku nebolo súkromné vlastníctvo, ale každá osada mala spoločné vlastníctvo a na každý rok bolo potrebné rozdeliť pôdu. Kto bude obhospodarovať ktorú zem sa rozhodovalo losom, čo bola božia vôľa. Podobne sa nikto nesmel vzoprieť lósu pri voľbách, aby si nepohneval bohov.

Separované modely v 17. storočí – Fermat, Pascal, Huygens

Počiatok matematickej teórie pravdepodobnosti sa zvykne stotožňovať so začiatkom korešpondencie ***Blaisa Pascala (1623 – 1662)*** a ***Pierra Fermata (1601 1665)*** v roku 1654. Koncom 16. storočia a začiatkom 17. storočia sa problematike hazardných hier venovali aj ***Geronimo Cardano (1501 – 1576)*** a ***Galileo Galilei (1564 – 1642)***, ktorých diela však vyšli až omnoho neskôr. Naopak ***Christian Huygens (1629 – 1695)*** inšpirovaný Pascalom i Fermatom publikoval základnú knihu *Výpočty v hrách s kockami(1657)*, ktorá sa stala pre matematikov učebnicou na nasledujúcich 50 rokov. Títo vedci si boli plne vedomí, že pravdepodobnosť môže nadobúdať ľubovoľnú reálnu hodnotu z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, avšak pri riešení problémov hazardných hier si vystačili iba s racionálnymi hodnotami. Riešili mnoho konkrétnych problémov z rôznych uhlov pohľadu. Najčastejšie išlo o hry s kockami.

Za zmienku tu stojí fakt, že Pascalovi zomrel v roku 1651 otec a on prepadol na 3 roky hazardným hrám. Je preto možné, že známy rytier de Mére, ktorý vystupuje ako postava v Pascalových listoch Fermatovi je samotný Blaise Pascal. O hrách a pravdepodobnosti sa čitateľ môže dočítať v knižke ***Alfreda Rényiho (1921 - 1970)*** *Dialogy o matematice*[5, s. 126]. Rényi tu vysvetľuje veľmi dôležitý rozdiel medzi pojmom pravdepodobnosti a jej odhadom.

Univerzálny model – Bernoulli

Jedným z významných matematikov, ktorí prispeli k rozvoju teórie pravdepodobnosti je aj ***Jacob Bernoulli (1655 – 1705)***, ktorého výsledky boli publikované až v roku 1713 v *Ars Conjectandi.* Dokázal prvú limitnú vetu o pravdepodobnosti. Jej myšlienku uvádzam v modernom zápise [2, s. 7]. Nech na falošnej minci padne hlava s pravdepodobnosťou p, teda nech $\Pr avdepodobnos\,(padne\,jedna\,hlava,\ v\,jedenom\,hode) = P\,(1,\,1) = p$. Znak potom padne s pravdepodobnosťou $1 - -p$. Pravdepodobnosť pádu k hláv z n hodov potom bude:

$$P\,(k,n) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k\,(1-p)^{n-k} \qquad (1)$$

Pričom pre hodnoty $k = 0, 1, 2, ..., n$ nadobúda (1) hodnoty binomického rozdelenia. Bernoulliho výsledok hovorí, že $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(|p - k/n| < \varepsilon\right) \rightarrow 1, \, pre \, n \rightarrow \infty \quad (2)$$

Bernoulliho dôkaz hovorí aj o rýchlosti tejto konvergencie a ilustruje ju na príklade. Ak $p = 0,6$ a $\varepsilon = \frac{1}{50}$, potom ak je počet hodov väčší alebo rovný 25550, tak je šanca 1000 : 1 že pomer $(k \ / \ n)$ bude v intervale $\left\langle \frac{29}{50}, \frac{31}{50} \right\rangle$, teda pravdepodobnosť toho, že pomer $(k \ / \ n)$ bude mimo tohoto intervalu bude menšia ako $\frac{1}{1001}$. Táto Bernoulliho veta je dnes už len špeciálnym prípadom všeobecného *Zákona veľkých čísiel.* Za jeho čias však bola prevratným spojívkom medzi empirickými skúsenosťami a matematickou vedou.

V roku 1733 sa podarilo ***Abrahamovi de Moivre (1667 – 1754)*** ukázať, že binomické rozdelenie pre hodnotu $p = 1/2$ sa blíži k normálnemu rozdeleniu so spojitou hustotou. Publikácia bola dodatkom *Miscellanea Analytica (1730)*

V roku 1763 bolo publikované významné dielo ***Thomasa Bayesa (1702 – 1761)*** *An Essay towards Solving a Problem in Doctrine of Chances*, ktoré obsahuje Baysovu vetu o podmienenej pravdepodobnosti. Vychádza z nasledujúcej rovnosti,

$$\begin{array}{c} P\left(B\&A\right) = P\left(A\&B\right) \\ P\left(B\right).P\left(A/B\right) = P\left(A\right).P\left(B/A\right) \end{array} \quad (3)$$

Nech $P(B) \neq 0$ a sú známe pravdepodobnosti $P\left(A\right)$,$P\left(B\right)$a$P\left(B/A\right)$, tak najjednoduchšia podoba tejto vety hovorí, že

$$P\left(A/B\right) = \frac{P\left(A\&B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(A\right)P\left(B/A\right)}{P(B)} \quad (4)$$

Baysovský prístup kladie dôraz na kombináciu využitia apriórnej informácie (skúsenosti) a informácie ktorú získame z cieleného experimentu. Apriórna informácia môže mať objektívny, ale aj subjektívny charakter, podľa toho, či ide o kolektívnu alebo osobnú skúsenosť. Uvediem tu upravený príklad z [6, str. 10]. Predpokladajme, že v našom okolí je len približne každý 10000 človek chorý *(CH)* na špeciálnu chorobu a lekári majú prístroj, ktorý zdravého človeka (Z) vyšetrí správne s pravdepodobnosťou *95 %*. Chorobu u chorého človeka však odhalí na *100 %*. Označme

symbolom $(+)$ udalosť, že prístroj indikoval chorobu a prirodzene

symbolom $(-)$ udalosť, že prístroj chorobu neindikoval.

$P\left(-/Z\right)$ je označenie pre podmienenú pravdepodobnosť, že prístroj neindikoval chorobu, za predpokladu, že pacient bol naozaj zdravý. Potom platí, že

$$P\left(-/Z\right) = 95\,\% \quad P\left(-/CH\right) = 0\,\%$$

$$P\left(+/Z\right) = 5\,\% \quad P\left(+/CH\right) = 100\,\%$$

Keďže v našom okolí je na danú chorobu chorý len každý desaťtisíci človek, tak
$P\left(Z\right) = 99,9\,9\,\%$je apriórna pravdepodobnosť, že sme zdraví.
$P\left(CH\right) = 0,01\ \%$je apriórna pravdepodobnosť, že sme chorí,
Pravdepodobnosť, že prístroj indikoval chorobu je $P\left(+\right)$.

$$P(+) = P(Z\&+) + P(CH\&+) = P(Z)\ .P(+/Z) + P(CH)\ .P(+/CH) = 5,0095\,\%$$

Nás však zaujíma pravdepodobnosť toho, že sme zdraví, za predpokladu, že prístroj indikoval chorobu. Teda $P(Z/+)$. Podľa (4) dostávame

$$P(Z/+) = \frac{P(Z)\,.P(+/Z)}{P(+)} \approx 99,8004\,\%.$$

Napriek tomu, že prístroj indikoval chorobu, môžeme si byť skoro istý, že nie sme chorí. Teda z 1000 pacientov, ktorým prístroj indikoval chorobu sú v priemere ozaj chorí približne dvaja.

Poznatok – klasická pravdepodobnosť – Laplace

Pierre Simone de Laplace (1749 – 1829) zovšeobecnil diela Bernoulliho, Baysa a de Moivra v diele *Théorie analytique des Probabilités (1812)*. O dva roky neskôr publikoval nasledovnú definíciu:

Teória náhody spočíva v redukovaní všetkých udalostí rovnakého druhu na určitý počet rovnako možných prípadov, čo znamená, že môžeme byť rovnako nerozhodnutý ohľadom ich nastatia. Teória tiež spočíva v určení počtu priaznivých prípadov udalosti (A), ktorej pravdepodobnosť je hľadaná. Pomer počtu priaznivých a počtu všetkých možných prípadov je miera pravdepodobnosti. Je to vlastne zlomok, ktorého čitateľ je počet priaznivých prípadov (m) a ktorého menovateľ je počet všetkých možných prípadov (n).

Podľa tejto definície sa pravdepodobnosť skúmanej udalosti A dá vyjadriť ako

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (5)$$

Tento prístup k pravdepodobnosti sa presadil a bol široko používaný v nasledujúcom storočí. Napríklad ruský matematik ***Andrei Andrejevič Markov (1856 – 1922)*** v roku 1912 vo svojej knihe pojednáva aj o Markovových reťazcoch a opiera sa o túto klasickú definíciu pravdepodobnosti. Takéto široké a trvácne uznanie pojmu je prekvapujúce, napriek tomu že napríklad i ***Richard von Mises (1883 – 1953)*** tvrdo napadol klasickú teóriu pravdepodobnosti otázkou: „Ako si môžeme vystačiť s teóriou pravdepodobnosti založenou na počte rovnako možných výsledkoch v prípade falošnej kocky? “ Túto otázku však Von Mises vyslovil až v roku 1928.

Paradoxy s princípom nerozhodnosti sa objavili už skôr. Napríklad v roku 1883 ***Joseph Louis Francois Bertrand (1822 – 1900)*** publikuje paradox z oblasti geometrickej pravdepodobnosti, ale paradoxy sa objavovali i v ostatných oblastiach teórie pravdepodobnosti.

Zovšeobecnenia v 20. storočí – Kolmogorov

Spomínaný von Mises sa významne podieľal na tvorbe frekvenčnej teórie pravdepodobnosti. Jej základným kameňom je zákon opakovateľnosti udalostí bez podmienky rovnako možných udalostí, avšak idealizáciou je možnosť opakovateľnosti udalostí. Základné pravidlo tejto teórie potom hovorí, že rozdelenie pravdepodobnosti náhodných udalostí bude rovnaké ako rozdelenie pravdepodobností opakovaných udalostí. Zvykne sa tvrdiť, že náhodné udalosti majú danú (stabilnú) hustotu pravdepodobnosti. Táto teória pokrýva i prípad falošnej mince, či kocky a mnoho ďalších.

Napriek tomu, že frekvenčná teória pokrýva väčšie množstvo udalostí, nepokrýva ich všetky. Vo svete sa totiž často stretávame práve s takými udalosťami, ktoré sú neopakovateľné za úplne totožných podmienok. Napríklad nákup konkrétnych akcií na konkrétnej burze je neopakovateľná udalosť, pretože burza sa nevratne zmení už prvým nákupom na novú burzu s inými pravdepodobnosťami výnosov z nákupov jednotlivých akcií.

Axiomatickú teóriu pravdepodobnosti založil v roku 1933 ***Andrei Nikolajevič Kolmogorov (1903 – 1987)***. Obsahuje ako princíp opakovateľnosti, tak aj princíp náhodnosti. Celá je vybudovaná na pravdepodobnostnom priestore (Ω, S, P), kde Ω znamená priestor elementárnych udalostí, čo je množina všetkých možných výsledkov náhodného pokusu. S je σ-algebra podmnožín Ω. Prvkami S sú náhodné javy. Pravdepodobnosť P je takéto zobrazenie:

$P : S \to \langle 0, 1\rangle$pričom platí,

- 1. axióma: $\forall A \in S : P(A) \geq 0$
- 2. axióma: $P(\Omega) = 1$
- 3. axióma: Ak $A_n \in S, n = 1,\ 2,\ ...$ a $A_i \cap A_j = 0, i \neq j$, tak

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \qquad (6)$$

Záver

Pomerne mladá teória pravdepodobnosti má široký rozkvet aplikácií vo fyzike, ekonomií, genetike, chémií, psychológií, ale i inde. V oblasti aplikácií matematickej štatistiky a teórie pravdepodobnosti zo slovenských matematikov možno spomenúť ***Andreja Pázmana*** a ***Gejzu Wimmera***. Medzinárodne uznávanú školu z teórie miery a jej aplikácií v pravdepodobnosti vytvorili ***Beloslav Riečan*** a ***Tibor Neubrunn (1929 – 1990)***, ktorý na Slovensku inicioval i štúdium kvantových logík. Špičkové výsledky v oblasti kvantových štruktúr a fuzzy pravdepodobnosti dosahujú aj skupiny slovenských matematikov, ktorých vedie ***Silvia Pulmannová***, ***Anatolij Dvurečenskij, Beloslav Riečan*** a ***Radko Mesiar.***

Literatúra

[1] David, F. N. : *Games, Gods and Gamblings*, Charles Griffin & Co. Ltd., 1962.

[2] Gillies, D. : *Philosophical Theories of Probability*, Routledge, 2000.

[3] Hejný, M. a kol. : *Teória vyučovania matematiky 2*, 1989.

[4] Pázman, A. : *Baysovská štatistika*, Univerzita Komenského Bratislava, 2003.

[5] Rényi, A. : *Dialogy o matematice*, Mladá fronta, 1980.

[6] Renčová, M. : *Pravdepodobnosť a štatistika na základných školách*, vyjde v zborníku príspevkov Prastan 2005.

[7] Abrams, B. : http://www.secondmovement.org/articles/probability.php
A Brief History of Probability, stiahnuté 23.6.2005.

Adresa autora:
Mgr. Ivan Masaryk
KAGDM FMFI UK v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: Ivan.Masaryk@fmph.uniba.sk

Využitie Catalanových čísel vo vyučovaní kombinatoriky

Janka Melušová

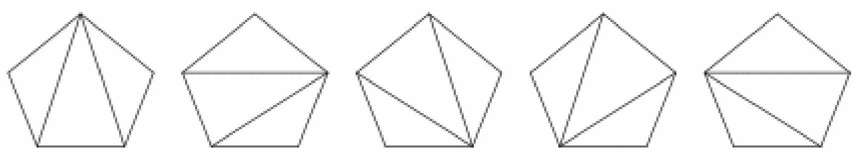
Abstract. *This paper deals about possibility of making use of Catalan numbers as a way of propaedeutic and practise of combinatorics at the high school.*

Úvod

Kombinatorika je jednou z tých oblastí modernej matematiky, ktoré prenikajú do školskej matematiky. Je neoddeliteľnou súčasťou modernizácie elementárneho matematického vzdelávania. Pritom však patrí medzi najmenej obľúbené partie stredoškolskej matematiky. Nielen u žiakov, ale aj u učiteľov. Môže to byť zavinené tým, že študenti nemajú dostatočné skúsenosti s kombinatorickými situáciami a nemajú rozvinuté kombinatorické myslenie. Toto je budované na schopnosti organizovať prvky množiny do prehľadných tabuliek, grafov, schém a zoznamov. V posledných rokoch je zrejmý trend zaradiť do osnov matematiky na druhom stupni základných škôl a na prvom stupni osemročných gymnázií propedeutiku kombinatoriky a tak rozvoj kombinatorického myslenia posilniť. Takisto je potrebné kombinatorické myslenie rozvíjať aj na gymnáziách. Riešenie kombinatorických úloh, pri ktorých riešení sa dajú využiť Catalanové čísla, resp. skúmanie vlastností Catalanových čísel by sa preto mohlo stať zaujímavou náplňou matematických krúžkov.

Catalanove čísla

Osobnosť matematika Leonarda Eulera (1707-1783) je jednou z najvýznamnejších v histórii matematiky. Jeho dielo bolo i v súčasnosti je studnicou nápadov i motivácie iných matematikov. Práve ono inšpirovalo belgického matematika Eugèna Charlesa Catalana (1814-1894). Eulera zaujímalo, koľkými rôznymi spôsobmi možno rozdeliť konvexný n-uholník pomocou niektorých jeho uhlopriečok na trojuholníky. Túto úlohu aj vyriešil. Jednoduchšie a „elegantnejšie“ riešenie problému však našiel práve Catalan.



Obrázok 1 Možné rozdelenie päťuholníka na trojuholníky

Catalanova postupnosť (niekedy nazývaná i Segnerova) je postupnosť prirodzených čísel, ktoré znamenajú, koľkými spôsobmi možno na trojuholníky rozdeliť $n+2$-uholníky. Prvé členy tejto postupnosti sú 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452... Známy je aj vzorec pre výpočet n–tého Catalanovho čísla (n-tého člena Catalanovej postupnosti),

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{1}$$

Všetky Catalanove čísla sú prirodzené čísla. Krátkou úpravou (1) dostaneme iný vzťah pre výpočet C_n.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}; \text{ pre } n \geq 1. \tag{2}$$

Pre úplnosť doplníme aj rekurentný vzťah pre výpočet n-tého Catalanovho čísla.

$$C_0 = 1; \ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \text{ pre } n \geq 1. \tag{3}$$

Okrem zistenia už spomínaného počtu rozdelení polygónov, môžeme Catalanove čísla využiť pri riešení mnohých iných kombinatorických úloh. Catalanove čísla označujú počet:

1. rôznych spôsobov, ako môžeme úplne uzátvorkovať n+1 členov. Napr. pre n=3 máme nasledovných 5 spôsobov: a(b(cd)), a((bc)d), (ab)(cd), (a(bc))d, ((ab)c)d;

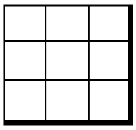
2. binárnych stromov s n+1 listami;

3. neizomorfných plných binárnych stromov s n vnútornými vrcholmi (binárny strom nazývame plný, keď každý vrchol má buď dvoch potomkov, alebo ani jedného);

4. Dyckových slov dĺžky $2n$. Dyckovo slovo je reťazec zložený zo znakov X a Y tak, že v žiadnom počiatočnom podslove tohto slova nie je viac znakov Y ako znakov X. Napr. XXXYYY, XXYXYY, XYXYXY, XYXXYY, XXYYXY sú všetky Dyckove slová dĺžky 6. A skutočne, 6 = 2.3, $C_3 = 5$;

5. spôsobov, ako si môže $2n$ ľudí podať ruku ponad stôl tak, aby sa žiadne dve ruky nekrižovali;

6. ciest v mriežke šírky n+1 a dĺžky n+1 z ľavého dolného do pravého horného rohu takých, aby nikdy „nepresiahli“ diagonálu. Príklad pre n=2 vidíme na obrázku 2.

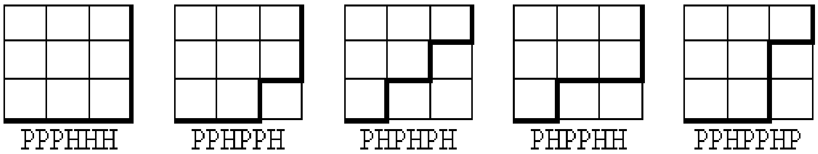


Obrázok 2

Vymenovali sme niekoľko spôsobov interpretácie Catalanových čísel. Sloanova encyklopédia celočíselných postupností tvrdí, že existujú tucty spôsobov ich využitia. Hľadanie ďalších a vzťahy medzi nimi môžu byť predmetom matematického skúmania aj na gymnáziu.

Príklad 1 Nájdite počet ciest z ľavého dolného do pravého horného rohu štvorcovej mriežky takých, aby nepretínali diagonálu mriežky. Využite znalosť počtu Dyckových slov.

Pri hľadaní cesty v štvorcovej mriežke nám na „navigáciu“ stačí použiť dva príkazy (P – vpravo, H – hore). Ak nechceme, aby naša cesta križovala diagonálu, musíme ísť najprv vpravo, a až neskôr hore. Postupnosť krokov tak môžeme „zakódovať“ do reťazca zloženého zo znakov P a H, ktorý spĺňa podmienky Dyckovho slova.



Obrázok 3

Vzťah Catalanových čísel a Pascalovho trojuholníka

Skúmanie vlastností Pascalovho trojuholníka už tradične patrí medzi objekty matematického skúmania na gymnáziách. Existuje niekoľko spôsobob, ako môžeme Catalanove čísla nájsť pomocou Pascalovho trojuholníka.

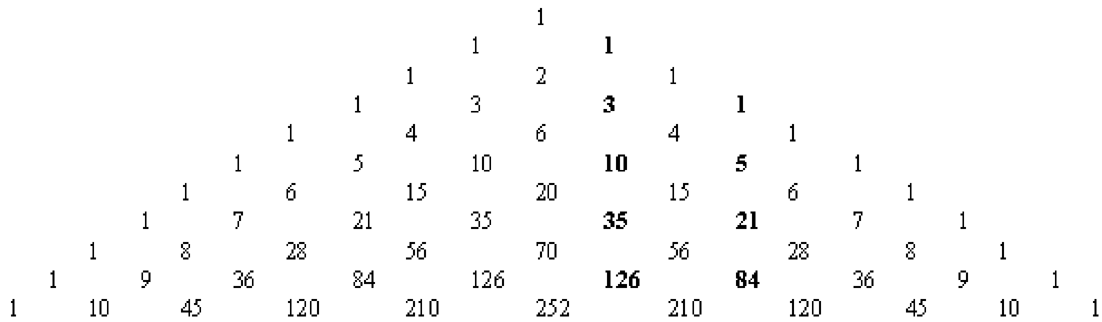
Prvý spôsob je veľmi jednoduchý. Catalanovo číslo vypočítame ako rozdiel kombinačného čísla v strednom stĺpci Pascalovho trojuholníka a čísla s ním „susedného“. Na obrázku 4 sú tieto čísla vyznačené tučným písmom.

1
1 1
1 **2** **1**
1 3 3 1
1 4 **6** **4** 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 **20** **15** 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 **70** **56** 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 **252** **210** 120 45 10 1

Obrázok 4

1	2	6	20	70	252	...
–	1	4	15	56	210	...
1	1	2	5	14	42	...

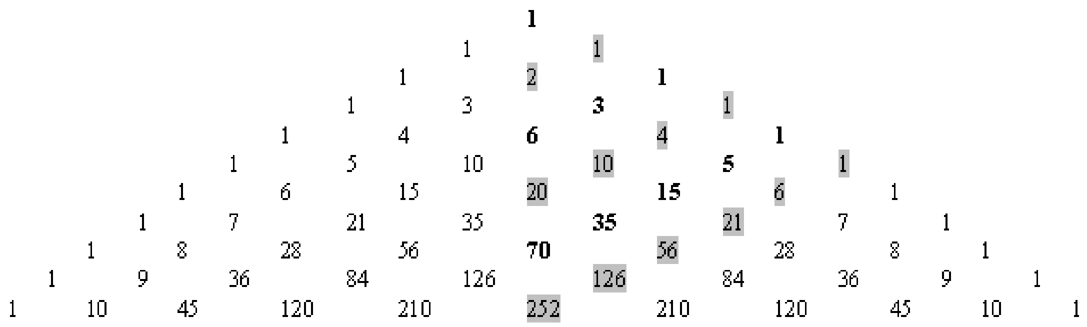
Druhý spôsob je analogický s prvým spôsobom. Získame ním Catalanove čísla počínajúc C_2. Vyberáme nepárne riadky. Catalanove číslo je rozdielom binomických čísel v stĺpcoch vyznačených tučným písmom (obrázok 5).



Obrázok 5

1	3	10	35	126	...
–	1	5	21	84	...
1	2	5	14	42	...

Existujú aj zaujímavejšie rozloženia, napr. také, aké je na obrázku 6.



Obrázok 6

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ 6 - 3 - 1 &= 2 \\ 20 - 10 - 4 - 1 &= 5 \\ 70 - 35 - 15 - 5 - 1 &= 14 \\ 252 - 126 - 56 - 21 - 6 - 1 &= 42 \end{aligned}$$

Záver

Catalanove čísla nie sú obsahom učiva matematiky, ale práca s nimi a skúmanie ich vlastností môžu študentom sprostredkovať nové pohľady na kombinatorické úlohy a tak prispieť k rozvoju ich kombinatorického myslenia.

Literatúra

[1] Hejný, M. : *Teória vyučovania matematiky.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1989.

[2] Scholtzová I. : *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole.* Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, Prešov, 2004.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number, citované dňa 10. 6. 2005.

[4] http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html, citované dňa 10. 6. 2005.

Adresa autora:
Mgr. Janka Melušová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: jmelusova@ukf.sk

Inovačné stratégie riešenia – geometria bez kružidla

Marek Mokriš

Abstract. *The article deals with description of strategy solving traditional exercise by innovation method.*

V tomto príspevku charakterizujeme stratégie riešenia štandardnej školskej úlohy z geometrie za pomoci neštandardných stratégii pri jej riešení. Žiaci mali nájsť stred opísanej kružnice trojuholníku, avšak ich riešenie bolo obmedzené istými podmienkami (pozri text úlohy).

Analyzujeme jednotlivé postupy riešenia, ktoré použili žiaci 9. ročníka základných škôl z prešovského regiónu pri riešení vybranej úlohy na matematickom sústrední pred krajským kolom matematickej olympiády. O čiastočných skúsenostiach s objavovaním stratégii pri riešení tohoto problému informoval M. Mokriš v [2]. Terajšia analýza je doplnená o ďalšiu stratégiu, ktorú sme identifikovali na ostatnom takomto stretnutí. Skúmanie riešení úlohy prebiehalo počas troch rokov a zúčastnili sa ho žiaci, ktorí boli pozývaní na krajské kolo MOZ 9 na základe výsledkov okresných súťaží.

Miestom konania spomínaného matematického sústredenia bola Škola v prírode Turzov pri Gelnici. Toto podujatie bližšie charakterizujú A. Prídavková a V. Kálnássyová v prácach [1], [3], [4].

Cieľom tohto prieskumu bolo identifikovať stratégie použiteľné pri riešení, ohodnotiť ich častosť a správnosť. Ako prieskumné metódy boli použité: analýza žiackych prác a participačné pozorovanie.

Skúmaná úloha:

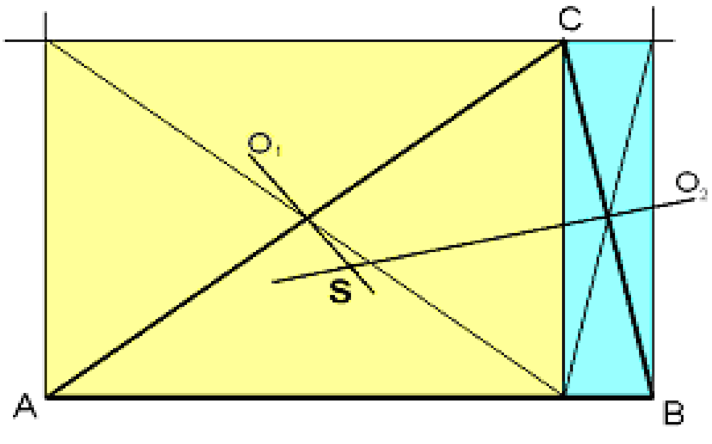
Nech je daný ľubovoľný trojuholník ABC. Nájdite stred S kružnice opísanej tomuto trojuholníku, ak pri hľadaní bodu S môžete použiť pravouhlé rysovacie pravítko (bez meracej stupnice) a nemôžete použiť kružidlo. Žiak mohol pomocou pravouhlého pravítka narysovať priamky, a kolmice, nemohol ho použiť na meranie dĺžok.[9]

Stratégia č. 1:

Stred S opísanej kružnice trojuholníku ABC je priesečníkom osí strán trojuholníka ABC. Teda celý problém riešenia tejto úlohy sa transformuje na problém nájsť stredy strán. Pretože, ak budeme poznať stredy strán, ich osi už nie je problém zostrojiť (kolmice podľa zadania úlohy môžeme zostrojiť).

Nech ľubovoľná strana trojuholníka ABC predstavuje uhlopriečku obdĺžnika (obr. 1) Keďže uhlopriečky obdĺžnika sa navzájom rozpoľujú, t. j. ich priesečník leží v strede uhlopriečok, potom kolmica vedená na príslušnú stranu trojuholníka a prechádzajúca stredom obdĺžnika je osou strany trojuholníka. Priesečník týchto kolmíc je stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC.

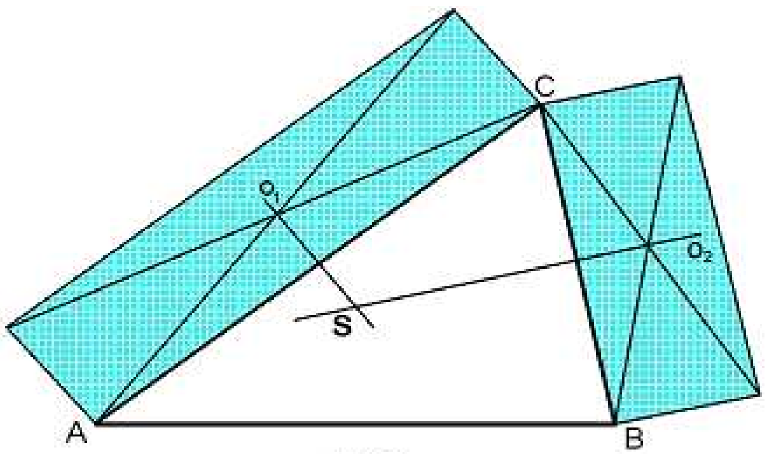
[9]Text nasledujúcich stratégii riešenia bol modifikovaný pre potreby tohto článku so zachovaním jeho výpovednej hodnoty (myšlienky riešenia žiaka).



obr. 1

Stratégia č. 2:

Riešenie je podobné prvému, avšak v tomto prípade strana trojuholníka ABC predstavuje aj stranu obdĺžnika. Teda nad každou stranou trojuholníka ABC zostrojíme ľubovoľný obdĺžnik (obr. 2)[10].



obr. 2

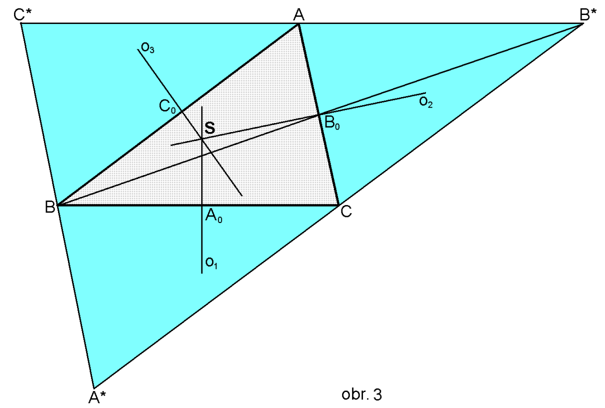
Stratégia č. 3:

Využíva poznatok, že uhlopriečky kosodlžníka sa rozpoľujú.

Veďme každým vrcholom trojuholníka ABC rovnobežku (zostrojíme pomocou dvoch kolmíc) s protiľahlou stranou trojuholníka ABC. Tým dostaneme trojuholník $A^*B^*C^*$ (obr. 3). Označenie volíme tak, aby bod A ležal na úsečke B^*C^*, bod B na úsečke A^*C^* a bod C na úsečkeA^*B^*.

Teraz zostrojíme stredy strán trojuholníka ABC. Pretože napr. $ABCB^*$ je rovnobežník, potom sa úsečky AC, BB^* navzájom rozpoľujú; označme B_0 ich priesečník. Bod B_0 je teda stredom strany AC. Rovnako zostrojíme stred C_0 strany AB a stred A_0 strany BC. Pomocou trojuholníkového pravítka zostrojíme v bode A_0 kolmicu o_1 na priamku BC, ďalej v bode B_0 kolmicu o_2 na priamku CA a konečne v bode C_0 kolmicu o_3 na priamku AB. Vieme, že všetky tri priamky o_1, o_2, o_3 prechádzajú jedným bodom, stredom S opísanej kružnice trojuholníku ABC. Kolmice o_1, o_2, o_3 rysujeme všetky tri pre kontrolu správnosti rysovania.

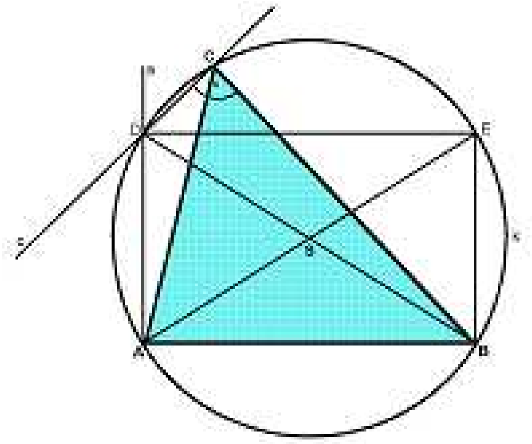
[10] V žiackych riešeniach sa často objavovala aj modifikácia obr. 2 v tom význame, že vyfarbené obdĺžniky boli zostrojené do vnútra trojuholníka.



obr. 3

Stratégia č. 4:

Využíva poznatky o Talesovej kružnici. V bode A zostrojíme priamku $a \perp AB$ (obr. 4) a v bode C priamku $c \perp BC$. Priamky a, c sa pretnú v bode D. Priamka BD rozdeľuje štvoruholník $ABCD$ na dva pravouhlé trojuholníky so spoločnou preponou BD. Podľa Talesovej vety je stred úsečky BD (označíme ho S) stredom kružnice opísanej trojuholníkom ABD, BCD; jej polomer je $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$. Zostrojíme bod E, ktorý je priesečníkom priamok, pre ktoré platí $DE \| AB$, $AD \| BE$. Potom štvoruholník $ABED$ je rovnobežník, ktorý má pri vrchole A pravý uhol a preto je obdĺžnikom. Kružnica k so stredom v bode S[11] je kružnicou tomuto obdĺžniku opísanou, teda aj trojuholníku ABC.



obr. 4

Záver a odporúčania

Z charakteristiky jednotlivých stratégii môžeme identifikovať tvorivosť a nápaditosť pri objavovaní riešení. Z hľadiska častosti výskytu príslušnej stratégie pri riešení, mali postupy 1, 2 a 3 rovnakú frekvenciu aplikácie, avšak stratégia č. 4 sa vyskytla iba raz.

[11] Bod S zostrojíme ako priesečník uhlopriečok obdĺžnika $ABED$

Pri analýze korektnosti riešení sme dospeli ku konštatovaniu u stratégie č. 3, že najčastejšou chybou bol záver, že uhlopriečka kosodlžníka je aj osou príslušnej strany, čo vo všeobecnosti neplatí. U ostatných stratégii sme nesprávne závery neidentifikovali.

Prezentovaná úloha, ako aj objavené stratégie jej riešenia, by mohli byť vhodným zdrojom spestrenia vyučovacej hodiny matematiky, resp. zdrojom skúmania pre žiakov navštevujúcich matematické krúžky.

Literatúra

[1] Kálnássyová, V., Prídavková, A.: *Matematické sústredenie pre riešiteľov matematickej olympiády, kategórie Z-8.* In: Matematika, informatika, fyzika. Číslo 12. MC, Prešov, 1998.

[2] Mokriš, M. *Neštandardné úlohy z geometrie.* In: MIF – didaktický časopis učiteľov matematiky, informatiky a fyziky. Číslo 23. MPC v Prešove, 2004, s. 131 – 133. ISSN 1335-7794

[3] Prídavková, A.: *Matematické sústredenie pred Krajským kolom matematickej olympiády kategórie Z9.* In: Matematika, informatika, fyzika. Číslo 19. MC, Prešov, 2001. ISSN 1335-7794

[4] Prídavková, A.: *Sústredenie pre riešiteľov Krajského kola matematickej olympiády v kategórii Z9.* In: Matematika, informatika, fyzika. Číslo 21. MPC, Prešov, 2003. ISSN 1335-7794

Adresa autora:
Mgr. Marek Mokriš
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra č. 15
081 16 Prešov
e-mail: mokrism@unipo.sk

Program VUStat ako doplnok EXCELu pri vyučovaní štatistiky

Iveta Molnárová

Abstract. *The aim of this paper is to ilustrate possibilities how to use VUStat in the course of elementary Statistics.*

Úvod

Rozhodovanie sa v neistých situáciách, pri nedostatku údajov, nápor výsledkov rôznych prieskumov, odporúčania na investovanie peňazí je súčasťou každodenného života, no v školách sa rozvoju štatistického myslenia a jeho kultivácii ešte nevenuje dosť pozornosti.

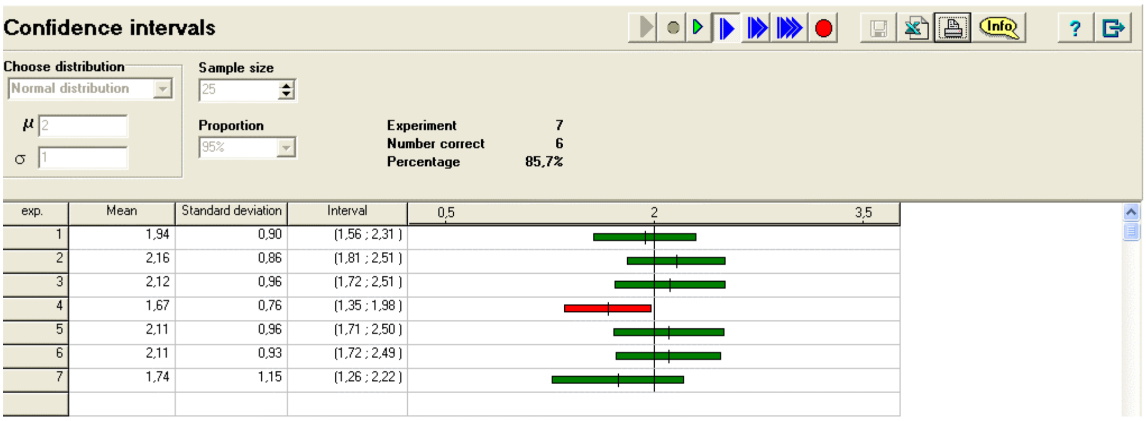
V príprave budúcich učiteľov je z hľadiska pravdepodobnosti a štatistiky najvhodnejšou kombináciou kombinácia matematika - informatika, ktorá dostatočne pripraví učiteľov na to, aby hodiny matematiky podporili počítačovou technikou a vlastnými programami. Horšie je to s kombináciami M- chémia, M- biológia, M- geografia, M- hudobná výchova, M- výtvarná výchova, kde navyše podľa voľby diplomových prác vidieť, že študenti majú často lepší vzťah k svojmu druhému aprobačnému predmetu.

Prednášky a cvičenia zo štatistiky z tohto dôvodu orientujeme tak, aby študenti – budúci učitelia nemuseli programovať, ale aby využívali hotové a dostupné softvérové systémy. V učiteľskom štúdiu vystačíme s Excelom, pričom dôraz kladieme na interpretáciu získaných výstupov a overenie vstupných predpokladov použitých metód. Navyše štatistika je predmet, kde vzťah praxe a teórie je užší ako v iných matematických disciplínach a využitie výpočtovej techniky tento vzťah len zvýrazňuje. Preto názornosť je ďalšia vlastnosť, ktorú treba rozvíjať v základnom kurze štatistiky, možno aj na úkor rozsahu a podrobného teoretického výkladu.

Vustat ako doplnok Excelu

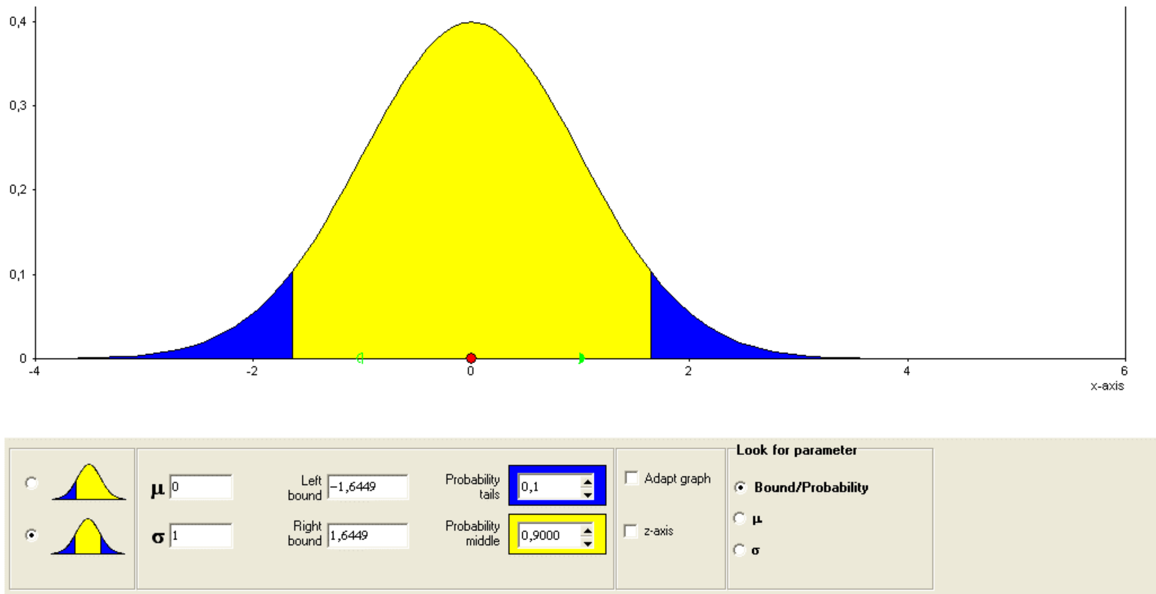
Výučbový program VUStat, ktorého demoverzia (vustatengdemo.zip) sa dá stiahnuť z internetu zo stránky www. vusoft2. nl je dobrý prostriedok pri vyučovaní pravdepodobnosti a štatistiky, ktorým sa dá simulovať mnoho náhodných javov, s jeho využitím sa názorne interpretujú výsledky štatistických procedúr, ľahko sa zobrazí obor prijatia a zamietnutia nulovej hypotézy, názorne sa ukážu vlastnosti rôznych rozdelení, zmena ich vlastností po inej voľbe parametrov rozdelení. Niektoré vlastnosti programu ukážem na príkladoch.

Príklad 1. V teórii odhadu sa vždy prednáša intervalový odhad strednej hodnoty základného súboru. Na základe údajov z jedného výberového súboru sa v Exceli pomocou *Popisnej štatistiky* jednoducho určí intervalový odhad parametra, no študenti tento výsledok interpretujú tak, že interval spoľahlivosti je pevný a mení sa stredná hodnota, ktorá do tohto intervalu padne s istou vopred zvolenou pravdepodobnosťou. Napraviť túto chybnú predstavu a ukázať, že stredná hodnota je konštanta, ale náhodne sa menia hranice intervalu spoľahlivosti (resp. aj šírka intervalu) v závislosti od $\overline{X}$, S, n umožní simulácia zachytená na obr.1. V tomto prípade pre výberový súbor s rozsahom $n = 25$je po každom kroku nájdený vždy iný 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu s využitím kvantilov t-rozdelenia.



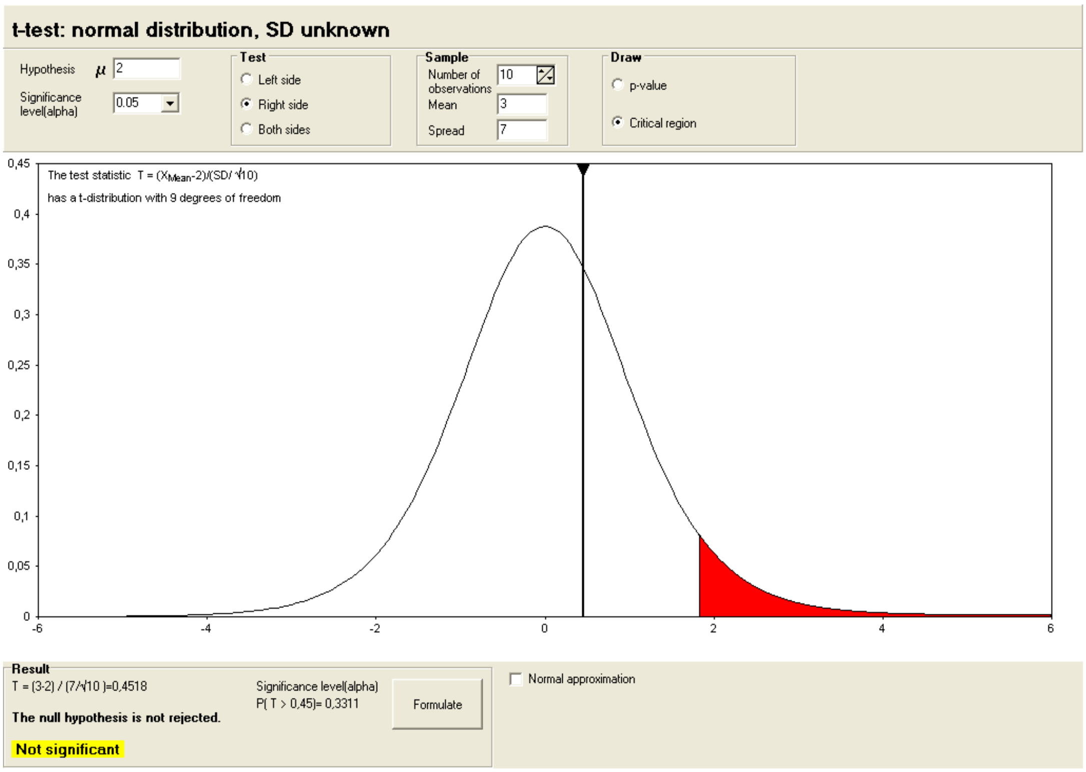
Obrázok 1

Príklad 2. Pri študovaní vlastností normálneho rozdelenia, pri testovaní hypotéz, kde testovacia štatistika má normálne rozdelenie sa dá použiť *Distributions/Normal distributions*, čo umožňuje aj interaktívne úpravy obrázka, zmeniť μ, σ, typ alternatívnej hypotézy (obr.2).



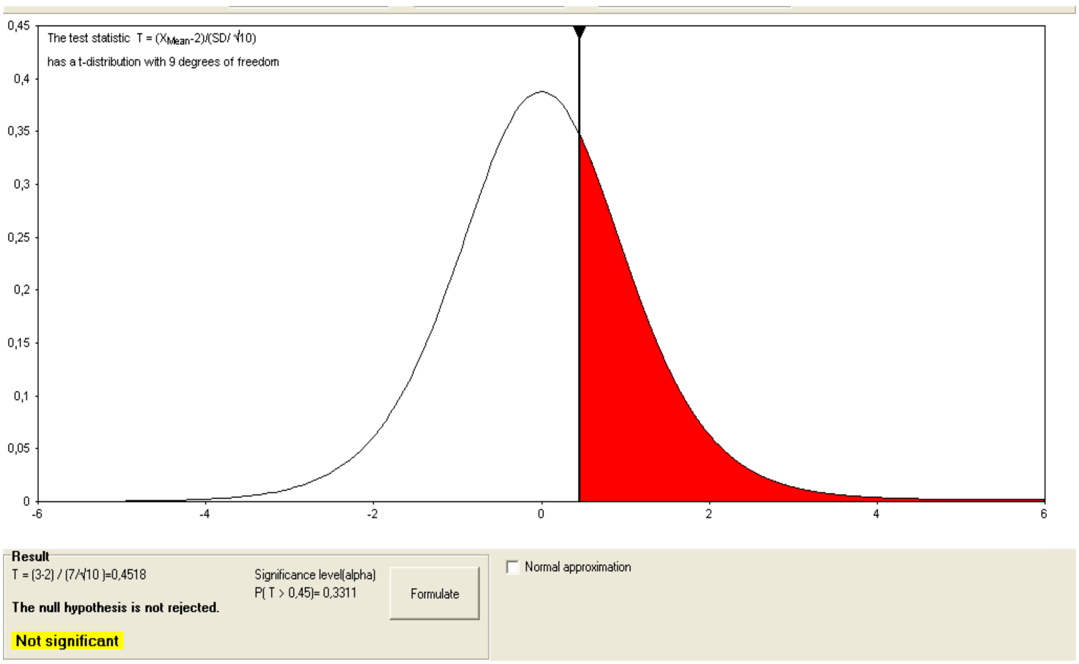
Obrázok 2

Príklad 3. Pri testovaní zhody strednej hodnoty, rozptylu alebo podielu s konštantou nemá Excel v ponuke hotový test. Vo VUState môžeme nájsť *z-test* ako test zhody strednej hodnoty normálneho rozdelenia a známym rozptylom s konštantou, t-test pre prípad, že rozptyl v základnom súbore nie je známy, binomický test, Poissonov test. Napríklad pomocou VUStatu po voľbe *t-test,* zadaní μ_0, $\overline{x}$, S, n, α sa oblasť prijatia nulovej hypotézy, hodnota testovacej štatistiky znázorní ako na obr.3. Ľahko rozhodneme o závere testovania (čo sa zároveň automaticky vypíše pod graf). Veľkou výhodou je aktívne vstupovanie do obrázku, môžeme sledovať, ako iná hodnota výberového priemeru $\overline{x}$ ovplyvní výsledok testovania.



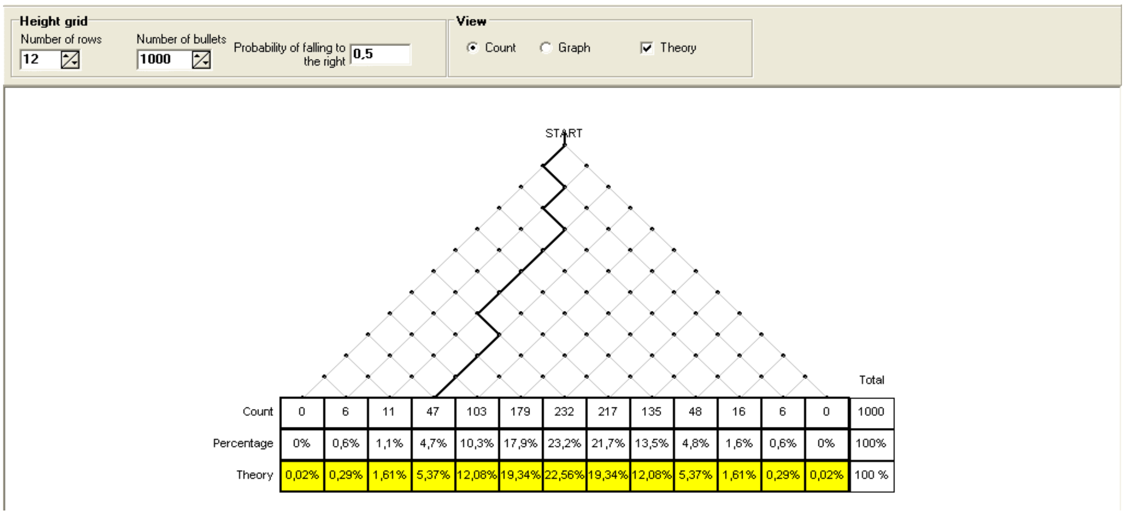
Obrázok 3

Podobne v tej istej situácii sa dá využiť a znázorniť p-hodnota (obr.4).



Obrázok 4

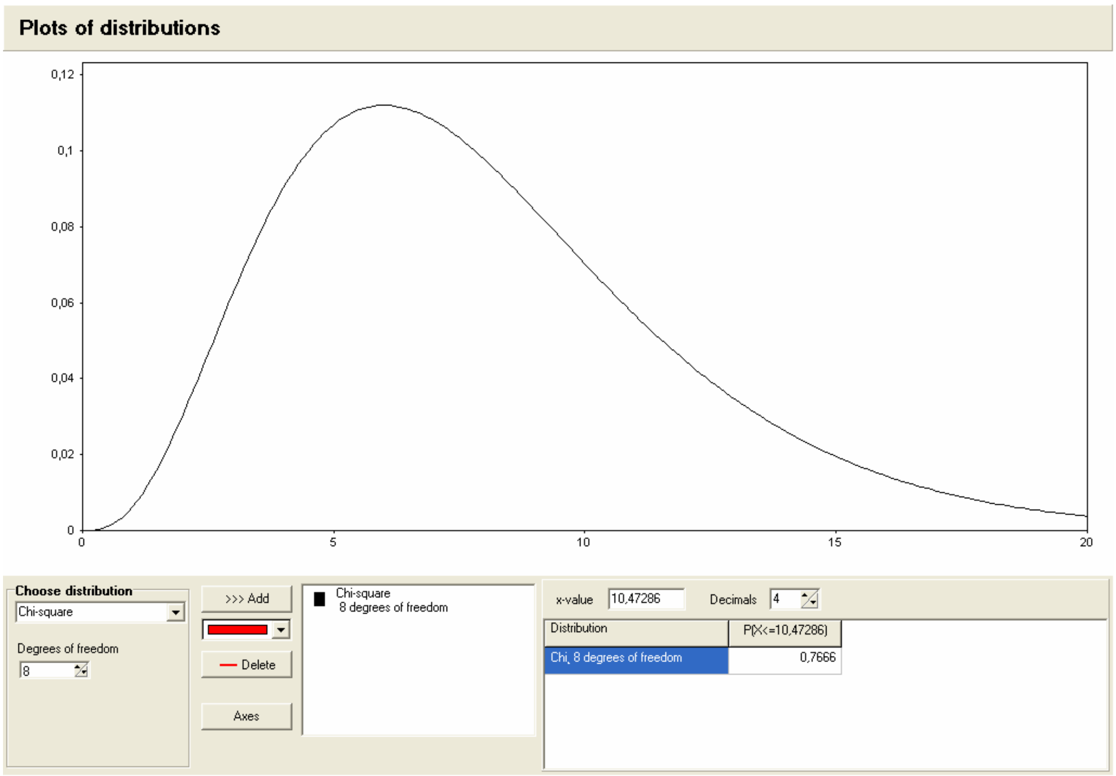
Príklad 4. Vo VUState je pripravených mnoho simulácií náhodných javov. Na ilustráciu aproximácie binomického rozdelenia normálnym použil Rényi v [1] Galtonovu dosku, kde po dostatočne veľkom množstve napr. $N = 1000$spustených guliek po doske sa tieto roztriedili do stĺpcov, ktoré spolu vytvorili útvar, pripomínajúci Gaussovu krivku. Tento náhodný pokus sa dá simulovať aj v tomto prostredí, dá sa meniť počet radov kolíkov n, pravdepodobnosť p odrazenia guľky doprava, výsledkom (obr.5) sú absolútne i relatívne početnosti padania guliek do priehradok ako aj teoretické pravdepodobnosti vypočítané podľa Bernoulliho schémy (sú vyjadrené v percentách). Na porovnanie empirického a teoretického rozdelenia poslúžia aj oba histogramy, ktoré sa dajú zobraziť.



Obrázok 5

Binomické rozdelenie $Bi(n;\, p)$ konverguje k normálnemu rozdeleniu $N(np;\, npq)$ pre $n \to \infty$. Na Galtonovej doske sa dá meniť počet radov kolíkov len od 1,...12. V tomto prípade zhodu empirických údajov z obr.5 pre $n = 12$, $p = 0,5$s teoretickým modelom $N\,(6;3)$ môžeme overiť Chí- kvadrát testom dobrej zhody. Výhodne pre určenie p-hodnoty použijeme vo VUState graf distribučnej funkcie χ^2-rozdelenia (obr.6).

Príklad 5. Pád guľky po Galtonovej doske dobre ilustruje pôsobenie zákona veľkých čísel. Vzniknuté rozdiely medzi relatívnymi početnosťami a pravdepodobnosťami sú veľmi malé, čo nás v praxi oprávňuje používať relatívnu početnosť namiesto neznámej pravdepodobnosti. V príklade 4 je maximálny rozdiel 0,0236.



Záver

Dnešné vyučovanie štatistiky je úzko spojené s využitím výpočovej techniky. Vhodným doplnením Excelu programom VUStat môžeme rozšíriť vyučovanie o simulácie náhodných udalostí, o nové prvky grafickej prezentácie, čo uľahčuje analýzu a interpretáciu riešení.

Literatúra

[1] Rényi, A.: *Teorie pravděpodobnosti.* Akademia, Praha, 1972.

[2] *Pravděpodobnost a statistika na střední škole.* Zborník prác didaktického seminára na MFF UK Praha, Matfyzpress, Praha, 2005.

[3] Plocki, A.: *Pravděpodobnost kolem nás.* Ústí nad Labem, 2001.

Program: VUSTATENGDEMO

Adresa autora:
RNDr. Iveta Molnárová
Katedra prírodných vied
Akadémia ozbrojených síl gen. M.R.Štefánika
031 19 Liptovský Mikuláš
e-mail: imolnar@valm.sk

Różne reakcje studentów pedagogiki na błędy uczniów popełniane podczas rozwiązywania zadań z matematyki

Barbara Nawolska

Abstract. *This paper is an attempt to analyse how students of early primary school pedagogics are prepared to teach mathematics in classes of young pupils. They should be able not only to properly react to their pupils mistakes but to have the ability to use these mistakes in order to teach them mathematics. The paper contains a certain number examples of students reactions to their pupils mistakes.*

Błąd jest nieuniknionym składnikiem ludzkiej aktywności, jest składową częścią rozwoju wiedzy i zawsze towarzyszy uczeniu się matematyki. Naturalne jest więc, że uczniowie popełniają błędy i trzeba to zaakceptować i wykorzystać w nauczaniu.

Wiedza matematyczna jest zawsze wiedzą osobistą zależną od indywidualnych doświadczeń. Uczenie się jest procesem rozwiązywania problemów, w trakcie którego uczeń pokonuje trudności, przeszkody, błędy i dzięki temu konstruuje swoją wiedzę. Tak skonstruowana wiedza staje się własnością tego kto się uczy. Uczniowie konstruując swoją własną matematykę uogólniają sensownie, lecz nie zawsze właściwie swoją poprzednią wiedzę. To może prowadzić do błędów. Dzieci nie popełniają błędów bezmyślnie, one albo wierzą, że robią dobrze, albo nie są pewne w ogóle tego co robią (Booker,1989).

Często w szkole dzieci boją się błędu, gdyż jest on podstawą selekcji. Obawa przed błędem może spowodować strach przed matematyką. Taka atmosfera nie jest korzystna.

Nauczyciel powinien być przewodnikiem dziecka w konstruowaniu jego wiedzy, powinien słuchać dzieci, akceptować to co mówią, asystować przy tym co czynią, a wszystko powinno się odbywać w atmosferze bezpieczeństwa. Wówczas popełnianie błędów staje się istotną częścią procesu uczenia się. W tej sytuacji nauczyciel powinien rozumieć rolę błędu w edukacji matematycznej i fakt ten winien być ważnym celem kształcenia nauczycieli. Nie można stwarzać atmosfery strachu przed błędem, ani omijać błędów, wręcz przeciwnie, należy tak postępować, aby błędy mogły się ujawniać gdyż można je przedyskutować. Nauczyciel musi przygotować dzieci do pokonywania błędów. Błąd nie spełni pozytywnej roli jeżeli zostanie poprawiony przez nauczyciela lub kogoś innego niż ten kto popełnił błąd. Właściwa reakcja nauczyciela na błąd ucznia wymaga zidentyfikowania błędu i refleksji nad jego źródłem. Można tu wywołać konflikt między tym co dziecko sądzi a rzeczywistością. Następnie można powrócić do tego co pewne i dalej stopniować nauczanie, by nie było dużych skoków lub luk. Dziecko poprawi błąd nawet tego nie zauważając, bo rozumienie pojawi się tam gdzie były braki. Można też zredukować abstrakcję, gdyż dziecko ma tendencję do manipulowania symbolami. Stale też trzeba używać konkretnych materiałów, bo to pomaga w rozwoju rozumienia (Ciosek, 1992).

Podczas hospitowania zajęć szkolnych w klasach młodszych mogłam zaobserwować różnorodne błędy uczniów oraz reakcje nauczycieli. Stąd pomysł sprawdzenia jak w analogicznych sytuacjach mogą zareagować nasi studenci, zwłaszcza, iż w ich kształceniu, poświęcamy sporo uwagi problematyce błędów i reakcji na nie. Studenci mieli na piśmie przedstawić swoją reakcję na zaprezentowany błąd uczniowski. Po sprawdzeniu prac, każdy student miał możliwość ponownego przyjrzenia się swojej pracy i dyskusji nad zaproponowanym przez siebie rozwiązaniem metodycznym.

Zależało mi na tym aby studenci nie mówili dziecku wprost, że popełniło błąd, lecz by swoją uwagą, zachowaniem, odpowiednim pytaniem sprawili, iż uczeń sam go zauważy i by w tej sytuacji samodzielnie lub przy niewielkiej pomocy nauczyciela umiał ów błąd poprawić. W ten sposób chciałam sprawdzić jak studenci rozumieją pojęcia, które mają kształtować w przyszłości u swoich uczniów oraz jak reagują na błędy uczniów i czy potrafią je wykorzystywać do kształcenia matematycznego.

Omówię kilka różnych reakcji studentów na uczniowskie błędy.

Sytuacja 1.

Jak pomożesz uczniowi, odkryć i poprawić błąd, gdy odejmowanie 56 - 28 wykonał następująco: $56 - 28 = 56 - 20 + 8 = 36 + 8 = 44$.

W tej sytuacji istotne jest rozumienie pojęcia odejmowania i ważna jest umiejętność znajdowania wyniku tego działania różnymi sposobami. Podstawową interpretacją odejmowania w klasach młodszych jest czynność ujmowania.

Wszystkie badane studentki zauważyły błąd, wiedziały na czym polega. Najczęściej polecały dziecku sprawdzić odejmowanie za pomocą dodawania. To pozwalało zauważyć, że wynik jest zły. Następnie odwoływały się do pojęcia odejmowania jako ujmowania w sytuacjach konkretnych. Jedna wykorzystała w tym celu historyjkę o zjadaniu cukierków. *Wyobraź sobie, że masz 56 cukierków i zjadłeś 28, ale jadłeś je w taki sposób, że najpierw zjadłeś 20 cukierków, a później jeszcze 8.* W ten sposób odwołując się do sytuacji bliskiej dziecku mogła pomóc uczniowi zauważyć błąd i zrozumieć, iż odjąć 28 to odjąć 20 i jeszcze odjąć 8. Na uwagę zasługuje również fakt, że wykorzystała następstwo czasu do rozdzielenia w naturalny sposób liczby 28 na dwa składniki (20 i 8). Inne studentki proponowały uczniowi sytuację z zakupami np.: *Masz 56 złotych, robisz zakupy, kupujesz słodycze za 20 zł i owoce za 8 zł. Ile musisz zapłacić za zakupy i ile pieniędzy ci zostanie?* W tej realistycznej sytuacji również wykorzystane jest odejmowanie jako ujmowanie i naturalne rozdzielenie liczby 28 na dwa składniki, co pozwala dziecku wykonać podwójne odejmowanie (odjąć koszt słodyczy i odjąć koszt owoców).

Były jednak studentki, które odwoływały się albo do „autorytetu" nauczyciela i używały zwrotów typu: *Czy na pewno musimy dodać?; Zastanów się i wykonaj* to *działanie jeszcze raz!, Sprawdź jeszcze raz czy dobrze wykonałeś działanie; Mamy odejmowanie, dlaczego dodałeś 8?* albo do formalnej matematyki i praw działań: *Zapisz tę sumę w nawiasie 56 - (20 + 8); Co oznacza ten zapis? Kiedy przed nawiasem stoi znak „ minus" to w nawiasie zmieniamy znak.*

W tej sytuacji wprowadzenie nawiasu zamiast pomóc dziecku może mu tylko utrudnić rozwiązanie problemu, bo gdyby uczeń wiedział co tu oznacza nawias i jak należy wykonać takie odejmowanie – nie popełniłby błędu. Ostatnie z omawianych prac są typowe dla rzeczywistości szkolnej i prezentują dość częste reakcje nauczycieli. Zacytujmy dosłownie jedną z takich reakcji na błąd:

N: *Jakie działanie miałeś wykonać?*
U: Odejmowanie.
N: Jaką liczbę najpierw odjąłeś?
U: Odjąłem 20 i dodałem 8.
N: Czy na pewno musimy dodać 8? Przypomnij mi jakie działanie masz wykonać?
U: Odejmowanie.
N: Czy możemy dodać 8 jeżeli odejmujemy?
U: Nie.

N: Co musimy zrobić?

U: Odjąć.

N: Musimy poprawić znak. Jakie będzie działanie?

U: 56 – 28 = 56 – 20 – 8 =36 – 8 = 28

W przytoczonej powyżej propozycji jednej ze studentek nauczyciel jawi się jako niepodważalny „autorytet“ posiadający monopol na wiedzę. Uczeń w tej sytuacji musi jedynie odgadywać jego intencje i biernie poddawać się instrukcjom. Efekt w postaci końcowego zapisu jest dobry, ale czy uczeń zrozumiał swój błąd? Czy uchwycił sens trudności zawartej w zadaniu? Czy miał możliwość samodzielnego działania i rozumowania?

Sytuacja 2.

Jak pomożesz uczniowi, odkryć i poprawić błąd, gdy dzielenie 360 Ó (3 + 2) wykonał następująco: 360 Ó (3 + 2) = 360 Ó 3 + 360 Ó 2 = 120 + 180 = 300

W sytuacji tej istotne jest rozumienie pojęcia dzielenia i znajomość jego interpretacji wykorzystywanych w klasach młodszych tj. dzielenia jako podziału na równe części lub rozdzielania po kilka elementów czyli tzw. mieszczenia.

Jedna studentka wcale nie zauważyła błędu mimo informacji o nim. Kilka studentek odwołało się do kolejności wykonywania działań. Koncentrowały one uwagę dziecka na konieczności obliczenia najpierw działania w nawiasie. Przy takiej postawie nauczyciela uczeń poprawia swój błąd zgodnie z instrukcją, nie wie jednak dlaczego tak nie wolno mu dzielić, ani dlaczego w innych sytuacjach [np. w mnożeniu 17 · (22+2)] wcale nie musi najpierw dodawać. Wygląda na to, iż swojego błędu nie popełnił przypadkowo. Można przypuszczać, że znając i wielokrotnie z powodzeniem stosując rozdzielność mnożenia względem dodawania w przypadku dzielenia postępuje analogicznie. Dzielenie jest rozdzielne względem dodawania jednakże rozdzielać możemy dzielną a nie dzielnik i o tym prawdopodobnie uczeń nie pamięta. Na ten fakt należy zwrócić mu uwagę odwołując się do samego pojęcia dzielenia np. jako podziału na równe części. Tego w propozycjach tych studentek brakuje.

Były takie, które odwołały się do samego pojęcia dzielenia proponując np.: *Gdybyśmy mieli rozdzielić 360 zł po równo pomiędzy 3 dziewczynki i 2 chłopców to jakbyśmy to zrobili?* W tej sytuacji uczeń sam musi zauważyć, że jak rozdzieli całą kwotę między 3 dziewczynki to dostaną one po 120 zł i już nic nie zostanie dla chłopców. Tak więc w ten sposób dzielić nie można. Ta sytuacja zmusza ucznia do odkrycia sposobu rozdzielania tej kwoty na pięć równych części. Może tu nawet rozdzielać dzielną by łatwiej mu było obliczać po ile każdy dostanie.

Sytuacja 3.

Należało rozwiązać zadanie: Adam i Ewa mają podzielić między siebie 20 zł tak, aby Ewa miała o 4 zł więcej. Ile pieniędzy dostanie każde z nich?

Uczeń zaproponował następujące rozwiązanie: *Najpierw równo rozdzielę 20 zł między Ewę i Adama, a później zabiorę 4 zł Adamowi i dam Ewie. Wtedy Ewa będzie miała o 4 zł więcej.*

Jak byś pomogła uczniowi odkryć i poprawić błąd?

W tej sytuacji z kolei mamy do czynienie z porównywaniem różnicowym. Ważne jest tu rozumienie zwrotu „o 4 więcej“. W klasach początkowych powinien on być rozumiany jako „tyle samo i jeszcze 4“.

Wiele studentek pozwalało uczniowi rozwiązać zadanie tak jak zaproponował i pytało:

N: Ile ma Ewa a ile Adam?

N: Sprawdź o ile więcej ma Ewa niż Adam.

N: Czy tak miało być?

To pozwalało dziecku zauważyć, że jest błąd. Należało jeszcze ten błąd zlokalizować i poprawić. W tym celu prosiły o zilustrowanie rozdawania pieniędzy za pomocą żetonów, patyczków lub na rysunku. W każdym przypadku akceptowały pomysł ucznia podziału pieniędzy na 2 równe części. Na rysunku są dwa szeregi żetonów (kółeczek), w każdym po tyle samo i są one ułożone jeden pod drugim. Następnie zachęcały do przesuwania po jednym żetonie z części Adama do części Ewy przy jednoczesnej obserwacji zmian w liczebności elementów obu zbiorów. Przy przesunięciu jednego żetonu, różnica podwaja się i wynosi 2. Aby więc różnica wynosiła 4, należy przesunąć 2 żetony, a nie 4 jak proponował na początku uczeń. Takie postępowanie z jednej strony sygnalizuje, że gdzieś jest błąd, a ponadto pozwala ten błąd odkryć i poprawić. Jedna z nich na zakończenie proponuje jeszcze inne rozwiązanie, które w tej sytuacji pozwala jeszcze lepiej zrozumieć porównywanie różnicowe.

Inna ze studentek podała uczniowi instrukcję:

Należy najpierw od 20 zł odjąć 4 zł, a następnie resztę, czyli 16 zł, podzielić na 2 osoby [chodzi o podział na 2 równe części], *czyli mają po 8 zł. Ale Ewa ma mieć o 4 zł więcej i dopiero do tego trzeba dodać 4 zł dla Ewy*: 8 zł + 4 zł = 12 zł – *kwota Ewy*, a 8 zł – *kwota Adama. Ponieważ ty zabrałeś 4 zł Adamowi* [10 - 4] *i dałeś je Ewie* [10 + 4], *wtedy Ewa miała nie o 4 zł więcej tylko o 8.*

Tutaj studentka pokazała, że sama potrafi rozwiązać zadanie, ale nie zrobiła nic by pomóc uczniowi odkryć i poprawić błąd, który on popełnił. Ponadto narzuciła mu swój sposób rozwiązania. Obawiać się można, że jest tak dlatego, że ona nie potrafi wykorzystać pomysłu dziecka. Umie tylko tak rozwiązać jak to zademonstrowała.

Reakcje studentów na błędy uczniowskie były różne. Niektórzy, zamiast pomóc dziecku polecali śledzić swój sposób myślenia narzucając własne rozwiązania [patrz ja to robię tak], inni sterowali czynnościami ucznia wydając szczegółowe instrukcje kolejnych kroków postępowania, pozorując tym samym aktywność ucznia, gdy tymczasem on był tylko narzędziem w ręku. nauczyciela. Jeszcze inni w sytuacji 1. lub 2. zamiast zredukować abstrakcję i używać konkretów powoływali się na kolejność działań i reguły opuszczania nawiasów.

Warto na zakończenie dodać, że reakcje studentów na błędy uczniów nie odbiegają w istotny sposób od reakcji doświadczonych nauczycieli. Pocieszającym jest fakt, że są wśród nich zachowania pożądane. Chcę wierzyć, że są to te dobre efekty naszej pracy.

Literatúra

[1] Ciosek, M.: *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny.* Dydaktyka matematyki 13, 1992, s. 65-161.

[2] Booker, G.: *Rola błędów w konstrukcji matematycznej wiedzy*, Dydaktyka matematyki 11, 1989, s. 99-108.

Adresa autora:
Dr. Barbara Nawolska
Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Ul. Ingardena 4
30-060 Kraków
e-mail: bnawol@ap.krakow.pl

Dvě úlohy řešené Markovovými řetězy

Jiřina Novotná

Abstract. *The mathematical approach used by chains of Markov is described in our article. The processes of Markov are simulated by means modern mathematical approach, namely theory of probability, matrices and graphs.*

Úvod

Posloupnost pokusů, kde výsledek každého jednotlivého pokusu je závislý na některých nekontrolovatelných faktorech, které mají náhodný charakter, se nazývá stochastický proces. Budeme popisovat procesy s konečným počtem takových pokusů, z nichž každý má konečný počet výsledků.

Dalším předpokladem je, že známe-li výsledky všech předchozích pokusů, známe také všechny výsledky, které mohou nastat při provedení pokusu následujícího, i jejich pravděpodobnosti

Speciálním typem stochastických procesů jsou Markovovy řetězy. Jsou to takové stochastické procesy, kde výsledky následujících pokusů jsou závislé jen na výsledku pokusu předcházejícího.

Markovovy řetězy

Posloupnost pokusů, kde každý pokus má tutéž konečnou množinu možných výsledků $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots \mathrm{E}_n$, nazveme Markovovým řetězem, jestliže pravděpodobnost každé konečné posloupnosti výsledků (pokusů nultého až n-tého) je dána vztahem

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_{j0}, \mathrm{E}_{j1}, \ldots .\mathrm{E}_{jn}) = \mathrm{p}_{j0}\mathrm{p}_{j0j1}\ \mathrm{p}_{j1j2}\ldots .\mathrm{p}_{jn-1jn},$$

$1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$, jsou pravděpodobnosti výsledků nultého pokusu a p_{jk}, kde $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$, $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$, je pro všechny
pokusy podmíněná pravděpodobnost výsledku E_k za podmínky výsledku E_j v pokuse předcházejícím,

$$\mathrm{p}_{jk} = \mathrm{P}(\mathrm{E}_k/\mathrm{E}_j).$$

Posloupnost p_j, $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$, se nazývá počáteční rozdělení pravděpodobnosti.

Čísla $\mathrm{p}_{jk} = \mathrm{P}(\mathrm{E}_k/\mathrm{E}_j)$ udávající podmíněnou pravděpodobnost, že uvažovaný pokus bude mít výsledek E_k, jestliže bezprostředně předcházející pokus měl výsledek E_j, se nazývají pravděpodobnosti přechodu.

Markovovy řetězy, které mají vlastnost nezávislosti podmíněných pravděpodobností $\mathrm{P}(\mathrm{E}_k/\mathrm{E}_j)$ na čase t, se nazývají homogenní Markovovy řetězy. V dalším se budeme zabývat pouze homogenními Markovovými řetězy. Čtvercová matice $\boldsymbol{P}$, jejíž každý prvek p_{ij} udává pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j, se nazývá matice pravděpodobností přechodu daného Markovova řetězu. Každý Markovův řetěz je jednoznačně určen touto maticí a počátečními pravděpodobnostmi p_j, kde $1 \leq \mathrm{j} \leq$ n. Tuto matici je možno znázornit také přechodovým diagramem, kde stavy $\mathrm{E}_1, \ldots,$

E_n zobrazíme v rovině n různými body $A_1, \ldots, A_n$, a právě tehdy, když p_{jk} je kladné číslo, vedeme od A_j k A_k šipku označenou číslem p_{jk}, viz přechodový diagram u řešené úlohy. Matici přechodu můžeme také vyjádřit ve formě $n$stromů, kde za kořeny stromů postupně volíme stavy $E_1, \ldots, E_n$, jak je uvedeno např. v (1), (4).

Mocniny matice přechodu jsou velmi důležité při určování pravděpodobností přechodu ze stavu E_j do stavu E_k po n krocích. Podmíněná pravděpodobnost toho, že systém je v času n ve stavu E_k za podmínky, že jeho počáteční stav byl E_j, je rovna prvku p_{jk} n-té mocniny příslušné matice pravděpodobnosti přechodu.

Mocninu matice přechodu můžeme určovat různými způsoby, viz [2], [3] a [4]. Protože u řešených příkladů se jedná o mnohonásobné opakování, nezadané konkrétní hodnotou, provádíme výpočet pomocí pevného bodu (vektoru) matice přechodu.

Řešené úlohy

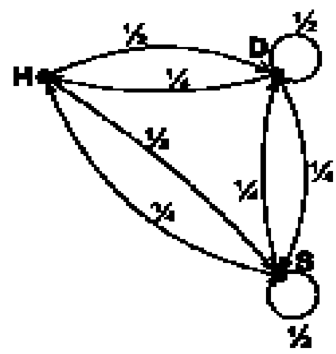
Počasí v zemi OP.

Ve státě OP mají zvláštní chod počasí. Nemají tam nikdy dva po sobě jdoucí dny s pěkným počasím. Je-li tam určitý den hezky (tento den označíme H), je stejná pravděpodobnost toho, že příští den bude pršet(označíme D) nebo padat sníh (S). Padá-li sníh nebo prší, pak je pravděpodobnost jedna polovina, že druhý den bude totéž počasí. Změní-li se počasí ze sněžení nebo deště, jen v polovině případů je to změna v hezké počasí.

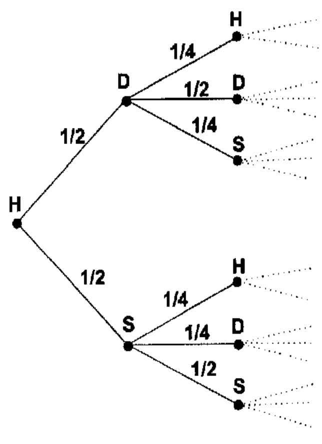
Sestavte Markovův řetězec o třech stavech, který popisuje situaci. Najděte pravděpodobnosti sněhu, deště a hezkého počasí po dlouhé době. Kolik dní v roce je v zemi OP hezky?

Nejprve sestavíme matici přechodu: Přechodový diagram má následující tvar:

$$P = \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{S} \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \mathrm{D} & \mathrm{S} \end{array} \end{array}$$



Strom, v němž vycházíme z hezkého počasí, vypadá takto:



Pravděpodobnosti různých druhů počasí po n-tém dni:

$$p_n = p_0 P^n$$
$$p_0 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

Výpočet pevného vektoru $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} = (x, y, z)$

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic, ze kterých vypočítáme prvky pevného vektoru:

$$x = \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z$$
$$y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z$$
$$z = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z$$
$$1 = x + y + z$$

Pravděpodobnost toho, že v zemi OP bude hezky, je $\frac{1}{5}$, pršet bude s pravděpodobností $\frac{2}{5}$ a sněžit s pravděpodobností $\frac{2}{5}$. Počet dní v roce, v nichž bude hezky, je 73 dní.

Hrášek pod skořápkou.

Eskamotér vkládá zrnko hrachu pod tři skořápky označené A, B, C.

1. Je-li hrách pod A, je stejně pravděpodobné, že vloží zrnko znovu pod A, jako že je přemístí pod skořápku B. Je-li pod B, umístí ho určitě pod C. Je-li pod C, umístí ho buď pod B nebo C, ale je dvakrát pravděpodobnější, že ho znovu umístí pod C než pod B.

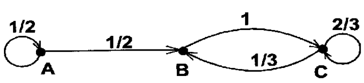
2. Je-li hrách pod A, je jasné, že příště bude opět pod A, je-li hrách pod B, je stejně pravděpodobné, že příště bude pod A, B, nebo C a je-li pod C, bude pak s poloviční pravděpodobností pod A a s poloviční pravděpodobností pod B.

K oběma částem úlohy určete, pod kterou skořápkou a s jakou pravděpodobností bude zrnko hrachu po n krocích.

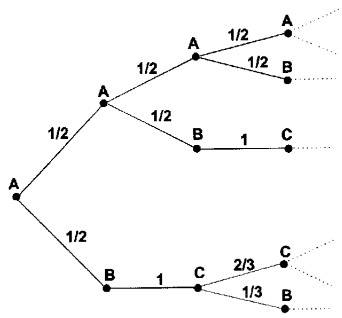
1) Matice přechodu:

$$P = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \end{array}$$

Přechodový diagram:



Strom má tvar:



Výpočet pevného vektoru $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} = (x, y, z)$

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Získáme soustavu rovnic:

$$x = \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z$$
$$y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z$$
$$z = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z$$
$$1 = x + y + z$$

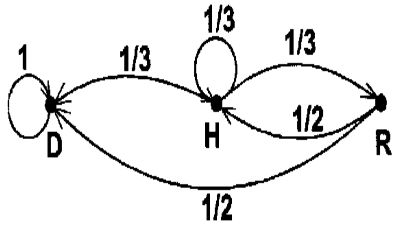
Ze soustavy rovnic: $x = 0, y = \frac{1}{4}, z = \frac{3}{4}$, takže $w = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Po n krocích bude hrách pod skořápkou B s pravděpodobností $P(B) = \frac{1}{4}$ a pod skořápkou C s pravděpodobností $P(C) = \frac{3}{4}$.

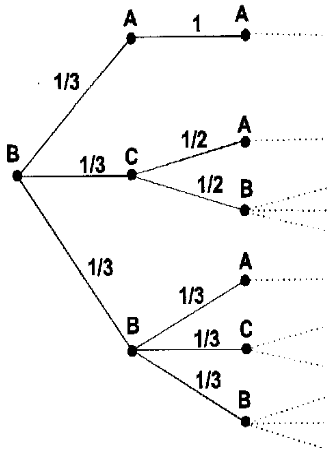
2)Matice přechodu:

$$P = \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \end{array}$$

Přechodový diagram:



Strom je tvaru:



Výpočet pevného vektoru $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} = (x, y, z)$ Získáme soustavu rovnic:

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{2}z \\ y &= \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{2}z \\ z &= \tfrac{1}{3}y \\ 1 &= x + y + z \end{aligned}$$

Ze soustavy rovnic: $x = 1, y = 0, z = 0$, takže $w = (1, 0, 0)$.

Po n krocích bude hrách s pravděpodobností $P(A) = 1$ pod skořápkou A. Jde o absorbující Markovův řetězec.

Literatúra

[1] Blažková, R. *Využití stromových struktur ve výuce matematiky.* In Sborník příspěvků z XIV. Vědeckého kolokvia o řízení osvojovacích procesů, VVŠ PV Vyškov, 1996.

[2] Dupač, V., Dupačová, J. *Markovovy procesy.* Praha, SPN, 1980.

[3] Kemeny, J.,G., Snell, J., L., Thompson, G., L. *Úvod do finitní matematiky.* Praha, SNTL, 1971.

[4] Novotná, J. *matematika v Mendelových objevech.* In Matem. a didaktika matem., Sborník prací, č.171, Brno, Katedra matematiky, Pedag. fak. MU v Brně, 2003. ISBN 80-210-331-8

Adresa autora:
PhDr. Jiřina Novotná, PhD.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU
Poříčí 31
602 00 Brno
Česká republika
e-mail: novotna@ped.muni.cz

Stochastické usudzovanie v matematike „pre každého”

Adam Płocki

Abstract. *The amount of probabilities consists not only of groups of definitions and sentences but of special judgements. Those judgements concerns the process of decision making, validation of hypotheses, estimation of chances and risks. It arises from the extent of probability of some events, from the average value of random variable etc. To form those judgements and proofs is a mathematical activity typical for the stochastic. Development of the ability to form judgements, which in practice arises from the fact that some event has low probability (in fact is imposible), is an important aim of education of stochastic at school. There are examples of some statistic judgements suitable for mathematical lessons.*

Úvod. Stochastická metodológia vo výučbe pravdepodobnosti

Počet pravdepodobnosti pre každého sa spája s výpočtami pravdepodobnosti rôznych javov. Nedostatok motivácie pre tieto výpočty je jednou z príčin neobľúbenosti tejto časti matematiky medzi učiteľmi a žiakmi.

Ako matematická teória je počet pravdepodobnosti postupnosťou definícií a viet. Sú to v podstate definície pojmov a tvrdenia teórie miery. To čo odlišuje počet pravdepodobnosti ako špeciálnu časť matematiky (od teórie miery) je jeho metodológia, ktorá obsahuje:

- špecifické objekty a prostriedky matematizácie (jedná sa o konštruovanie pravdepodobnostných priestorov ako matematických modelov niektorých, väčšinou mimomatematických situácií),
- špecifické usudzovania vyplývajúce z výpočtov a dedukcie (a teda napríklad z veľkosti vypočítanej pravdepodobnosti javu), a dotýkajúce sa ohodnotenia šance a rizika, očakávaných ziskov a strát, hľadania racionálnych stratégií postupu alebo tiež procesu rozhodovania v podmienkach rizika atď.

Metodológia, o ktorej tu hovoríme, sa týka dvoch fáz procesu aplikácie matematiky: *fázy matematizácie* a *fázy interpretácie*. Matematický problém, ktorý tu vzniká, sa týka medzi inými vierohodnosti spomenutých úsudkov.

Práca sa dotýka stochastickej metodológie ako dôležitého prvku matematického vzdelávania v rámci „matematiky pre každého“. Predmetom práce sú:

- ○ usudzovania týkajúce sa argumentácií, že pravdepodobnostný priestor je stochastickým modelom náhodného pokusu (symetrie v prípade hodu kockou alebo mincou, pomery v prípade losovanie gúľ z urny, kariet z balíka kariet alebo kameňov domina, miery v prípade losovania sektora ruletky alebo miešania a delenia cesta s hrozienkami, štatistické údaje) a súčasne niektorej mimomatematickej situácie;
- ○ usudzovania pomocou analógií, ktoré vyplývajú z niektorej ekvivalencie pravdepodobnostných priestorov (ide o ich izomorfizmus);

- usudzovania spojené so stochastickou simuláciou (konštrukcia náhradných losovacích nástrojov);
- usudzovania opierajúce sa o „princíp praktickej istoty“ (jav prakticky nemožný v stochastických úsudkoch) a spojené s overovaním hypotéz, teda
  - a) usudzovania spojené s konštrukciou kritickej oblasti a
  - b) usudzovania vyplývajúce z faktu, že hodnota niektorej štatistiky patrí do kritickej oblasti.

Ak je A konečná množina, tak $\overline{\overline{A}}$ označuje počet jej prvkov. Každú n-člennú postupnosť, ktorej členmi sú prvky množiny A, nazývame *n-člennou variáciou množiny A*. Súbor všetkých n-členných variácií množiny označujeme symbolom A^n. Zápis $\{0, 1\}^n$ tu označuje súbor všetkých n-členných postupností, ktorých členmi sú čísla 0 a 1. Takých postupností je 2^n.

Pravdepodobnostný priestor ako matematický model náhodného pokusu

Predmetom počtu pravdepodobnosti nie sú techniky výpočtu pravdepodobnosti, ale konštruovanie a skúmanie pravdepodobnostných priestorov.

Nech Ω je ľubovoľnou, aspoň dvojprvkovou, ale konečnou množinou. Nech ďalej $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$.

Definícia 1. *Rozdelením pravdepodobnosti na množine* $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$ nazývame každú nezápornú funkciu p na množine Ω takú, že

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \ldots + p(\omega_s) = 1.$$

Definícia 2. Dvojicu (Ω, p), kde p je rozdelením pravdepodobnosti na množine Ω, nazývame *pravdepodobnostným priestorom.* Ak $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$ a $p(\omega_1) = p(\omega_2) = p(\omega_3)=\ldots=p(\omega_s) = \frac{1}{s}$, tak funkciu p nazývame *klasickým rozdelením pravdepodobnosti na množine* Ω a dvojicu (Ω, p) nazývame *klasickým pravdepodobnostným priestorom.*

Definícia 3. Ak (Ω, p) je pravdepodobnostný priestor, tak každú podmnožinu množiny Ω nazývame *javom* alebo *udalosťou* v tomto pravdepodobnostnom priestore.

Definícia 4. Nech (Ω, p) je pravdepodobnostný priestor a $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$. Nech $A \subset \Omega$. Množina A je jav v pravdepodobnostnom priestore (Ω, p). *Pravdepodobnosťou javu A* nazývame číslo

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{ak } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{ak } A = \{\omega\}, \\ p(\omega_{j_1}) + p(\omega_{j_2}) + \ldots + p(\omega_{j_k}), & \text{ak } A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_k}\}. \end{cases} \tag{4}$$

Veta 1. Ak (Ω, p) je klasický pravdepodobnostný priestor a A je jav v tomto priestore $(A \subset \Omega)$, tak

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}.$$

Je to obsah tzv. *vety o klasickej pravdepodobnosti* alebo *Laplaceovej vety.* Táto veta sa často omylom nazýva „klasická definícia pravdepodobnosti“.

Pravdepodobnostný priestor je matematický pojem. Vo vyučovaní matematiky tento pojem (tak ako geometrické pojmy) má byť úzko previazaný s reálnym svetom, v ktorom žiak žije. Na vyučovacích hodinách pravdepodobnostný priestor je stochastickým (a teda matematickým) modelom náhodného pokusu, ktorý žiak prevádza v hre alebo v inej činnosti. Náhodnými pokusmi sú:

- hod mincou, hod kockou a losovanie gule z urny (jednoduché náhodné pokusy),
- viacnásobný hod jednou mincou alebo hod viacerými mincami,
- viacnásobný hod jednou kockou alebo hod viacerými kockami,
- viacnásobné losovanie (s vrátením alebo bez vracania) gule z urny alebo súčasné losovanie viacerých gúľ z urny.

Súbor možných výsledkov náhodného pokusu označujeme ďalej Ω. **Definícia 5.** Ak $(\Omega,\ p)$ je pravdepodobnostný priestor a Ω je množina všetkých výsledkov náhodného pokusu δ, a funkcia p priraďuje ku každému výsledku pravdepodobnosť, s akou sa môže pokus δ skončiť týmto výsledkom, tak dvojicu $(\Omega,\ p)$ nazývame *stochastickým modelom pokusu* δ.

Stochastickým modelom pokusu δ je klasický pravdepodobnostný priestor vtedy a len vtedy, ak všetky jeho výsledky sú rovnako pravdepodobné.

Z Laplaceovej vety vyplýva: pokiaľ všetky výsledky náhodného pokusu δ sú rovnako pravdepodobné a A je jav spojený s týmto pokusom, tak

$$P(A) = \frac{\text{počet výsledkov priaznivých javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu } \delta}.$$

Mince, hracie kocky a urny s guľami nazývame *losovacie nástroje*. Ďalej budeme uvažovať len mince a hracie kocky.
Ďalej použijeme, že platí: $2^{21} = 2097152$, $6^6 = 46656$, $6! = 720$.

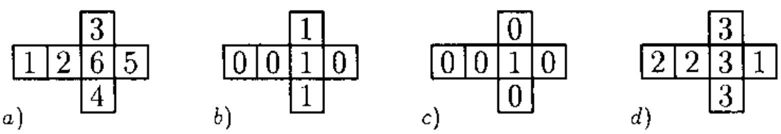
[Stochastický model hodu mincou] Dva možné výsledky hodu mincou kódujme číslami: 0: padne líc, 1: padne rub. Zo symetrie mince vyplýva, že oba tieto výsledky sú rovnako pravdepodobné. Stochastickým modelom hodu mincou je preto klasický pravdepodobnostný priestor (Ω_M, p_M), kde

$$\Omega_M = \{0,\ 1\} \text{ a } p_M(0) = p_M(1) = \tfrac{1}{2}.$$

[Stochastický model hodu kockou] Výsledok hodu kockou je počet padnutých bodiek. Všetky výsledky hodu kockou sú rovnako pravdepodobné. Stochastickým modelom hodu kockou je preto klasický pravdepodobnostný priestor (Ω_K, p_K), kde

$$\Omega_K = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \text{ a } p_K(1) = p_K(2) = p_K(3) = p_K(4) = p_K(5) = p_K(6) = \tfrac{1}{6}.$$

- Na obrázku 1 máme siete štyroch kociek: K_{123456} (obr. 1*a*), $K_{0001111}$ (obr. 1*b*), K_{000001} (obr. 1*c*) a K_{122333} (obr. 1*d*). Kocka K_{123456} je v podstate obyčajnou hracou kockou, len na stenách namiesto bodiek je ich počet. Výsledok hodu každou z týchto kociek je padnuté číslo, to je číslo na hornej stene po jej hode.



Obr. 1 Siete štyroch kociek ako losovacích nástrojov

- Stochastickým modelom hodu kockou K_{123456} je pravdepodobnostný priestor (Ω_K, p_K).
- Stochastickým modelom hodu kockou K_{000001} je pravdepodobnostný priestor (Ω_c, p_c), kde $\Omega_c = \{0, 1\}$ a $p_c(0) = \frac{5}{6}$, $p_c(1) = \frac{1}{6}$.
- Stochastickým modelom hodu kockou K_{122333} je pravdepodobnostný priestor (Ω_d, p_d), kde $\Omega_d = \{1, 2, 3\}$ a $p_d(1) = \frac{1}{6}$, $p_d(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p_d(3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

[Stochastický model n-násobného hodu mincou] Výsledok n-násobného hodu mincou predstavujeme ako postupnosť výsledkov postupných hodov, a teda ako n-člennú variáciu množiny $\{0,\ 1\}$. Ak Ω_M^n je množina výsledkov n-násobného hodu mincou, tak $\Omega_M^n = \{0,\ 1\}^n$. Máme 2^n možných výsledkov n-násobného hodu mincou a všetky sú rovnako pravdepodobné. Vyplýva to z faktu, že v každom hode rub a líc sú rovnako pravdepodobné. Stochatickým modelom n-násobného hodu mincou je pravdepodobnostný priestor $(\Omega_M^n,\ p_M^n)$, kde

$$\Omega_M^n = \{0, 1\}^n \text{ a } p_M^n(\omega) = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pre každé } \omega \in \Omega_M^n.$$

[Stochastický model n-násobného hodu kockou] Výsledok n-násobného hodu kockou je postupnosť výsledkov postupných hodov, a teda je to n-členná variácia množiny $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Ak Ω_K^n je množina výsledkov n-násobného hodu kockou, tak $\Omega_K^n = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}^n$. Máme 6^n možných výsledkov n-násobného hodu kockou a všetky sú rovnako pravdepodobné. Vyplýva to z faktu, že v každom hode každý zo šiestich výsledkov hodu kockou je rovnako pravdepodobný. Stochatickým modelom n-násobného hodu kockou je pravdepodobnostný priestor $(\Omega_K^n,\ p_K^n)$, kde

$$\Omega_K^n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n \text{ a } p_K^n(\omega) = \frac{1}{6^n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ pre každé } \omega \in \Omega_K^n$$

- S n-násobným hodom mincou spojme javy:

  $A_n = \{\textit{padne viac lícov ako rubov}\}$,

  $B_n = \{\textit{padne viac rubov ako lícov}\}$.

  Zo symetrie vyplýva, že $P(A_n) = P(B_n)$ pre každé nepárne $n > 1$.

  Ak $n = 21$, tak $P(A_{21}) = P(B_{21}) = \frac{1}{2}$.

Javy prakticky nemožné, javy prakticky isté a princíp praktickej istoty

Definícia 6. Jav A v pravdepodobnostnom priestore $(\Omega,\ p)$ nazývame *prakticky nemožným,* ak $P(A) < 0{,}05$. Jav B v tomto priestore $(\Omega,\ p)$ nazývame *prakticky istým,* ak $P(B) \geq 0,95$. Číslo $\alpha = 0{,}05$ nazývame *hladinou významnosti.*

- So šesťnásobným hodom kockou spojme javy:

  $A_K = \{\textit{padnú všetky počty bodiek}\}$,

  $B_K = \{\textit{niektorý počet bodiek padne aspoň dvakrát}\}$.

  V klasickom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega_K^6,\ p_K^6)$ je:

$$P\left(A_K\right) = \frac{6!}{6^6} = \frac{720}{46656} \approx 0,015432 \quad a \quad P\left(B_K\right) = 1 - P\left(A_6\right) \approx 0,984567$$

Jav A_K je tu prakticky nemožný, jav B_K je prakticky istý.

- Šesťnásobný hod jednou kockou môžeme nahradiť súčasným hodom šiestimi rôznofarebnými kockami. S hodom šiestimi kockami spojme javy:

  $A_{6K} = \{$*padnú všetky počty bodiek*$\} = \{$*na každej kocke padne iný počet bodiek*$\}$,

  $B_{6K} = \{$*niektorý počet bodiek padne aspoň na dvoch kockách*$\}$.

  Je samozrejmé, že

  - jav A_{6K} je rovnako malo pravdepodobný ako jav A_K,
  - jav B_{6K} je rovnako veľmi pravdepodobný ako jav B_K.

  Jav A_{6K} je tu prakticky nemožný, jav B_{6K} je prakticky istý.

- Prakticky nemožné sú tiež nasledovné javy spojené s hodom šiestimi kockami:

  $C_{6K} = \{$*na každej kocke padne šesť bodiek*$\}$,

  $D_{6K} = \{$*na každej kocke padne rovnaký počet bodiek* $\}$.

- S n-násobným hodom mincou spojme javy:

  $C_n^j = \{$*rub padne aspoň j krát*$\}$ pre $j = 1, 2, 3, ..., n$,

  $D_n = \{$*v každom hode padne rub*$\}$,

  $E_n = \{$*v každom hode padne tá istá strana mince*$\}$.

  Nech $n = 21$. Potom

  $$P\,(C_{21}^{15}) < 0,05 \quad \text{a} \quad P\,(C_{21}^{14}) > 0,05 \quad \text{a}$$
  $$P\,(D_{21}) = \tfrac{1}{2^{21}} < 0,05 \quad \text{a} \quad P\,(E_{21}) = \tfrac{2}{2^{21}} < 0,05;$$

  a teda:

  - javy D_{21} a E_{21} sú prakticky nemožné,
  - najmenšie j, pre ktoré jav C_{21}^j je prakticky nemožný, sa rovná 15.

  Z toho vyplýva, že pre každé $k \geq 15$ jav C_{21}^k je tiež prakticky nemožný.

[Princíp praktickej istoty] Stochastické usudzovania, o ktorých ďalej hovoríme, sa opierajú o tzv. *princíp praktickej istoty.* Jeho obsahom je fakt, že ak jav A spojený s náhodným pokusom δ je prakticky nemožný, tak môžeme si byť prakticky istí, že tento jav nenastane, ak náhodný pokus δ (za chvíľku a teda v budúcnosti) vykonáme.

- Ak za chvíľku budeš hádzať šiestimi kockami (nie je dôležité akej sú farby), tak

  - je prakticky nemožné, aby padli všetky počty bodiek (aby nastal jav A_{6K}),
  - môžeš si byť prakticky istý, že aspoň na dvoch kockách padne rovnaký počet bodiek (že nastane jav B_{6K}),
  - môžeš si byť prakticky istý, že nenastane ani jav C_{6K} ani jav D_{6K}.

Poznámka: Hádž šiestimi kockami a presvedč sa o tom, že vyššie uvedené úsudky sa potvrdzujú v praxi. Uváž pri tom, že tieto úsudky sa týkajú budúcnosti.

- Ak plánuješ za chvíľu 21 krát hodiť mincou, tak si môžeš byť prakticky istý, že počet padnutých rubov nebude väčší ako 14, lebo padnutie aspoň 15 rubov (jav C_{21}^{15}) je prakticky nemožný.

Mimomatematické problémové situácie ako prameň školských úloh z počtu pravdepodobnosti

Navrhneme dve skupiny úloh vzniknutých na základe mimomatematických situácií. Preklad týchto úloh do matematického jazyka, získavanie metód ich riešení na základe počtu pravdepodobnosti, používanie stochastických analógií ako zvláštneho prostriedku argumentácie a súčasne interpretácia výsledkov výpočtov do reality, to sú matematické aktivity kreované týmito úlohami. Tieto aktivity sa tu dotýkajú nielen sveta matematiky (fáza výpočtu), ale aj prechodu od reálneho sveta do sveta matematickej abstrakcie (fáza matematizácie) aj s návratom (fáza interpretácie). Navrhnuté problémy môžu byť na hodinách matematiky ilustráciou procesu aplikácie matematiky (pozri [7], str. 245).

Model hodu mincou v mimomatematických úlohách

1. *O chvíľu by malo začať futbalové stretnutie. Rozhodca je už na ihrisku a odrazu zistil, že nemá so sebou mincu. Čo by si mu poradil v tejto situácii?*

2. *Na zábavnej hre môžeš vyhrať za 1 Euro DVD prehrávač, ktorý stojí 100 Eur. Najprv musíš zaplatiť 1 Euro za účasť v hre a potom hádzať 21 krát mincou. Prehrávač je tvoj, ak padnú samé líce alebo samé ruby. Aké máš šance na výhru tohto prehrávača za 1 Euro? Môže prevádzkovateľ tejto hry očakávať zisk? Ako to vysvetlíš pomocou počtu pravdepodobnosti?*

3. *Z rybačky sa vracajú dedko s vnukom. Obaja lovili ryby na rovnaké návnady. Priniesli spolu 21 rýb. Je možné odhadnúť koľko rýb ulovil dedko? Nakoľko je pravdepodobné, že všetky ryby ulovil dedko?*

4. *Mama mieša cesto, do ktorého pridala 21 hrozienok. Cesto bude rozdelené na dve rovnaké časti a z každej vznikne bábovka. Nakoľko je pravdepodobné, že jedna z týchto bábovіek bude bez hrozienok?*

5. *Mama už zamiesila cesto a rozdelila ho na dve rovnaké časti. Z každej vyformovala bábovku. Pred vložením bábovіek do rúry sa ukázalo, že 21 hrozienok sa (náhodou) nedostalo do cesta a leží vedľa. Čo urobiť v tejto situácii s týmito hrozienkami, aby sa dostali do bábovіek?*

6. *V písomke zo zemepisu žiak dostal 21 otázok. Ku každej sú pripojené dve odpovede áno alebo nie a žiak má podčiarknuť správnu. Môžeme dať dobrú známku za podčiarknutie všetkých správnych odpovedí? Nie je predsa nemožné, že žiak, ktorý nič nevie z učiva zemepisu, uhádne náhodou správnu odpoveď ku každej otázke. Tento žiak má šancu získať dobrú známku z tejto písomky. Aká veľká je táto šanca? Je vierohodná takáto dobrá známka?*

7. *Kvočka sedí na 21 vajíčkach. Predpokladáme, že sa z každého vajíčka vyliahne kurča. Nakoľko je pravdepodobné, že sa vyliahnu len samé sliepočky alebo samé kohúty?*

8. *V hre sa bude hádzať 21 mincami. Ak padne viac lícov ako rubov, tak vyhráva Adam, ak padne viac rubov ako lícov, tak vyhráva Boris. Je spravodlivá táto náhodná hra?*

9. *Dvaja poľovníci Jan a Jozef sa vracajú z poľovačky. Spolu ulovili 21 zajacov. Nakoľko je pravdepodobné, že všetky tieto zajace ulovil jeden z týchto poľovníkov?*

10. *Predpokladajme, že v tejto poľovačke všetky tieto zajace ulovil Ján. Povedal, že to je dôkaz toho, že je lepším poľovníkom ako Jozef. Môžeš súhlasiť s Jánovým tvrdením? Predpokladajme, že sú obaja rovnako dobrí poľovníci (je to hypotéza H_0). Nakoľko je v tejto situácii pravdepodobné ulovenie všetkých 21 zajacov Jánom?*

11. *Riaditeľstvo mestských kaviarní hľadá pracovníka, ktorý by kontroloval, či v kaviarňach čašníci správne účtujú príslušnú cenu za podávaný druh kávy. V týchto kaviarňach je podávaná káva dvoch druhov. Šálka každého druhu má inú cenu. Prihlásila sa pani Nováková, ktorá tvrdí, že má schopnosť rozlišovať podľa chute druh kávy. Riaditeľstvo sa rozhodlo overiť schopnosť tejto pani. Boli jej podané dve šálky kávy, pričom každá bola iného druhu. Pani Nováková správne určila druh kávy v týchto šálkach. Tento pokus bol opakovaný 21 krát. Pani Nováková 17 krát správne určila druh kávy. Dáva tento fakt základ, aby bolo možné tvrdiť, že pani Nováková má schopnosť potrebnú pre túto prácu? Nakoľko je pravdepodobné získanie aspoň 17 správnych určení druhu kávy v situácii, keď pani Nováková nemá schopnosť rozlíšiť druh kávy (a teda pri predpoklade, že háda)?*

Model hodu kockou v mimomatematických úlohách

12. *Čím a akým spôsobom nahradiť kocku v situácii, keď ju nemáme. Ako hádzať kockou, keď nemáme kocku? A teda ako simulovať hod kockou?*

13. *Po miešaní a rozdelení cesta na 6 rovnakých častí (z ktorých je vyformovaných 6 báboviek), sa zistilo, že 6 hrozienok sa nedostalo (náhodou) do cesta. Ako postupovať v takej situácii, aby sa hrozienka dostali do báboviek? Je potrebné nanovo miešať a deliť cesto? Je to možné urobiť aj ináč?*

14. *Mama mieša cesto do ktorého nasypala 6 lieskových orieškov. O chvíľu bude cesto rozdelené na 6 rovnakých častí, z každej zostane vyformovaná a upečená bábovka. Nakoľko je pravdepodobné, že v každej bábovke bude oriešok. Nakoľko je pravdepodobné, že aspoň jedna bábovka bude bez orieškov?*

15. *V pekárni bolo zverejnené oznámenie: „Dnes predávame rohlíky s hrozienkami. Spolu je upečených s rovnakých rohlíkov z cesta, do ktorého bolo pridané k hrozienok.“ Kúpil si jeden rohlík a v ňom nebolo hrozienka. Môžeš sa cítiť sklamaný v situácii, keď* $s = k = 6$?

16. *Z poľovačky sa vrátilo 6 poľovníkov (ulovená zver zostala vonku). Z výpovedí poľovníkov vyplýva, že sa náhle ukázal kŕdeľ 6 kačiek, každý z poľovníkov rýchlo zacielil a strelil do (náhodne) vybratej kačky. Je možné, na základe tejto informácie, usudzovať, koľko kačiek ulovili títo poľovníci?*

17. *Boris pozýva Andreja do hry. V hre bude hádzaných 6 kociek (3 kocky hádže Andrej a 3 Boris). Ak padnú všetky počty bodiek, vyhráva Andrej, ak niektorý z počtov bodiek nepadne na žiadnej z kociek, tak vyhráva Boris. Je Andrej povinný prijať pozvanie? Ako rozhodovanie Andreja vysvetliť na matematickom základe?*

18. *Na zábavnej hre môžeš vyhrať za 1 Euro walkman, ktorý stojí 20 Eur. Hráč, ktorý zaplatí 1 Euro za účasť v hre, dostáva právo hádzať šiestimi kockami. Stáva sa majiteľom walkmana, ak padnú všetky počty bodiek. Aké sú šance toho*

hráča na výhru walkmana za 1 Euro? Aké je riziko, že prevádzkovateľ tejto hry stratí walkman za 1 Euro?

19. *V teste z biológie dostáva žiak 6 otázok, ku každej je pripojených 6 odpovedí, z ktorých jedna je správna. Žiak má ku každej otázke zakrúžkovať správnu odpoveď. Za označenie všetkých správnych odpovedí dostáva dobrú známku. Je táto dobrá známka vierohodná? Ako veľmi je pravdepodobné získanie dobrej známky u žiaka, ktorý nič nevie?*

20. *V jazere lovilo ryby šesť rybárov. Všetci na rovnaké návnady. Po návrate bolo zistené, že spolu ulovili šesť rýb. Mama tvrdí, že každý z týchto rybárov ulovil jednu rybu. Súhlasíš s týmto názorom mamy alebo radšej si ho overíš?*

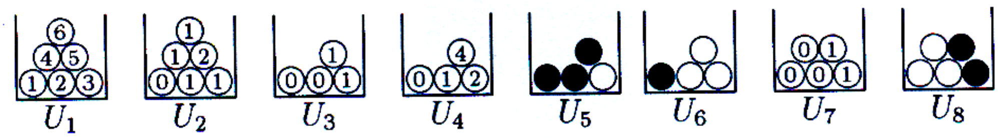
Úloha 1 sa týka simulácie hodu mincou, a teda náhodného pokusu δ_M s dvomi rovnako pravdepodobnými výsledkami. Úloha 12 sa týka simulácie hodu kockou, a teda náhodného pokusu δ_K , ktorý má 6 rovnako pravdepodobných výsledkov.

Stochastické analógie vyplývajúce z izomorfizmu stochastických modelov dvoch situácií

Definícia 7. Dva pravdepodobnostné priestory (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) nazývame *izomorfnými*, ak existuje bijekcia g z množiny Ω_1 na množinu Ω_2 a taká, že spĺňa podmienku:

$$\forall x \in \Omega_1 \forall y \in \Omega_2 : [y = g(x) \Rightarrow p_1(x) = p_2(y)] .$$

Hovoríme, že bijekcia g *zachováva pravdepodobnosť.*



Obr. 2

Uvažujme nasledovné náhodné pokusy, v ktorých losovacími nástrojmi sú urny z obrázka 2:

δ_1 : losovanie jednej gule z urny U_1 (výsledok je číslom na vylosovanej guli),

δ_2 : losovanie jednej gule z urny U_2 (výsledok je číslom na vylosovanej guli),

δ_3 : losovanie dvoch gulí z urny U_3 (výsledok je súčet čísel na vylosovaných guliach),

δ_4 : losovanie dvoch gulí z urny U_4 (výsledok je súčet čísel na vylosovaných guliach),

δ_5 : losovanie dvoch gulí z urny U_5 (sú v nej 3 červené gule a 1 biela),

δ_6 : losovanie dvoch gulí z urny U_6 (sú v nej 3 biele gule a 1 červená),

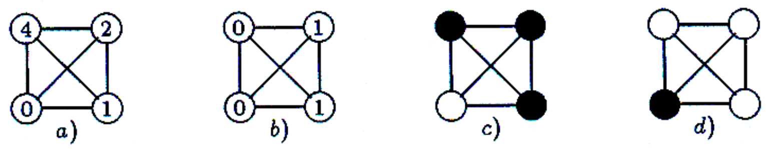
δ_7 : losovanie dvoch gulí z urny U_7 (výsledok je súčet čísel na vylosovaných guliach),

δ_8 : losovanie dvoch gulí z urny U_8 (sú v nej 3 biele gule a 2 červené).

V prípade náhodných pokusov δ_5, δ_6 a δ_8 je výsledok jednoznačne určený počtom červených guli medzi dvoma vylosovanými.

Predpokladajme, že stochastickým modelom pokusu δ_j je pravdepodobnostný priestor (Ω_j, p_j) pre $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

- Nie je ťažké zistiť, že δ_1 je náhodným pokusom so šiestimi rovnako pravdepodobnými výsledkami. Stochastický model hodu kockou a stochastický model losovania guli z urny U_1 sú izomorfnými pravdepodobnostnými priestormi. Hod kockou je tu možné simulovať pomocou urny U_1. Číslo na vylosovanej guli z urny U_1 môžeme interpretovať ako počet bodiek padnutých pri hode kockou.



Obrázok 3. Úsečky ako výsledky alebo rovnako možné prípady pri losovaní dvoch guli z urny

- Z obrázka 3a) vyplýva, že je 6 rovnako pravdepodobných výsledkov súčasného losovania guli z urny U_4 (náhodný pokus δ_4). Každý výsledok na tomto obrázku reprezentuje úsečka, spájajúca dve vylosované gule. Máme tu ďalší spôsob simulovania hodu kockou.

- Sú dva možné výsledky losovania δ_5:

  2: obe vylosované gule sú červené a

  1: jedna vylosovaná guľa bude biela a jedna červená.

  Stochastickým modelom náhodného pokusu δ_5 je tu dvojica (Ω_5, p_5), kde

$$\Omega_5 = \{1, 2\} \quad a \quad p_5(1) = p_5(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

  Prostriedkom argumentácie, že výsledky 1 a 2 sú rovnako pravdepodobné je obrázok 3c). Každá úsečka spájajúca dva vrcholy štvorca (sú v nich gule) predstavuje rovnako možný prípad. Z týchto 6 rovnako možných prípadov sú 3 priaznivé pre výsledok 1 (jedna biela a jedna červená) a 3 pre výsledok 2 (obe červené).

  Stochastický model losovania dvoch guli z urny U_5 a stochastický model hodu mincou, a teda pravdepodobnostné priestory (Ω_5, p_5) a (Ω_M, p_M) sú izomorfné. Bijekciou z množiny $\Omega_5 = \{1, 2\}$ na množinu $\Omega_M = \{0, 1\}$, ktorá zachováva pravdepodobnosť, je funkcia g určená vzorcom $g(j) = 2 - j$ pre $j = 1, 2$. Táto bijekcia je súčasne „slovníkom" pre preklad výsledku losovania dvoch guli z urny U_5 na výsledok hodu mincou. Aby sme simulovali hod mincou pomocou urny U_5 stačí vylosovať dve gule z tejto urny. Ak obe budú červené (výsledok 2), tak hovoríme, že padol líc (výsledok 0). Ak jedna z vylosovaných guli bude biela a jedna červená (výsledok 1), tak hovoríme, že padol rub (výsledok 1).

- Zo symetrie vyplýva, že losovanie dvoch gúľ z urny U_6 (náhodný pokus δ_6) má tiež dva rovnako pravdepodobné výsledku. Hod mincou je tu možné simulovať pomocou urny U_6.

- Nie je ťažké ukázať, poslúžiac si znova obrázkom ako prostriedkom argumentácie (pozri obr. 2.9 v [7], str. 33-35), že pravdepodobnostné priestory (Ω_7, p_7) a (Ω_8, p_8) sú izomorfné. Izomorfné sú tiež stochastické modely náhodných pokusov δ_2 a δ_3.

- Je 2^n možných a rovnako pravdepodobných výsledkov n-násobného hodu mincou (každý výsledok je n-člennou postupnosťou, ktorej členmi sú prvky množiny $\{0,\ 1\}$. Tento náhodný pokus δ^n_M je možné simulovať losovaním gule z urny $U_{0\to(2^n-1)}$, v ktorej je 2^n gúľ očíslovaných číslami od 0 po $(2^n - 1)$. Ak vylosovaná guľa má číslo j, tak zapíšeme toto číslo v dvojkovej sústave, pričom ak zápis má menej číslic ako n, tak na začiatku ho doplníme toľkými nulami, aby tento blok mal n číslic. Tak získanú $n-$člennú variáciu množiny $\{0,\ 1\}$ interpretujeme ako výsledok n-násobného hodu mincou.

  V tabuľke na obrázku 4 je určená bijekcia g z množiny $\Omega_U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ na množinu $\Omega^3_M = \{0, 1\}^3$. Táto bijekcia je súčasne „slovníkom“ pre preklad výsledkov losovania gule z urny $U_{0\to 7}$ (v ktorej je 8 gulí očíslovaných od 0 po 7) na výsledkoch trojnásobného hodu mincou.

$x \in \Omega_U$:	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)$:	000	001	010	011	100	101	110	111

Obrázok 4. Bijekcia g z množiny $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ na množinu $\{0,\ 1\}^3$

  Trojnásobný hod mincou môžeme tu simulovať pomocou urny $U_{0\to 7}$. Stačí vylosovať gule z tejto urny. Ak zostane vylosovaná guľa s číslom j, hovoríme, že trojnásobný hod mincou sa skončil výsledkom $g(j)$, kde $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

- O tom, či sa z vajíčka (na ktorom sedí kvočka) vyliahne sliepočka (0) alebo kohútik (1), rozhoduje náhoda. Oba tieto výsledky sú rovnako pravdepodobné. Tento stochastický fakt napovedá myšlienke simulácie hodu mincou pomocou kuracieho vajíčka a kvočky. Na hodine žiak formuluje tento podivný nápad riešenia úlohy 1. nasledovne:

  - *Aby hodiť mincu možno posadiť kvočku na jednom vajíčku a čakať, až sa z toho vajíčka vyliahne kuriatko. Ak to bude sliepočka, tak hovoríme, že padol rub a ak kohút, tak padol líc.*

  Odtiaľ vyplýva ďalší úsudok. Ak kvočka sedí na n vajíčkach, tak počet sliepočiek, ktoré sa vyliahnu z týchto vajíčok, môžeme interpretovať ako počet rubov padnutých v n-násobnom hode mincou, alebo v súčasnom hode n mincami (vajíčka pod kvočkou nie sú rozlíšiteľné).

- Dedko s vnukom lovia ryby. Obaja lovia na rovnaké návnady. O tom, na ktorú návnadu sa chytí ryba rozhoduje náhoda a každý z týchto rybárov má rovnakú šancu, že sa práve na jeho návnadu chytí ryba. Máme tu nasledovný príklad náhodného pokusu s dvomi rovnako pravdepodobnými výsledkami a zároveň nasledovný spôsob simulácie hodu mincou. Žiaci formulujú túto myšlienku nasledovne:

  - *Hod mincou môžeme simulovať pomocou dvoch rybárov, napríklad dedka a vnuka. Stačí zavesiť na udiciach týchto rybárov rovnaké návnady, posadiť ich k jazeru a čakať až sa chytí prvá ryba. Ak rybu chytí dedko, povieme, že padol líc. Ak rybu chytí vnuk padne rub.*

- Ak by rybárov bolo šesť a všetci by chytali na rovnaké návnady, potom čakanie na to, že jeden z nich (ktorýkoľvek) chytí rybu, pripomína hod kockou. Máme tu ďalšiu myšlienku simulácie hodu kockou (stačí pred rybolovom očíslovať rybárov číslicami 1 až 6).

- Ale z uvedených faktov vyplýva odpoveď na otázku sformulovanú v úlohe 20. Je prakticky nemožné, aby každý z rybárov ulovil jednu rybu. Je to rovnako málo pravdepodobné ako padnutie všetkých počtov bodiek pri hode šiestimi kockami (jav A_{6K}). To sú základy pre overenie názoru mamy.

- Poľovník poľuje na kačky. Náhle sa objavili dve kačky. Poľovník rýchlo zacielil a strelil do jednej z nich. Predpokladajme, že zásah bol presný. Ktorá z kačiek bola zasiahnutá rozhodla náhoda a pritom každá z kačiek mala rovnakú „šancu“ byť zasiahnutá. Bol to tu tiež náhodný pokus s dvoma rovnako pravdepodobnými výsledkami. Máme tu novú myšlienku simulácie hodu mincou (pomocou poľovníka a dvoch kačiek).

- Keby namiesto dvoch letelo šesť kačiek, potom popísané poľovanie pripomína hod kockou. Poľovník a stádo šiestich kačiek môžu tu simulovať hod kockou.

Zdôrazňujeme, že sa tu skôr jedná o samotnú ideu, ale nie o v praxi realizovateľný spôsob simulovania hodu mincou alebo hodu kockou. Ide tu len o niektoré dôležité stochastické fakty, z ktorých neskôr budú vychádzať stochastické úsudky opreté o analógie.

- V kúsku cesta sa nachádza jedno hrozienko. O chvíľu to cesto bude zamiešané a rozdelené na s rovnakých častí. O tom, do ktorej časti sa dostane hrozienko, rozhodne náhoda. Pretože všetky časti sú rovnaké (majú rovnakú hmotnosť), pre každú z týchto častí je pravdepodobnosť, že hrozienko sa do nej dostane, rovná $\frac{1}{s}$. Očíslujme časti cesta od 1 do s. Miešanie cesta s jedným hrozienkom a jeho delenie na s rovnakých častí je tu náhodným pokusom δ_C^s s s rovnako pravdepodobnými výsledkami. Na určenie jeho stochastického modelu sme použili hmotnosť (ako niektorú mieru). Tento príklad ukazuje pravdepodobnosť v geometrickom aspekte.

  Náhodný pokus δ_C^2 pripomína hod mincou, náhodný pokus δ_C^6 pripomína hod kockou. Máme tu osobitné spôsoby simulácie hodu mincou a hodu kockou pomocou kúska cesta a jedného hrozienka. Žiaci formulujú tieto spôsoby ako postupnosť osobitných procedúr:

  Aby sa mohol začať futbalový zápas, rozhodca môže:

  – *vziať kúsok cesta a jedno hrozienko,*
  – *cesto s hrozienkom dôkladne vymiešať a rozdeliť na dve rovnaké časti,*
  – *jednu časť označiť číslicou 0 (líc), druhú číslicou 1 (rub) a*
  – *zistiť, do ktorej z častí sa dostalo hrozienko.*

  Ak hrozienko sa dostalo do časti 0, to znamená, že padol líc, ak sa dostalo do druhej časti (1), tak padol rub.

- Miešanie cesta s k hrozienkami a následné delenie na s rovnakých častí nazývame *náhodým rozmiestnením k hrozienok v s bábovkách.* Nech $k = s = 6$.

S náhodným rozmiestnením šiestich hrozienok v šiestich bábovkách spojme nasledovné javy:

$A_H = \{$*do každej bábovky sa dostane hrozienko*$\}$,

$B_H = \{$*aspoň jedna bábovka bude bez hrozienka*$\}$.

Jav A_H je rovnako málo pravdepodobný ako jav A_{6K} spojený s hodom šiestimi kockami. Analógie, ktoré sú základom tohoto stochastického úsudku, odhaľujem na mojej hodine matematiky v kontexte mimomatematickej situácie popísanej v úlohe 13.

- Vráťme sa k úlohe 13. Očíslujme bábovky. Aby sme pre jedno hrozienko vylosovali bábovku, do ktorej sa ono dostane, stačí hodiť kockou. Ak padne j bodiek, tak hrozienko treba vložiť do bábovky číslo j ($j=$ 1, 2, 3, 4, 5, 6). Aby sme náhodne rozmiestnili šesť hrozienok v šiestich rovnakých bábovkách, stačí hodiť šiestimi kockami a následne toľko hrozienok vložiť do bábovky číslo j, na koľkých kockách padlo j bodiek ($j=$ 1, 2, 3, 4, 5, 6). Do každej bábovky sa dostane hrozienko (v takejto situácii) vtedy a len vtedy, ak v hode šiestimi kockami padnú všetky počty bodiek, a teda nastane jav A_{6K}. Z toho vyplýva, že jav A_H (resp. jav B_H) je rovnako pravdepodobný ako jav A_{6K} (resp. jav B_{6K}).
- Z vyššie uvedených úvah vyplýva, že:
  1. Je prakticky nemožné, aby pri pečení šiestich báboviek (rohlíkov) z cesta so šiestimi hrozienkami (orieškami) v každej bábovke (v každom rohlíku) sa našlo hrozienko (oriešok).
  2. Je prakticky isté, že aspoň jedna bábovka (aspoň jeden rohlík) bude bez hrozienka (bez orieška). Je to tu riešenie úlohy 14.
- Keby oznam v pekárni (pozri úlohu 15) informoval, že dnes je v predaji šesť rohlíkov, ktoré vznikli z cesta so šiestimi hrozienkami, tak je prakticky isté, že aspoň jeden z týchto rohlíkov je bez hrozienok. Pravdepodobnosť, že kúpiš rohlík bez hrozienka je tu rovná najmenej $\frac{1}{6}$, a teda nie je malá. Nemáš dôvod sa cítiť sklamaný, ak v kúpenom rohlíku nie sú hrozienka.

Uvážme, že

1. Poľovanie, na ktorom sa zúčastňuje šesť poľovníkov v situácii, keď sa objavil kŕdeľ šiestich kačiek, pripomína náhodné rozmiestnenie šiestich hrozienok (sú to náboje poľovníkov) v šiestich bábovkách (sú to kačky);
2. Rybolovy s účasťou šiestich rybárov zakončené úlovkom šiestich rýb pripomína náhodné rozmiestnenie šiestich hrozienok (sú to ryby) v šiestich bábovkách (sú to rybári);

   Predpokladáme tu, že žiadny z poľovníkov nemá chybnú streľbu, že rybári lovia na rovnaké návnady. Z týchto analógií vyplýva, že

   – je prakticky nemožné, aby pri poľovaní, pri ktorom do kŕdľa šiestich kačiek strieľa šesť poľovníkov, všetky kačky boli zastrelené, je prakticky isté, že aspoň jedna kačka prežije;

   – je prakticky nemožné, aby každý z rybárov ulovil rybu, ak vieme, že lovili na rovnaké návnady a spolu ulovili šesť rýb, môžeme si byť prakticky istí, že aspoň jeden z rybárov neulovil žiadnu rybu.

- Vráťme sa k úlohe 16. Môžeme si byť prakticky istí, že poľovníci nezastrelili viac ako päť kačiek. Zastrelenie všetkých šesť kačiek a tiež ulovenie ryby každým zo šiestich rybárov (úloha 20.) je rovnako málo pravdepodobné ako padnutie všetkých bodiek v hode šiestimi kockami.

Tieto úsudky opreté o stochastické analógie sú súčasťou metodológie stochastiky. Podstatou týchto analógií sú izomorfizmy pravdepodobnostných priestorov ako stochastických modelov mimomatematických situácií.

Pravdepodobnosť ako ohodnotenie miery rizika a šance

V úlohách 8 a 17 sa hovorí o dvoch náhodných hrách. V hre z úlohy 8 sa hádže 21 krát mincou. V pravidlách hry sa spomínajú dva javy spojené s týmto náhodným pokusom:

$A_{21} = \{\textit{padne viac lícov ako rubov}\}$,

$B_{21} = \{\textit{padne viac rubov ako lícov}\}$.

V tejto hre vyhrá Adam, ak nastane jav A_{21}, vyhrá Boris ak nastane jav B_{21}. Pravdepodobnosť javu A_{21} je tu ohodnotením miery **šance** Adama na výhru. Pravdepodobnosť javu B_{21}je ohodnotením miery **šance** Borisa na výhru. Zo symetrie vyplýva, že $P(A_{21}) = P(B_{21})$. Táto rovnosť má svoju interpretáciu v praxi. Označuje rovnosť šancí oboch hráčov na výhru. Táto náhodná hra je spravodlivá.

Úloha 17 sa týka procesu rozhodovania. V tejto hre sa hádže šiestimi kockami (nie je dôležité, že troma kockami hádže Andrej a troma Boris). V hre vyhráva Andrej, ak nastane jav A_{6K} spojený s hodom šiestimi kockami. Boris vyhrá, ak nastane jav B_{6K}. Zistili sme, že

- $P(A_{6K}) \approx 0,015432$, a teda jav A_{6K} je prakticky nemožný, a preto šance Andreja na výhru v hre sú veľmi malé,
- $P(B_{6K}) \approx 0,984567$, a teda jav B_{6K} je prakticky istý, a preto šance Borisa na výhru v hre sú blízke 1 (veľké).

Pravdepodobnosť javu je v týchto úsudkoch ocenením miery **šance** hráča na výhru hráča v náhodnej hre. Táto hra nie je spravodlivá. Odmietnutie pozvania k tejto hre je zo strany Andreja racionálnym rozhodnutím.

Vrátime sa k situáciám popísaným v úlohách 2 a 18. Ohodnotením šance hráča na výhru daného predmetu (DVD prehrávač resp. walkman) je pravdepodobnosť. V prípade úlohy 2 je to pravdepodobnosť hodu samých rubov alebo samých lícov pri 21-násobnom hode mincou. Táto pravdepodobnosť sa rovná $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$, a teda je blízka nule. Je prakticky nemožné, aby hráč vyhral DVD prehrávač za 1 Euro. Pre prevádzkovateľa táto pravdepodobnosť je ohodnotením miery **rizika,** že za 1 Euro stratí tento prehrávač.

V situácii popísanej v úlohe 18 ohodnotením analogických šancí (v prípade hráča) a rizika (v prípade prevádzkovateľa) je pravdepodobnosť javu A_{6K}. Je tu prakticky nemožná výhra walkmanu v jednom pokuse (a teda za 1 Euro). V oboch hrách tento prevádzkovateľ môže očakávať zisk.

V prípade testov, o ktorých sa hovorí v úlohách 6 a 19, treba tiež hovoriť o miere **šance** a **rizika**. Nie je nemožné, že žiak, ktorý nič nevie, na každú otázku odpovie správne. Dostane dobrú známku a ona mu nepatrí. Učiteľ tu hovorí o **riziku**, že žiak dostane dobrú, ale nezaslúženú známku. Z pohľadu žiaka sa jedná o mieru **šance** na to, že sa nič nenaučí a získa dobrú známku. Ohodnotením týchto šancí a rizík je pravdepodobnosť:

– hod samých rubov v 21-násobnom hode mincou (táto pravdepodobnosť sa rovná $\left(\frac{1}{2}\right)^{21}$, a teda $\frac{1}{2097152}$, to znamená, že je blízka nule) v situácii z úlohy 6,

– hod samých šestiek v šesťnásobnom hode kockou (táto pravdepodobnosť sa rovná $\left(\frac{1}{6}\right)^{6}$, a teda $\frac{1}{46656}$, to znamená, že je tiež blízka nule) v situácii z úlohy 19.

V oboch prípadoch dobrá známka je vierohodná, lebo jej získanie pomocou hádania (bez vedomostí) je prakticky nemožné.

Verifikácia hypotéz – kritická oblasť

V kontexte písomky zo zemepisu (pozri úlohu 6) vznikajú otázky:

a) Či je možné dať dobrú známku, ak žiak dá napríklad 20 správnych odpovedí (jedna chyba)?

b) Od akého počtu správnych odpovedí od žiaka je možné dobrú známku za tento výsledok písomky považovať za vierohodnú?

Aby sme odpovedali na poslednú otázku je treba rozhodnúť, od akého k počínajúc získanie aspoň k správnych odpovedí pomocou hádania, je prakticky nemožné (pozri [5]). Postavme hypotézu H_0, že žiak nič nevie z učiva skúšaného písomkou. Ak je hypotéza H_0 pravdivá, tak pravdepodobnosť získania správnej odpovede na jednu (ktorúkoľvek) otázku, je rovná $\frac{1}{2}$, a teda je rovnaká ako pravdepodobnosť padnutia rubu v hode mincou.

Pravdepodobnosť získania aspoň k správnych odpovedí od žiaka, ktorý nič nevie (a teda, keď hypotéza H_0 je pravdivá) sa rovná pravdepodobnosti hodu aspoň k rubov v 21-násobnom hode mincou (pravdepodobnosť javu C_{21}^{k}). Z úvah uvedených v časti 2 vyplýva, že pre $k \in \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$ odhadnutie aspoň k správnych odpovedí žiakom, ktorý nič nevie je rovnako málo pravdepodobné ako jav C_{21}^{k} spojený s 21-násobným hodom mincou, a teda je prakticky nemožné. Ak tu žiak v spomenutej písomke dá k správnych odpovedí a $k \geq 15$, tak mu môžeme dať dobrú známku, lebo získanie najmenej k správnych odpovedí pomocou hádania je prakticky nemožné.

Nech u je pravdepodobnosť získania správnej odpovede v jednej otázke. Ak žiak nič nevie, tak $u = \frac{1}{2}$. Vo vyššie uvedených úvahách sa hovorí o verifikácii nulovej hypotézy H_0, že žiak nič nevie (H_0: $u = \frac{1}{2}$) oproti alternatívnej hypotéze H_1: $u > \frac{1}{2}$ (pozri [11]). Množina $\Lambda_{0,05} = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$ je množinou takých počtov správne získaných odpovedí, ktoré hovoria proti hypotéze H_0, a teda, ktoré sú základom pre jej overovanie. Množina $\Lambda_{0,05}$ sa nazýva *kritickou oblasťou.*

Podobné otázky vznikajú v kontexte testu z biológie (pozri úlohu 19). Konštrukcia kritickej oblasti je zároveň konštrukciou pravidla vierohodného ohodnotenia výsledkov testovej kontroly vedomostí.

Či daný fakt je výsledkom vedomosti, schopnosti, vlastných informácií a lebo náhody?

V prípade testového skúšania vedomostí sme vyriešili otázku: či daná fakt (žiak uviedol k správnych odpovedí) je výsledkom hádania alebo vedomosti. Podobný problém nachádzame v úlohe 11. Rozhoduje sa tam, či fakt, že pani Nováková 17 krát správne ohodnotila druh kávy je výsledkom jej schopnosti alebo hádania, a teda náhody. Tak veľký počet správnych ohodnotení (17 z 21 pokusov) dáva základ, aby sme overili hádanie. Keby pani Novákova nemala tieto schopnosti, tak správne ohodnotenie druhu kávy aspoň 17 krát by bolo prakticky nemožné.

Iné príklady riešenia takýchto problémov stochastickými metódami možno nájsť v [7] (pozri str. 44 – 47).

Záver

Predmetom článku boli osobitné stochastické analógie i o ne sa opierajúce usudzovania. Podstatou týchto analógií je izomorfizmus pravdepodobnostných priestorov ako aj ich niektoré ekvivalencie. Odhaľovanie týchto analógií a formulovanie z nich vyplývajúcich úsudkov je matematickou aktivitou (pozri [1]), ktorá hrá dôležitú úlohu v rozvoji stochastických intuícií žiakov ako dôležitého aspektu matematickej kultúry.

Predstavené úvahy sú reflexiami z vyučovacích hodín matematiky na základnej a strednej škole autora. Problematika týchto hodín pochádza z knižiek [2], [3] a [4], ktoré povstali z iniciatívy Poľskej Jednoty matematikov (PTM) ako literatúra propagujúca stochastické myšlienky u žiakov vo veku 11 – 12 rokov.

Literatúra

[1] Krygowska Z.: *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczacą role w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6, 1986.

[2] Płocki A.: *Co przypadek sprawił w Przypadkowie*?, Wydawnictwo „Dla Szkoły", Wilkowice, 2001.

[3] Płocki A.: *Czy Paulina była w Przypadkowie gapą*?, Wydawnictwo „Dla Szkoły", Wilkowice, 2001.

[4] Płocki A.: *Kto był w Przypadkowie dżentelmenem*?, Wydawnictwo „Dla Szkoły", Wilkowice, 2001.

[5] Płocki A.: *De Moivre's paradox confronted with the verification of some hypothesis*, Acta Universitatis Purkynianae 27, Ustí nad Labem, 1997, str. 142-146.

[6] Płocki A.: *Mathematizing and interpretation versus stochastic inference*, Acta Universitatis Purkynianae 42, Ustí nad Labem, 1999, str. 108-115.

[7] Płocki A.: *Pravdepodobnost okolo nás. Stochastika v úlohách a problémoch*, Universitas Catholica Rosenbergae, Ružomberok, 2004.

[8] Płocki A.: *Spór o treści i formę stochastycznego kształcenia nauczyciela matematyki*, Dydaktyka matematyki 17, 1995, str. 135-165.

[9] Płocki A.: *Stochastyka dla nauczyciela. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2005.

[10] Płocki A.: *Symetrie a proces matematyzacji, rachunki i dedukcja w rachunku prawdopodobieństwa*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinetia I (2002), folia 5, Wydawnictwo Naukowe AP w Krakowie, Kraków, 2002 , str. 135-176.

[11] Riečan B., Komorník J.: *Pravdepodobnostné modely reálnych situácií*, Pedagogická fakulta KU v Ružomberku, 2005.

Adresa autora:
Prof. zw. Dr. hab. Adam Płocki
Instytut Matematyki Akademii Pedagogicznej
Ul. Podchorażych 2
PL- 30-084 Kraków
e-mail: adplocki@ap.krakow.pl

Przyczynek do badań nad procesem rozwiązywania zadań matematycznych przez absolwentów szkół średnich

Zbigniew Powązka

Abstract. *In the present paper possibility of using the sheaf of the planes and sheaf of the spheres to solve some problems of analytic geometry are discussed. We describe some facts from the theory of the spheres in relation to linear combination of their equations. There are shown several examples of this part of geometry in this article.*

1. Wstęp

Jednym z ważnych problemów dla wyższych uczelni prowadzących studia matematyczne jest badanie wiedzy przyszłych studentów, rekrutujących się z absolwentów szkół średnich. Takie badania są prowadzone od kilku lat w Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

Narzędzie badawcze stanowią zestawy 10 zadań egzaminacyjnych. Metodą badawczą jest analiza wytworów działania, tzn. analiza rozwiązań zadań egzaminacyjnych uzyskanych w czasie tego egzaminu od kandydatów na studia (Łobocki, 1984). Zadania te mają na celu sprawdzenie nie tylko znajomości podstawowych pojęć i twierdzeń, lecz także zbadanie umiejętności korzystania z informacji i tworzenia informacji (zob. *Informator maturalny 2003*). Powstaje zatem okazja do szukania odpowiedzi na następujące pytania:

- Czy absolwenci szkół średnich, chcący studiować matematykę, dysponują potrzebnymi wiadomościami z matematyki nabytymi w szkole średniej?

- Czy posiadają niezbędne umiejętności, takie jak np. umiejętność logicznego myślenia,stosowania definicji i twierdzeń do rozwiązywania zadań i problemów, posługiwania się rysunkiem oraz symbolem?

- Czy potrafią dostrzegać i wykorzystywać analogie, uzasadniać swoje hipotezy, przeprowadzać nieskomplikowane rozumowania dedukcyjne i redukcyjne?

Uzyskanie odpowiedzi (choćby częściowych) na powyższe problemy badawcze wydaje się być pożyteczne przy ocenie wyniesionego ze szkoły średniej przygotowania do studiowania matematyki.

Badanie wiedzy matematycznej poprzez rozwiązywanie zadań i problemów należy do ważnych zagadnień dydaktyki matematyki. F. Kuřina zalicza je do najważniejszych myśli

A. Z. Krygowskiej, aktualnych dla dydaktyki matematyki XXI wieku (Krygowska, 1977, Kuřina, 2005).

W trakcie analizy rozwiązań zadań egzaminacyjnych z kilku ostatnich lat pojawiła się idea związana z opisem procesu rozwiązywania zadania matematycznego przez osobę dysponującą określonym zasobem definicji i twierdzeń i poddającą się procedurze egzaminacyjnej.

Poniżej przedstawię analizę jednego z zadań egzaminacyjnych i na jej podstawie zilustruję podstawowe przesłanki wspomnianej wyżej idei.

Problemy te żywo interesują dydaktyków matematyki, o czym świadczą prace, np. M. Hejnego (Hejný, 1997), M. Ciosek (Ciosek 1976, 1999), J. Czaplińskiej (Czaplińska 2003), D. Ciesielskiej, J. Czaplińskiej, Z. Powązki (Ciesielska, Czaplińska, Powązka 2004), M. Majora (Major 1996), B. Pawlik (Ciosek, Pawlik 1998), Z. Dybiec, J. Szczepańskiego (Dybiec, Szczepański 1993), Z. Powązki (Powązka 2005),

2. Analiza rozwiązań wybranego zadania

W niniejszym paragrafie poddam analizie wybrane zadanie z listy egzaminacyjnej z roku 2004. Będzie ona obejmować następujące zagadnienia:

- sposób punktowania rozwiązania,
- metody rozwiązania, które ujawnili rozwiązujący,
- źródła i rodzaje popełnionych błędów.

Do analizy wybieram zadanie wymagające zastosowania definicji funkcji parzystej. Jest to zadanie z parametrem, które można zaliczyć do tzw. zadań na tworzenie informacji. Oto temat tego zadania:

a) Podać definicję funkcji parzystej.

b) Wyznaczyć wszystkie takie wartości parametru a, aby funkcja
f(x) = $(a^2+a-6)x^2+(a^2-4)x+5$ *była parzysta. Podać wzór otrzymanej funkcji.*

2.1 Analiza zadania i metod jego rozwiązania

Przystępując do analizy rozwiązań tego zadania zauważmy, że w zamierzeniu autorów jego celem było sprawdzenie znajomości podstawowej definicji związanej z własnościami funkcji oraz zbadanie, jak kandydaci radzą sobie z rozwiązywaniem równania z parametrem.

W części a) omawianego zadania należało podać definicję funkcji parzystej. W części b) należało wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości parametru a, dla którego funkcja f rozważana w temacie zadania jest parzysta. Można to było uzyskać w różny sposób:

S_1 – Stosując definicję parzystości funkcji otrzymuje się równanie z parametrem a

$$(\mathrm{a}^2 + \mathrm{a} - 6)\mathrm{x}^2 + (\mathrm{a}^2 - 4)\mathrm{x} + 5 = (\mathrm{a}^2 + \mathrm{a} - 6)\mathrm{x}^2 - (\mathrm{a}^2 - 4)\mathrm{x} + 5,\ \mathrm{x} \in \mathrm{R},$$

równoważne równaniu

$$(\mathrm{a}^2 - 4)\mathrm{x} = 0,\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}.$$

Wynika stąd, że a = 2 lub a = -2.

S_2 – Rozważając przypadki ze względu na wartość współczynnika przy x^2.

W metodzie S_2 można postąpić w jeden z następujących sposobów:

I. Rozwiązać równanie

$$\mathrm{a}^2 + \mathrm{a} - 6 = 0$$

i badać parzystość funkcji liniowej $f(x) = 5x + 5$, gdy $a = -3$, lub $f(x) = 5$, gdy $a = 2$, lub funkcji kwadratowej $f(x) = (a^2 + a - 6)x^2 + (a^2 - 4)x + 5$ z $a \neq -3$ i $a \neq 2$.

II. Rozkładając na czynniki wielomiany zmiennej a stojące przy x^2 oraz przy x otrzymuje się następującą postać funkcji f:

$$f(x) = (a + 3)(a - 2)x^2 + (a - 2)(a + 2)x + 5,$$

Z postaci tej odczytuje się, że dla $a = -3$ lub $a = -2$ funkcja ta jest liniową i tylko dla $a = 2$ jest parzysta, gdyż jedyną funkcją liniową parzystą jest funkcja stała. Natomiast, gdy $a \neq -3$ i $a \neq 2$, to funkcja f jest kwadratowa i jest parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy x jest równy zero.

III. Rozważając przypadki ze względu na wartość współczynnika przy x^2 można zauważyć, że jeżeli $a^2 + a - 6 \neq 0$, to funkcja f jest kwadratowa i jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek paraboli będącej jej wykresem leży na osi y, czyli pierwsza współrzędna tego punktu równa się zero. Prowadzi to do rozważenia układu warunków

$$a^2 - 4 = 0 \text{ i } a^2 + a - 6 \neq 0,$$

skąd wynika odpowiedź $a = -2$.

Rozważając przypadek $a^2 + a - 6 = 0$, w którym otrzymuje się funkcję liniową, uzyskujemy odpowiedź $a = 2$.

2.2 Analiza rozwiązań badanych

Egzaminatorzy wycenili to zadanie na 9 punktów. Wskaźnik łatwości, będący ilorazem sumy zdobytych punktów przez wszystkich piszących, do sumy punktów, jakie mogli za nie otrzymać, wyniósł 0,65 (Niemierko, 1975, Szurig, 1978).

Niewielka liczba kandydatów (12 osób na 335 biorących udział w egzaminie) uzyskała za rozwiązanie tego zadania 0 punktów i aż 113 prac oceniono na maksymalną liczbę punktów.

W części a) 323 osoby podały poprawną definicję funkcji parzystej. Z pozostałych 12 osób jedna pomyliła to pojęcie z pojęciem funkcji nieparzystej, a dwie osoby oddały puste kartki. W pozostałych 11 pracach albo nie zakładano symetrii dziedziny funkcji względem początku układu współrzędnych, albo posługiwano się stwierdzeniem, że funkcja parzysta ma wykres symetryczny względem osi y. Wyniki te mogą świadczyć o tym, że ta definicja, była kandydatom dobrze znana lub potrafili ją odpisać z tablic, z których wolno im było korzystać w czasie egzaminu. O tym, że takie zjawisko mogło mieć miejsce, niech świadczy fakt, że 15 osób podało poprawną definicję i nie podjęło próby rozwiązania drugiej części zadania.

W części b) większość egzaminowanych (190 osób) wybierała metodę S_1. Należy stwierdzić, że ta droga rozwiązania prowadziła bezpośrednio do poprawnej odpowiedzi, choć należy odnotować, że nieliczni kandydaci, którzy w wyniku przekształceń otrzymali warunek

$$(a^2 - 4)x = 0, x \in R,$$

nie umieli spojrzeć na tę równość jak na identyczność dwu wielomianów.

Najpoważniejszym błędem, jaki popełniali kandydaci (14 osób) rozwiązujący omawiane zadanie metodą S_1 było stosowanie podstawienia $-x^2$ zamiast $(-x)^2$. Prowadziło ono do konieczności rozważania innego układu warunków i nie dawało szansy na poprawne rozwiązanie. W części analizowanych rozwiązań pojawiły się także drobne błędy rachunkowe.

Metodę rozwiązania S_2 wybrało 120 kandydatów. Duża część osób, które rozwiązywały zadanie tą metodą popełniła błędy. Do najczęstszych należy utożsamianie rozważanej w zadaniu funkcji f z jak na funkcją kwadratową i nie zauważanie faktu, że gdy współczynnik przy x^2 jest równy zero, to taka funkcja jest liniowa. Błąd ten popełniła połowa kandydatów rozwiązujących zadanie metodą S_2.. Jest to, moim zdaniem, efekt rozwiązywania w szkole średniej zbyt małej liczby zadań dotyczących funkcji kwadratowej zawierającej parametr przy x^2. Wśród osób wybierających metodę S_2 znalazło się również 10 egzaminowanych, którzy rozważyli jedynie przypadek zerowania się współczynnika przy x^2. Jest chyba mało prawdopodobne, by nie wiedzieli, że należy przedyskutować również parzystość funkcji kwadratowej. Jeśli tego nie robili, to albo z braku czasu, albo z braku stosownych umiejętności.

W wyniku przeprowadzonej powyżej analizy należy zauważyć, że większość kandydatów dysponowała znajomością faktów, ale nie wszyscy wykazali się znajomością sposobów oraz przepisów działania, co uniemożliwiło im rozwiązanie zadania (Nowak 1989, Lompscher, 1972).

Posługując się kryterium skuteczności kształcenia sformułowanym przez W. Nowak (Nowak 1989. s. 144) można stwierdzić, że podczas egzaminu nie wszyscy z kandydatów dysponowali potrzebną wiedzą werbalną. Zauważmy jeszcze, że w trakcie rozwiązywania tego zadania u wielu z nich ujawniły się niektóre aspekty matematycznej aktywności (Krygowska, 1986). Mam tu na myśli przede wszystkim dostrzeganie i wykorzystanie analogii. Jednak skojarzenia dotyczące występujących w zadaniu pojęć, jakie powstały w świadomości prawie 16% badanych, nie doprowadziły ich do pełnego rozwiązania problemu. Zachodzi oczywiste pytanie, dlaczego tak się dzieje i jakie są przyczyny takiego zjawiska? Może to być między innymi efekt edukacji w szkole średniej wynikający z małej różnorodności przykładów ilustrujących omawiane tam pojęcia.

3. O pewnym sposobie opisu procesu rozwiązywania zadania

Jak już wspomniałem powyżej, zakładam, że kandydat na studia dysponuje pewna wiedzą z matematyki. Leksykon filozofii klasycznej wśród wielu określeń wiedzy podaje, że jest to układ wiadomości, które uznajemy i potrafimy w pewien sposób uzasadnić (*Leksykon filozofii klasycznej*, 1997, s. 537 – 539). M. Hejný (Hejný, 1997) opisując matematyczna część struktury poznawczej wyróżnia cztery komponenty: pojęcia, fakty, umiejętność stosowania i schematy. Opisana poniżej idea procesu rozwiązywania zadania opiera się na następujących przesłankach.

1) W świadomości osoby rozwiązującej zadanie istnieją trzy zbiory elementów A_1, A_2,A_3 decydujące o powodzeniu w pracy nad rozwiązaniem zadania. Zbiory te na ogół nie są puste (zależą każdorazowo od wiadomości i doświadczenia, jakim dysponuje określona osoba). Należy jednak zaznaczyć, że użycie w tym miejscu pojęcia zbioru może budzić wątpliwości z punktu widzenia formalnego rozumienia tego pojęcia w teorii mnogości. Te wątpliwości nie wpływają jednak na wartość tego opisu, natomiast ułatwiają plastyczne rozumienie omawianego procesu.

Do zbioru A_1 zaliczamy znane rozwiązującemu wiadomości (definicje, twierdzenia, przykłady i kontrprzykłady). Do zbioru A_2 przynależą różne umiejętności, jakie ujawnia rozwiązujący podczas rozwiązywania zadań i problemów (np. umiejętność zrozumienia treści zadania, przeprowadzania rozumowań dedukcyjnych i redukcyjnych, umiejętność kodowania, matematyzowania, schematyzowania, posługiwania się algorytmami itp.

Zbiór A_2 zawiera zatem różne aspekty matematycznej aktywności (Krygowska, 1986). Do zbioru A_3 zaliczam skojarzenia związane z pojęciami występującymi w zadaniu i powstającymi w świadomości osoby pracującej nad rozwiązaniem tego zadania.

Moc tych zbiorów, rozumiana w sensie matematycznym, jako ilość elementów, zależy od doświadczenia oraz posiadanej wiedzy formalnej.

2) Procesowi rozwiązywania każdego zadania matematycznego odpowiada pewien

skończony zbiór elementów z każdego ze zbiorów A_1, A_2, A_3. Z uwagi na możliwość rozwiązywania zadania różnymi sposobami reprezentacja ta nie musi być jednoznaczna i na ogół taką nie jest. Zbiór $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ stanowi swoistą bazę teoretyczno – skojarzeniową.
3) Elementy tylko jednego z tych zbiorów na ogół nie wystarczają do rozwiązania zadania, przy czym elementy ze zbioru A_3 mogą przyczynić się do „szumu informacyjnego“ i wpłynąć negatywnie na proces rozwiązania zadania.
4) Ujawnianie się poszczególnych elementów bazy opisanej w punkcie 2 zależy od psychologicznych uwarunkowań rozwiązującego (jego stanu emocjonalnego oraz predyspozycji psychofizycznych) w chwili rozwiązywania zadania.
5) Zbyt mało wiadomości posiadanych przez osobę dysponującą wieloma umiejętnościami i pozytywną motywacją do rozwiązania problemu najczęściej nie wystarcza do jego rozwiązania.
6) Duży zasób definicji i twierdzeń (przyswojonych „na pamięć“ bez zrozumienia) bez zaangażowania matematycznej aktywności nie gwarantuje rozwiązania problemu.

W opisanym w paragrafie 2 zadaniu do zbioru A_1zaliczam definicję funkcji parzystej oraz funkcji liniowej i kwadratowej, jak również równania stopnia pierwszego i drugiego z jedną niewiadomą oraz pojęcie tożsamości. W zbiorze A_2 znajdują się takie umiejętności jak stosowanie definicji, umiejętność rozwiązywania równań liniowych i kwadratowych zawierających parametr. W zbiorze A_3 znajdują się różne skojarzenia, które pojawiły się u rozwiązujących. Np. u niektórych z nich ze wzorem funkcji f kojarzył się jedynie trójmian kwadratowy, co prowadziło do niepełnego rozwiązania. Świadczyć to może o niepełnym obrazie pojęcia wielomianu (Tall, Vinner, 1981) lub o symptomach zdegenerowanego formalizmu (Turnau, 1990).

Literatúra

[1] C i e s i e l s k a D., C z a p l i ń s k a J., P o w ą z k a Z., 2004, Z badań nad egzaminami wstępnymi na studia dzienne na kierunek matematyka w Akademii Pedagogicznej w Krakowie, *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki* 26, 35 – 58.

[2] C i o s e k M., 1976, *Dydaktyczne problemy związane związane ze strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań* niepublikowana rozprawa doktorska, Kraków.

[3] C i o s e k M.,1999, Dziewięć rozwiązań zadania geometrycznego - studium heurezy, *Roczniki PTM seria V, Dydaktyka matematyki* 21, 5 – 48.

[4] C i o s e k M., P a w l i k B., O trudnościach studentów I roku matematyki w uczeniu się matematyki w świetle analizy ich rozwiązań zadań z geometrii, *Roczniki PTM seria V, Dydaktyka matematyki* 20, 5 – 47.

[5] C z a p l i ń s k a J., 2003, Trudności do stosowania pojęć analitycznych przez absolwentów szkół średnich podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego, *Disputationes Scientificae, Universitatis Catholicae in Ružomberok,* 3 – 10.

[6] C z a p l i ń s k a J., 2003, Przyczynek do badań nad strategiami rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki* 25, 5 – 67.

[7] D y b i e c Z., S z c z e p a ń s k i J., 1993, Refleksje po egzaminie testowym z matematyki, Materiały do zajęć z dydaktyki matematyki część 1 pod red. B. Rabijewska, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław.

[8] D y r s z l a g Z., 1978, *O poziomach i kontroli rozumienia pojęć matematycznych procesie dydaktycznym*, WSP im Powstańców Śląskich w Opolu seria B: Studia i Monografie nr 65.

[9] G u n č a g a, J, 2004, *Limitné procesy v školskej matematike.* Dizertačná práca, FPV UKF, Nitra

[10] G u n č a g a, J., 2003, *Lernsequenz zum Thema Summe einer unendlichen geometrischen Reihe*, In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Berlin, Verlag Franzbecker, s. 265 – 268

[11] H e j n ý M., 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki,*19, 15 – 28.

[12] *Informator maturalny matematyka, matura 2005*, 2003, Wydawnictwo Tutor, Warszawa.

[13] K r y g o w s k a Z., 1986, Elementy aktywności matematycznej,. które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki* 6, 25-41.

[14] K r y g o w s k a Z., 1977, Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

[15] K u ř i n a F., 2005, Anna Zofia Krygowska i czeska dydaktyka matematyki, *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki* (w druku).

[16] *Leksykon filozofii klasycznej*, 1997, Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin.

[17] L o m p s c h e r J., 1972 (red), *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwiclung geistiger Fähigkeiten, ,* Volk und Wissen, Berlin.

[18] Ł o b o c k i M., 1984, *Metody badań pedagogicznych*, PWN, Warszawa.

[19] M a j o r M., 1996, Wiedza probabilistyczna maturzystów, *Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka matematyki* 18, 103 – 138.

[20] N i e m i e r k o B., 1975, *Testy osiągnięć szkolnych, podstawowe pojęcia i techniki obliczeniowe*, WSiP, Warszawa.

[21] N o w a k W, 1989, Konwersatorium z dydaktyki matematyki, PWN, Warszawa.

[22] P o w ą z k a Z., 2005, Z badań nad wprowadzaniem podstawowych treści

analizy matematycznej podczas zajęć na I roku studiów matematycznych, *Annales Academiae Pedagogice Cracoviensis Studia Ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* I, (praca przyjęta do druku).

[23] S z u r i g Z. 1978, *Konstrukcje testów i sprawdzianów z matematyki,* WSiP, Warszawa.

[24] T a l l D., V i n n e r S., 1981, Concept Image and Concept Definition Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151 -169.

[25] T u r n a u S., 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyk,* PWN, Warszawa.

Adresa autora:
Dr. Zbigniew Powązka
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Ul. Podchorażych 2
30-084 Kraków
Poľsko
e-mail: Z.Powązka@ap.krakow.pl

Perception of equality 0,999... = 1

Małgorzata Przeniosło

Abstract. *We analyze how pupils and students perceive the equality of numbers 0,999... and 1 . Our experience revealed many important problems related to the nonaccepting of their equality. Also, we present some ways to prevent the formation of the intuitive conviction that these numbers are different.*

Introduction

The answer for the question whether 0,999... equals 1, seems obvious. To prove the equality of the numbers one of algorithms of converting of infinite and periodical decimal into common fraction is often mentioned. Are these schemes convincing for the opponents? Are they convincing for our pupils and students?

While doing my research on understanding the basic concepts of calculus by secondary schools pupils and university students I had a chance to analyse the problem of equality of 0,999... and 1. The results were so surprising that I decided to write about it. It should be added that my research methods including analysis of extended well-constructed written tests and interviews, which were conducted not according to a stiff procedure but in open way, significantly contributed to the profound investigation of the examinees' associations.

Attitudes assumed by pupils and students

Majority of examinees revealed the conviction that numbers 0,999... and 1 differ from each other. They upheld it although they knew the algorithms of converting infinite and periodical decimal into common fraction. The examinees presented the algorithm based on equivalent equations as follows: $x = 0{,}999\ldots$; $10x = 9{,}999\ldots$; $10x - x = 9{,}999\ldots - 0{,}999\ldots$; $9x = 9$; $x = 1$ and that one based on the sum of an infinite geometric sequence (series), where the first term $a_1 = 0{,}9$ and the common ratio $q = 0{,}1$, in the form:

$$0{,}999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots = \left\langle \frac{a_1}{1-q} \right\rangle = \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = 1.$$

According to them the aforesaid algorithms confirmed only that: “it is assumed that 0,999... and 1 are not different from each other“. They believed, however, that “in fact these numbers are not equal but it is impossible to determine the difference“. They thought that “only in mathematics it is assumed that the numbers are equal“. They supposed that it is caused by the fact that “every decimal expansion finite or infinite is only the decimal expansion of a certain number, so the situation must be the same for 0,999... and as it is periodical it must be a rational number, but since like for other rational numbers it cannot be obtained by dividing numerator by denominator so there is only one possibility – assuming that 099... is equal to 1“. They were convinced that we can assume that the two numbers are equal as the difference between them is “infinitely small“, “optionally small“ or “they differ by the smallest possible value“. They thought, however, that “it is not the same equality as

$1=\frac{2}{2}$ or $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, but just a semi-equality". They did not question the "truthfulness" of the equality but as R. J. Pawlak (1996) wrote in case of similar "infinite operations" treated it as some kind of agreement – the result of mathematical "tricks". Many examinees perceived the phrases "optionally small" or "infinitely small" as connected with the infinite process of approaching zero by the sequence of differences between number 1 and succeeding terms of the sequence: 0,9; 0,99; 0,999; .... It was probably consequence of epistemological obstacle connected with perceiving an infinitely small number as a constant smaller than some arbitrary number.

The epistemological obstacle that many pupils and students did not manage to remove was also perception of infinity (see Monaghan, 2001; Sierpinska, 1990; Tall, 2001). It frequently consisted in treating infinity as existing potentially and not actually and was particularly regularly expressed by pupils and the first-year students who claimed that: "the approach to the limit will be permanent and will never end". This perceiving infinity was related to the concept of time but equally often resulted from "realistic" understanding of the word "never". For example, the feeling that numbers 0,999... and 1 are not equal was supported by the conviction that "we will never be able to write the last 9 as there will always be a possibility of adding next one"; the same belief applied to series.

For some pupils and students the numbers 0,999... and 1 differed by "0,000...0001, but it is impossible to determine precisely where after decimal point 1 is but it is somewhere". This was the result of perceiving infinity as a very great number.

Attitudes assumed by examinees to "schemes of converting"

Majority of pupils and students considered the algorithms of converting of infinite fractions to be merely approximated calculations giving the result with "almost ideal accuracy" or "the error almost equal to zero". They explained such conviction referring to the operations on "infinite numbers" or infinitely many numbers.

However, after a thorough analysis of, for example, the algorithm based on equivalent equations the examinees could not explain which equality is approximated. Some hesitated whether the numbers 0,999... and 1 are different but did not change their opinion as they were deeply convinced that their intuitive feelings were right. Other pupils and students which were convinced that their intuitions were right, being unable to get rid of the contradiction and point out the point of approximation tried to undermine the truthfulness of the algorithm saying, for example, that "it is somehow bizarre".

Other pupils and students analysing the algorithm based upon the sum of infinite geometric sequence or series ($a_1 = 0{,}9$, $q = 0{,}1$), considered the equality between this sum and the number $\frac{a_1}{1-q}$ to be approximated. However, they remembered it very schematically. They forgot that the sum of the infinite geometric sequence (a_n) or geometric series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a = a_1)$ is the limit of the sequence of partial sums, that is of the exactly the same sequence as the one considered by them. By no means did they dispute the method of calculating the limit of this sequence (which equalled 1). However, in the course of discussions it turned out that some found it difficult to notice that the sum of infinite geometric sequence or series equals the limit of the sequence of partial sums. For others the considerations were too formal to undermine the intuitive belief that the numbers 0,999... and 1 are different.

Also the discussion centring on the fact that $1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots + 0{,}333\ldots + 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots$ and $1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0{,}333\ldots + 0{,}666\ldots = 0{,}999\ldots$ and $1 = 9 \cdot \frac{1}{9}$ =

$9 \cdot 0{,}111\ldots = 0{,}999\ldots$. did not change the examinees' belief that numbers 0,999. . . and 1 are different. Some examinees thought that summing 0,333. . . and 0,666. . . or multiplying 0,111. . . by 9 give the approximated result. Others believed that the equalities $\frac{1}{3}$=0,333. . . , $\frac{2}{3}$=0,666. . . and $\frac{1}{9}$=0,111. . . are approximate although they had not thought so before; now they pointed out the infinite process of "dividing the numerator by denominator" as confirmation of their new opinion. Significantly, at first they claimed that 0,333. . . "can be obtained by dividing one by three", to prove the equality $\frac{1}{3}$=0,333. . . , and justified the lack of equality between 0,999. . . and 1 by assuming that the same procedure cannot be applied here.

The reasons for attitudes and wayof correcting them

All the discussed attitudes show how strong the intuitive belief that numbers 0,999. . . and 1 are different was. It seems that the convictions could not be changed by the "schemes of converting" the pupils and students had already known or by described discussions because these attempts referred to some other mental sphere – responsible for formalized knowledge and not effecting the intuitions. The examinees were more inclined to question and accept these schemes in approximation than to modify their intuitive convictions. The reason was probably the "nature" of all intuitive feelings – perceiving them as self-evident (see Fischbein, 1987, p. 13).

The convictions of this type can be probably corrected only by referring to other intuitive conceptions. The discussions showed that referring to associations connected with the limit of a sequence turned out efficient. At first, I asked the examinees if the number 0,999. . . was the limit of the sequence: 0,9; 0,99; 0,999; . . . . Some of them made reference to "vertical" notation of a sequence:

0,9

0,99

0,999

0,9999

. . . .

Others drew a graph or marked the terms on an axis and referred to associations related to the limit of a sequence (see Cornu, 1991; Mamona-Downs, 2001; Przeniosło, 2003, 2004; Sierpinska, 1990, 1994). It was, for example, the association that "the terms of the sequence approach and are less and less different from 0,999. . . , and the difference becomes arbitrarily small" or its more general form – conviction that it begins from a certain point. The examinees, especially students who completing their studies, also used more precise conceptions like, for example, "almost all terms of a sequence belong to an arbitrary neighbourhood of 0,999. . . ", or "starting from a certain point all the terms fall into an arbitrary neighbourhood of 0,999. . . , or a strip drawn around the straight line y = 0,999. . . ," or "for each neighbourhood of 0,999. . . may be found a natural number n_0 such that, for all greater natural numbers the values of a sequence belong to this neighbourhood of 0,999. . . ". The discussions referring to such conceptions helped the examinees notice that 0,999. . . is the limit of the sequence. This statement coupled with the conviction that number 1 is also the limit and awareness of the uniqueness of the limit enabled them to accept that numbers 0,999. . . and 1 are equal and not approximately equal.

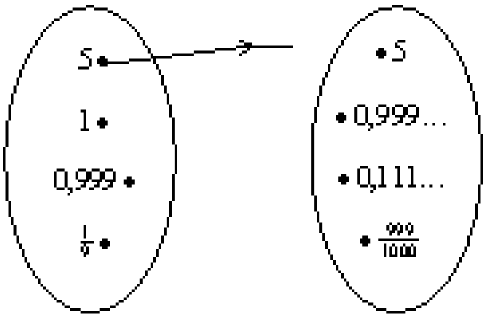
Suggestions on considering the problem in school

In order to prevent the formation of the aforesaid intuitive conviction it is essential that introducing the schemes of converting they should not only be applied to numbers 0,999... and 1, but also other operations are necessary. The fact that the examinees did not intuitively believe that the equalities $\frac{1}{3}$=0,333..., $\frac{2}{3}$=0,666... and $\frac{1}{9}$=0,111... are approximate suggests that these equalities can be used to form the conviction that the numbers 0,999... and 1 are equal before the impression about their inequality becomes overwhelming. It can be done by referring to simple operations which are certain to appear while solving the following problem:

Problem 1. You know that $\frac{1}{3}$=0,333..., $\frac{2}{3}$=0,666... and $\frac{1}{9}$=0,111.... By means of these equations show that 0,999... =1.

The equality of numbers 0,999... and 1 should be discussed in various situations. For example, the following problem may be interesting when talking about functions:

Problem 2. Complete the graph so that it will represent the function for which the same set $A = \left\{\frac{1}{9};\ 0,999;\ 1;\ 5\right\}$ constitutes the domain and range of values and it assigns the same number to the number from A set.



While solving the equations the coefficients being infinite decimal expansions including 0,999.... can be used. Talking about geometrical problems, even the simplest ones, also enables to discuss the equality of numbers 0,999... and 1.

Problem 3. Draw a straight line which have the equation $y = x-$ 0,999....

Here the question what 0,999.... is equal to will be undoubtedly asked as the pupils find it difficult to mark the number 0,999... on the axis (such difficulty revealed some examinees).

As for the operations on sets another problem can be used.

Problem 4. The common part of the sets A and B is a two-element set. Write this set.

$$A = \left\{\ \frac{1}{3};\ 0,999...;\ 1,41\right\}$$

$$B = \left\{0,3;\ 0,333...;\ 0,999;\ 1;\ \sqrt{2}\right\}$$

If the pupil can see that 1,41 is only the approximation of $\sqrt{2}$ so it does not belong to the common part he/she will clearly understand that numbers 0,999... and 1 are equal without approximation.

A good opportunity to form the belief that the numbers 0,999... and 1 are equal is considering the sequence limit. Obviously, using the second of the aforesaid schemes of converting is not enough. It seems worthwhile to ask the pupils to solve the following problem:

Problem 5.

a) Is the number 0,999... the limit of the sequence presented below?

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

b) Is the number 1 the limit of this sequence?

c) Are the numbers 0,999... and 1 different from each other? If so, what is the difference?

While discussing whether 0,999... is the limit of the sequence the suggestions and intuitive feelings described above can be used. However, pupils have to form such conceptions either "deformalising" the definition of a sequence limit or in the course of discovering the very concept, which of course is better – for suggestions on this way of teaching the concept see (Przeniosło, 2005).

Final remarks

The presented results of the research show that the problem of equality of numbers 0,999... and 1 is very difficult for pupils and even for university students. Therefore, considering it in different situation is necessary. I present only some opportunities to discuss this problem. Of course, many more situations can be used to form the conviction that 0,999... = 1. The more often we discuss them the bigger the chance that the "intrusive" feeling that these numbers are not equal will not become a strong, difficult to correcting, intuitive belief.

Literatúra

[1] Cornu, B.: *Limits*, in D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991, pp. 153–166.

[2] Fischbein, E.: *Intuition in science and mathematics. An educational approach*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[3] Gunčaga, J: *Limitné procesy z didaktického hľadiska*. Rigorózna práca, KU, Ružomberok, 2002.

[4] Mamona-Downs, J.: *Letting the intuitive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence*, Educational Studies in Mathematics, 2001, 48, pp. 259–288.

[5] Monaghan, J.: *Young peoples' ideas of infinity*, Educational Studies in Mathematics, 2001, 48, pp. 239–257.

[6] Pawlak, R. J.: *Historia matematyki a przeszkody epistemologiczne i dydaktyczne w rozumieniu i akceptacji pojęć i metod analizy matematycznej*, Problemy Studiów Nauczycielskich, nr 8, WSP Kraków, 1996, s. 31–39.

[7] Przeniosło, M.: *Perceiving the concept of limit by secondary school pupils*, Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok, 2003, nr 3, s. 75–84;

[8] Przeniosło, M.: *Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university*, Educational Studies in Mathematics, 2004, 55, s. 103–132.

[9] Przeniosło, M.: *Introducing the concept of convergence of sequence in secondary school*, Educational Studies in Mathematics, 2005 (in press).

[10] Sierpinska, A.: *Some remarks on understanding in mathematics*, For the Learning of Mathematics, 1990, 10, pp. 24–36.

[11] Sierpinska, A.: *Understanding in mathematics*, The Falmer Press, London, 1994.

[12] Tall, D.: *Natural and formal infinities*, Educational Studies in Mathematics, 2001, 48, pp. 199–238.

Adresa autora:
Dr. Małgorzata Przeniosło
Akademia Świętokrzyska
Instytut matematyki
ul. Świętokrzyska 15
25-406 Kielce, Poľsko
e-mail: M.Przenioslo@pu.kielce.pl

Jeden pohľad na kontinuitu matematického vzdelávania na základnej škole

Iveta Scholtzová

Abstract. *The period of transition from elementary to junior secondary stage is marked by specific pedagogic and psychological aspects from the particular subject's point of view. Hence, mathematics education deserves its focus and attention in this important transitional stage.*

Úvod

Súčasná koncepcia vyučovania poníma 1. a 2. stupeň základnej školy ako jednoliaty celok. Napriek tomu sa pri prechode žiakov zo 4. do 5. ročníka ZŠ vynára mnoho problémov, ktoré nemožno zanedbávať. Ide o prechod zo spôsobu vyučovania jedným (triednym) učiteľom na odborné vyučovanie realizované viacerými učiteľmi, z ktorých jeden je triednym učiteľom. V súčasnosti žiaci prechádzajú zo 4. do 5. ročníka ZŠ. V minulosti išlo o postup z 5. do 6. ročníka základnej deväťročnej školy a dávnejšie z piatych ročníkov ľudovej školy do prvých tried gymnázií, reálok a meštianskych škôl. Podľa súčasnej koncepcie výchovno-vzdelávacej sústavy sa u nás začína na základnej škole odborné vyučovanie v piatom ročníku (okrem vyučovania cudzích jazykov).

„Školská dochádzka žiakov v prvých štyroch ročníkoch základnej školy je relatívne uzavretou etapou v školskom vývine žiaka. Žiak si zvykol na štýl práce i na režim života v škole a vybudoval si vlastnú (žiakovskú) povesť, s ktorou prichádza na 2. stupeň. Základným cieľom z pedagogicko-psychologického hľadiska je zabezpečiť plynulosť tohto prechodu." (Hvozdík, 1986, s. 109)

Matematika a prechod žiaka z 1. stupňa na 2. stupeň základnej školy

Ak chceme zabezpečiť plynulosť prechodu z 1. stupňa na 2. stupeň ZŠ z vedomostnej stránky, je potrebné dbať na to, aby sa každý nový poznatok žiaka mnohostranne spájal s jeho predchádzajúcimi poznatkami a skúsenosťami.

„K tomu, aby vyučovanie matematiky na 2. stupni ZŠ mohlo splniť svoje ciele je potrebné, aby každý vyučujúci vedel, s akými poznatkami majú žiaci 1. stupňa prichádzať do 5. ročníka." (Bálint, 1988/89, s. 11)

Kuric (1965) uvádza, že kým v mladšom školskom veku rastie pamäť z kvantitatívnej stránky a prevláda názorná, mechanická pamäť, na 2. stupni ZŠ sa rýchlosť rastu tejto pamäte spomaľuje a vytvára sa predovšetkým pamäť slovno-logická. Prejavuje sa to najmä pri osvojovaní abstraktného učiva.

Skúsenosti pedagógov z praxe ukazujú, že žiaci pri príchode do 5. ročníka majú rezervy v počítaní spamäti a v zvládnutí písomných počtových úkonov, najmä delenia. Tiež sa objavujú problémy pri práci s číselnou osou. Ďalšou problematickou oblasťou je riešenie slovných úloh. Príčinou tohto problému je aj nedostatočná znalosť techniky čítania. Žiaci často nevyriešia slovnú úlohu preto, lebo ju nevedia s porozumením prečítať. (Červený, 1985/1986; Červený, 1987)

Kontinuitu matematického vzdelávania na základnej škole určite ovplyvňuje viacero faktorov. Medzi nich môžeme zaradiť v prvom rade vedomostnú úroveň žiakov, osobné postoje žiakov k vyučovaniu matematiky i odbornú a pedagogickú erudíciu učiteľov na 1. aj 2. stupni základnej školy.

Prieskum na základnej škole

Pre empirické overenie javov súvisacich s kontinuitou matematického vzdelávania na základnej škole bol realizovaný prieskum vo východoslovenskom regióne. Jeho súčasťou bolo testovanie vedomostí a zručností žiakov, dotazník pre žiakov a dotazník pre učiteľov 1. stupňa i učiteľov matematiky na 2. stupni ZŠ. V príspevku prezentujeme poznatky získané z testovania žiakov.

Vzorku respondentov tvorilo 254 žiakov zo siedmich škôl. Boli to školy vidiecke aj mestské, plneorganizované aj malotriedne. Vychádzajúc z učebných osnov, rešpektujúc obsahový a výkonový štandard pre 1. stupeň základnej školy a po konzultáciách s učiteľmi na 1. stupni i učiteľmi matematiky na 2. stupni týchto škôl bol zostavený neštandardizovaný didaktický test.

V teste bolo zahrnuté učivo 1. – 4. ročníka ZŠ z oblasti aritmetiky, algebry a geometrie. V jednotlivých úlohách sa vyžadovala znalosť zaokrúhľovania prirodzených čísel; porovnávania prirodzených čísel; sčítania, odčítania, násobenia a delenia prirodzených čísel; riešenia nerovníc; správna identifikácia geometrických útvarov; premena jednotiek dĺžky; rysovanie geometrických útvarov; výpočet obvodu rovinného geometrického útvaru; zápis zlomku; riešenie slovných úloh. Vytvorené boli dve verzie testov. Ich štruktúra bola identická, líšili sa iba číselnými hodnotami a typom geometrických útvarov.

Žiaci boli testovaní dvakrát – na konci 4. ročníka a následne na začiatku 5. ročníka. Všetci testovaní respondenti vypracovali obidve verzie testov. Cieľom testovania nebolo merať vedomostnú úroveň žiakov, prípadne realizovať porovnávanie medzi jednotlivými školami. Hlavným cieľom bolo porovnať výsledky žiakov dosiahnuté na konci 4. ročníka a na začiatku 5. ročníka.

Predpokladali sme, že úroveň vedomostí a zručností žiakov na konci 4. ročníka a na začiatku 5. ročníka bude porovnateľná.

Kvantitatívna analýza testov priniesla nasledovné údaje:

Tabuľka 1 **Porovnanie dosiahnutých výsledkov vo 4. a v 5. ročníku ZŠ**

Sledovaný jav	**počet žiakov**
zlepšenie o viac ako 10%	38
odchýlka v rozmedzí ± 10%	186
zhoršenie o viac ako 10%	30

Tabuľka 2 **Rozdelenie žiakov podľa úspešnosti**

úspešnosť v %	**počet žiakov 4. ročníka**	**počet žiakov 5. ročníka**
$\langle 0; 10\rangle$	1	0
$(10; 20\rangle$	2	0
$(20; 30\rangle$	2	5
$(30; 40\rangle$	5	2
$(40; 50\rangle$	10	8
$(50; 60\rangle$	16	11
$(60; 70\rangle$	22	19
$(70; 80\rangle$	42	56
$(80; 90\rangle$	83	88
$(90; 100\rangle$	71	56

Pre štatistické vyhodnotenie bol použitý Wilcoxonov test pre párové hodnoty. Ide o znamienkovo poradový test medzi dvojicami párových hodnôt. Pri spracovaní nameraných údajov (body z testov) boli pre každý zo súborov (4. ročník a 5. ročník) nájdené rozdiely medzi dvojicami týchto hodnôt. Ak sa rozdiel rovnal nule, táto dvojica bola vynechaná. Bez ohľadu na znamienko bolo určené poradie vypočítaných rozdielov. Poradové čísla pre kladné a záporné rozdiely boli rozlíšené tak, že boli napísané v dvoch stĺpcoch. Potom bol vypočítaný súčet všetkých kladných a záporných poradových čísel a menšie číslo z týchto súčtov bolo považované za testovaciu štatistiku T.

Pre zistenie štatisticky významného rozdielu medzi oboma súbormi boli použité nasledujúce vzťahy:
stredná hodnota: $\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$,
smerodajná odchýlka: $\sigma_T = \sqrt{\frac{n.(n+1).(2n+1)}{24}}$,
kde n je početnosť skúmaného súboru. Vychádzajúc z týchto vzťahov bol vypočítaný normovaný tvar štatistiky z:

$$z_T = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{T - \frac{n.(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n.(n+1).(2n+1)}{24}}}.$$

Zistená hodnota bola porovnaná s kritickou tabuľkovou hodnotou. Kritická oblasť na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ je 1,96. V našom prieskume $z_T = -4,89$. Keďže zistená hodnota $|z_T| > 1{,}96$, znamená to, že je štatisticky významný rozdiel medzi výsledkami žiakov z matematiky vo 4. a v 5. ročníku.

Domnievame sa, že dôvody väčšieho počtu tých žiakov, ktorí sa v teste v 5. ročníku zlepšili, sú dva. Na jednej strane je to dôkladné zopakovanie matematického učiva na začiatku školského roka, čo je určite dobrá vizitka pre učiteľov matematiky na 2. stupni ZŠ, ktorí zopakovaniu venujú potrebnú pozornosť. Na druhej strane je to nepochybne aj dôsledok rozumového „dozrievania" žiakov.

Pri kvalitatívnej analýze žiackych riešení v testoch je dôležité venovať pozornosť najčastejšie sa vyskytujúcim chybám v riešeniach žiakov (Prídavková, 2001). Takáto analýza je východiskom pre nápravu nedostatkov. Pri jednotlivých chybách je uvedená početnosť výskytu danej chyby v príslušnom ročníku vo vzorke 254 respondentov.

Tabuľka 3 **Najčastejšie chyby žiakov v jednolivých úlohách testu**

Typ chyby	**Počet výskytov vo 4. ročníku**	**Počet výskytov v 5. ročníku**
premena jednotiek dĺžky	118	124
určenie zlomku	84	103
zaokrúhľovanie N-čísla na stovky	76	73
matematizácia reálnej situácie	72	80
výpočet obvodu obdĺžnika	70	54
riešenie slovnej úlohy	70	106
zaokrúhľovanie N-čísla na desiatky	64	56
odčítanie N-čísel	62	61
pomenovanie priestorových útvarov	62	29
porovnávanie $N-$čísel	57	29
vyznačenie priemeru kružnice	57	63
násobenie viacciferného čísla jednociferným číslom	49	71
riešenie nerovnice	49	34

Identifikácia najčastejšie sa vyskytujúcich chýb určite môže pomôcť učiteľovi matematiky na 2. stupni ZŠ získať potrebné informácie o nových žiakoch.

Záver

Každý rok sa v čase prijímacích skúšok a následne na začiatku školského roka pravidelne opakuje jeden syndróm nášho školstva. Vysoké školy nie sú spokojné s vedomostnou úrovňou absolventov stredných škôl, stredné školy sa sťažujú na nedostatky vo vedomostiach a zručnostiach absolventov základných škôl, učitelia v 5. ročníkoch hľadajú nedostatky u žiakov zo 4. ročníkov. Vari iba učitelia 1. ročníka na základnej škole sa zatiaľ nezvyknú sťažovať na prípravu v materských školách.

Asi by každý z nás, pedagógov, mal začať od seba. Mohli by sme si osvojiť tézu, že kontinuita matematického vzdelávania a hlavne pozitívny vzťah žiaka k matematickému vzdelávaniu závisí aj od osobnosti učiteľa, jeho pedagogického taktu a didakticko–metodickej vyspelosti.

Ako hovoria Rumanovská – Šedivý (1991, s. 210): „Uľahčiť žiakom prechod a zabezpečiť plynulosť vyučovania matematiky a dobré výsledky môže len dobrý učiteľ, ktorý si v plnej miere uvedomuje rozdiely v práci na oboch stupňoch a predmetom jeho práce nie je len učivo matematiky, ale taktiež samotný žiak.“

Možno len súhlasiť s Tomkovou (2005, s. 89), že „...objavovanie vecí, nových možností a súvislostí je na matematike to najkrajšie. A tento pocit objaviteľa a úspešného riešiteľa by sme ako učitelia mali dopriať každému žiakovi.“

Ďalšie zaujímavé poznatky k problematike kontinuity matematického vzdelávania na základnej škole priniesol aj dotazníkový prieskum pre žiakov 5. ročníka ZŠ a učiteľov na 1. i 2. stupni ZŠ. Informácie o ňom budeme prezentovať niekedy v budúcnosti.

Literatúra

[1] Bálint, Ľ. (1988/89). *Aké vedomosti a zručnosti by mali mať žiaci pri vstupe do piateho ročníka základnej školy.* In: Matematika a fyzika ve škole, 1988/89, č. 19, s. 11 – 13.

[2] Brajerčíková, M. (2003). *Problematika prechodu žiakov z 1. na 2. stupeň ZŠ z pohľadu predmetu matematika (rigorózna práca).* Prešov: Pedagogická fakulta PU, 2003.

[3] Červený, P. (1985/86). *K prechodu žiakov zo 4. do 5. ročníka ZŠ v matematike.* In: Matematika a fyzika ve škole, 1985/86, č. 16, s. 177-180.

[4] Červený, P. (1987). *Problémy prechodu žiakov zo 4. do 5. ročníka ZŠ v matematike.* In: Jednotná škola, 1987, č. 2, s. 148-161.

[5] Hvozdík, J. (1986). *Základy školskej psychológie.* Bratislava: SPN, 1986.

[6] Kuric, J. (1965). *Rodičom o deťoch alebo Psychológia a výchova detí a mládeže.* Bratislava: SPN, 1965.

[7] Prídavková, A. (2001). *Rozbor chýb žiackych riešení úloh v teste z matematiky.* In: Zborník príspevkov z medzinárodnej vedeckej konferencie matematika v príprave učiteľov 1. stupňa základnej školy. Banská Bystrica: Pedagogická fakulta UMB, 2001, s. 125 – 130.

[8] Rumanovská, H. – Šedivý, O. (1991) *Pedagogicko-psychologické a metodické problémy vyučovania matematiky pri prechode žiakov zo 4. do 5. ročníka základnej školy.* In: Zborník Pedagogickej fakulty UKF v Nitre 5, Matematika, 1991, s. 197 – 211.

[9] Tomková, B. (2005). *Prečo vítam zmenu programov pri nových formách štúdia?* In: Tradice a perspektivy výchovy a vzdelávání. Česko-slovenské pedagogické studie 1. Olomouc: Nakladatelství Olomouc, 2005, s. 86 – 90.

Adresa autora:
RNDr. Iveta Scholtzová, PhD.
Katedra matematiky PF PU
Ul. 17. novembra 1
081 16 Prešov
e-mail: scholtzi@unipo.sk

Súťaže na hodinách matematiky primárnej školy

Edita Šimčíková, Blanka Tomková

Abstract. *A contest motivate and mobilize pupil. However it doesn't produce enjoyment and fun. Selection of contests is very important mainly for practice.*

Čo je to súťaž? Podľa elektronického slovníka znamená slovo súťaž jednak úsilie predstihnúť iných a dosiahnuť prvenstvo (súťaženie); a tiež takto verejne organizované úsilie, napr. volejbalová súťaž, verejná súťaž.

So súťažou a súťažením sa žiaci 1. stupňa základnej školy stretávajú aj na hodinách matematiky. Žiaci a učitelia vnímajú tento pojem v niekoľkých variantoch.

Celoslovenské matematické súťaže

Poznáme štyri celoslovenské matematické súťaže – Matematická olympiáda, Pytagoriáda, Klokan a MAKS, vyhlasované organizačnými výbormi a s niekoľkoročnou tradíciou.

Matematická olympiáda. Na 1. stupni sa jej zúčastňujú žiaci 4. ročníka. Prebieha v dvoch kolách – domácom a školskom. Pre úspešné riešenie sa vyžaduje nielen správny postup a výsledok, ale aj popis postupu, čo je pre žiakov 1. stupňa neobvyklé (aby slovne popisovali postup riešenia) a teda aj náročné.

Pytagoriáda. matematická súťaž, pri ktorej nejde o postup ale o správny výsledok. Za každé správne riešenie získava žiak 1 bod, pri zisku aspoň 10b (z 15b) je každých ušetrených 5 minút odmenených ziskom 1 bodu. Súťaže sa zúčastňujú žiaci tretích a štvrtých ročníkov 1. stupňa.

Matematický klokan. Medzinárodná matematická súťaž organizovaná vo viacerých krajinách sveta. Úlohy sú rovnaké, sú zverejnené v jeden deň naraz vo všetkých krajinách (termín je zväčša v mesiaci marec). Žiaci dostanú 24 úloh rozdelených do troch skupín. Osem úloh po troch bodoch, osem po štyroch bodoch a posledných osem po piatich bodoch. Za každé správne riešenie získava žiak príslušný počet bodov, za nesprávne riešenie 1 bod stráca, za neriešený príklad body nezíska ani nestráca. Súťaže sa zúčastňujú žiaci štvrtého ročníka 1. stupňa základnej školy.

MAKS (<u>Ma</u>tematický <u>k</u>orešpondenčný <u>s</u>eminár). Ide o korešpondenčnú matematickú súťaž, ktorej zaujímavosťou je, že sa jej môžu zúčastňovať nielen jednotlivci, ale aj dvojice. Vyriešené úlohy zasielajú žiaci na adresu firmy EXAM, ktorá danú súťaž (podobne ako Matematického klokana) rozširuje a obratom získavajú opravené úlohy spolu so sériou úloh ďalšieho kola. Táto súťaž je určená žiakom štvrtého ročníka 1. stupňa ZŠ.

Posledné dve súťaže sú spoplatnené. Takže každý riešiteľ platí presne stanovený poplatok, ktorý je zväčša určený na poštovné, kopírovanie, prípravu diplomov pre úspešných riešiteľov a pod.

Okrem týchto celoslovenských súťaží existujú ďalšie matematické súťaže určené viac žiakom 2. stupňa, výnimočne žiakom štvrtého ročníka 1. stupňa základnej školy. Málo je využívaná možnosť účasti talentovaných žiakov nižších ročníkov na súťaži žiakov vyšších ročníkov.

Niektorí učitelia v snahe podnietiť záujem, prípadne využiť nadšenie svojich žiakov, vytvárajú ďalšie vlastné súťaže. Dosah týchto súťaží je však miestny – vzťahuje sa zväčša na jednu triedu, prípadne jeden ročník danej školy.

Súťaže a hry s charakterom súťaže na hodinách matematiky.

Aj keď účasť na matematických súťažiach (Pytagoriáda, Klokan) z roka na rok stúpa, v oveľa väčšej miere využívajú učitelia 1. stupňa základnej školy súťaženie žiakov na hodinách matematiky. Vyplýva to z niekoľkoročných skúseností z praxe – z rozhovorov s učiteľmi na metodických seminároch, zo záverečných prác 1. kvalifikačnej skúšky a z hospitácií na vyučovacích hodinách. Tento trend zdôvodňujú rôzne. Súťaženie podľa nich:

- zvyšuje motiváciu žiakov,
- aktivizuje činnosť žiakov,
- rešpektuje prirodzenú túžbu žiakov súperiť medzi sebou,
- umožňuje diagnostikovať vedomosti žiakov „hravou“ formou a pomerne rýchlo a pod.

Pozrime sa však na takýto príklad.

Nemecký pretekár M. Schumacher, jazdec F1 za tím Ferrari, sa stal v roku 2004 majstrom sveta, rovnako ako v roku 2003, 2002, 2001. V roku 2004 bolo víťazstvo M. Schumachera jasné už niekoľko pretekov pred ukončením sezóny. Celý scenár pretekov vyzeral na každom okruhu rovnako. Znalcom F1 je zrejmé, že M. Schumacher je skvelý jazdec, že má skvelý monopost a tiež skvelý tím, a teda si víťazstvo zaslúžil. Problém bol v tom, že takéto preteky začínali byť nudné.

Ako to vyriešila FIFA? Zmenila pravidlá. V tomto roku sa preteky F1 stali opäť zaujímavými. Ferrari už nemá predplatené prvé miesto.

Prečo tento príklad?

Väčšina matematických súťaží je postavená na dvoch faktoroch – presnosti a rýchlosti (Matematický kráľ, Elektrina, Čierny Peter a pod.) Podporujú žiakov v presnosti počítania, v rýchlosti výpočtov, teda v tom, čo podľa mienky väčšiny ľudí potrebuje dobrý počtár.

Ale je to naozaj tak?

Potrebujeme v živote vždy to najrýchlejšie rozhodnutie? Je rýchlosť (samozrejme spojená s presnosťou) naozaj to, čo chceme u žiakov dosiahnuť?

Nemala by to byť túžba nevzdávať sa, hľadať riešenie problému, rozmýšľať o ňom z rôznych pohľadov a nebáť sa chýb? To je jedna otázka, ktorú si kladieme.

Druhou a možno vážnejšou je otázka, ako vplývajú takéto súťaže na sebavedomie tých žiakov, ktorí

– sú vždy tými „druhými“,

– sú v týchto súťažiach vždy neúspešní,

– sú trémistami a majú problém vystúpiť pred „obecenstvom“,

– mýlia sa, keď sú nútení pracovať „pod tlakom“.

Pomáhame im? Motivujeme ich? Aktivizujeme ich k činnostiam? Dávame im všetkým rovnaké šance? Ako sa oni dívajú na tieto súťaže?

Súťaž a osobnosť dieťaťa

Humanisticky orientované stratégie vyučovania žiakov na 1. stupni základnej školy podporujú realizáciu vyučovacích metód, ktoré rešpektujú osobnostné vlastnosti žiaka a individualizáciu jeho rozvoja. Úlohou pedagóga je prispôsobovať výber metód vyučovacieho procesu schopnostiam a záujmom žiaka. Ako súvisí súťaž, v ktorej je prvoradým kritériom úspechu rýchlosť odpovede žiaka a ďalším presnosť s predchádzajúcimi snaženiami? Ako tu možno pracovať s chybou (omylom) ako s prirodzeným aspektom v živote človeka tak, aby nebola iba terčom výsmechu, ale aby slúžila na autokorekciu vlastných poznatkov a autoreguláciu sebarozvoja osobnosti?

Podobné úvahy na zamyslenie, súvislosti, ale aj antagonizmy možno nájsť medzi zásadami humanisticky orientovaného hodnotenia a súťažami preferovanými pedagógmi v praxi (v pravidlách a kritériách hodnotenia). Na jednej strane bojujeme proti porovnávaniu žiakov medzi sebou, nehodnotíme ich osobnostné vlastnosti v hodnotiacich komentároch, vytvárame pravidlá na porovnávanie vlastných výkonov a vedomostí a na druhej strane súťažíme a dávame najavo, že toto sa cení najviac. Čo na to žiak? Chce pracovať v takýchto podmienkach? Komu súťaž vyhovuje a koho ponižuje? Komu súťaž vyhovuje viac – učiteľovi alebo žiakovi?

Na základe pozorovaní žiakov počas vyučovacieho procesu sme dospeli k niektorým záverom (nemáme tu na mysli celoslovenské súťaže).

Matematická súťaž vyhovuje tým, ktorí sú rýchli, temperamentní a zároveň počítajú presne, majú radi víťazstvo nad druhým, rušnosť, dynamiku. Nevyhovuje tým, ktorých pracovné tempo je pomalšie, ľahko sa pomýlia, neobľubujú ruch, sú v strese pri psychickom tlaku a vtedy je ich myslenie zablokované.

Matematická súťaž, v ktorej sú neúspešní stále tí istí žiaci, spôsobuje ich nízke sebahodnotenie, sebaúctu a sebadôveru najmä vtedy, keď ide o verejné triedne súťaže. Takýto žiak sa môže brániť vzdorom, odmietaním súťažiť, zámerným vylúčením zo súťaže hneď v prvom kole, aby potom mohol svojím správaním narušiť celý ďalší priebeh a pod.

Návrh riešenia

Ako teda riešiť tento problém? Možno uvažovať o niekoľkých možnostiach:

1. zrušiť súťaže
   + odstránime nadmernú nežiaducu súťaživosť detí
   + zamedzíme nezdravému sebavedomiu pravidelných víťazov a podceňovaniu tých menej úspešných
   - potlačíme prirodzenú súťaživosť detí
   - znížime počet aktivizujúcich činností
2. zmeniť pravidlá
   + potlačíme rutinu pri práci so žiakmi
   + zabezpečíme koncentráciu pozornosti žiakov – nemôžu sa spoliehať na to, že túto súťaž už poznajú a nemusia sledovať jej pravidlá a postupy
   - zvýšime neistotu
   - dosiahneme zníženie záujmu o súťaž u úspešných žiakov tým, že nedosiahnu prvenstvo (p. učiteľka zistila, že stále vyhrávam, zmenila pravidlá – „*Nemá ma rada?*“)
3. meniť typy súťaží
   + zvýšime zaujímavosť konečného hodnotenia úspechu zmenou kritérií
   + vyrovnáme šance na úspech

+ zaradíme kooperatívne súťaženie
+ dáme priestor súťažiť iba tým, ktorí majú záujem
- zvýšime časovú náročnosť na prípravu učiteľa
- zvýšime časovú náročnosť na neustále vysvetľovanie pravidiel nových súťaží.

Napriek istým uvádzaným nevýhodám sme presvedčení o tom, že tretia možnosť je najviac vyhovujúcou a z pohľadu rovností šancí na úspech aj najspravodlivejšou.

Literatúra

[1] Kálnássyová, V., Prídavková, A.: *Matematické sústredenie pre riešiteľov matematickej olympiády, kategórie Z-8.* In: Matematika, informatika, fyzika. Číslo 12. MC, Prešov, 1998.

[2] Kosová, B.: *Rozvoj osobnosti žiaka.* Prešov: MPC, 2000. ISBN 80-8045-179-6

[3] Mokriš, M. *Neštandardné úlohy z geometrie.* In: MIF – didaktický časopis učiteľov matematiky, informatiky a fyziky. Číslo 23. MPC v Prešove, 2004, s. 131 – 133. ISSN 1335-7794

[4] Prídavková, A.: *Matematické sústredenie pred Krajským kolom matematickej olympiády kategórie Z9.* In: Matematika, informatika, fyzika. Číslo 19. MC, Prešov, 2001. ISSN 1335-7794

[5] Prídavková, A.: *Sústredenie pre riešiteľov Krajského kola matematickej olympiády v kategórii Z9.* In: Matematika, informatika, fyzika. Číslo 21. MPC, Prešov, 2003. ISSN 1335-7794

Adresa autora:
PaedDr. Edita Šimčíková, Mgr. Blanka Tomková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra č. 15
081 16 Prešov
e-mail: editasim@unipo.sk, tomkova@unipo.sk

Rôznorodé metódy vyučovania tematického celku záporné čísla

Mária Slavíčková

Abstract. *In this article we try to show some ways, how to make teaching of signed integers more popular for pupils. We're writing about more interesting and more inspired possibilities to make teaching more effective.*

Úvod

So zápornými číslami sa žiaci stretávajú v reálom živote skôr, ako sa im začnú venovať na hodinách matematiky, aj keď majú menej možností sa s nimi stretnúť ako s kladnými číslami. Aj napriek tomu, že už počuli -2 $^\circ$C, -150 m nadmorskej výšky a pod., je táto časť pre nich problematická. Spočiatku, pokiaľ pojmov a pravidiel nie je veľa, sa im zdá preberaná látka jednoduchá a tak jej nevenujú dostatočnú pozornosť. Časom je však pre nich neprehľadná, ťažká a zbytočná. Učiteľ sa na hodinách stretáva s poznámkami typu: „Na čo mi to je?“, „Mne to netreba, ja budem právnik“ a pod.

Modely, ktoré sa používajú pri vyučovaní záporných čísel vychádzajú z histórie záporných čísel a možno ich rozdeliť do troch tried:

- záporné mnohosti – dlžoby, nedostatky, chýbajúce prvky,
- záporné operátory – odoberania, návraty, pohyb späť,
- záporné adresy – záporné údaje na stupniciach napr. teplomer, výťah, alebo číselná os.

Keďže do styku so zápornými číslami neprichádzajú tak často ako s kladnými, je potrebné im tento nedostatok vykompenzovať, napríklad hrami alebo iným zaujímavým, netradičným spôsobom, ktorý bude žiakov nielen motivovať, ale ich aj niečo naučí. Učitelia nielen na Slovensku sa snažia nájsť spôsob, ktorý by bol v ich triede úspešný. Avšak čo je dobré pre jednu triedu, je nepoužiteľné v inej triede a preto je zo strany učiteľa potrebná znalosť skupiny žiakov, u ktorých chce novú metódu použiť. Preto sa v tomto článku pokúsime popísať viac aj menej používané metódy zavedenia sčítania a odčítania celých čísel.

Zaujímavé metódy vyučovania tematického celku záporné čísla

Pokúsime sa prezentovať metódy, ktoré zvýšia motiváciu žiakov o preberanú látku a vzbudia v nich záujem o preberaný celok.

Podnikatelia

Potrebné pomôcky: tabuľa, krieda a špongia

Téma: Sčítanie a odčítanie celých čísel

Zaradenie do procesu vyučovania: motivácia, zavedenie záporných čísel, pravidlá pre sčítanie a odčítanie celých čísel

Popis: Žiakov v triede rozdelíme na dve skupiny – obchodníkov so stavebným materiálom a dodávateľov stavebného materiálu (prípadne im dáme možnosť si vybrať, s čím by chceli obchodovať). Učiteľ hrá úlohu zákazníka a od stavebnej firmy požaduje určitý počet prepraviek tehál (resp. niečoho iného, podľa toho, s čím obchodujú). Tabuľu pripravíme nasledujúcim spôsobom:

Na sklade sa nachádza ________ tehál

Na sklad prišlo: ________ tehál

Objednali si: ________ tehál

Ostane/bude chýbať: ________ tehál

Hodnotu *„Na sklade sa nachádza“* môžeme nastaviť napríklad na 200 kusov a začneme sa pýtať obchodníkov, že či chcú na sklad objednať nejaké tehly. Ak áno, opýtame sa dodávateľov, či im túto požiadavku splnia. Ak im dodávatelia potvrdia objednávku, do políčka *„Na sklad prišlo“* dopíšeme hodnotu, ktorú si chcú objednať. Učiteľ, ako zákazník si môže objednať nejaký počet tehál, túto hodnotu napíšeme do *„Objednali si“*. Do *„Ostane/bude chýbať“* napíšeme výsledný stav tehál na sklade. Túto hodnotu prepíšeme do *„Na sklade sa nachádza“* a ostatné hodnoty zotrieme.

Vždy, keď si chcú doobjednať na sklad, je potrebné sa opýtať dodávateľov, či sú ochotní im splniť požiadavku. Tu vznikajú pekné situácie, keď žiaci nechcú objednávku splniť, pretože napríklad nezaplatili tú z minula a teda im ďalší tovar nedajú a pod.

Je dobré dať hornú hranicu na počet objednaných kusov, napr. 500. Učiteľ sa bude snažiť dostať počet kusov na sklade do mínusu, zavedie sa označenie dlhu cez mínus. Žiaci to bez problémov prijmú a dokážu s takýmto číslom manipulovať.

Odporúčaná dĺžka trvania hry: minimálne 20 minút, aby sa všetci žiaci mali možnosť stotožniť s novými číslami a pravidlami.

Kasíno

Potrebné pomôcky: pohárik (umelohmotný), žetóny modrej a červenej farby, voľný stôl (katedra)

Téma: Sčítanie a odčítanie celých čísel

Zaradenie do procesu vyučovania: zavádzanie pravidiel pre počítanie

Popis: Žiaci vystupujú ako pozorovatelia a radcovia. Na začiatku im povieme nasledujúce pravidlá: Prázdny pohárik mi predstavuje nulu, resp., že nič nemám. Červené žetóny predstavujú kladné čísla, modré záporné (resp. majetok, dlh a pod.). Rovnaký počet žetónov červenej a modrej farby v pohári sa nuluje a môžem ich odstrániť.

S týmito pravidlami môžem jednoducho zaviesť <u>*sčítanie*</u> celých čísel nasledovne:

Príklad 1: $3 + 4 = 7$

Do pohára uložíme 3 červené žetóny a pridáme ešte 4 červené žetóny. Spolu ich je 7 a teda výsledkom je +7.

Príklad 2: $(-3) + (-6) = -9$

Analogicky ako v predchádzajúcom príklade, t.j. do pohára dáme 3 modré žetóny a pridáme ešte 6 modrých žetónov. Spolu ich je 9, teda výsledok je −9.

Príklad 3: $(-5) + 2 = -3$

Do pohára dáme 5 modrých žetónov a 2 červené. Keďže počet rovnakých žetónov sa nuluje, odoberieme 2 červené a 2 modré. To čo ostalo v pohári je výsledok, t.j. −3

Zavedenie *odčítania* však nie je natoľko jasné:

Príklad 4: $(-2) - (+7) = -9$

Do pohára dáme 2 modré žetóny, potrebujeme vytvoriť +7 a preto pridáme nulu v tvare 7 červených a 7 modrých žetónov. Teraz vyhodíme 7 červených žetónov a to čo nám ostane v pohári je výsledok. Tu bude žiakom možno trošku dlhšie trvať uvedomenie si umelého kroku pridania nuly.

Príklad 5: $3 - (-9) = 12$

Analogicky ako v predchádzajúcom prípade: do pohára dáme 3 červené žetóny a pridáme nulu v podobe 9 červených a 9 modrých žetónov. Teraz, keď už máme v pohári deväť modrých žetónov, môžeme ich odobrať. Ostane nám 9 červených (tie sme pridali) a 3 modré (pôvodné), teda výsledok je +12.

Odporúčaná dĺžka trvania hry: 1 vyučovacia hodina

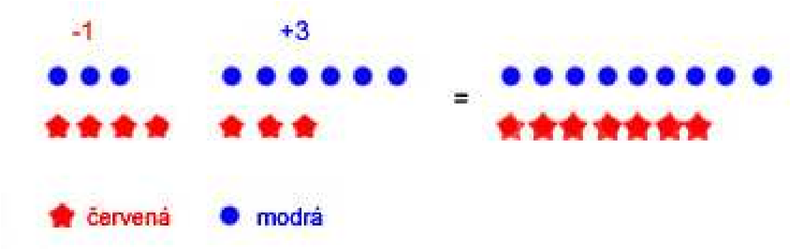
Farebné počítadlo

Potrebné pomôcky: pre žiakov pastelky, resp. fixky – červená a modrá farba, zošit; pre učiteľa buď meotar a fólie, alebo farebné kriedy alebo počítač s projektorom

Téma: Sčítanie a odčítanie celých čísel

Zaradenie do procesu vyučovania: motivácia, pravidlá pre počítanie s celými číslami

Popis: Na začiatku hodiny povieme žiakom, že máme dva druhy mincí – modré a červené (preto sme im kázali priniesť na hodinu modrú a červenú pastelku, resp. fixku). Princíp je podobný ako pri kasíne. Červená farba predstavuje dlh a modrá aktíva. Čísla vyjadrujeme ako zlomky, resp. dvojice.



Takáto aritmetika bola použitá v Číne, kde pri riešení sústavy rovníc pri úprave na redukovaný tvar vychádzali záporné čísla, boli farebne odlíšené.

Reprezentáciu pomocou usporiadanej dvojice možno naznačiť nasledovne:

4č = [5m, 9č], čo je zodpovedajúci zápis celého čísla pri výstavbe celých čísel z prirodzených v teórií množín. Avšak tento zápis je na základnej škole nepoužiteľný, keďže s usporiadanou dvojicou sa žiaci stretávajú neskôr (geometria – súradnice bodov). Pri východisku Komenského školy hrou, je táto téma veľmi vďačná, keďže deti môžu samé objavovať poznatky, napríklad pričítať červenú znamená odobrať modrú.

Odporúčaná dĺžka trvania hry: možnosť využitia počas doby celého preberania sčítania a odčítania.

Kartová hra

Potrebné pomôcky: papier, pero a 22 kartičiek pre jednu dvojicu, pričom na 11 sú modré čísla od 0 po 10 a na 11 sú červené čísla od 0 po 10

Téma: Sčítanie a odčítanie celých čísel

Zaradenie do procesu vyučovania: motivácia, zavedenie pravidiel pre sčítanie a odčítanie celých čísel.

Popis: Karty dobre zamiešame a položíme na jednu kopu. Dvojice si budú na papier zapisovať výsledky jednotlivých ťahov. Každý hráč si volí jenu farbu – červenú alebo modrú. Hráči berú z kopy po jednej karte, pričom si body pripisujú podľa nasledujúcich pravidiel:

- ak obidve vytiahnuté čísla sú modré, získava ich súčet hráč, ktorý si zvolil modrú farbu. Ak obidve čísla sú červené, získava ich súčet hráč, ktorý si zvolil červenú farbu
- ak sú vytiahnuté čísla rôznej farby, získava ich rozdiel hráč, ktorý si vytiahol väčšie číslo (ak majú rovnakú hodnotu, nikto si nepripisuje body)

Po vyčerpaní všetkých kariet z kôpky sa sčítajú body a vyhráva hráč s väčším počtom bodov.

Obmenou tejto hry možno zaviesť pravidlá pre sčitovanie celých čísel:

- červené čísla sa zapíšu ako kladné, modré ako záporné
- súčet červených čísel je číslo červené, súčet modrých čísel je číslo modré
- znamienko rozdielu určí farba čísla, ktoré má väčšiu hodnotu

Vytiahnuté súčty sa zapisujú ako úlohy, teda ak boli vytiahnuté dve červené čísla napr. 6 a 8, tak si žiaci do zošita zapíšu*: (+6) + (+8) = +14*. Ak boli vytiahnuté dve modré čísla, napr. 7 a 9, tak si zapíšu *(-7) + (-9) = -16*. Ak bolo vytiahnuté modré číslo 9 a červené číslo 4, tak sa zapíše *(9) + (+4) = - (9 - 4) = -5*.

Odporúčaná dĺžka trvania hry: 1 vyučovacia hodina, možnosť práce s kartičkami počas celej doby preberania sčítania a odčítania celých čísel

Tajná chodba

Potrebné pomôcky: štvorčekový papier, pero alebo ceruzka

Téma: Sčítanie a odčítanie celých čísel

Zaradenie do procesu vyučovania: motivácia, zavedenie pravidiel pre sčítanie a odčítanie celých čísel

Popis: Model tajnej chodby má jednoduchú myšlienku. V tajnej chodbe sú rovné úseky, ale aj schodištia smerom hore a dol. Učiteľ opisuje pohyb postavy po tomto schodisku. Úlohu je vhodné historicky motivovať. Žiaci na štvorčekový papier zapisujú profil tajnej chodby, učiteľ sa občas opýta: *„Koľkokrát sme už stúpali?“* alebo *„Sme vyššie alebo nižšie ako pri vchode do chodby?“*. Neskôr učiteľ zrýchli diktovanie, čo núti žiakov zmeniť zapisovanie a vymýšľať značky pre klesanie a stúpanie. Niektorí žiaci sami prídu na označovanie klesania mínusom a stúpania plusom. Potom už nie je problém zaviesť operácie sčítania a odčítania celých čísel.

Príklad: $(-5) + 2 = -3$

Po vstupe do tajnej chodby sme išli 5 schodov nadol a 2 schody nahor. Sme vyššie, alebo nižšia ako pri vstupe? O koľko?

Odporúčaná dĺžka trvania hry: minimálne 1 vyučovacia hodina

Zhrnutie

Uviedli sme niekoľko zaujímavých možností oživenia vyučovacích hodín pri preberaní celku aritmetika záporných čísel. Možností je však oveľa viac. Každý učiteľ má svoju preferovanú metódu vyučovania tohto celku. Myslíme si však, že zmena spôsobu vyučovania bude prospešná nielen pre žiakov, ale aj učiteľa, keďže nový spôsob je pre neho motivujúcim a osviežujúcim prvkom vo vyučovacom procese.

Literatúra

[1] Česnek, J. – Floreková, Š. – Franek, A. – Hrdina, Ľ. – Kavanová, M.: *Zbierka úloh z matematiky pre 5. ročník základných škôl*, SPN, 1994. ISBN 80-08-02293-0

[2] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky II*, SPN, Bratislava, 1990.

[3] Hejný, M. – Nôta, S.: *Metodika záporných čísel na ZŠ*, matematické obzory, Zväzok 35/1990, Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Prednáška: Repáš, V: *Ako a čo vyučovať v matematike*, 10.3.2003 posluchareň B, FMFI UK

[5] Slavíčková, M.: *Didaktické problémy pri základných aritmetických operáciách*, Rigorózna práca, október 2004.

[6] Williams, B.: *Positive-Negative Charge Model for integers*, (2003) www.iit.edu/~smile/ma8718.html

Adresa autora:
PaedDr. Mária Slavíčková
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: maria.slavickova@centrum.sk

Humanizácia výchovy a vzdelávania – základný predpoklad modernizácie súčasnej školy

Imrich Suchý

Úvod

Všetci (učitelia matematiky) sme zodpovední za výsledky vyučovania tak dôležitého predmetu (nechcem absolutizovať), ako je predmet matematika. Aby tie výsledky boli čo najlepšie, dovolím si prispieť svojou „troškou“.

Možno cítime, že výsledky našich žiakov nie sú adekvátne vynaloženej námahe a sú iba priemerné (ako o tom oficiálne hovorí i štátna školská inšpekcia). Častokrát odchádzame z našich tried nespokojní, že sme nedosiahli stanovený cieľ z rôznych dôvodov. A tu je najvyšší čas prehodnotiť svoje postoje k predmetu, jeho obsahu, k použitým metódam a formám práce a pod. Nazval by som to revíziou, aktivizáciou učiteľa, modernizáciou súčasnej školy.

Modernizácia vyučovania

Zo svojich štúdií poznáme pojem tradičné vyučovanie. Dnes oproti nemu stojí úsilie o modernizáciu vyučovania. Aktuálne sú pojmy ako využívanie efektívnejších metód, progresívne vyučovanie, modernejšie vyučovanie. Ich spoločným menovateľom je odlíšenie sa od tradičného vyučovania, ktoré je málo efektívne (lebo nedosahuje žiadúce výsledky), nemoderné (lebo učí zastaralými metódami), neinovatívne (lebo málo uplatňuje nové metódy výučby). Efektívne, moderné, alternatívne vyučovanie, by sa svojim obsahom, cieľmi, metódami a formami práce malo zásadne odlišovať od tradičného vyučovania. Podstata inovačných a modernizačných prístupov spočíva v tom, aby výchovno – vzdelávací proces zodpovedal najnovším pedagogicko – psychologickým a metodickým poznatkom.

Modernizáciu súčasnej školy je treba dnes chápať komplexne. Je to predovšetkým

1. *modernizácia obsahu vzdelávania* - možnosť modifikovať obsah učiva až na predpokladaných 40%, obsah vzdelávania chápať ako prostriedok rozvoja žiaka, je nielen to, čo si má žiak osvojiť, ale prostredníctvom neho rozvíjať psychické poznávacie procesy,

2. *modernizácia cieľov vzdelávania* - možnosť modifikovať ciele školou a učiteľom,

3. *modernizácia metód a foriem výchovno - vzdelávacej práce* - uplatňovať najnovšie poznatky psychológie a pedagogiky,

4. *modernizácia materiálno - technickej stránky výučby* - využívať modernú didaktickú techniku, vrátane výpočtovej techniky.

Ciele školského vzdelávania v súčasnej Európe všeobecne a pri vyučovaní matematiky

Dnes sa javí ako nutná potreba vychovávať a vzdelávať žiakov pre XXI. storočie, pričom dôraz sa kladie nielen na vedomosti ako súhrn poznatkov, ale predovšetkým na rozvoj všetkých stránok osobnosti žiaka. Úlohou školy je pripraviť žiaka k samostatnému a produktívnemu mysleniu, naučiť ho vedieť uplatňovať tvorivé schopnosti pri štúdiu na stredných školách, v praxi a viesť ho k potrebe celoživotného vzdelávania.

Týmito cieľmi sa približujeme k spoločným cieľom školského vzdelávania v Európe. Popri nutnosti podieľať sa na utváraní európskeho občianskeho vedomia, zintenzívnení vzdelávania v cudzích jazykoch, zabezpečení výchovy a vzdelania na takej úrovni, aby absolventi škôl boli schopní zaradiť sa do dynamicky pôsobiacich hospodársko-ekonomických procesov, aby neustále zvyšovali pracovnú a zamestnaneckú konkurenciu, pre nás aktuálne skvalitniť tzv. „prírodovedné vyučovanie“, tzn. na jednej strane plne zvládnuť najmodernejšie poznatky vedy a techniky a vedieť ich aplikovať v praxi, na druhej strane poznať dopad modernej techniky na životné prostredie a plne zabezpečovať jej ochranu. Aké sú východiská pre splnenie cieľov vo vyučovaní matematiky?

matematika je súčasťou ľudskej kultúry a sprevádza ľudstvo od jeho začiatkov, bola súčasťou štúdia rôznych vied. Dnes je matematika účinný pracovný nástroj iných disciplín a podieľa sa na intelektuálnom vývoji moderného človeka súčasnosti. Nie neskromne môžeme povedať, že posunula kvalitu matematického myslenia, čo nás oprávňuje používať synonymum „kráľovná vied“.

V širšom kontexte môžeme matematiku chápať ako exaktnú vedu, ktorá na každú zmysluplnú otázku vie dať spravidla jasnú odpoveď. Pri svojom štúdiu si kladie jednoznačné ciele, ktoré môžeme rozdeliť do troch skupín:

- ak matematiku chápeme ako vedeckú disciplínu, potom má za cieľ obohatiť ju o nové teórie,
- ak ju chápeme ako aplikačnú vedu, potom svojim teoretickým potenciálom má prispievať k riešeniu konkrétnych problémov spoločnosti,
- tretie ciele sa týkajú výchovy novej vedeckej generácie matematikov.

Napĺňať ciele vyučovania matematiky v súčasnosti znamená, že učiteľ musí byť v súlade s matematickou vedou a výrazne popri zmene obsahu sa musia modernizovať i vyučovacie metódy. Tieto nemôžu byť iba cestou osvojovania nových poznatkov, ale zároveň i cestou k rozvíjaniu schopností hľadať nové vedomosti, skúsenosti a formovanie osobnosti. Tým plnia vyučovacie metódy funkciu vzdelávaciu a výchovnú.

K novým prostriedkom práce patrí aktivizácia procesu učenia, aktivizácia poznávacích schopností žiaka, rozvoj samostatnosti a v konečnom dôsledku tvorivosť.

Humanizácia výchovy a vzdelávania – základný predpoklad modernizácie vyučovania

Keď sa po roku 1989 začal v odbornej tlači a literatúre používať vo zvýšenej frekvencii pojem tvorivo – humanistické vyučovanie, mnohí učitelia nepochopili, že podstata, na prvý pohľad jednoduchej otázky je omnoho zložitejšia, ako sa ona javí. Totiž to, že učiteľ žiakov netrestá, nezosmiešňuje ich, ba dokonca volí k nim individuálny prístup, nemusí ešte znamenať, že jeho výučba je orientovaná humanisticky. Učitelia často zjednodušene formulovali problém humanizácie vyučovania na to, že stačí mať k deťom dobrý vzťah, mať pre deti pochopenie, priblížiť sa k nim a pod. I keď takéto a podobné formulácie sú pri bežnej interpretácii problematiky humanizácie v zásade správne, predsa len je treba vniknúť do podstaty trochu hlbšie.

Slovo *humanizmus* v latinčine znamená doslova ľudskosť, ľudomilnosť, čo v najjednoduchšom preklade do práce učiteľa by malo znamenať, že učiteľ by nemal žiakov trestať, mal by mať pre nich pochopenie aj pri ich menších, či nebodaj väčších prehreškoch.

Humanizáciu v školstve môžeme budovať na základe týchto východiskových ideí:

Človek tu nie je pre štát, pre inštitúcie (školu), organizácie a pod. Práve naopak, štát, škola sú tu pre človeka pri rešpektovaní jeho občianskych práv, slobôd, osobnosti. Výchova a vzdelanie nie sú nástrojom na popretie osobnosti. Naopak, majú rešpektovať dôstojnosť jednotlivca, osobnosti a ďalej ju rozvíjať. Základ humánnych vzťahov spočíva predovšetkým v tom, že vo vzťahu učiteľ – žiak musia byť dominantné základné normy mravnosti, spravodlivosti, všeľudské hodnoty a pod. Učiteľ v rámci humanistického prístupu má dať žiakom možnosť výberu, voľby a podľa nich učí žiakov vyberať si a vážiť hodnoty.

Učiť hodnotám, rozvíjať hodnotiace myslenie žiakov, je tak kardinálnym princípom učiteľa snažiaceho sa o humanistický prístup k žiakom. „Humanisti sa usilujú o vytvorenie školského prostredia, v ktorom je položený dôraz na zrozumiteľnú a efektívnu komunikáciu, spoločnú zodpovednosť, riešenie konfliktov, rozvoj sebaovládania žiakov a na úsilie o napĺňovanie ich potrieb.“ [1, str. 327]

Najvýstižnejšie porovnáva tradičnú a humanistickú školu Carl Rogers.

Tradičná škola stojí na týchto princípoch:

– učiteľ je majiteľ poznania, žiak očakávaným prijímateľom,
– výklad (ako metóda) a učebnica (ako prostriedok) sprostredkúvajú poznanie k žiakom, skúšky merajú rozsah, v akom ho žiak prijal,
– v triede vládne autorita, učiteľ má moc, ktorú uplatňuje prostredníctvom disciplíny, známok a žiak je ten, kto poslúcha, vzájomná dôvera je minimálna,
– žiakov môžeme najlepšie ovládať tak, že ich udržiavame v opakujúcom sa alebo v konštantnom stave napätia, úzkosti, strachu, ohrozenia známkami či inými trestami,
– demokracia a jej hodnoty sa v takejto praxi ignorujú,
– vo vzdelávacom systéme tak nie je miesto pre celú osobnosť, ale iba pre jej intelekt.

Ako protiklad tradičného prístupu rozpracoval C. Rogers systém PCE (person centred education), v ktorom sú tieto princípy:

– základným predpokladom je, že učiteľ sa cíti byť dostatočne istý vo svojich vzťahoch k iným, žiaka považuje za bytosť hodnú dôvery,
– učiteľ spolu so žiakmi a ich rodičmi nesie spoluzodpovednosť za proces edukácie,
– pozornosť sa sústreďuje na podporu pokračujúceho procesu učenia sa, vytýčené ciele žiak dosahuje na základe uvedomelej sebadisciplíny,
– rozsah a obsah učenia žiak hodnotí sám, v krajnom prípade za pomoci učiteľa,

– učenie sa v tejto klíme napomáha rozvoju osobnosti, je obvykle hlbšie, preniká do života a správania sa žiaka viac ako učenie v tradičnej škole.

Prístup C. Rogersa pri riešení tohto problému je prístupom orientovaným na žiaka (v literatúre je často označovaný pojmom žiakocentristicky orientované vyučovanie). Pre tento prístup je charakteristické, že je zameraný na zmeny človeka prostredníctvom citového prežívania. Učiteľ vo svojej práci má uplatňovať:

– „kongruenciu – jeho úprimnosť, otvorenosť, pravdivosť a autenticitu,

– akceptáciu - úplné prijatie žiaka a bezpodmienečne pozitívny postoj k nemu,

– empatiu - vcítenie sa do človeka, presné porozumenie jeho citom.“ [2, str. 35]

Tieto tri regersovské stratégie emocionalizácie na prvé miesto kladú žiaka. Týmto vyjadrením postavil filozofiu tradičnej školy „na hlavu“, pretože v našich podmienkach si to vyžaduje doslova revolučné zmeny v prístupe všetkých zainteresovaných.

Slovo do vlastných radov

Učiteľ musí dôverovať svojim žiakom a nechať ich robiť vlastné rozhodnutia. Musí ich povzbudzovať, rozumieť im, mal by byť empatický, spolupracujúci a mnohostranný. Mal by podporovať techniky využívajúce sebaobjavovanie žiakov, sledovanie vlastných postojov a pocitov. Učiteľ musí podporovať hodnotiace myslenie, mal by rozvíjať tvorivosť, podávať žiakom divergentné úlohy a cvičenia, ktoré žiakom umožňujú robiť voľby, rozhodnutia, učí ich netradične myslieť, hodnotiť, učí ich samostatnosti, užitočnosti a autenticite, čo všetko napokon vedie k formovaniu zodpovednosti za vlastná tvorivé rozhodnutia a hodnotenia. Žiak je najvyššia autentická hodnota a našou profesionálnou povinnosťou je „milovať“ každého žiaka, povzbudzovať ho, veriť mu, umožniť mu rozvíjať sa ako jedinečnej bytosti.

Je na nás učiteľoch, ako sa nám podarím pritom spojiť požiadavky súčasnej školy s humanistickým prístupom k výchove a vzdelávaniu.

A v čom spočíva pozitívny prístup učiteľa k žiakom?

– pozorne počúvajme žiakov, čo nám chcú hovoriť,

– reagujme na ich pocity len vtedy, keď sa oni chcú a potrebujú vyrozprávať, vyjadriť svoje pocity, riešiť problémy,

– vyjadrujme sa v prvej osobe, hovorme za seba, čo si myslíme a čo cítime,

– konflikty riešme zmierlivo, aby ani jedna strana nepociťovala prehru, hľadajme kompromisy, ak je treba, ustúpme.

Pravidlá, ktoré by mali dodržiavať žiaci:

- vo vzťahu k spolužiakom
  - počúvať sa navzájom, keď hovoria iní, neskákať si do reči,
  - oslovovať sa navzájom krstnými menami,
  - nerušiť druhých hlasnou rečou, chôdzou,
  - nepoužívať posmešné a urážlivé slová,
  - rešpektovať osobnosť svojich spolužiakov,
- vo vzťahu k škole

   - rešpektovať vnútorný poriadok a majetok školy,

- vo vzťahu k sebe samému
   - plniť si svoje povinnosti,
   - nosiť si učebné pomôcky na vyučovanie,
   - pracovať na svojom odbornom a osobnostnom raste,
   - tešiť sa z úspechu.

Žiaci by sa mali dopracovať k tomu, že si budú navzájom dôverovať, budú sa zaujímať o to, čo prežíva druhý, budú si všímať, či nie je niekto ohrozovaný, či sa nebojí. Každý musí mať pocit, že je užitočný, že ho nebudú ignorovať a príjmu ho takého, aký je. Potom sa bude vyskytovať menej útokov, nepriateľstiev, hnevu a bude medzi nami viac dobroprajnosti, spolupráce a ochoty pomôcť druhému.

Preto v zmysle humanistickej školy je nesmierne dôležité vytvárať podmienky na citový rast a vývoj detí. V takýchto triedach vystupujem skôr ako poradca a sprievodca, než ako predstaviteľ autority. Dopracovať sa v takému stavu je veľmi náročné. Sám chcem od žiakov, aby sa učili sebadisciplíne, prevzali zodpovednosť za svoje chovanie a uvedomili si, že keď sa nechovajú v zmysle týchto princípov, je to pre mňa sklamanie a nemôžeme dosiahnuť také výsledky, aké by sme mali.

V týchto súvislostiach by som ešte zverejnil jeden postreh vychádzajúci z vlastnej riadiacej praxe. Videl som množstvo vyučovacích hodín, z nich mnohé z matematiky. Popri mnohých kladoch, za jeden z najväčších nedostatkov, okrem vecných a metodických, považujem málo citovej komunikácie na hodinách matematiky. Z vyjadrení mnohých žiakov vyplýva, že učitelia matematiky sú často akísi „suchári“, nevedia sa znížiť k žiakom, spestriť vyučovacie hodiny úsmevnou príhodou zo života, nejakou perličkou a pod.

Psychológovia upozorňujú na aké stránky psychológie vyučovania je treba upriamiť pozornosť a akými zásadami sa treba pritom riadiť, aby učiteľ

- neostal len v úlohe informátora, sprostredkovateľa učiva,
- vzbudil záujem o matematiku a rozvíjal kladný vzťah žiaka k nej,
- navodil družnú atmosféru a ponúkol pozitívny zážitok z hodín matematiky.

„Úsilím každého tvorivého človeka je nielen vytvárať niečo nové, prospešné, ale aj humanizovať medziľudské vzťahy“ [3, str. 2] a práve citová výchova sa uskutočňuje prostredníctvom humanizácie vzťahu učiteľ – žiak. Učiteľ by mal mať dostatočne vyvinutú schopnosť empatie, aby sa dokázal vcítiť do myslenia žiaka. Mal by dokázať prijať každého žiaka ako nepodmienečnú hodnotu. Preto na hodinách matematiky vytváram dostatočne veľký priestor pre túto oblasť pôsobenia na žiaka. V mojom motivačnom úsilí nemôžem tento psychologický aspekt prehliadať.

Komunikácia je predpokladom akejkoľvek činnosti, predpokladá ochotu začať pracovať, dodáva chuť do práce, vytvára alebo prehlbuje dobré vzťahy, je zdrojom psychickej energie. Ústna komunikácia mi dáva okamžitú spätnú väzbu, umožňuje plnšie nazrieť do predstáv a myslenia žiakov. Pri prenose informácií využívam aj iné prostriedky - intonáciu reči, gestikuláciu, nezabúdam, že hovorím nielen slovami, ale aj očami, mimikou, výrazom tváre a pod. Tieto neverbálne signály sprevádzajú moje slová a preto pamätám na ich správne používanie. Komplexným využívaním týchto prostriedkov je moja reč zaujímavejšia a ľahšie ňou vyjadrím svoje myšlienky a pocity.

Tieto otázky sa stávajú objektom mojich úvah a výsledok patrí do môjho pedagogického rukopisu.

Na ilustráciu uvediem aspoň dva príklady.

Pri zavádzaní pojmu *zlomok* ako časti z celku v 6. ročníku, rád preruším prácu žiakov poznámkou o tom, aké je dôležité pochopiť myšlienku ruského spisovateľa L. N. Tolstého:

„Človek sa podobá zlomku, kde čitateľ je to, čo skutočne predstavuje, ale menovateľ je to, čo si o sebe myslí.

Čím väčší je menovateľ, tým menší je zlomok, keď je menovateľ nekonečný, zlomok sa rovná nule."

Nasleduje pomalá interpretácia tejto myšlienky, využívam pritom matematickú symboliku (Č – človek, S – skutočnosť, P - predstava), zápis: Č = S : P v tvare zlomku. Na konci si vždy počkám na preklad a hodnotenie žiakov (keď si o sebe veľa myslíš, potom si nulový, si asi prázdny a pod.), pozorujem žiakov - ako niektorí ožili, niektorí sa zamysleli, iní zahanbili, a ja často už k tomu ani nič nedodám, lebo niekedy je treba i tak ukončiť dialóg, s tromi bodkami.

Inokedy na tú istú tému rád spestrím vyučovaciu hodinu vlastnou skúsenosťou z verejnej schôdze v obci, keď hlavný rečník pri oslavách VOSR v časoch totality predstavil ZSSR na jednej šestine sveta. Potom predstavil víziu budúcnosti - „Postupne sa bude socializmus budovať na jednej sedmine, potom osmine atď sveta." (Ani si neuvedomil, akú povedal pravdu.)

Vyučovanie matematiky je veľmi citlivé na vzťah medzi učiteľom a žiakom. Citová zložka vzťahu žiaka a jeho učiteľa je často rozhodujúca práve v čase vytvárania vzťahu k matematike. Aby som mohol vo vyučovacom procese vystupovať ako pomocník žiakom, zaujímam sa o ich názory. Odpovede na otázky sú názormi žiakov na našu spoločnú prácu. Tvorivá práca si totiž žiada od učiteľa nielen hľadanie najúčinnejších spôsobov realizácie učebného procesu, produkciu nových užitočných riešení, veľa premýšľania a nápadov, ale i overovanie, experimentovanie, zbieranie a triedenie názorov. Kvalitatívnou analýzou žiackych odpovedí si pri práci veľmi pomáham. Z ich formulácie pre mňa jednoznačne vyplýva, že žiaka nemožno podceňovať, ale musí byť pre mňa partnerom.

Na ukážku uvádzam anketu, ktorý dávam žiakom 9. ročníka po prvom klasifikačnom období, t.j. po polročnej práci v kolektíve, zvlášť, kde som predtým neučil. Mám s ním skúsenosti z posledných rokov. Žiaci mali odpovedať na nasledujúce otázky:

1. Vyhovujú ti terajšie metódy a formy práce pri preberaní nového učiva a pri jeho precvičovaní?

2. Je matematika pre teba strašiakom?

3. Chcel by si, aby sa hodina matematiky začínala individuálnym skúšaním pri tabuli?

4. Vyhovuje ti terajší spôsob zadávania a kontroly domácej úlohy?

5. Vyhovuje ti terajší spôsob klasifikácie predmetu? (t.j. malé známky - za rozcvičky, za desaťminútovky, za dobré nápady, za aktivitu, za zodpovedania zvlášť problémových otázok, za domácu úlohu, za dobrovoľné písomné previerky a veľké známky – za povinné tematické previerky, štvrťročné písomné práce a známky z ústnych odpovedí.)

6. Máš rád matematické rozcvičky?
7. Tvoj názor na dobrovoľné písomné previerky.
8. Si spokojný so záverečným slovným hodnotením, ktoré predchádza výslednej známke?
9. Aký je tvoj názor na zaraďovanie nepovinných (záujmových) úloh do tematických previerok a štvrťročných písomných prác (ktorými po vyriešení získavaš ďalšie body)?
10. Ako ti pomáhajú učebné pomôcky pri objasňovaní nového učiva?
11. Si spokojný s dosahovanými výsledkami?
12. Čo mi chceš ešte povedať? (Tvoje iné pripomienky).

Z odpovedí, ktoré som v minulom školskom roku dostal, vyberám :

– najskôr to bol pre mňa problém, ale teraz som si už zvykla,
– matematika bola pre mňa kedysi problémom, teraz sa mi zdá trochu jednoduchšia,
– schvaľujem také príklady,
– často si po skončení hodiny matematiky myslím, že je to veľmi jednoduché,
– učivo na seba nadväzuje, začína sa mi to skladať ako domček z kociek,
– hodina pri vás zbehne veľmi rýchlo (odpovede na otázku č. 1),
– matematika je O.K.,
– je fajn, pohodička a i keď ma matematika veľmi nezaujíma, nenudím sa,
– cením si, že každého chcete presvedčiť, že to robí pre seba,
– nemusela by existovať, zaobídem sa, (2)
  áno, ale mali by ste zapisovať iba jednotky alebo dvojky, (3)
– dobré je, že domáce úlohy temer nekontrolujete, aspoň si každý zváži čo chce,
– je dobré, že nedávate za úlohy päťky,
– domáce úlohy by sa nemali vôbec kontrolovať, je to moja vec, (4)
– vyhovuje, ale mohlo by byť viac známok (pozn. za polrok 3 – 4 známky z tematických previerok, 2 známky z písomných prác, 2 – 3 z ústnych odpovedí a 8 – 12 malých známok),
– teraz sa musím viac učiť,
– nie, lebo chcete viac, ako učiteľka v minulom roku,
– nie, lebo dostávam zlé známky a doma mám za to tresty, (5)
  áno, aspoň sa presvedčím, čo som sa včera naučila,

– aspoň viem na čom som,

– mohli by byť i ťažšie príklady, iný žiak sa vyjadril presne opačne, (6)

– dobrá vec, to tu ešte nebolo,

– dobrý nápad, ale nech píše, kto chce,

– ale, len vtedy, ak dostanem dobrú známku, (7)

– aspoň sa dozviem svoje chyby a na čom som vo vašich očiach,

– toto hodnotenie mi dá viac ako známka,

– je to lepšie, ako „odstaviť“ žiaka známkou,

– slovo vždy viac poteší,

– s hodnotením som spokojná, so známkou veľmi nie, (8)

– súhlasím, ale niektoré sú ťažké príklady, nedajú sa už vyrobiť body,

– dobré, aspoň si môžem privyrobiť, ak som urobil niekde chybu v povinných úlohách, (9)

– som spokojný, ale mám ešte rezervy,

– snažím sa, ale nejde mi to lepšie,

– na písomke som nervózna, aby som neurobila chybu,

– neviem prečo sa mi nedarí, ale chcel by som sa zlepšiť, (11)

– aby ste ma niekedy mohli doučovať,

– viac písomných previerok,

– v knihe sú ťažké príklady,

– aby sme mali viac času na písomke,

– mohli by ste pomalšie diktovať (12).

Vážim si, že žiaci sa necítia byť izolovaní a chcú so mnou spolupracovať. Odpovedali vcelku spontánne, niektorí veľmi otvorene a mnohí z nich odpovedali temer na všetky otázky. Mnohé z odpovedí svedčia o schopnosti vyjadriť sa a formulovať svoje myšlienky na takej úrovni, na akej sú. Snažím sa rešpektovať myšlienky a logiku žiaka. Z odpovedí, ktoré som dostal, robím analýzu a získané poznatky sú pre mňa určitým vektorom v mojej ďalšej práci.

Záver

Škola je miesto, ktoré umožňuje získavať vedomosti a rozvíjať tvorivé schopnosti našich žiakov. Nebolo by dobré zúžiť poslanie školy iba na akúsi továreň na vedomosti. Poslaním školy je i rozvíjať ducha a pestovať postoje k základným otázkam ľudského života, učiť sa vzájomnej úcte a ohľaduplnosti, rozvíjať v človeku dobro - jednoducho vychovávať. Len chladný rozum a vedomosti zbavené citu sú pre plnohodnotný život málo. Múdrosť totiž nie sú len vedomosti. Múdrosť je rozum prežiarený dobrotou srdca.

Literatúra

[1] Pasch Marvin a kol.: *Od vzdelávacího programu k vyučovací hodine*, Praha: Portál, 1998, str. 327.

[2] Zelina, M.: *Stratégie a metódy rozvoja osobnosti dieťaťa*, Bratislava: IRIS, 1994, str. 35.

[3] Zelinová, M. - Zelina, M.: *Model tvorivého humanistického vyučovania*. Metodický list ŠPÚ, Bratislava, 1994.

Adresa autora:
PaedDr. Imrich Suchý
Katolícka univerzita Ružomberok
detašované pracovisko Levoča
e-mail: suchy@fedu.ku.sk

Nová forma štátnych skúšok – vyhodnotenie

Blanka Tomková

Abstract. *Theórie de la connaissance est trés importante. Mais une application des théorie en practique il est neccessaire. Mais nos etudiant les sait? Comment est le resultat de la licence?*
Key words: *théoretique, pratique, etudiannt . . .*

Úvod

Predmet matematika nepatrí, vo všeobecnosti, medzi najobľúbenejšie predmety na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity. Napriek tomu nikto nepopiera jeho dôležitosť (vo svete sa dokonca uvažuje o tom, že predmety ako matematika a materinský jazyk by mali byť na základných školách posilnené, pretože úroveň vedomostí a schopností dnešnej generácie – s ohľadom na tieto predmety – klesá). Naši študenti teda aj naďalej končia štúdium na Pedagogickej fakulte, okrem obhajoby diplomovej práce, štátnou skúškou z materinského jazyka, matematiky, pedagogiky a psychológie.

Doterajší priebeh štátnej skúšky bol taký, že naši študenti, po zvládnutí ôsmich semestrov štúdia v dennej forme alebo desiatich semestrov štúdia v externej forme, mali na štátnej skúške z predmetu matematika s didaktikou matematiky zodpovedať na dve otázky. Každá otázka bola ďalej členená na dve časti – teoretickú a didaktickú. Prvá otázka bola z predmetu Elementárna aritmetika a podotázku tvorila prislúchajúca didaktická interpretácia, prípadne otázka z predmetu Didaktika matematiky (ak nebolo možné danú problematiku prepojiť). Druhá otázka sa teoreticky zameriavala na predmet Algebra a geometria a doplnená bola opäť didaktickou časťou.

Daný model umožňoval prehľad teoretických vedomostí aj ich prepojenie s didaktikou, avšak mal isté nedostatky. Neumožňoval študentovi prezentovať jeho schopnosti učiteľa, premyslenosť skladby úloh, práce so žiakmi, zbehlosť v práci s literárnymi pomôckami pri príprave na vyučovaciu hodinu.

Študenti boli tiež presvedčení, že v podstate ide o akúsi duplicitnú skúšku z matematiky a v diskusiách a dotazníkoch o štúdiu a štátnych skúškach sa vyjadrovali, že by bolo lepšie priblížiť štátnu skúšku z predmetu matematika s didaktikou matematiky viac reálnemu životu a podmienkam v praxi.

Nový model

Po zvážení študentských názorov a po diskusiách na katedre sme sa preto v minulom školskom roku 2003/2004 rozhodli upraviť formu štátnych skúšok z predmetu matematika s didaktikou matematiky. Prispôsobili sme tomu aj obsah predmetu „Vybrané kapitoly z matematiky“ a nový model štátnych skúšok sme v tomto školskom roku (2004/2005) prvýkrát vyskúšali v praxi.

V čom spočívala podstata nového modelu? Na rozdiel od predchádzajúcich rokov si študent nevolil dve, ale len jednu otázku. Každá otázka ale pozostávala z troch častí:

– teoretickej,

– didaktickej,

– praktickej.

Príklad: Študent dostal otázku *„Trojuholník"*.

V teoretickej časti mal definovať trojuholník, využiť rôzne prístupy k definovaniu trojuholníka, mal popísať vlastnosti trojuholníka, venovať sa klasifikácii trojuholníkov.

V didaktickej časti sme od študentov požadovali, aby sa venovali propedeutike pojmu trojuholník vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ, metodike zavedenia pojmu trojuholník, určeniu vlastností trojuholníka (samozrejme s ohľadom na 1. stupeň ZŠ) a metodike rysovania trojuholníka.

Posledná praktická časť mala byť venovaná návrhu projektu vyučovacej hodiny (alebo jej časti) v súvislosti s danou témou. Študent mal prezentovať nadhľad a premyslenosť svojej práce vhodne volenými metódami a formami práce, premyslenou motiváciou, konkrétnymi príkladmi a úlohami (najlepšie so stúpajúcou náročnosťou). Mal preukázať zbehlosť v práci s učebnicou a pracovnými zošitmi, s metodickou príručkou, učebnými osnovami a vzdelávacími štandardmi. Mal vedieť vysloviť a vysvetliť aké ciele (kognitívne aj afektívne) sledoval svojím postupom.

V snahe priblížiť sa reálnym podmienkam mal každý študent k dispozícii učebné osnovy, vzdelávacie štandardy, metodické príručky, učebnice a pracovné zošity.

Postrehy zo štátnych skúšok

Čo sme zistili? Zatiaľ ešte na našej katedre neprebehlo vyhodnotenie všetkých skúšajúcich (z predmetu matematika), preto tieto výsledky a postrehy majú cenu akéhosi prvotného poznania.

1. Neexistovala otázka, ktorú by nevedel zodpovedať žiaden študent

2. Úroveň teoretických vedomostí študentov nijako významne neklesla (Študenti pri prvotnom oboznámení sa s novým modelom štátnych skúšok prejavovali nadšenie, pretože sa musia menej učiť. Rýchlo zistili, že menej otázok z teórie neznamená z ich strany menšiu prípravu).

3. Problematickými otázkami (v teoretickej rovine) aj naďalej zostávajú otázky venované problematike: „*Binárne relácie*", „*Zobrazenia a funkcie*", „*Pojem prirodzeného čísla*", „*Miera úsečky*" a „*Miera rovinného útvaru*".

4. Prekvapujúco sa problematickými (vďaka didaktickej, či dokonca praktickej časti) stali otázky, ktoré študentom pripadali ľahké: „ *Výroky a výroková logika*", „*Kruh a kružnica*", „*Sčítanie prirodzených čísel*", či dokonca „*Slovné úlohy*". Pri odpovedi na tieto otázky sa potvrdilo to, že študenti sa najviac obávajú teoretickej časti. Prekvapuje ich, že môžu neuspieť v didaktike, keď teóriu zvládli.

5. Najslabším článkom celej odpovede študenta počas štátnych skúšok z matematiky bola posledná tretia praktická časť. Ani sebareflexia prípravy tejto časti nie je jednoznačná – mali sme študentku, ktorá nás presviedčala, že ešte nestihla pripraviť dokonalú ukážku vyučovacej hodiny a má iba náčrt – a nakoniec to bola dokonale premyslená ukážka aktivít, činností, príkladov a úloh. Zväčša študenti vysvetľovali, že prípravu hodiny zatiaľ nestihli napísať (o tejto forme vedeli sedem mesiacov vopred, takže ak by to nepremysleli za túto dobu, 30

minút by im asi nestačilo), ale majú ju premyslenú – čo ale, ako sme zistili, nebola pravda – zväčša mali premyslené dve - tri činnosti, ktoré spolu navyše nesúviseli a spravidla nemali ani stúpajúcu náročnosť.

Problematické boli aj motivačné príklady a úlohy:

– nesúviseli s danou témou (pesničky na využitie medzipredmetových vzťahov),

– boli zdĺhavé a odvádzali žiakovu pozornosť (matematické rozprávky o zlých princeznách a dobrých čarodejniciach spojené s úlohami a trvajúce viac ako päť minút),

– boli nereálne (most z Prešova do Humenného, ktorý meria 15cm) a pod.

Záver

Zistili sme, že:

- Študenti vnímajú teoretické a praktické poznatky značne izolovane.
- Nevedia uplatniť poznatky z pedagogiky a psychológie v odborných predmetoch – matematike (problematická formulácia cieľa, určovanie metód a foriem práce na konkrétnych činnostiach, problém s vhodnou motiváciou – neprispôsobenie sa vekovej kategórii detí).
- Nevedia premyslieť strategický postup (čo už žiaci vedia – čo môžem využiť – čo mi môže pomôcť, aká praktická zručnosť – čo ich chcem naučiť – kam mám dospieť – kde sa to uplatní v praxi, teda aký to má pre žiakov význam).

Dané zistenia chceme uplatniť v prístupe k vyučovaniu predmetov „*Didaktika matematiky*“, „*Vybrané kapitoly z matematiky*“, a tiež pri skladbe a príprave predmetu „*Tvorba počiatočných matematických predstáv*“, ktorý je zahrnutý v novom vyučovacom programe Predškolská a elementárna pedagogika.

Adresa autora:
Mgr. Blanka Tomková
KM, PF PU Prešov
17. novembra 1
081 16 Prešov
e-mail: tomkova@unipo.sk

Paradox Kréťana

Zdenko Takáč

Abstract. *The paper deals with the Cretan paradox. There are formulated the conditions that must be fulfilled, to Cretan paradox corresponded to the Liar paradox.*

Úvod

Logické paradoxy sú obľúbeným úvodom do vyučovania logiky na všetkých úrovniach - od základných škôl po vysoké školy (napr. [1]). Ich vysvetlenie sa obyčajne prispôsobuje veku a schopnostiam žiakov. Je možné o nich zmysluplne diskutovať so žiakmi základných škôl, no na druhej strane môžu robiť problémy i študentom vysokých škôl. Pochopiť podstatu niektorých paradoxov totiž vyžaduje zvládnuť netriviálnu myšlienkovú abstrakciu, ktorej objasnenie je cieľom tohto článku.

Jedným z najznámejších paradoxov je tzv. Paradox Kréťana. Tento článok vznikol na podnet [2], kde autori opisujú metódu prípustných situácií, vhodnú na vysvetlenie Paradoxu Kréťana pre deti vo veku 12 – 15 rokov. Pomocou uvedenej metódy si deti uvedomia, že Paradox Kréťana v podstate nevedie k sporu. Ukážeme, za akých predpokladov k sporu vedie.

Paradox Kréťana

Prvé písomné zmienky o Paradoxe Kréťana možno hľadať v Novom zákone, v Liste Titovi (pozri [4]):

Veď ktosi z nich, ich vlastný prorok, povedal: „Kréťania sú večni luhári, ... “

Dnes je paradox známy najmä v nasledujúcom zjednodušenom znení:

Kréťan Epimenides prehlásil: „Všetci Kréťania sú luhári.“
Povedal Epimenides pravdu alebo klamal?

Jednoduchou úvahou prídeme k záveru, že v uvedenom znení Paradox Kréťana nevedie k sporu. Ten možno dosiahnuť iba nesprávnym negovaním Epimenidesovho výroku:

„Všetci Kréťania sú pravdovravní.“ [12]

Ak sa vyhneme tejto chybe a urobíme správnu negáciu výroku (všeobecný kvantifikátor zmeníme na existenčný):

„Existujú Kréťania, ktorí sú pravdovravní.“

[12] Predpokladáme, že negáciou výroku „je luhár“ je výrok „je pravdovravný“.

zistíme, že sa nejedná o žiadny paradox. Stačí uvažovať situáciu: Epimenides klamal, t.j. existujú pravdovravní Kréťania. To nevedie k sporu, ale k záveru, že Epimenides nepatrí medzi pravdovravných Kréťanov, pritom je isté, že aspoň jeden pravdovravný Kréťan existuje.

Aby sme mohli hovoriť o skutočnom paradoxe (bez nepresnosti pri negovaní), je nutné pripustiť dva predpoklady:

1) Existujú iba dva druhy Kréťanov: pravdovravní - hovoria vždy pravdu a luhári - vždy klamú (v tom prípade je skutočne negáciou výroku „je luhár“ výrok „je pravdovravný“).

2) Epimenidesov výrok chápeme ako označenie charakteristickej vlastnosti Kréťanov, t.j. buď sú naozaj všetci Kréťania luhári, alebo naopak, všetci Kréťania sú pravdovravní (tým sa vyhneme spomínanej chybe s kvantifikátormi pri negovaní).

Uznaním uvedených predpokladov sa Paradox Kréťana vyvinul do tzv. Paradoxu luhára, ktorého podstata je zhodná, ale formulácia je jednoduchšia a jednoznačne vedie k sporu:

Kréťan Epimenides prehlásil: „Práve teraz klamem.“ [13]

V tomto prípade obidve možnosti vedú k sporu. Ak je Epimenidesov výrok pravdivý, tak je zároveň i nepravdivý. Naopak, ak je Epimenidesov výrok nepravdivý, tak je súčasne i pravdivý. V ďalšom texte sa budeme odvolávať na poslednú formuláciu Paradoxu luhára.

Navodený problém sú schopní uvedomiť si už žiaci základnej školy. Na druhej strane, v plnej miere pochopiť jeho podstatu a objasnenie je náročná úloha, určená, podľa nášho názoru, skôr pre študentov vysokých škôl.

Metasvet a metajazyk

Klasické vysvetlenie Paradoxu luhára je jednoduché: Epimenidesov výrok sa zaoberá vlastnou pravdivosťou, čo nie je možné. Výrok nemôže vypovedať sám o sebe. Vysvetlenie si študenti stredných ako i vysokých škôl rýchlo osvoja. No z našich skúseností je zrejmé, že do veci „nevidia“.

Pomôžme si nasledujúcim príkladom: uvažujme, ako funguje presadzovanie spravodlivosti v spoločnosti. Úlohou súdu je zhodnotiť konanie ľudí z určitého nadhľadu a rozhodnúť o správnosti, resp. nesprávnosti (z hľadiska dodržiavania zákonov) takéhoto konania. Súdnictvo tvorí akoby „vyššiu hladinu sveta“ okolo nás. Na základe zákonov rozhoduje o udalostiach, ktoré sa stali v „nižšej hladine sveta“.

V skutočnom, reálnom svete to takto funguje. Problém nastane, keď je sudca podozrivý z prekročenia zákona a súd má rozhodovať o správnosti konania vlastného člena. Z toho dôvodu majú sudcovia určitú imunitu a na ich potrestanie je nutné zložitejšie právne konanie. V čom spočíva tento problém? Odpoveď je jednoduchá: pomiešala sa „vyššia hladina sveta“ s „nižšou hladinou sveta“. Sudca, ktorý je podozrivý z prekročenia zákona patrí súčasne do „vyššej hladiny“ (ako sudca) i „nižšej hladiny“ (ako podozrivý).

Skúmajme súvislosť uvedeného príkladu s Paradoxom luhára. Podobne, ako v tomto príklade, i na Kréte existujú dve hladiny sveta:

1. „Nižšia hladina“ - svet, v ktorom Kréťania žijú. Tu dochádza k rôznym udalostiam. Túto hladinu budeme volať reálny svet.

[13] Uvádzame kombinovanú verziu Paradoxu Kréťana a Paradoxu luhára, aby sme zdôraznili ich vzájomnú súvislosť.

2. „Vyššia hladina“ - svet, ktorého úlohou je z nadhľadu pozorovať reálny svet, svojím vlastným jazykom opísať udalosti reálneho sveta a rozhodovať o pravdivosti, resp. nepravdivosti formulovaných výrokov. Túto hladinu budeme volať **metasvet**.

Teraz už môžeme identifikovať problém Paradoxu luhára. Epimenides, ako súčasť reálneho sveta sa svojím výrokom „povýšil“ do metasveta. Epimenides patrí do reálneho sveta, preto i každý jeho výrok musí patriť do reálneho sveta. Výrok „práve teraz klamem“, však zároveň rozhoduje o pravdivosti tohto výroku z hľadiska metasveta a na to Epimenides z pozície „nižšej hladiny“ nemá právo. Tu prichádza k miešaniu oboch hladín sveta a z príkladu so sudcami je evidentné, že to prináša problémy.

matematickú analógiu paradoxu možno v rámci výrokového počtu vyjadriť nasledovne:

Tento výrok je nepravdivý.

Jedná sa o typickú ukážku miešania jazyka a metajazyka. Je to tvrdenie, ktoré „chce“ byť súčasťou matematiky i metamatematiky. Ak vyjadríme toto tvrdenie vo formalizovanom jazyku teórie výrokového počtu:

$$A \leftrightarrow \neg A$$

dostaneme výrok (v matematike, nie v metamatematike), ktorý nevedie k sporu a nie je ani žiadnym paradoxom. Jedná sa jednoducho o nepravdivý výrok, čo možno overiť pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt.

Záver

Pre potreby tohto článku sme zvolili ako nosnú ideu Paradox Kréťana, resp. Paradox luhára. Ten zďaleka nie je jediný svojho druhu. Na záver uvedieme ešte niekoľko najznámejších podobných paradoxov (čerpané z [3]):

Sancho Panza - V druhom diele Cervantovej knihy Duchaplný rytier Don Quijote de la Mancha rieši Sancho Panza nasledujúci problém: rieka delila mesto na dve časti, cez rieku viedol jediný most. Na konci mosta stála šibenica a pán mesta vydal rozkaz: „Každý kto chce prejsť po tomto moste musí najskôr odprisahať, kde ide a čo tam bude robiť. Ak bude prisahať podľa pravdy, nech je ihneď prepustený na druhú stranu rieky. Ak však bude krivo prisahať, nech odvisne na tejto šibenici.“ Čo sa raz nestalo! Jeden človek prisahal, že prišiel iba preto, aby odvisol na šibenici pri moste.

Sudcovia uvažovali: „Ak toho muža pustíme na druhú stranu, tak nám tu práve krivo prisahal a mal by skončiť na šibenici. Ak ho obesíme, tak nám prisahal podľa pravdy a mali by sme ho slobodne pustiť na druhú stranu.“ Ako sa majú sudcovia zachovať?

Paradox krokodíla - Krokodíl uniesol dieťa a sľúbil matke, že ho vráti práve vtedy, keď pravdivo odpovie na otázku: „Vrátim dieťa?“

Matka stojí pred neriešiteľnou dilemou: ak odpovie „áno“, krokodíl dodrží svoj sľub, či už dieťa vráti alebo nevráti. Naopak, ak matka odpovie „nie“, krokodíl v žiadnom prípade svoj sľub nesplní.

Berryho paradox - Existuje prirodzené číslo, ktoré sa nedá v slovenčine opísať pomocou menej ako 30 slabík, pretože všetkých slabík a teda aj všetkých usporiadaných tridsatíc slabík je iba konečný počet. Napriek tomu vieme menej ako 30 slabikami opísať číslo: *Najmenšie prirodzené číslo neopísateľné pomocou menej než tridsiatich slabík.*

Poznamenajme, že v slovenčine sa podstata Berryho paradoxu krásne prejavuje už pri jeho formulácii. Opis čísla obsahuje 26 slabík. Keby sme nahradili slovo *tridsiatich* slovami *dvadsiatich siedmych*, počet slabík v opise by vzrástol na 28. Bolo by teda nutné zmeniť slová *dvadsiatich siedmych* na *dvadsiatich deviatich*, ale tým by počet slabík vzrástol na 29.

Sokratov výrok - „Viem, že nič neviem.“

Literatúra

[1] Gunčaga, J.: *Limitné procesy z didaktického hľadiska.* Rigorózna práca, KU, Ružomberok 2004.

[2] Snohová, D. – Snoha, Ľ.: *Paradox Kréťana a metóda prípustných situácií.* Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 2/2003 (32), s. 1-10.

[3] Sochor, A.: *Klasická matematická logika.* Karolinum, Praha, 2001.

[4] *Sväté písmo.* Spolok svätého Vojtecha, Trnava, 1998.

Adresa autora:
RNDr. Zdenko Takáč
Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita v Ružomberku
Nám. A. Hlinku 1652/1
034 01 Ružomberok
e-mail: takac@fedu.ku.sk

Priestorová predstavivosť a jej význam vo vyučovaní matematiky

Viera Uherčíková

Abstract. *Space imagination plays very important role in our life. It is united with effective learning, development of person and with successfulness in life at all. But in the first years of primary school there is not enough attention for space imagination. This situation should be refined, because it is one of the reasons for problems in geometry during all school study. Space imagination is not inborn. But it could be obtained by didactic games, puzzles and proper educational tools.*

Súčasná spoločnosť kladie zvýšené požiadavky na žiakov a študentov v záujme čo najúspešnejšieho profesionálneho uplatnenia. Máme preto snahu či už ako rodičia alebo učitelia rozvíjať už od útleho veku dieťaťa schopnosti, ktoré bude v živote určite potrebovať pri zvládaní rôznych životných situácií. Jednou z takýchto dôležitých schopností je práve priestorová predstavivosť. Významnosť uvedenej problematiky výstižne potvrdzujú aj slová, Alberta Einsteina: „Predstavivosť je dôležitejšia ako vedomosť".

Vnímanie priestoru, orientácia v priestore, priestorová predstavivosť – to sú témy, ktoré fascinujú vedcov, umelcov, literátov a pod. Zrejme v tom hrá úlohu dôležitosť, významnosť týchto tém nielen pre vedu, umenie, vzdelanie, ale pre život každého z nás vôbec. Veď s dobrou priestorovou predstavivosťou súvisí napr. schopnosť dobre zaparkovať auto, rozmiestniť nábytok v byte, má význam v rôznych povoleniach, v športe a pod.

Anglický antropológ a matematik poľského pôvodu J. Bronowski píše: „...ľudský tvor má rad jedinečných schopností, ale tou najzákladnejšou je umenie robiť závery o nevidenom na základe videného, dokázať sa preniesť v mysli cez priestor a čas. Táto schopnosť je skutočným prameňom našich vedomostí...".

O závažnosti danej témy hovorí aj fakt, že priestorová predstavivosť, resp. schopnosť vnímania priestoru je uznávaná ako jedna zo súčastí globálnej inteligencie človeka. Napr. aj H. Gardner uvádza v rámci teórie multiplikačnej inteligencie priestorovú inteligenciu ako samostatný faktor. Uvedený autor zdôrazňuje, že priestorová inteligencia je vlastne schopnosť vytvárať si v mysli obrazy, uchovávať ich a znovu si ich vybavovať. Pričom tvrdí, že ukladať si informácie touto cestou je efektívnejšie pre zapamätanie u väčšiny ľudí, než zapamätanie len pomocou slov. Podľa neho je jeden obraz hodnovernejší ako tisíc slov. Predstavivosť je mimoriadne dôležitá pri zapamätávaní, teda aj pri učení sa. Predstavuje základ všetkých tvorivých schopností. /5/

J. A. Komenský píše: „Mať vedomosti znamená vedieť niečo zobraziť, či už myšlienkou, rukou či jazykom... Všetko totiž má svoj pôvod v zobrazovaní, t. j. vo vytváraní podôb a obrazov skutočných vecí."

Predstavivosť je predpokladom a základom tvorivosti. Bez geometrickej predstavivosti nie je možná technická tvorivosť, bez obrazotvornosti nie je možná tvorba ničoho nového.

K významu priestorovej predstavivosti v živote človeka, ako aj jej dôležitosti pri výučbe matematiky, menovite geometrie autori Z. Pulpán, F. Kuřina a V. Kebza vo svojej významnej publikácii „O představivosti a její roli v matematice" uvádzajú:

„V bežnom živote chápeme **predstavivosť** ako schopnosť vytvárať a vybavovať si predstavu. **Predstava** je potom obraz vytvorený v mysli na základe predchádzajúceho vnemu rozumovou činnosťou alebo na základe skúseností.

Predstavivosť sa často chápe geometricky ako schopnosť vybavovať si obrazy telies alebo geometrických útvarov, ktoré majú určité vlastnosti. To je ale zúžené poňatie. Psychologické poňatie predstavivosti je podstatne širšie a zohľadňuje úlohu, ktorú zohráva predstavivosť v živote človeka. M. Hejný upozornil na skutočnosť, že niektorí autori hodnotia úroveň predstavivosti ako významný faktor úrovne úspešnosti človeka v spoločnosti. Ak má teda predstavivosť vplyv na možnosti rozvoja a uplatnenia človeka v spoločnosti, musí škola dôsledne dbať o rozvíjanie predstavivosti u žiakov.

Priestorová predstavivosť teda zohráva významnú úlohu aj v škole a osobitnú úlohu má pri zvládaní geometrie. F. Kuřina charakterizuje geometrickú predstavivosť ako súhrn schopností, ktoré sa týkajú našich predstáv o tvaroch a vzájomných vzťahoch medzi geometrickými útvarmi v priestore. /8/

Ak bude našim zámerom, aby sa už dieťa naučilo orientovať sa v priestore a budeme dbať o rozvíjanie jeho priestorovej predstavivosti, tieto schopnosti využije nielen v geometrii, ale v živote vôbec.

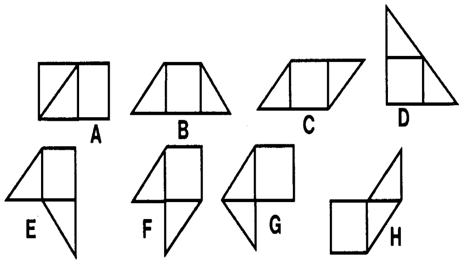
Z uvedeného vyplýva význam a dôležitosť zaoberania sa problematikou rozvíjania priestorovej predstavivosti. Geometrickú predstavivosť človek nemá vrodenú. Čo je ale potešiteľné, geometrická predstavivosť, ako aj priestorová predstavivosť vôbec je ovplyvniteľná skúsenosťou a dá sa „natrénovať". V literatúre možno nájsť množstvo námetov na rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Úspešná je napr. príručka J. Brinckovej: Didaktická hra v geometrii, ako aj publikácie uvedené v literatúre /2/, /3/, /6/, /8/, /9/ a ďalšie.

Riešenie zaujímavých úloh na rozvíjanie priestorovej predstavivosti napomáha získať lepšie výsledky v geometrii, riešenie geometrických úloh zlepšuje priestorovú predstavivosť. Problémy s geometriou totiž zaznamenávame od základnej až po vysokú školu. Určite veľkú príčinu zohráva aj jej nedostatočné vyučovanie na I. stupni ZŠ. V rámci materskej školy sa dbá pri jednotlivých činnostiach detí na rozvíjanie orientácie v priestore, ako aj priestorovej predstavivosti. V l. a 2. ročníku ZŠ je ale minimum hodín geometrie, teda nastáva prestávka, ktorá sa už vlastne nikdy nedoženie. Pritom práve toto obdobie je podľa J. Piageta veľmi vhodné na cieľavedomé rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Geometrické učivo by sa dalo pripraviť pre túto vekovú kategóriu didakticky atraktívne, prostredníctvom didaktických hier, zaujímavých učebných pomôcok, stavebníc, hlavolamov. Vhodne pripravené úlohy môžu rozvíjať priestorovú predstavivosť detí, ich logické a tvorivé myslenie a môžu prispieť k motivácii detí pre matematiku vôbec. Konkrétne vhodné úlohy sú citované z publikácií /2/, /8/ a /3/.

Publikácia /2/:
Úloha č. 18: Hra „Ukáž čo vieš"

Vymodelujte z dvoch najmenších zhodných trojuholníkov skladačky Tangram a štvorca rôzne mnohouholníky prikladaním celých zhodných strán k sebe. Nakreslite si ich do štvorcovej siete a porovnajte ich obsahy. Pokúste sa nájsť všetky riešenia.

Riešenie:



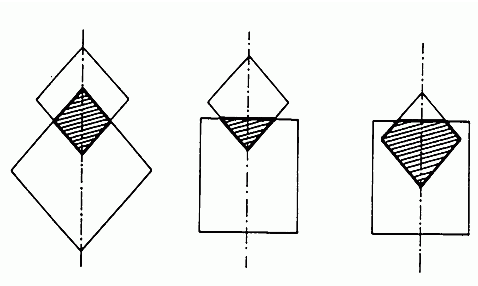
Publikácia /8/:
Úloha č. 1: Nakreslite dva štvorce tak, aby ich prienikom (spoločnou časťou) bol

a) štvorec

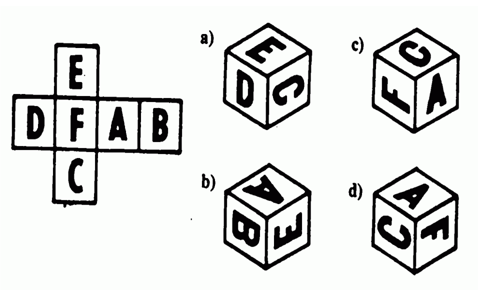
b) trojuholník

c) päťuholník

Riešenie:

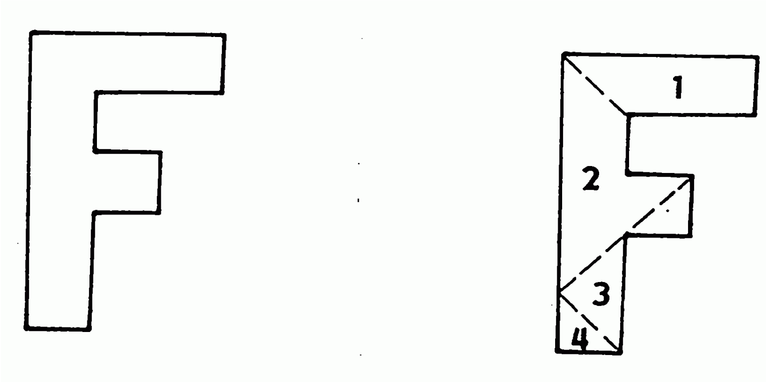


Publikácia /3/:
Úloha č. 2: V tejto úlohe sú nahradené body na hracej kocke písmenami abecedy. Na obrázku sú rozložené steny kocky s písmenami a štyri kocky *a, b, c, d*, z ktorých iba jedna zodpovedá tej, čo je rozložená v podobe kríža. Viete, ktorá je to kocka?



Riešenie: b)

Úloha č. 3: Rozrežte písmeno F na obrázku tak, aby sa z častí dal zostaviť štvorec.
Riešenie:



Uvedenou problematikou sa zaoberáme v rámci doktorandských prác, ako i diplomových prác budúcich učiteľov, poslucháčov FMFI UK v Bratislave. Pri svojich výskumoch zistili, že v geometrii dosahujú naozaj významne lepšie výsledky žiaci, ktorí sa od útleho veku zaoberali spomenutými typmi hier, ako sú hlavolamy, stavebnice a pod. Autor J. Brierley v /1/ upozorňuje na rozdiely medzi dievčatami a chlapcami, čo sa týka priestorovej predstavivosti. Vysvetľuje to o. i. práve iným typom hračiek, ktoré sú pre deti zaujímajú v útlom veku. Skutočnosť, že sa chlapci hrajú viac so stavebnicami, ovplyvňuje aj ich lepšiu priestorovú predstavivosť.

Na záver teda možno povedať, že rozvíjanie priestorovej predstavivosti zohráva v živote dôležitú úlohu. Vplýva na celkový rozvoj osobnosti žiakov, súvisí s ďalšími schopnosťami, s efektívnym učením, so zvládaním životných situácií každodenného života, s úspešnosťou v živote. Malo by byť preto naším dôležitým záujmom a cieľom, aby sa situácia vo vyučovaní geometrie na I. stupni ZŠ zlepšila. Umožnili by sme tým a zároveň dopriali deťom získať schopnosti, ktoré potrebujú nutne pre svoju úspešnosť pri uplatnení sa v spoločnosti, pri profesijnej orientácii, v živote vôbec a samozrejme aj v matematike, ktorá k životu a pozitívnemu riešeniu problémových situácií nevyhnutne patrí.

Literatúra

[1] Brierley, J. (1996): *7 prvních let života rozhoduje*, Praha, nakladatelství PORTÁL

[2] Brincková, J. (1996): *Didaktická hra v geometrii*, Bratislava, DONY

[3] Goga, M. (1992): *Vieš, uhádneš hlavolamy*, Bratislava, VIDEOPRESS

[4] Komenský, J., A. (1991): *Veľká didaktika, Didactica magna*, Bratislava, SPN

[5] Laznibatová, J. (1992): *Výsledky psychologického vyšetrenia priestorovej predstavivosti detí na I. st. ZŠ*, Bratislava, DONY

[6] Novomeský, Š., Križalkovič, K., Lečko, I. (1971): *777 matematických zábav a hier*, Praha, SPN

[7] Piaget, J., Inhelderová, B. (1997): *Psychologie dítěte*, Praha, PORTÁL

[8] Půlpán, Z., Kuřina, F., Kebza, V. (1992): *O představivosti a jeji roli v matematice*, Praha, ACADEMIA

[9] Uherčíková, V., Haverlík, I. (1999): *Rozvíjanie základných matematických predstáv*, Bratislava, Predškolská výchova č. 3,4,5, roč. LIII

Adresa autora:
Doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@centrum.sk

Aplikácie infinitezimálneho počtu v inžinierskych predmetoch

Alena Vagaská

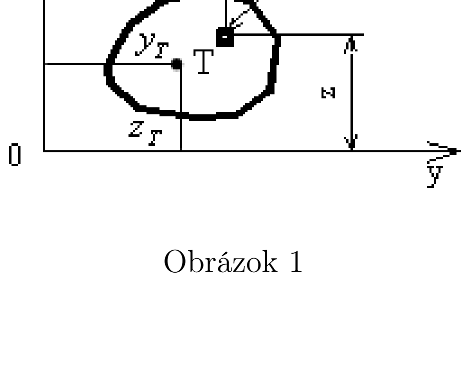
Abstract. *In this paper are described applications of the infinitesimal calculus to engineering subjects.*

Úvod

Súčasné potreby vyučovania matematiky na fakultách TU sa odzrkadľujú hlavne v požiadavkách na aplikovateľnosť poznatkov z matematiky v iných odborných predmetoch a v technickej praxi a taktiež v snahe eliminovať absenciu motivačných, aplikačných a problémových úloh na cvičeniach z matematiky (Vagaská, 2003). K prehĺbeniu aplikačného charakteru matematiky na technických univerzitách, čo je jeden z aspektov súčasnej modernizácie vyučovania matematiky (Fulier, 2001), prispieva svojim obsahom tento článok. Ide vlastne o didaktickú transpozíciu niektorých aplikácií infinitezimálneho počtu v inžinierskom predmete pružnosť a pevnosť.

Aplikácie integrálneho počtu pri určovaní geometrických charakteristík priečnych rezov prútov

Pevnosť, tuhosť a teda únosnosť konštrukčných častí (prútov) pri niektorých druhoch namáhania závisí nielen od materiálu a veľkosti, ale aj od tvaru plochy priečneho rezu. Tvar a rozloženie plochy priečneho prierezu prúta v *pružnosti a pevnosti* popisujú geometrické charakteristiky plochy priečneho prierezu prúta: statické momenty S_y, S_z; kvadratické momenty J_y, J_z; deviačný moment D_{yz}, kvadratické polomery prierezu a moduly prierezu v ohybe a krute. Pri ich výpočte je potrebné aplikovať poznatky z integrálneho počtu funkcie jednej a viac premenných. V riešených príkladoch poukážem na určité rozdiely v spôsobe výpočtu niektorých geometrických charakteristík v matematike v porovnaní s výpočtami v pružnosti a pevnosti. Plochu A(obsah), statické momenty, kvadratické momenty a deviačný moment určujú v *pružnosti a pevnosti* vzťahy (1), kde dA je element plochy.



Obrázok 1

$$\begin{array}{lll} A = \int_A dA & A = \sum A_i & [mm^2] \\ S_y = \int_A z\,dA & S_y = \sum zA_i & [mm^3] \\ S_z = \int_A y\,dA & S_z = \sum y\,A_i & [mm^3] \\ J_y = \int_A z^2 dA & J_z = \int_A y^2 dA & [mm^4] \\ D_{y,z} = \int_A yz\,dA & & [mm^4] \end{array} \tag{5}$$

Na rozdiel od *pružnosti a pevnosti* sa v matematike osi karteziánskeho súradnicového systému v rovine väčšinou označujú x, y a tak aj statické momenty a momenty zotrvačnosti sa označujú S_x, S_y a I_x, I_y. V matematike uvažujeme v rovine o hmotnej oblasti A (sústava hmotných bodov) s plošnou hustotou $\sigma(x)$(hmotnosť pripadajúca na jednotkovú plochu) a tak statický moment k osi x, resp. y sa napr. pomocou dvojného integrálu definuje takto:

$$S_x = \iint_A \sigma\,(x) y\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \sigma(x) y\,dy \right) dx \quad \left[mm^3\right] \tag{6}$$

$$S_y = \iint_A \sigma\,(x) x\;dxdy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \sigma(x) x\,dy \right) dx \quad \left[mm^3\right] \tag{7}$$

Ak vo vzťahoch (2), (3) položíme $\sigma(x) = \text{konšt.} = 1$, tak dostávame vzťahy pre statické momenty prierezu plochy, aké sa využívajú v *pružnosti a pevnosti* (kde uvažujeme homogénny materiál). Ďalej sú rozdiely v značení násobných integrálov v odborných predmetoch. Napr. obsah plochy A by sme v matematike vyjadrili takto

$$A = \iint_{(A)} dxdy \quad \left[mm^2\right] \tag{8}$$

pričom v pružnosti a pevnosti sa obsah plochy zjednodušene zapíše ako

$$A = \int_{(A)} dA, \tag{9}$$

pričom sa tu používa pojem <u>elementárna</u> plocha dA, alebo element plochy. Podobne objem by sme v matematike zapísali takto

$$V = \iiint_{(V)} dxdydz \quad \left[mm^3\right] \tag{10}$$

pričom v technických predmetoch sa objem zapíše vzťahom

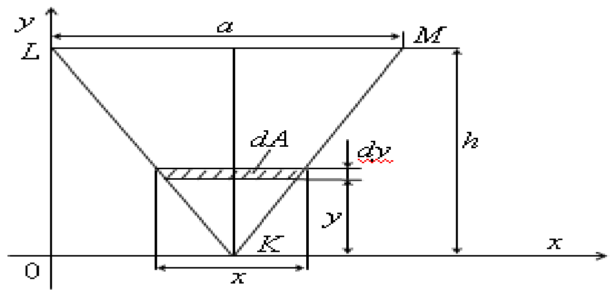
$$V = \int_{(V)} dV, \tag{11}$$

opäť sa tu používa pojem <u>elementárny</u> objem dV, objemový element. Takýto zjednodušený zápis nájdeme v odbornej literatúre, napr. v (Trebuňa, 2000). Toto stručné označenie pre viacnásobné integrály je v súlade s označením, ktoré uvádza aj významný matematik K. Rektorys v (Rektorys, 1974), kde čítame: $\int\limits_G u(x)dx$ je stručné označenie pre násobný integrál $\int \ldots \int\limits_G u(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$, pre $n = 1$ $\int\limits_G u(x)dx = \int\limits_a^b u(x)dx$.

V predmete pružnosť a pevnosť je potrebné poznať geometrické charakteristiky pre jednoduché plochy prierezu a na základe toho potom vedieť určovať ťažisko zložených plôch. Preto si uvedieme príklady na výpočet geometrických charakteristík prierezu aj u jednoduchých plôch.

Príklad 1: Určte súradnice ťažiska homogénnej rovinnej oblasti v tvare rovnoramenného trojuholníka (obr.2) výpočtom cez statické momenty a) pomocou dvojného integrálu b) pomocou vhodne zvolenej elementárnej plôšky.

$$\Delta KLMK\left(\frac{a}{2}, 0\right), \ L(0,h), \ M(a,h)$$



Obrázok 2

Riešenie:

a) Na popis elementárnej oblasti A potrebujeme rovnice priamok $\overline{KL}$ a $\overline{KM}$. Ich všeobecné rovnice môžeme určiť viacerými spôsobmi, napr. aj pomocou determinantov

$$\overline{KL}: \ \frac{\overline{KX}}{\overline{KL}} \begin{vmatrix} x - \frac{a}{2} & y \\ -\frac{a}{2} & h \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{a}{2}\frac{h-y}{h},$$

$$\overline{KM}: \ \frac{\overline{KX}}{\overline{KM}} \begin{vmatrix} x - \frac{a}{2} & y \\ \frac{a}{2} & h \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{a}{2}\frac{h+y}{h}$$

Potom elementárnu oblasť A možno výhodnejšie popísať ako oblasť typu $[y, x]$

$$A\,[y,x] : 0 \le y \le h$$
$$\tfrac{a}{2}\tfrac{(h-y)}{h} \le x \le \tfrac{a}{2}\tfrac{(h+y)}{h}$$

Vo zvolenom súradnicovom systéme s osami x, y pre súradnice ťažiska $T(x_T, y_T)$platí:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{S_y}{A} = \frac{\iint\limits_A y\,dxdy}{\iint\limits_A dxdy} = \frac{\int\limits_A y\,dA}{\int\limits_A dA} \qquad [mm] \\ y_T &= \frac{S_x}{A} = \frac{\iint\limits_A x\,dxdy}{\iint\limits_A dxdy} = \frac{\int\limits_A x\,dA}{\int\limits_A dA} \qquad [mm] \end{aligned} \tag{12}$$

Keďže je známe, že ťažisko leží na osi symetrie, pre súradnicu x_T dostávame $x_T = \frac{a}{2}$. Súradnicu y_T vypočítame pomocou vzťahu (8), preto si vypočítame S_x a obsah plochy A.

$$S_x = \iint\limits_A y\,dxdy = \int\limits_0^h \left(\int\limits_{\frac{a}{2}\frac{(h-y)}{h}}^{\frac{a}{2}\frac{(h+y)}{h}} y\,dx \right) dy = \int\limits_0^h y\,[x]_{\frac{a}{2}\frac{(h-y)}{h}}^{\frac{a}{2}\frac{(h+y)}{h}} dy = \frac{a}{2}\int\limits_0^h \frac{y}{h} 2y = \frac{a}{h}\int\limits_0^h y^2 dy = \frac{ah^2}{3}$$

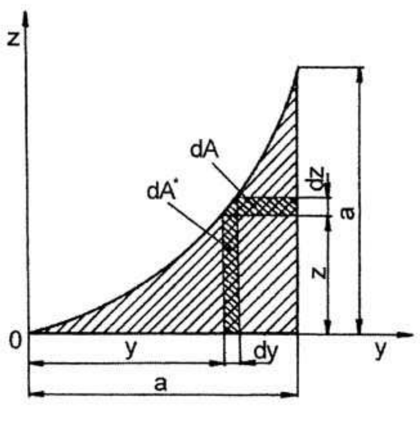
$$A = \iint\limits_A dxdy = \int\limits_0^h \left(\int\limits_{\frac{a}{2}\frac{(h-y)}{h}}^{\frac{a}{2}\frac{(h+y)}{h}} dx \right) dy = \frac{a}{2h}\int\limits_0^h 2y\,dy = \frac{ah}{2}$$

(resp. obsah ΔABC možno vypočítať aj cez vzťah $A = \frac{zv}{2} = \frac{ah}{2}$), potom $y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{2}{3}h$.
b) Zvolíme si elementárnu plôšku dA rovnobežnú s osou x (zakreslenú na obr. 2), ktorú považujeme za obdĺžnik s rozmermi x, dy. Veľkosť vyznačenej elementárnej plôšky je $dA = x\,dy$. Z podobnosti trojuholníkov (pôvodného a po vyznačenú plôšku) platí:

$a : x = h : y \quad \Rightarrow x = \frac{a}{h}y$, potom $dA = \frac{a}{h}y, dy$. Po dosadení do vzťahu (8) pre y_T dostaneme: $y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_0^h y\,dA}{\int_0^h dA} = \frac{\frac{a}{h}\int_0^h y^2 dy}{\frac{a}{h}\int_0^h y\,dy} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h.$

Príklad 2

Určte súradnice ťažiska plochy A (obr. 3) vymedzenej priamkami $z = 0$, $y = a$ a parabolou $z = \frac{y^2}{a}$. Parameter $a = 0,1\ m$. Výpočet preveďte pomocou a) dvojného integrálu, b) pomocou vhodne zvolenej elementárnej plôšky dA.



Obrázok 3

<u>Riešenie:</u> a) Elementárnu oblasť A môžme popísať systémom nerovností:

$$A\,[y,z]: \begin{array}{l} 0 \le y \le a \\ 0 \le z \le \frac{y^2}{a} \end{array}$$

Obsah plochy je: $A = \iint\limits_A dydz = \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\frac{y^2}{a}} dz \right) dy = \int\limits_0^a [z]_0^{\frac{y^2}{a}} dy = \int\limits_0^a \frac{y^2}{a} dy = \frac{a^2}{3}$.

Pre statické momenty platí

$$S_y = \iint\limits_A z\,dydz = \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\frac{y^2}{a}} z\,dz \right) dy = \int\limits_0^a \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{y^2}{a}} dy = \int\limits_0^a \frac{y^4}{2a^2} dy = \frac{a^3}{10},$$

$$S_z = \iint\limits_A y\,dydz = \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\frac{y^2}{a}} y\,dz \right) dy = \int\limits_0^a y \left(\frac{y^2}{a} - 0 \right) dy = \left[\frac{y^4}{4a} \right]_0^a = \frac{a^3}{4}$$

Súradnice ťažiska $T(y_T, z_T)$ prierezovej plochy A určíme na základe vzťahov $y_T = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2}{3}} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{40}\text{m}$, $z_T = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{a^3}{10}}{\frac{a^2}{3}} = \frac{3}{10}a = \frac{3}{100}\text{m}$

b) Zvolíme si elementárnu plôšku dA^* rovnobežnú s osou z (čo je obdĺžnik s rozmermi z, dy) $dA^* = z\,dy = \frac{y^2}{a}dy$. Obsah plochy je$A = \int\limits_A dA = \int\limits_0^a \frac{y^2}{a}dy = \left[\frac{y^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}$.

Pre statický moment S_y si zvolíme s výhodou elementárnu plôšku dA rovnobežnú s osou y, čo je obdĺžnik s rozmermi $(a - y)$, dz; $dA = (a - y)dz = (a - y)\frac{2y}{a}dy$. Tu sme dz vyjadrili z diferenciálneho označenia derivácie funkcie $z = \frac{y^2}{a}$ podľa premennej y, takže $\frac{dz}{dy} = \frac{2y}{a} \quad \Rightarrow dz = \frac{2y}{a}dy$. Statický moment S_y určíme zo vzťahu (1) $S_y = \int\limits_A z\,dA = \int\limits_0^a \frac{y^2}{a}(a - y)\frac{2y}{a}dy = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a (ay^3 - y^4)dy = \frac{a^3}{10}$. Pre statický moment S_z s výhodou využijeme elementárnu plôšku dA^* rovnobežnú s osou z, takže podľa vzťahu (1) pre S_z platí: $S_z = \int\limits_A y\,dA = \int\limits_0^a y\frac{y^2}{a}dy = \left[\frac{y^4}{4a}\right]_0^a = \frac{a^3}{4}$. Súradnice ťažiska $T(y_T, z_T)$ prierezovej plochy A sú $y_T = \frac{S_z}{A} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{40}\text{m}$ a $z_T = \frac{S_y}{a} = \frac{3}{10}a = \frac{3}{100}\text{m}$.

Záver

V predmete *pružnosť a pevnosť* sa statické momenty, súradnice ťažiska a kvadratické momenty prierezu (plochy) A väčšinou nepočítajú cez viacnásobné integrály, ako to študentov učíme na matematike, ale cez vhodne zvolenú elementárnu plôšku dA, ktorú si volíme v závislosti od tvaru plochy a od toho, ku ktorej osi statický, resp. kvadratický moment počítame. Ak počítame napr. S_y, J_y, tak výhodne volíme elementárnu plôšku dA rovnobežnú s osou y, ak počítame S_z, J_z, tak výhodne volíme elementárnu plôšku rovnobežnú s osou z. Vzhľadom na medzipredmetové vzťahy príklady poukázali na odtrhnutosť a izolovanosť vo vyučovaní matematiky a odborných predmetov, pretože na výpočet tých istých veličín učíme študentov na hodinách matematiky iné postupy, ako tie, ktoré sa zaužívali a praktizujú v odborných predmetoch.

Literatúra

[1] Fulier, J. 2001. *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy.* Nitra: FPV UKF v Nitre, 2001. 177 s. ISBN 80-8050-418-0

[2] Rektorys, K. 1974. *Variačné metódy v inžinierskych problémech a v problémech matematické fyziky*. Praha: SNTL, 1974. 602 s.

[3] Trebuňa, F. – Šimčák, F. – Jurica, V. 2000. *Príklady a úlohy z pružnosti a pevnosti I*. Košice: Vienala, 2000. 314 s. ISBN 80-7099-593-9

[4] Vagaská, A. 2003. *Niektoré špecifiká vyučovania matematiky na fakultách technických univerzít*. Dizertačná práca. FPV UKF v Nitre, Nitra 2003. Obhajoba: február 2004.

Adresa autora:
PaedDr. Alena Vagaská, PhD.
Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky
Fakulta výrobných technológií TU v Košiciach
Bayerova 1
080 01 Prešov
e-mail: vagaska.alena@fvt.sk

Riešenie stereometrických úloh v programe Cabri 3D

Dušan Vallo

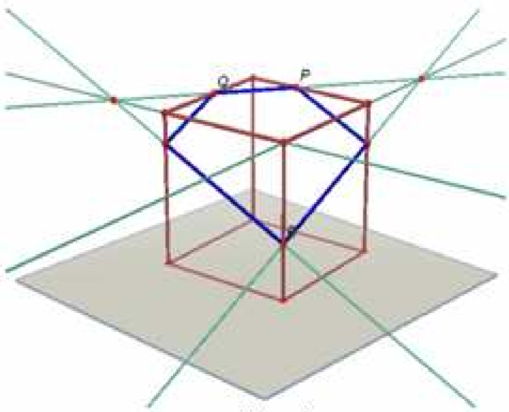
Abstract. *In this article we try to show how to effectively use interactive geometry software Cabri 3D.*

Priestorová predstavivosť je fenomén založený nielen na skúsenostiach, ale aj systematickom štúdiu priestorových zákonitostí v škole. Cieľavedomá výučba geometrie začína už v 2. ročníku základnej školy a postupne pokračuje až po úroveň vysokoškolského vzdelávania. Jednou z najvyšších foriem priestorovej predstavivosti je schopnosť predstavovať si geometrické útvary, vzťahy medzi nimi na základe ich modelov, prestavovať si geometrické útvary v najrôznejších vzájomných vzťahoch, dokonca i takých, do ktorých nemôžu byť v reálnych modeloch prevedené. Tento „nedostatok“ materiálnych pomôcok a modelov sa dá pomerne ľahko prekonať pomocou dynamického geometrického programu Cabri 3D.

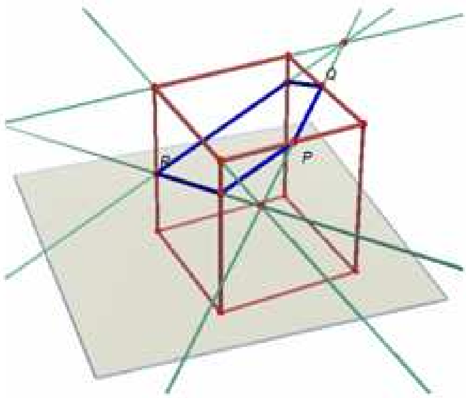
V nasledujúcich riadkoch sa sústredíme najmä na didaktický aspekt a prezentáciu riešenia jednotlivých ukážkových úloh a príkladov v gymnaziálnom učive stereometrie, samotný postup riešenia bude z priestorových dôvodov vynechaný.

Príklad 1. Body P, Q, R sú vnútorné body hrán *HG, EH, BF* kocky *ABCDEFGH.* Zostrojte rez kocky rovinou *PQR.*

Ide o jednoduchý a veľmi názorný príklad, na ktorom naznačíme použiteľnosť programu Cabri 3D. Hlavnou výhodou je, že máme možnosť „manipulácie“ s kockou *ABCDEFGH* a jej rezom, program umožní vidieť rez z viacerých pohľadov, prípadne v iných projekciách.



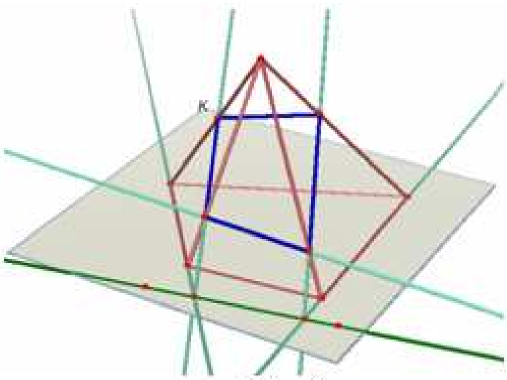
Obr. 1a
Klasické riešenie- obraz kocky a rezu vo *VRP*



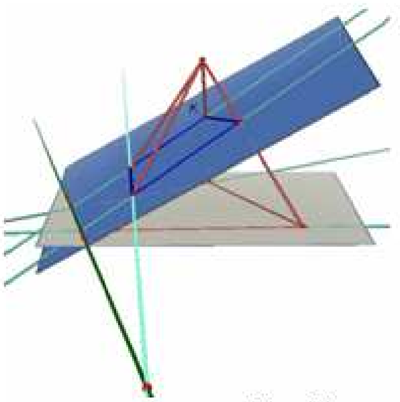
Obr. 1b
Klasické riešenie- iný pohľad

Príklad 2. V rovine podstavy ihlana $ABCDV$ je daná priamka p a vnútri hrany DV bod K. Zostrojte rez ihlana rovinou pK.

Príklady tohto zadania patria k náročnejším, pretože k zostrojeniu rezu využíva vlastnosti vrcholovej afinity. Najčastejším problémom, s ktorým sa študenti ťažšie vyrovnávajú, spočíva v neschopnosti „vidieť “ priamku p v rovine postavy.



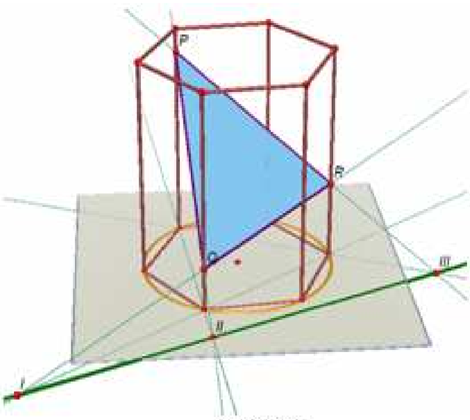
Obr. 2a


Obr. 2b
Naznačená rovina rezu

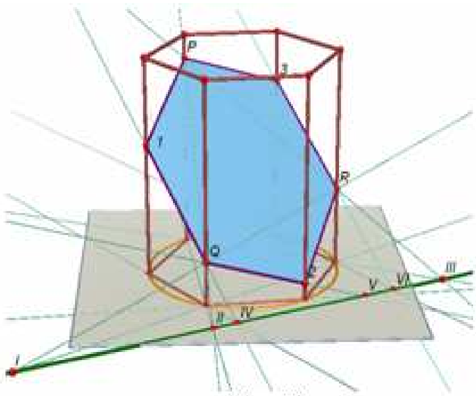
Pri konštrukcii rezov hranolov sa často využívajú vlastnosti afinity dvoch rovín.

Príklad 3. Na hranách *AA', CC', EE'* pravidelného šesťbokého hranola *AA'BB'CC'DD'EE'FF'* sú postupne vyznačené body *P, Q, R.* Zostrojte rez hranola rovinou *PQR.*

Ako je naznačené na obr. 3a , určíme priesečnicu roviny rezu s podstavou. Konštrukcia ďalších bodov je založená práve na vlastnosti afinity medzi oboma rovinami.

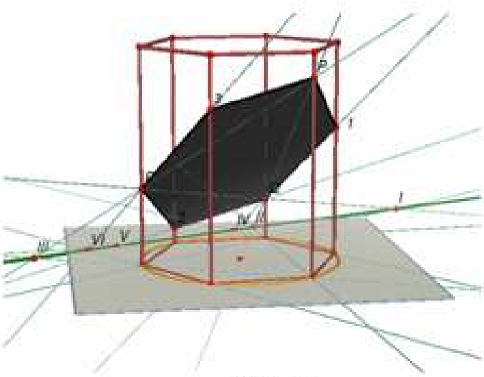


Obr. 3a
Kvôli názornosti je vyznačený trojuholník PQR

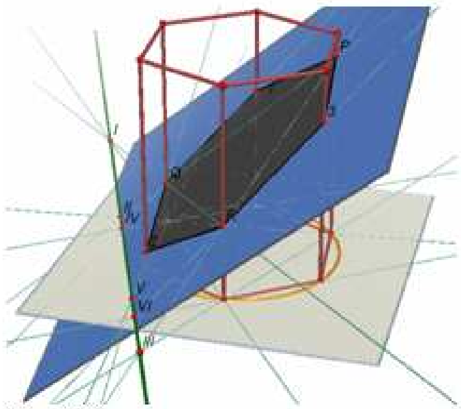


Obr. 3b
Vyznačený rez hranolom

Rezy z iných pohľadov



Obr. 3c



Obr. 3d

Záver

Na niekoľkých klasických stereometrických úlohách sme sa pokúsili demonštrovať využitie interaktívneho geometrického programu Cabri 3D. Domnievame sa, že ide o veľmi efektívny nástroj, ktorého zaradenie do výučby matematiky, nielen na stredných školách, môže výrazne prospieť rozvoju priestorovej predstavivosti, schopnosti abstrakcie a myšlienkových operácií s priestorovým usporiadaním objektov. Motivačný činiteľ takéhoto použitia je tiež neprehliadnuteľným aspektom výchovno-vzdelávacej práce v pedagogickom procese.

Literatúra

[1] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky*, SPN Bratislava, 1989. ISBN 80-08-00014-7

[2] Šedivý, O.: *Geometria II*, SPN, Bratislava, 1987.

[3] Šedivý, O.: , Rumanovská, H.: *Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti*, In: Zborník pedagogickej fakulty v Nitre, *Matematika 4*, PF Nitra, 1988.

[4] Svitek, V.: *Úvod do stereometrie*, SPN, Bratislava, 1954.

[5] Božek, M.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií. Základy geometrie v priestore*, SPN, Bratislava, 1994. ISBN 80-08-02326-0

Adresa autora:
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky FPV UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: dvallo@ukf.sk

Didaktická hra vo vyučovaní matematiky

Peter Vankúš

Abstract. *This article analyses usage of didactic games during mathematics' education at primary schools. Author speaks about his personal experience and experiments with didactic games and considers various details from methodology of didactic games as element of mathematics' education.*

V tomto článku chceme čitateľovi priblížiť naše skúsenosti z používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky na druhom stupni ZŠ. Táto téma nie je vybraná náhodne. V súčasnosti sa v rámci modernizácie vzdelávania kladie veľký dôraz na zlepšenie kvality žiackej motivácie a pocitového prežívania počas edukácie. Chceme, aby sa žiaci učili s chuťou a potešením, nie pod hrozbou trestu za zlé výkony. Zaujatie žiakov pre prácu na hodine tiež rieši mnohé problémy s disciplínou počas vyučovacieho procesu, ktoré sa vyskytujú u žiakov nestotožnených s cieľmi vyučovacej hodiny. Jedným z možných prostriedkov na dosiahnutie týchto výziev modernej edukácie sú didaktické hry. Autor článku sa už dlhšie obdobie venuje aplikácii didaktických hier vo vyučovaní matematiky a výskumu efektívnosti takéhoto vyučovania. Skúsime čitateľovi prezentovať niektoré otázky, ktoré boli počas tohto výskumu nastolené, ako aj naše odpovede na ne.

Snáď základné otázky týkajúce sa používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky sú: Existujú didaktické hry vhodné na zaradenie do vyučovania matematiky? Ak áno, bude vyučovanie prostredníctvom takýchto hier efektívnejšie, t.j. budú didaktické hry prínosom pre edukačný proces? Ak je odpoveď na predošlé otázky kladná, ako treba postupovať pri aplikácii hier vo vyučovaní? Bude takéto vyučovanie namáhavejšie ako doterajšie klasické, dá sa to zvládnuť v rámci časových plánov a tematických osnov…?

Kým prejdeme k odpovediam na ponúknuté otázky objasníme si základné pojmy, ktoré používame. Sú to najmä pojmy *didaktická hra* a *efektívnosť vyučovania.*

Pod **didaktickou hrou** rozumieme aktivitu žiakov, ktorá im na jednej strane prináša radosť a potešenie, na druhej strane realizuje stanovené ciele vzdelávania. Treba obzvlášť zdôrazniť druhú časť tejto definície. Didaktická hra nesmie byť samoúčelnou aktivitou, jej hlavným cieľom je realizovať tie isté vzdelávacie ciele ako v klasickom vyučovaní, ale v prostredí pre deti priateľskom a motivujúcom. Každá didaktická hra preto má tieto zložky (pozri Trenčanský, 2001, Spagnolo – Čižmár, 2003):

- Prostredie hry
- Ciele hry
- Aktivity žiakov a učiteľa, determinované pravidlami hry
- Záverečné vyhodnotenie

Interakcia medzi žiakmi a **prostredím hry** musí žiakov motivovať k činnosti, ktorá vedie k realizácii **cieľov hry**. Samotná hra a jej ciele musia viesť k **realizácii vzdelávacích cieľov**. Tejto požiadavke je prispôsobená forma hry, jej náplň aj priebeh.

Aktivity žiakov a učiteľa, riadené pravidlami hry, musia byť pre žiakov atraktívne a motivujúce. Tieto aktivity majú byť primerané veku žiakom, ich schopnostiam a záujmom. **Pravidlá hry** popisujú formu, náplň, priebeh a organizáciu didaktickej hry. Pravidlá hry obsahujú hravé elementy (súťaživosť medzi družstvami, snahu prísť na riešenie problému a pod.).

Záverečné vyhodnotenie hry overuje mieru dosiahnutia cieľov hry. Jeho úlohou je tiež odmeniť žiakov a motivovať ich pre budúce aktivity. (Z pohľadu učiteľa dôležitejšie ako dosiahnutie cieľov hry je zhodnotenie dosiahnutia vzdelávacích cieľov. Takéto zhodnotenie môže byť urobené na základe pozorovania žiakov, resp. výsledkov žiakov v ďalších aktivitách súvisiacich s vzdelávacími cieľmi realizovanými hrou a pod. Spätná väzba nám dáva dôležité podnety pre prípadné zmeny pri budúcom zaraďovaní konkrétnej didaktickej hry v danej učebnej situácii.)

Pre lepšiu ilustráciu si teraz uvedieme konkrétny príklad didaktickej hry. Sme v piatom ročníku ZŠ, preberáme tematický celok *Obsah rovinného obrazca (Obdĺžnik, štvorec)*. Žiaci práve prebrali vzorce na výpočet obsahu obdĺžnika a štvorca. Chceme precvičiť používanie týchto vzorcov na úlohách. Za týmto účelom zaradíme didaktickú hry **Šifrovaná**.

Cieľ hry: Pútavé precvičenie danej látky formou didaktickej hry; spätná väzba o zvládnutí učiva pre žiakov aj učiteľa.

Počet hráčov: Celá trieda, družstvá po 2 hráčoch.

Pomôcky: Sada úloh pre každé družstvo; jedná sa o úlohy s použitím vzťahov na výpočet obsahov a obvodov štvorca a obdĺžnika. Pri každej úlohe je uvedené jedno písmeno abecedy. Zašifrovaný text sa skladá s čísel, oddelených čiarkami. Tieto čísla sú výsledkami daných úloh. Text odšifrujeme zámennou čísiel za písmená, napísané pri úlohách, pre ktorých sú dané čísla výsledkami.

Čas trvania hry: 40 min

Pravidlá: Družstvá riešia úlohy, čím získavajú kľúč na riešenie šifry. Cieľom hry je odkódovať zašifrovaný odkaz (napríklad hádanku). Vyhráva družstvo, ktoré získa najviac bodov (pozri Priebeh a záverečné vyhodnotenie hry).

Priebeh a záverečné vyhodnotenie hry:

Na úvod žiakom rozdáme zadania úloh a hárky na odpovede. Následne žiakom ústne vysvetlíme pravidlá hry, spôsob odkódovania a bodovanie. Zaradíme ukážkový postup pre odkódovanie písmena A. Žiaci potom samostatne pokračujú v odkódovaní ďalších písmen. Vyhodnotenie spravíme na nasledujúcej hodine. Za každé správne odkódované písmeno pridelíme napr. 5 bodov. Ako bonus môžeme udeliť 20 bodov pre žiakov, ktorí uviedli správnu odpoveď na zašifrovanú hádanku. Vyhráva družstvo s najväčším počtom bodov. (Ak používame viacero hier je možné usporiadať súťaž. Za každú hru získa každý jednotlivec počet bodov buď na základe svojho individuálneho výkonu, respektíve počet bodov jeho družstva. Body za jednotlivé hry sa spočítajú. Takýmto spôsobom môžeme odmeniť najaktívnejších žiakov napr. jednotkou. Nie je ale vhodné výkony v hre známkovať ostatnými stupňami známok, lebo to vedie k porušenie hravého charakteru činnosti žiakov.)

Pozitívne črty danej hry:

– aktívna práca celej triedy,

– ľahká kontrola správnosti práce (dešifrovaný odkaz),

– učenie sa spolupráci v rámci skupiny,

– vnútorná motivácia žiakov súťaživosťou.

Druhým pojmom, ktorý je kľúčový pre odpovede na naše otázky je **efektívnosť vyučovania**. Keďže rozsah tohto príspevku neumožňuje podrobne tento zložitý pojem rozanalyzovať, uspokojíme sa s tvrdením, že pod efektívnosťou vzdelávania budeme rozumieť mieru: 1. dosiahnutia vzdelávacích cieľov; 2. vplyvu na postoje žiakov a ich pocity ohľadom vyučovacieho procesu a predmetu; 3. časového trvania vzdelávania; 4. vhodnosti daného vzdelávania pre rozmanité edukačné podmienky (počet žiakov v triede, úroveň žiakov, vybavenie škôl. . .)

Teraz si pripomenieme otázky, ktoré sme čitateľovi predstavili a dáme na ne naše odpovede.

Existujú didaktické hry vhodné na zaradenie do vyučovania matematiky? Áno. Na Slovensku aj v Čechách vyšlo mnoho pekných zbierok didaktických hier, vhodných na priame použitie vo vyučovaní matematiky. Ako príklad uvádzame v použitej literatúre nasledovné diela: (Krejčová – Volfová, 1994; Môťovská, 1994; Kárová, 1994, 1996; Foltinová – Novotná, 1997; Totkovičová, 2003)

Je vyučovanie prostredníctvom takýchto hier efektívnejšie, t.j. sú didaktické hry prínosom pre edukačný proces? Jednoznačná odpoveď na túto otázku neexistuje. Závisí od konkrétnej situácie, druhu učiva, použitej didaktickej hry, úrovne a záujmu žiakov. Na základe vlastných skúseností z výskumu môžeme konštatovať že pri experimentálnom vyučovaní prostredníctvom didaktických hier sme dosiahli vyššiu efektívnosť v porovnaní z klasickým vyučovaním (Vankúš, 2004, 2005).

Ako mám postupovať pri aplikácii hier do môjho vyučovania? Metodologické návody na používanie hier vo vyučovaní matematiky nájde čitateľ v nasledovnej literatúre (Cejpeková, 1996, Kárová, 1996)

Bude to pre mňa namáhavejšie ako doterajšie klasické vyučovanie, dá sa to zvládnuť v rámci tematických osnov? Na túto otázku môžeme odpovedať znovu len na základe vlastných skúseností. Áno, vyučovanie s používaním didaktických hier bude spočiatku náročnejšie čo sa týka prípravy na hodiny. Tieto ťažkosti však pri opätovnom používaní danej hry v konkrétnej učebnej situácii odpadajú (pomôcky sú hotové, učiteľ má skúsenosti). V každom prípade odmenou pre učiteľa je výborná pracovná atmosféra na hodinách, ako aj menej stresu pre žiakov. V našom experimente sa nám podarilo, aby vyučovanie s integrovanými hrami prebiehalo v časovom súlade s klasickým vyučovaním. Jednoducho niektoré bežné rutinné počítania sme nahradili didaktickými hrami. Teda áno, vyučovanie s používaním hier sa dá zvládnuť v rámci tematických osnov.

Na predložené otázky sme poskytli čitateľovi naše odpovede. Nenárokujeme si ich absolútnu pravdivosť. Nie pre každého učiteľa je vhodná konkrétna vyučovacia metóda, všetci máme svoje vlastné názory na ideálny priebeh vyučovacieho procesu. Veríme ale, že sa medzi našimi čitateľmi nájdu takí, ktorí si skúsia nájsť odpovede na uvedené otázky priamo, cez vlastné praktické používanie didaktických hier na ich hodinách. To je hlavným cieľom tohto článku.

Literatúra

[1] Cejpeková, J.: *Hra vo vyučovaní na 1. stupni základnej školy.* Banská Bystrica, UMB Pedagogická fakulta, 1996.

[2] Foltinová, K. – Novotná, J.: *Matematické hry a soutěže na druhém stupni základní školy.* Praha, Pedagogické centrum, 1997.

[3] Kárová, V.: 155 *her ve vyučování matematice a ve školní družině na 1. stupni základní školy.* 1. a 2. *část.* Praha, Pražské centrum vzdělávání pedagogických pracovníků, 1994.

[4] Kárová, V.: *Didaktické hry ve vyučování matematice v* 1. - 4. *ročníku základní a obecné školy. Část aritmetická.* Plzeň, Pedagogická fakulta, 1996.

[5] Krejčová, E. – Volfová, M.: *Didaktické hry v matematice.* Hradec Králové, Gaudeamus, 1994.

[6] Môťovská, D.: *Netradičné metódy vyučovania matematiky na základnej škole a v nižších triedach osemročných gymnázií.* Bratislava, Agentúra DONY, 1994.

[7] Spagnolo, F. – Čižmár, J.: *Komunikácia v matematike na strednej škole.* Brno, Masarykova univerzita, 2003.

[8] Totkovičová, M.: *Algopreteky.* Bratislava, Metodicko–pedagogické centrum mesta Bratislavy, 2003.

[9] Trenčanský, I.: *Možnosti teórie didaktických situácií na zefektívnenie učenia sa.* In: Zborník 4 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky. Bratislava, Univerzita Komenského, 2001, s. 81–90.

[10] Vankúš, P.: *Efektívnosť vyučovania matematiky metódou didaktických hier.* In: Zborník 6 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Bratislava, Univerzita Komenského, 2004, str. 101-124.

[11] Vankúš, P.: *Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a–didactic situation.* In: Quaderni di ricerca in Didattica, č. 15, G. R. I. M., Department of Mathematics, University of Palermo, 2005.

Adresa autora:
PaedDr. Peter Vankúš
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

Úloha o džúse

Valéria Vasková, Soňa Čeretková

Abstract. *The paper presents study concerning to research of solving skills of 15 years old pupils. The task with context of mixture solved in regional competition of Mathematical Olympia 2005 was choosen for demonstrating used methods solving strategies.*

Úvod

Riešenie slovných úloh je neodmysliteľnou súčasťou matematických schopností a vedomostí žiakov vo všetkých ročníkoch základnej školy. Nácvik stratégii riešenia slovných úloh prebieha vo vyučovaní matematiky kontinuálne od prvého ročníka, od najjednoduchších aritmetických operácii až po deviaty ročník, kde vrchol matematických schopností predstavuje schopnosť matematizovať reálnu situáciu a riešiť slovnú úlohu zostavením sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych.

Slovným úlohám, ich kontextom, zostavovaniu, formulovaniu, zaraďovaniu do učebníc, popisu ich riešenia atď. sa venujú mnohé výskumy a teoretické práce v teórii vyučovania matematiky. Podobne, dôležitým prvkom vo výskumnej práci, je skúmanie riešiteľských postupov žiakov.

V článku interpretujeme riešiteľské postupy žiakov pri riešení slovnej úlohy zaradenej do tretieho kola 54 ročníka súťaže matematická olympiáda v školskom roku 2004/2005. Je to úloha s kontextom koncentrácia zmesi, nazývame ju **Úloha o džúse**. Analyzujeme správne žiacke riešenia, popíšeme stratégie, ktoré žiaci pri riešení použili a porovnáme s ponúknutým autorským riešením.

V závere načrtneme možnosti ďalšieho výskumu v uvedenom kontexte.

Skúmanie riešiteľského postupu

Riešiteľský proces (Hejný, Michalcová, 2001) je sled myšlienkových krokov, prebiehajúcich vo vedomí riešiteľa a orientovaný na nájdenie riešenia, na nájdenie množiny neznámych údajov. Proces sa začína v okamihu, keď sa vo vedomí žiaka objaví prvá predstava, vzťahujúca sa k jednej viaczložkovej úlohe a končí, keď posledná z týchto predstáv zanikne. Keďže samotná úloha sa skladá z viacerých častí, riešiteľský proces sa rozpadá na niekoľko samostatných myšlienkových procesov.

Proces riešenia úlohy môžeme rozdeliť do 4 etáp:

1. analýza zadania úlohy,
2. hľadanie plánu riešenia,
3. vlastné riešenie,
4. posúdenie (interpretácia) výsledku.

Pri riešení slovných úloh žiaci používajú rôzne stratégie. Prvou riešiteľskou stratégiou, ktorú dieťa pri riešení matematických úloh spontánne použije, je stratégia pokus- omyl. Pri tomto riešiteľskom postupe je dôležité ako žiak ďalej pokračuje.

Vo väčšine prípadov slúži táto stratégia ako východisko k ďalším matematickým stratégiám.

Pri **analýze stratégií** je potrebné brať do úvahy nasledovné:

1. riešenie bolo nájdené náhodne alebo po získaní vhľadu do štruktúry úlohy,
2. riešenie je založené na identifikácii slov alebo slovných spojení v zadaní, ktoré sú pre žiaka signálom jednak k použitiu určitého vzorca, príp. postupu a jednak k porozumeniu štruktúry úlohy natoľko, že riešiteľ je schopný previesť ju na jednu jednoduchšiu úlohu,
3. riešiteľ použil aritmetický alebo algebraický aparát,
4. pri rovnakom zadaní môže žiak voliť rôzne spracovanie zadaných vzťahov.

Konkrétna aplikácia jednotlivých etáp procesu riešenia úlohy a stratégii je uvedená v časti 4.

Typové slovné úlohy – zmesi

Ulohy o zmesiach sú podľa súčasných učebných osnov zaradené v deviatom ročníku v tematickom celku *Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav.* V učebnici matematiky pre 9. ročník (citácia z učebnice pre 9. ročník, Šedivý, 2001, str.101 – 102).

Úlohy o zmesiach

V úlohách o zmesiach obyčajne vytvárame zmes z niekoľkých zložiek, z ktorých každá je zastúpená v určitom množstve. Väčšinou je potrebné vypočítať percento koncentrácie, teplotu, množstvo alebo cenu zmesi alebo jej zložiek.

Príklad

V lekárni priliali k ôsmim litrom 95% liehu ešte dva litre 40% liehu. Akú značku ? % prilepili na desaťlitrovú nádobu, kde bola táto zmes naliata?

Riešenie

Ján si zapíše:

8 l liehu 95% ... 8 . $\frac{95}{100}$ l čistého liehu

2 l liehu 40% ... 2. $\frac{40}{100}$ l čistého liehu

spolu 10 l liehu x% ... 10 . $\frac{x}{100}$ l čistého liehu

platí: $8 \cdot \frac{95}{100} + 2.\ \frac{40}{100} = 10 \cdot \frac{x}{100}$

Ján vypočíta: $x = 84$. Skontrolujte.

Zmes liehu bude mať koncentráciu 84%.

Skúška

v prvej zložke je 8 . $\frac{95}{100} = 7{,}6$ litra čistého liehu

v druhej zložke je 2. $\frac{40}{100} = 0{,}8$ litra čistého liehu

v zmesi je $7{,}6 + 0{,}8 = 8{,}4$ litra čistého liehu, čo je 84%

Odpoveď
Na nádobu prilepia značku 84%.
Poznámka
V úlohách o zmesiach, v ktorých sa zmiešavajú dve zložky vystupujú premenné:

m_1, m_2 ... hmotnosť alebo objem jednotlivých zložiek

z_1, z_2 ... koncentrácia alebo cena jednotlivých zložiek za jednu jednotku

z ... koncentrácia alebo cena zmesi za jednu jednotku

Platí: $m_1.z_1 + \quad m_2.z_2 = (\ m_1 + m_2\ )\ .\ z$

V uvedenej učebnici sa okrem citovaného príkladu nachádza ešte niekoľko úloh a cvičení na precvičenie demonštrovaného štandardného algoritmu riešenia. Žiaci súťažiaci v matematickej olympiáde sú väčšinou matematicky nadaní, samostatne a tvorivo mysliaci, ktorí si dokážu vytvoriť vlastnú originálnu stratégiu riešenia. Táto skutočnosť bola analýzou riešení potvrdená.

Úloha o džúse: stratégie riešenia

Autorkou úlohy zaradenej do Z9-III-3 MO v školskom roku 2004/2005 je Monika Raabová.
Znenie úlohy Z9-III-3 **:** Mamička pripravila na oslavu Jurkových narodenín pomarančový džús do džbánu tak, že zmiešala 1 liter 100%-ného džúsu s $\frac{2}{3}$litra 30%-ného džúsu. Jurko si odlial do pohára a ochutnal. Pretože má radšej slabšiu koncentráciu džúsu, dolial do pripraveného džbánu vodu do pôvodného množstva. Výsledný džús mal koncentráciu 61,2 %. To už Jurkovi vyhovovalo. Aké množstvo džúsu si Jurko odlial do pohára?
Autorské riešenie predložené v letáku MO je nasledujúce:
V džbáne bolo po mamičkinom naliatí $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$litra zmesi. Z nej čistý pomarančový džús predstavoval 1 liter a 30 % z $\frac{2}{3}$litra, čo je $1 + 0{,}3.\ \frac{2}{3}= 1 + 0{,}2 = 1{,}2$ litra. To znamená , že mamička pripravila 1,2 . 100 : $\frac{5}{3}=$ 72%-ný džús. Teraz je džbáne iba 61,2%-ný džús, ale opäť je to $\frac{5}{3}$litra. To znamená, že tam už je len $\frac{5}{3}$: 100. 61,2 = $\frac{5.20{,}4}{100}=$ 1,02 litra čistého pomaranča. Jurko si odlial 0,18 : 72.100 = 0,25 litra zmesi.
Poznámka: Autorské riešenie má z pohľadu skúmania riešiteľského postupu nasledovné atribúty:

1. riešenie je aritmetické,
2. proces riešenia úlohy je zložený z piatich etáp, ktoré predstavujú jednotlivé výpočty.

Po oprave žiackych riešení úlohy bolo konštatované, že úlohu správne vyriešilo 14 účastníkov (2 z osemročného gymnázia, 12 ZŠ).

Okrem vyhodnotenia základnej koncepcie zvolenej stratégie riešenia, t.j. aritmetické vs. algebraické, boli vyhodnotené aj ďalšie znaky riešenia: spôsob interpretácie percenta (desatinné číslo, zlomok) a existencia grafického náčrtu resp. ilustrácie reálnej situácie (v troch riešeniach).

Nie je prekvapujúca skutočnosť, že deviataci dávajú prednosť algebraickej stratégii riešenia, v 11 zo 14 riešení je použitá aspoň jedna neznáma, jednom prípade tri neznáme. V 10 prípadoch riešitelia rozdelili etapu: riešenie úlohy na dve časti. Tento fakt súvisí so zaradením slovných úloh o zmesiach do tematického celku Rovnice v učive deviateho ročníka a tiež aj so skutočnosťou, že na druhom stupni základnej školy sa slovné úlohy takmer výhradne riešia algebraicky, t.j. pomenovaním neznámej (neznámych) a zostavením rovnice (rovníc).

Pri analýze stratégií riešení žiaci identifikovali úlohu na základe slovných spojení: koncentrácia, zmiešanie, priliatie, odliatie ako úlohu o zmesiach, na riešenie ktorej sa používa zmiašavacia rovnica. Táto rovnica sa objavila v rôznych zápisoch vo všetkých algebraických riešeniach.

Iba tri riešenia boli bez použitia neznámej, artitmetické, v dvoch prípadoch riešenia využívali vlastnosti pomeru, v jednom prípade to bola postupnosť artimetických výpočtov, analogická, nie totožná s autorským riešením.

V jednom prípade si žiak skonštruoval, ako sám uviedol, vlastný vzorec, ktorý aplikoval v oboch častiach riešenia. Je zrejmé, že vzorec je upravená zmiešavacia rovnica, z citovanej učebnice. Zo samotného riešenia vyplýva , že žiak správne pochopil text úlohy a správne aplikoval štandardný v učebnici uvedený predpis, vyjadril neznámu zo vzorca. Pravdepodobne v tomto kroku spočíval jeho dojem originality vlastnej konštrukcie.

Ukážka 1. časť riešenia č.4

V celej úlohe používam vzorec na koncentráciu, ktorý som si sám z hlavy odvodil. Je len pre dve zmiešané látky. $\frac{V_1.c_1+V_2.c_2}{V_1+V_2} = C$, kde V_1je objem 1. zmesi, c_1 je koncentrácia 1. zmesi v percentách, V_2je objem 2. zmesi, c_2 je koncentrácia 2. zmesi v percentách. Ním som vypočítal koncentráciu prvého pomiešaného džúsu. ...

Teraz zmiešame tento džús s koncentráciou 72% a s objemom $\frac{5}{3}$litra s ako keby druhým „Džúsom“ s koncentráciou 0% pričom od prvého objemu $\frac{5}{3}$litra musíme odčítať x. Celý objem je stále $\frac{5}{3}$litra

Vznikne takýto vzorec $\frac{c(V-x)+x.0}{V} = c_2$, kde neznáma x predstavuje, objem džúsu, ktorý sa odlial, ako aj množstvo vody, ktoré sa dolialo. ...

Ukážkou správneho vhľadu do úlohy je prehľadný grafický zápis zmiešavacej rovnice v riešení č. 8.

Ukážka 2. časť riešenia č. 8

Najprv si vypočítam, koľko % má šťava v džbáne:

$$\begin{array}{ccccc} 1\ l & & \frac{2}{3}l & & \frac{5}{3}l \\ & + & & = & \\ 100\% & & 30\% & & X\% \end{array}$$

Výpočet množstva odliateho džúsu v pohári:

šťava v nádobe		Jurko si z nej odlial	a	prilial rovnaké množstvo vody		To sa musí rovnať
$\frac{5}{3}l$		Xl		Xl		$\frac{5}{3}l$
	$-$		$+$		$=$	
72%		72%		0%		61,2%

Pri analýze procesu riešenia úlohy bolo evidentné, že žiaci riešili úlohu priamo, t.j. bez zápisu, ktorý je tradičným znakom analýzy zadania. Klasický zápis slovnej úlohy bol použitý iba v jednom zo 14 skúmaných riešení. Iba v jednom prípade sa vyskytla aj skúška správnosti, ktorá je takmer striktne vyžadovaná pri riešení slovných úloh v škole.

Záver

Riešenie slovných úloh, nácvik stratégii, algoritmov, spôsobov zápisu, interpretácie riešenia, je dôležitou súčasťou aj prípravy budúcich učiteľov matematiky v rámci predmetu Didaktika matematiky. Bohužiaľ, je takmer pravidlom, že študenti univerzitného štúdia učiteľstva matematiky nevedia pohotovo riešiť slovné úlohy istých typov. Riešenie typových slovných úloh, typ zmesi, patrí medzi najmenej zvládnuté.

V ďalšom výskume stratégii riešenia úlohy o džúse budeme pokračovať na pôde univerzity. Skúmanie bude zamerané na schopnosti a stratégie riešenia uvedenej úlohy študentami učiteľstva, doplnené o ukážky rôznych spôsobov riešenia tej istej úlohy, ako aj o nadobudnutie schopností tvoriť slovné úlohy.

Literatúra

[1] Hejný, M., Michalcová, A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava, Metodické centrum, 2001. ISBN 80-8052-085-2

[2] Novotná, J.: *Analýza řešení slovních úloh.* Praha, Univerzita Karlova- Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0

[3] Reed, S.K.: *Word Problems, Research and Curriculum Reform*, Lawrece Erlbaum Associates, London, 1998. ISBN 0-8058-2660-0

[4] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 9. ročník základných škôl 1. časť.* Bratislava, SPN, 2001. ISBN 80-08-03169-7

[5] 54. ročník matematickej olympiády, kategória Z9.

Adresa autorov:
Mgr. Valéria Vasková, Doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku č. 1
949 74 Nitra

História matematiky trochu inak

Marek Varga, Valéria Vasková

Abstract. *The article provides an insight into the life of famous mathematicians. The samples given here could serve as a part of historical notes in primary and secondary school course books of mathematics. Their aim is to introduce the famous mathematicians as „ordinary people" with different interests and hobbies and to motivate pupils and students in this way.*

Úvod

Pri vytváraní učebníc matematiky pre ZŠ aj SŠ sa stalo tradíciou zaraďovať do nich historické poznámky či medailóniky o najväčších matematikoch. Táto myšlienka je dobrá, veď ak žiak či študent dnes pozná všetky svetové „celebrity", patrilo by sa spoznať aj podobu Newtona, Leibniza či iných hviezd svetovej a slovenskej matematiky.

Stretávame sa tu však s malým problémom – žiakovi ZŠ (študentovi SŠ) asi príliš veľa nehovoria životopisné poznámky typu: venoval sa diferenciálnym rovniciam, dosiahol úspechy v teórii algebraických štruktúr, obohatil integrálny počet a teóriu množných integrálov a pod.

Ďalším problémom zdanlivo nevinnej formulácie „venoval sa diferenciálnemu a integrálnemu počtu a skúmal diferenciálne rovnice" môže byť to, že u študenta evokuje predstavu, že matematik sa stále „venuje" len matematike a „normálny život" sa preňho neexistuje...

Preto sme sa pokúsili vyhľadať „zaujímavejšie" fakty zo života matematikov – špeciálne ich vzťah a úspechy v športe. Spoliehať sa môžeme na nasledovnú myšlienku:

Väčšina „bežných chlapcov" sa totiž neučí o Brazílii preto, že je to „krajina kávy", ale krajina futbalu, podobne Fínsko nie je krajinou tisícich jazier, ale skvelých hokejistov atď. Takže aj Pytagorovu vetu sa môže niekto naučiť preto, že dotyčný bol olympijským víťazom v boxe...

Zaujímavosti zo života známych matematikov

Pytagoras zo Samu (asi 569 – 475 p. n. l.)

Ako sme už vyššie uviedli, tento vynikajúci grécky matematik a filozof sa stal na antických olympiádach víťazom v pästiarskom súboji. Jeho prínos pre matematiku a geometriu snáď nemusíme zdôrazňovať.

Harald Bohr (1887 – 1951)

Dánsky matematik, ktorý sa vo vedeckej oblasti dostal do tieňa svojho brata Nielsa – nositeľa Nobelovej ceny za fyziku. Určite však brata prekonal v oblasti športu, ktorej sa venovali obaja. Na olympiáde v Londýne (1908) získal ako hráč reprezentačného futbalového mužstva striebornú medailu. Mimochodom, na obhajobu jeho dizertačnej práce prišlo viac futbalových fanúšikov ako matematikov... Opäť pridávame aj nejaké známejšie fakty – spolu s Landauom dokázali dôležitú teorému o (Riemannovej) zetafunkcii.

George Pólya (1887 – 1985)

Tu spomenieme šport trochu inak. Tento americký matematik (známy predovšetkým prácami z problémového vyučovania) sa nemusel zúčastniť bojov 1. svetovej vojny (ešte ako vojak maďarskej armády) len preto, že sa zranil pri futbale …

Ralph Fowler (1889 – 1944)

Našli sme ďalšieho matematika (fyzika) zo športovej rodiny. Jeho otec bol hviezdou v rugby, samotný Ralph skončil druhý na atletických pretekoch vo Winchestri. Okrem atletiky sa venoval aj kriketu, futbalu a golfu.

Alan Turing (1912 – 1954)

Anglický matematik, ktorý bol jedným z ľudí stojacich na počiatkoch výpočtovej techniky. U nás je však ďalším členom atletického klubu – zvíťazil totiž v behu na 3 míle, na 10 míľ, piaty v maratóne.

Godfrey Hardy (1877 – 1947)

Pre tohto anglického matematika, ktorý zaviedol súčasné označenie limita, bol vášňou okrem matematiky aj kriket. Počas sezóny vraj vyzeral deň tohto anglického matematika nasledovne: pri raňajkách čítal výsledky kriketových zápasov, od 9. do 13. hodiny sa venoval matematickému bádaniu, popoludní šiel na kriketový zápas a večer si kriket zahral …

John Whitehead (1904 – 1960)

Ďalší matematik, ktorý si obľúbil kriket (tam sa spoznali s Hardym a začali spolupracovať). Dobrý bol aj v „športe“, ktorý sme zatiaľ nepostrehli u predchádzajúcich pánov – hazardné hry. Rád hrával poker, a keďže bol dobrý hráč, hrával o peniaze. Jeho dlžníkmi boli samozrejme aj jeho kolegovia …

John lord Rayleight (1842 – 1919)

Ďalší pán, ktorého spomenieme len okrajovo (spoluautor Rayleight – Jeansovho zákona o žiarení čierneho telesa). Anglickej vysokej šľachte sa zrejme nepatrilo príliš športovať, tak svoj vzťah k športu milý lord riešil aspoň článkom O nepravidelnom lete tenisovej loptičky …

Girolamo Cardano (1501 – 1576)

Iste, mohli by sme začať tým, že tento taliansky matematik vytvoril metódu na riešenie kubických rovníc. Povedzme si však otvorene, že tiež patril aj medzi hazardných hráčov. Keďže však bol lepší v pravdepodobnosti ako jeho súperi, väčšinou vyhrával. Ak však náhodou prehral, a mal podozrenie, že bol podvedený, obyčajne zaútočil na svojho súpera nožom …

Záver

Historické poznámky v učebniciach matematiky pre ZŠ a SŠ plnia aj motivačnú funkciu. Ukazujú totiž, že aj matematici boli ľudia z mäsa a kostí a taktiež mali svoje záľuby. Často sa venovali športu, mnohí z nich dokonca dosiahli aj pozoruhodné výsledky a výkony. Svojimi životmi teda dokázali pre dnešných žiakov a študentov pozoruhodnú vec – štúdium matematiky je možné spojiť s reálnym životom... .

Literatúra

[1] www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history

Adresy autorov:
PaedDr. Marek Varga, Mgr. Valéria Vasková
KM FPV UKF
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: mvarga@ukf.sk, vvaskova@ukf.sk

Projekt Matematický kalendár 2004

Beáta Vavrinčíková

Abstract. *Our contribution is devoted to project called MATHEMATICS CALENDAR which we organized in school year 2003/2004. We give an account on it, describe its targets and final evaluation. The outcome of this project is an unusual calendar which contains mathematical tasks for each day of the year. The tasks were created by the participants of this project. As an example we provide a few students' tasks. In the closing part of this contribution we deal with the future continuation of this project in the school year 2004/2005.*

Úvod

Naša škola je od roku 2001 zapojená do projektu Infovek, v rámci ktorého sa žiaci zapájajú do rôznych teleprojektov. Rozhodli sme sa aj my v tomto smere prispieť a zorganizovať vlastný projekt, pričom sme chceli, aby okrem informatiky zahŕňal aj matematiku. A tak od septembra 2003 do decembra 2004 prebiehal prostredníctvom internetu projekt **Matematický kalendár 2004**.

Školský rok 2003/2004

Ako to začalo: Máte niekedy pocit, že úlohy v učebniciach matematiky sú nudné, nezaujímavé? Vymyslite krajšie! Fantázii sa medze nekladú! Oceníme originálne, zaujímavé a samozrejme matematicky správne sformulované a vyriešené úlohy.

Týmto úvodom sme v septembri 2003 oslovili účastníkov nášho projektu matematický kalendár 2004, ktorý organizovalo Gymnázium na Alejovej ulici v Košiciach.

Aké ciele sme si kládli:

- zostaviť kalendár na rok 2004, obsahujúci obrázky a matematické úlohy sformulované účastníkmi projektu,
- podnecovať tvorivosť, fantáziu a rozvoj logického myslenia,
- netypickou formou - tvorbou úloh - zvýšiť záujem žiakov o matematiku,
- realizáciou projektu prostredníctvom internetu zvyšovať počítačovú gramotnosť žiakov.

Kto sa projektu zúčastnil: Projekt bol určený žiakom 7. ročníka ZŠ až 2. ročníka SŠ, súťažili (maximálne štvorčlenné) družstvá. Celkovo sa zapojilo **762** účastníkov v **263** družstvách zo **72** škôl z celého Slovenska.

Ako projekt prebiehal:

- projekt sa skladal zo 6 kôl, v ktorých sa pripravoval kalendár vždy na dva mesiace v roku,
- každé kolo malo štyri časti:
  - časť A - vymyslieť matematickú úlohu z daného učiva (napr. slovnú úlohu o zlomkoch, úlohu o trojuholníku),

– časť B - vymyslieť matematickú úlohu z ľubovoľného učiva, spĺňajúcu danú podmienku (napr. slovná úloha o snehuliakoch; úloha, ktorá má viac riešení),
– časť C - vymyslieť matematickú úlohu, ktorej text sa nejakým spôsobom viaže k danému mesiacu v roku (napr. k sviatku, výročiu narodenia významnej osobnosti a pod.),
– časť D - vytvoriť obrázok, ktorý poslúži ako ilustrácia k daným mesiacom v kalendári (predpísanou technikou).

Čo nám účastníci poslali: V jednej prémiovej úlohe a v 6 kolách nám účastníci poslali **698** obrázkov, z nich sme použili 66. O tom, ktoré obrázky budú ilustrovať kalendár, rozhodli samotní účastníci projektu hlasovaním.

Víťazným návrhom na titulnú stranu kalendára sa stala ilustrácia družstva Fomat zo ZŠ Hurbanova v Martine:

No a to najdôležitejšie - počas celého projektu nám účastníci poslali spolu **1860** úloh a nebolo ľahké z nich vybrať 366, na každý deň v roku jednu. Na ilustráciu uveďme niekoľko z nich:

- *téma:* trojuholník

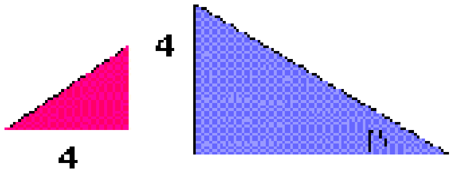
  autori: družstvo Levíčatá, I.ZŠ M.R.Štefánika 34, Levice

  zadanie: Do obchodu prišiel trojuholník, ktorého strany sú celé čísla v cm a povedal: "Prosím si toľko stuhy, aby ma presne obišlo."Predavač mu podal stuhu dlhú 14 cm. Aké strany môže mať trojuholník?

komentár: Pekná ukážka, ako jednoduchá formulácia ozvláštni pomerne bežnú úlohu na trojuholníkovú nerovnosť. Žiaľ formulácia úlohy trpí nepresnosťami, ktorých sa často dopúšťajú aj učitelia.

- *téma:* trojuholník

  autori: Družstvo Ikt, Gymnázium J.A.Raymana, Mudroňova 20, Prešov

  zadanie: Dva pravouhlé trojuholníky sa pobili, jeden z nich sa natrhol, vyfučali z neho vedomosti a zmenšil sa, ale za trest zostal podobný s tým druhým. Darmo sa otáčal, preklápal a ľutoval, že sa bil, nemohol to už zmeniť. Keď sa ukľudnili, zachytili sme ich podoby. Porovnajte, koľkokrát sa 1.trojuholník zmenšil ($\beta =$ 36,87?).

  komentár: Táto úloha sa nám veľmi páčila, jej autori sa so zadaním doslova pohrali.

- *téma:* apríl

  autori: družstvo Túlaví blázni, SPoŠ, Stojan 1, Spišská Nová Ves

  zadanie: Bola Veľká noc, tak Aničkina mama pripravila pre kúpačov pohostenie: šunkové chlebíky, štamperlíky slivovice, čokoládové vajcia a 50 korunáčky. Rozhodli sa dať každému kúpačovi po 4 veci. Každý má však rád niečo iné, tak nie nutne po jednej z každého druhu, akurát nikomu nedajú viac ako 100,-Sk a viac ako dva štamperlíky. Koľko kúpačov môže prísť tak, aby každý mohol dostať inú výslužku?

  komentár: Pekne zostavená úloha z kombinatoriky, vychádzajúca z takmer reálnej situácie.

- *téma:* marec

  autori: družstvo Suchari, SSOŠ HUMANIS VIA, Holíč

  zadanie: Učiteľ matematiky chcel žiakom pripomenúť „učiteľa národov“ v deň jeho narodenín. Po krátkom vysvetlení jeho celoživotného diela sa žiaci spýtali: „Pred koľkými rokmi sa vlastne narodil?“ Učiteľ im odpovedal: „Prídete na to sami. Výročie jeho narodenín je 5-násobkom veku môjho otca zväčšený o 3-násobok veku mojej dcéry. Moja dcéra má práve toľko rokov, koľko je súčet číslic v dátume výročia narodenín J.A.Komenského roku 2004. Aritmetický priemer veku môjho otca a dcéry sa rovná môjmu veku. Ja som sa narodil r.1959.“

  komentár: Úloha je náročná na pochopenie a analýzu textu.

Využitie kalendára: Výsledkom celého projektu je teda netypický kalendár, zverejnený na adrese *http://www.galeje.sk/kalendar*. Na každý deň v roku 2004 obsahuje jednu zaujímavú matematickú úlohu. Môže tak poslúžiť ako zbierka úloh, materiál na prípravu súťaží, matematických násteniek a pod.

Vyhodnotenie projektu: Zaslané úlohy a obrázky sme bodovali. Hodnotilo sa dodržanie podmienok daného kola, originálnosť, náročnosť, matematická správnosť zadania i autorského riešenia úlohy. Konečné poradie na prvých miestach bolo nasledovné:

názov druružstva	*škola*	*počet bodov*
Mgr	G, Alejová 1, Košice	74
Silná štvorka	ZŠ, P.Jilemnického, Zvolen	73
Suchari	SSOŠ HUMANIUS VIA, Holíč	72
ZS Okruzna MI	ZŠ, Okružná 17, Michalovce	71
Mačičky	G, Dlhá ulica, Senica nad Myjavou	70

Týchto 5 tímov sa za odmenu zúčastnilo 9.6. - 11.6.2004 výletu do Košíc. Najúspešnejšie družstvá boli priebežne oceňované diplomami a knižnými cenami. Obrovský záujem o projekt, ďaleko prevyšujúci naše očakávania, nás veľmi potešil. Poukázal na to, že hlavná idea i spôsob realizácie oslovili žiakov ako aj učiteľov. Množstvo zaslaných úloh je skutočne originálnych, žiaci k tvorbe pristupovali tvorivo, nebáli sa popustiť uzdu fantázii. A to bol aj náš cieľ - ukázať, že matematika skutočne môže byť príťažlivá.

Názory účastníkov: V závere projektu sme pripravili anketu, do ktorej sa zapojilo 38 účastníkov. Všetci sa o projekte dozvedeli od svojho učiteľa a zapojili sa aspoň do 5 kôl. Najväčšie problémy im robilo vymyslieť úlohy, pričom najľahšie sa im vymýšľali úlohy na daný mesiac, o snehuliakoch a o rozprávkových bytostiach. Najťažšie bolo pre nich vytvoriť úlohu, ktorá má viac riešení. Pokiaľ ide o tvorbu obrázkov, najviac im vyhovovalo sťahovanie z internetu. Málo žiakov si však prezeralo hotové stránky z kalendára a riešilo úlohy z nich. Aj preto sme sa rozhodli na jeseň 2004 v projekte pokračovať - tentoraz v súťaži jednotlivcov v riešení úloh z kalendára.

Názory učiteľov: Na anketové otázky pre učiteľov odpovedalo 25 učiteľov. Ako sme predpokladali, takmer všetci sa o našom projekte dozvedeli z internetových stránok projektu Infovek. Problémom bolo pre učiteľov hlavne ustriehnuť termíny jednotlivých kôl. Žiaci pracovali na projekte najmä doma a v škole počas voľna, v menšej miere aj na hodinách matematiky, informatiky a na krúžku. Z odpovedí na otázku "Čo sa vám na projekte páčilo?"vyberáme niekoľko:

- výborný nápad, vhodné bolo aj rozdelenie na tri etapy, krásne prepojenie informatiky s matematikou,
- u žiakov je potrebné neustále vzbudzovať záujem o matematiku, a toto bola výborná forma,
- samotná téma, dobrý nápad, voľnosť žiakov pri tvorbe,
- žiaci sa v podstate sami stavali do pozície učiteľa, ktorý často sám musí vytvárať zaujímavé príklady na hodiny matematiky. Zistili, že ani úloha učiteľa nemusí byť jednoduchá, ak chce žiakov naozaj zaujať.
- originálnosť projektu, deti sa pre riešenia nadchli.

Medzi pripomienkami sa opakoval návrh, aby sa v budúcnosti takýto projekt robil ako kalendár na ďalší školský rok, aby bol dlhšie aktuálny a využiteľný.

Školský rok 2004/2005

Bola by škoda nevyužiť potenciál, ukrytý v úlohách v kalendári. Preto sme sa rozhodli v novom školskom roku vyhlásiť pokračovanie projektu, tentoraz ako súťaž jednotlivcov v riešení úloh. Súťaž sa skladala zo 4 kôl, odpovedajúcich mesiacom september až december. Súťažiaci si mali vybrať jednu úlohu z každého týždňa v kalendári, vyriešiť ju a odoslať výsledok.

Do projektu sa zapojilo **704** účastníkov zo **78** škôl - 77 škôl bolo z celého Slovenska a jedna škola bola z Česka. Začiatkom januára 2005 sme projekt ukončili vyhlásením víťazov - spolu 10 účastníkov získalo plný počet bodov. Veríme, že i takýmto spôsobom sme prispeli k spopularizovaniu matematiky - veď ako sme uviedli v úvode, úlohy z matematiky nemusia byť len nudné a nezaujímavé...

Literatúra

[1] www.galeje.sk/kalendar

Adresa autora:
RNDr. Beáta Vavrinčíková
Gymnázium
Alejová 1
041 49 Košice

Rozvoj priestorovej predstavivosti na I. stupni základnej škole

Kitti Vidermanová, Gabriela Pavlovičová

Abstract. *In the article is concerned with space - (geometric) - imagination of children of the pre-school and elementary school. The possibilities of its development are referred in the framework of the math's teaching at the level of elementary school, too.*

Úvod

Od narodenia sa človek pohybuje v priestore. Všetko, čo vidí, čoho sa dotýka, čo vníma, je trojrozmerné. Napriek tomu si trojrozmernosť priestoru človek iba zriedka uvedomuje a schopnosť predstaviť si priestorovú situáciu nie je nám vrodená ako danosť. Tú treba zámerne rozvíjať a pestovať. Priestorovú predstavivosť pomáhajú rozvíjať už od predškolského veku všetky aktivity, pri ktorých dieťa prichádza do styku s geometrickými objektmi; predovšetkým hra s kockami. Neskôr sa začína táto schopnosť zámerne pestovať v škole.

O spôsobe jej realizácie hovoria dva protichodné názory:

1. Za základ vyučovania stereometrie treba vziať pojmy – bod, priamka, rovina a reláciu incidencie, podľa Komenského zásady „od jednoduchého k zložitému".

2. Vyučovanie stereometrie má organicky nadväzovať na predškolské skúsenosti dieťaťa získané pri hre s kockami a inými stavebnicami.

Súčasná koncepcia výučby geometrie na I. stupni ZŠ vychádza z prvého názoru, avšak nízka úroveň priestorovej predstavivosti poukazuje na potrebu zmeny tejto koncepcie.

Niektoré príčiny nízkej úrovne priestorovej predstavivosti žiakov

Niektoré existujúce príčiny súčasného stavu nízkej úrovne priestorovej predstavivosti môžeme rozdeliť podľa [4] do niekoľkých skupín:

- Nie vždy sú rešpektované požiadavky vyplývajúce z poznatkov pedagogickej psychológie, predovšetkým:
  - chýba cieľavedomosť, sústavnosť a komplexnosť pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti detí,
  - nie vždy sa správne využívajú praktické skúsenosti žiakov a ich potencionálne dispozície vyplývajúce z ontogenetického vývoja, predovšetkým u mladších žiakov,
  - pozornosť sa zameriava na rozvoj statických reprodukčných predstáv a zanedbávajú sa predstavy pohybu a transformácií,
- Prejavujú sa následky nedôslednej aplikácie metód rozvíjania priestorovej predstavivosti v matematike, napr.

- žiaci nie sú dostatočne vedení k zobrazovaniu telies a priestorových situácií pri riešení úloh,
- nie je dostatočne rozvíjaný grafický prejav žiakov,
- nedostatočne sa precvičujú konštrukčné úlohy,

- Nedostatočná pripravenosť učiteľov matematiky, pretože nemajú
  - patričnú prípravu vo výučbe rysovania,
  - vypestovaný správny vzťah k vyučovaniu stereometrie,
  - často i oni sami dostatočne rozvinutú priestorovú predstavivosť.

Priestorová predstavivosť detí predškolského a mladšieho školského veku

Priestorová predstavivosť, geometrické a priestorové myslenie ľudí sa vytvára a rozvíja skúsenosťami s najrôznejšími objektmi v bežnom živote a systematickým učením.

Práca v škole dáva veľké možnosti k rozvoju priestorovej predstavivosti. Jedným z cieľov vyučovania geometrie je systematickým skúmaním vlastností geometrických útvarov v rovine i v priestore rozvíjať priestorovú predstavivosť žiakov a naučiť ich aplikovať tieto vedomosti pri riešení konštrukčných úloh a úloh na výpočty, rozvinúť u žiakov logické myslenie.

Vyučovanie geometrie už na I. stupni ZŠ sa musí podieľať na harmonickom rozvoji troch činiteľov, a to:

- priestorovej predstavivosti,
- logického myslenia,
- utvárania návykov pre praktické aplikácie.

Učebná látka dáva isté možnosti pre nácvik utvárania priestorovej predstavivosti, ale treba venovať tejto otázke veľkú pozornosť, využívať všetky možnosti, ktoré sa naskytujú aj mimo vyučovania geometrie.

Geometrickú predstavivosť detí predškolského a mladšieho školského veku môžeme skúmať z dvoch pohľadov:

a) ako sa rozvíja geometrická predstavivosť dieťaťa bez ohľadu na to, čo od neho vyžaduje škola,

b) ako je možné rozvíjať geometrickú predstavivosť na hodinách matematiky.

Už trojročné deti dokážu rozoznať množstvo rovinných útvarov, predovšetkým tie, s ktorými sa stretli v rovinných stavebniciach. Táto vedomosť rýchlo narastá a pri vstupe do školy vie „bežný prváčik“ rozoznať, ale i pomenovať takmer všetky tvary, s ktorými sa i naďalej bude stretávať na hodinách matematiky. Taktiež pozná z vlastných skúseností základné geometrické telesá a je schopný ľahko objaviť mnohé ich dôležité vlastnosti. Deti si spontánne vytvárajú predstavy o zhodných a podobných rovinných i priestorových útvaroch a ako i o osovej a stredovej súmernosti v rovine. Všetky tieto predstavy vychádzajú z ich činnosti.

Môžeme teda povedať, že pri vstupe do školy je geometrická predstavivosť detí na omnoho vyššej úrovni než učebné osnovy matematiky pre základnú školu predpokladajú. Existujú isté časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj schopností priestorového videnia (vek 5-6 rokov, a 11-12 rokov). Keď sa tieto obdobia premeškajú, stráca človek možnosť rozvinúť svoje schopnosti na takú úroveň, ktorú mu dávajú jeho genetické dispozície.

Budovanie a rozvoj priestorovej predstavivosti je teda aktuálna problematika, ktorej je potrebné sa venovať s náležitou pozornosťou a dôslednosťou.

Vybrané úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti

V ďalšom uvádzame niekoľko úloh a námetov vhodných na rozvoj priestorovej predstavivosti detí na I. stupni základnej školy, ktoré sa dajú použiť i v rámci výučby matematiky. Niektoré úlohy sú prevzaté z učebníc matematiky pre I. stupeň ZŠ v Českej republike (pozri [5], [6]).

Úloha 1

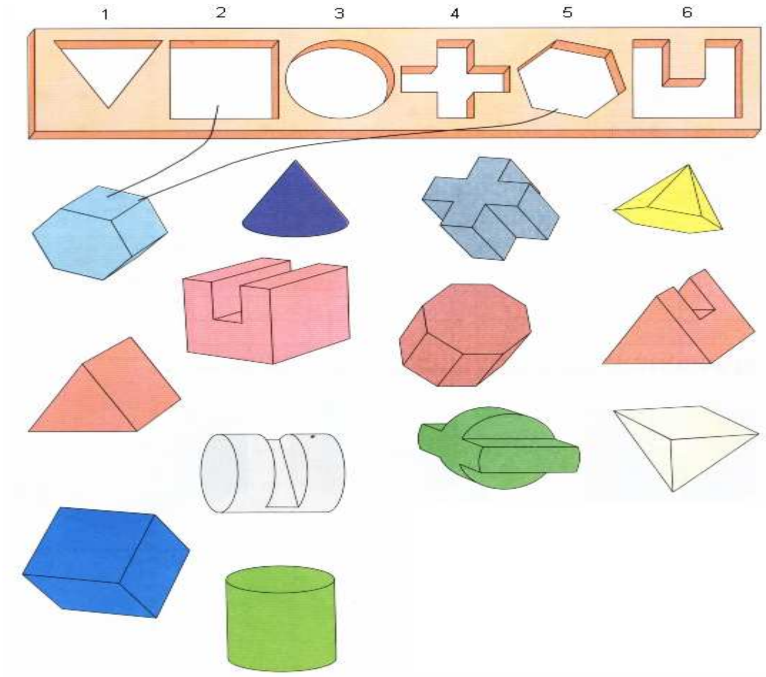
Martinko si „upiekol" bábovky z piesku. Rozoznáš, z ktorej formičky vznikla ktorá bábovka?

Úloha 2

Ku každému telesu priraď číslo otvoru, ktorým teleso prejde.

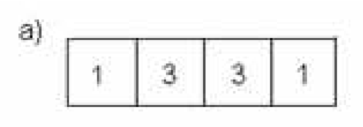
Úloha 3

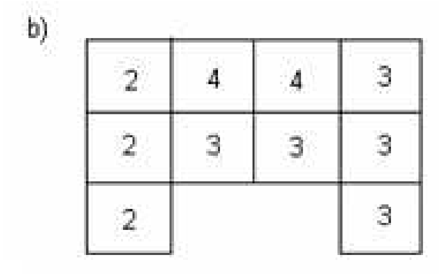
Zlý černokňažník uniesol princeznú z Ružového kráľovstva. Je zamknutá na sedem zlatých zámkov. Vyslobodí ju ten, komu sa podarí nájsť správne kľúče sa a otvoriť všetky zámky. Dokážeš to?


1
2
3
4
5
6

Úloha 4

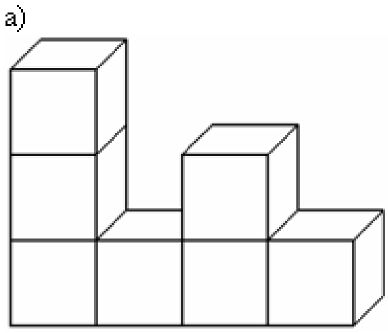
Z kociek postavíme budovu podľa daného plánu (číslo vo štvorčeku udáva počet kociek v stĺpci postavených na sebe).

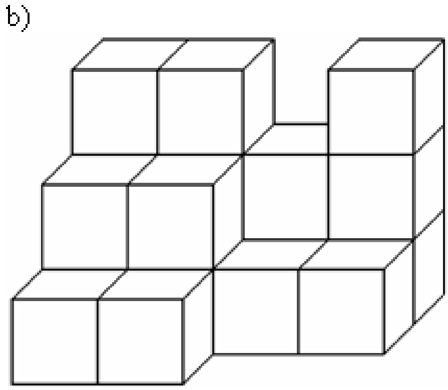




Úloha 5

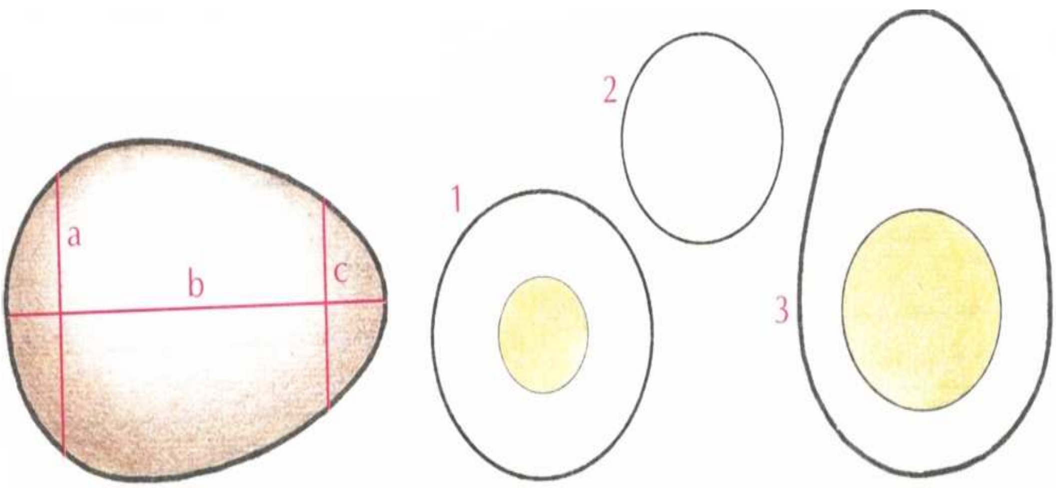
K danej stavbe z kociek zostav plán budovy (podľa úlohy 1):





Úloha 6

Priraď rezy na vajíčku.

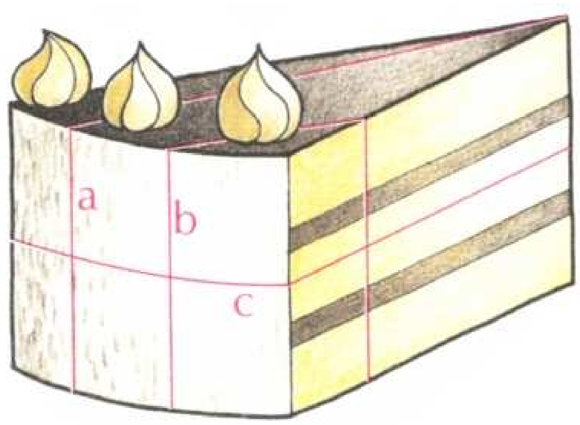


Úloha 7

Akého tvaru budú rezy z torty? Nakresli.

Záver

Významnou pomôckou v súčasnosti sú i rôzne počítačové softvéry (Detský kútik, Poly, Cabri 3D, ...), ktoré rôznym spôsobom podporujú rozvoj priestorovej predstavivosti.



Na záver chceme vyzdvihnúť potrebu nadväznosti učiva matematiky už v prvom ročníku ZŠ na už získané elementárne vedomosti z geometrie, s ktorými deti prichádzajú do školy.

Literatúra

[1] Šedivý, O. - Rumanovská, H.: *Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti*, In: Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre č. 4, Nitra: Pedagogická fakulta, 1988, s. 219-228.

[2] Šedivý, O. – Križalkovič, K.: *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva I. stupňa ZŠ,* Bratislava, SPN, 1990.

[3] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, 1. vyd., Bratislava: SPN, 1989. ISBN 80-08-00014-7

[4] Molnár, J.: *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii,* 1. vyd., Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004. ISBN 80-244-0927-5

[5] Molnár, J. – Mikulenková, H.: *Matematika pro 4. ročník, 1.* díl, Olomouc, Prodos, 2004.

[6] Molnár, J. – Mikulenková, H.: *Zajímavá matematika pro 2., 3., 4. ročník,* Olomouc, Prodos, 1996.

Adresa autorov:
RNDr. Kitti Vidermanová, PaedDr. Gabriela Pavlovičová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
947 01 Nitra

Kombinatorika na střední škole

Zuzana Voglová

Abstract. *This text is about a combinatorics at secondary school. It shows some problems of teaching and learning combinatorics, and why it is no popular part of mathematics. There are some ideas how to make it better and more attractive. It contains some interesting and useful examples.*

Kombinatorika je důležitou a zajímavou částí diskrétní matematiky, která se však obvykle nesetkává s příznivým ohlasem u žáků a často ani učitelů základních a středních škol. Neoblíbenost této oblasti matematiky má hned několik důvodů.

Student, který již absolvoval kurz kombinatoriky, si při vyslovení slova kombinatorika nejčastěji vybaví tři obávaná slova: variace, permutace, kombinace, možná ještě s opakováním a bez opakování. Nic hlubšího si však pod těmito pojmy nevybaví, snad jen „nazpaměť" naučené definice. To je škoda, protože velkou část školské kombinatoriky lze vyučovat bez použití těchto výrazů a definic, s použitím dvou jednoduchých pravidel: pravidla součtu a součinu. Tato pravidla používají žáci mnohem dříve, než se s nimi seznámí v kombinatorice, aniž by o tom věděli.

Pravidlo součtu říká, že pokud máme konečné množiny takové, že každé dvě jsou navzájem disjunktní, potom počet prvků množiny, která je sjednocením všech těchto množin, je roven součtu počtu prvků jednotlivých množin. Pravděpodobně už na základní škole se žáci setkají s úlohou, kdy mají zadaný trojúhelník, který je rozdělen na několik menších trojúhelníků. Úkolem je zjistit, kolik trojúhelníků je celkem na obrázku. Většinou žák nejprve spočítá všechny malé trojúhelníčky o straně jedna, potom najde trojúhelníky o straně dvě a takto pokračuje dál, až se dostane k největšímu trojúhelníku. Všechny částečné výsledky sečte a získá celkový počet všech trojúhelníků na obrázku. Nevědomky tak použil kombinatorické pravidlo součtu.

Pravidlo součinu lze formulovat takto: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu $n_2$způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů $n_k$způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$. Typickým příkladem na použití pravidla součinu je vytváření několikaciferných čísel, v nichž se číslice mohou či nemusí opakovat. Jednodušší příklady tohoto typu je schopen vyřešit i žák na základní škole a to většinou vypsáním všech možností.

Nevýhodou při výuce kombinatoriky na střední škole je to, že studentům nemůžeme dát přesný a univerzální návod, jak úlohy řešit. Na začátku jim vysvětlíme, co je to kombinační číslo, faktoriály a naučíme je s nimi pracovat. Potom objasníme již zmiňované pravidlo součtu a součinu a procvičíme je na řadě příkladů. Pak by měly přijít na řadu skupiny prvků o určitých vlastnostech – tedy variace, permutace a kombinace bez opakování i s opakováním.

Určitě je dobré studentům ukázat, jak získat vztahy pro počty jednotlivých skupin prvků. Po pár týdnech totiž asi nebudou vědět, jestli pro počet k-členných variací s opakováním z n prvků platí $V_o(k, n) = n^k$ nebo k^n. Je tedy vhodné ukázat, jak lze tento vztah jednoduše získat pomocí pravidla součinu.

Vybíráme uspořádanou k-tici z n prvků, v níž se každý prvek může vyskytovat nejvýše k-krát. První místo lze obsadit n-způsoby, na druhém místě opět může být kterýkoliv z n prvků, atd. až na posledním místě opět může být kterýkoliv z n prvků. Podle pravidla součinu lze tedy uspořádanou k-tici s opakováním z n prvků vybrat $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ způsoby.

Zavádějící mohou být při vysvětlování rozdílu mezi variacemi a kombinacemi pojmy *záleží na pořadí a nezáleží na pořadí.* Problém si můžeme ukázat na následujícím příkladu.

Příklad:

Kolik uspořádaných šestic lze vytvořit ze čtyř cifer 0 a dvou cifer 1?

Ze zadání je zřejmé, že pokud hledáme uspořádané šestice, zcela jistě záleží na pořadí nul a jedniček. Při řešení je však nejjednodušší vybrat ze šesti možných míst čtyři místa pro nuly, zbylá dvě místa budou obsazena jedničkami. Zde by mohlo být pro žáky matoucí, že ona čtyři místa mohou vybrat $\binom{6}{4}$ způsoby, tedy použijí vztah pro kombinace nikoliv pro variace. Máme tedy 15 možností, jak vybrat čtyři místa, na něž umístíme nuly. Na zbylých dvou místech budou jedničky. Existuje tedy 15 uspořádaných šestic vytvořených ze čtyř nul a dvou jedniček.

Častou chybou při výuce je nesprávná interpretace faktu, že variace jsou skupiny prvků, u nichž záleží na pořadí. Žáci z výkladu učitele často získávají nesprávný dojem, že ono pořadí v definici je určeno pořadím, v němž prvky ze základní množiny vybíráme. Když jsou v osudí čísla, která postupně vytahujeme a zapisujeme, je pořadí v příslušné variaci samozřejmě určeno pořadím jejich vybírání. Jestliže však tato čísla po vytažení seřadíme do neklesající posloupnosti, nesouvisí jejich pořadí v dané variaci s tím, v jakém pořadí jsme je z osudí vybírali.

Při vysvětlování pojmu *kombinace* je dobré upozornit studenty, že se vlastně jedná o k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny. Je ovšem nutné, aby studenti správně chápali pojem množina, aby věděli, že v množině se nemohou prvky opakovat a nezáleží na jejich pořadí.

Dalším problémem může být například rozdíl mezi kombinacemi *bez opakování* a *s opakováním*. Opakování v různých příkladech může a nemusí znamenat skutečné opakování konkrétních objektů. Vytváříme-li například ze skupiny několika dívek a několika chlapců volejbalové družstvo, vybíráme šest dětí. V určitých případech pro nás mohou být podstatné pouze počty dívek a chlapců v družstvu. Tuto šestici potom můžeme považovat za kombinaci s opakováním. Opakování zde ovšem neznačí opakování dítěte, ale opakování vlastnosti „hoch“ nebo „dívka“.

Kombinatorika se od ostatních matematických disciplín liší také tím, že u příkladů často není možná zkouška. Student je při kontrole většinou odkázán jen na svůj vlastní úsudek. Před samotným řešením by se měl žák zamyslet nad úlohou a pokusit se alespoň o řádový odhad výsledku. A vzhledem k nemožnosti zkoušky tady platí více než kde jinde: cvičení dělá mistra.

Kombinatorika má však také spoustu kladných stránek, na které bychom měli studenty upozornit. Velkou výhodou je to, že v této části matematiky dostávají šanci i horší studenti, jejichž výsledky v matematice nebyly zatím nijak oslňující. Pro studium kombinatoriky na střední škole totiž není třeba téměř žádných předchozích znalostí. Šanci nyní dostávají ti žáci, kteří mají dobré logické myšlení, představivost a schopnost abstrakce. Často zde také vítězí zdravý selský rozum nad matematickým aparátem.

Studenti se často setkávají s příklady tohoto typu:

Příklad:

Kolik trojciferných čísel sestavených pouze s číslic 1, 2, 3, 4, 5 je dělitelných třemi?

Při řešení musíme uvážit ty ciferné součty, které jsou dělitelné třemi – 3, 6, 9, 12, 15. Dále je nutno si rozmyslet, jak lze dané ciferné součty získat (například ciferný součet 6 získáme jako 1+1+4, 2+2+2 nebo 1+2+3). Potom je ještě třeba se zamyslet nad uspořádáním cifer (například cifry 1,1,4 vytvoří tři různá čísla 114, 141, 411). Takto získáme celkem 38 trojciferných čísel s požadovanou vlastností.

Pak studentům zadáme následující příklad.

Příklad:

Kolik čísel mezi čísly 2001 a 2999 je dělitelných třemi?

V tomto případě si ovšem stačí uvědomit, že každé třetí číslo je dělitelné třemi. Stačí zjistit, kolik čísel je mezi čísly 2001 a 2999 a výsledek vydělit 3. Mezi zadanými čísly je 332 čísel dělitelných třemi.

V kombinatorice se žáci setkávají s celou řadou zajímavých příkladů ze života. Více než například při řešení rovnic či logaritmů vidí spojení s reálným životem, počítají praktické a zábavné úlohy, což je dobrou motivací pro řešení kombinatorických úloh.

Příklad:

Nová registrační značka automobilu se skládá z číslic a písmen, obsahuje nejméně 5 a nejvýše 7 znaků, přičemž první písmeno na značce je kódem kraje. Kolik různých značek automobilů existuje?

Při řešení budeme uvažovat 14 písmen značících kraj, ostatní symboly na značku vybíráme z 26 možných písmen a 10 číslic. Řešení rozdělíme na tři části, uvažujeme zvlášť značky obsahující 5, 6 nebo 7 znaků. Dále musíme rozlišovat, na kterém místě ve značce stojí kód kraje. V případě značky složené z pěti znaků získáme použitím pravidla součinu a součtu tento výsledek: $14 \cdot 36^4 + 10 \cdot 14 \cdot 36^3 + 10^2 \cdot 14 \cdot 36^2 + 10^3 \cdot 14 \cdot 36 + 10^4 \cdot 14 = 32504864$. Stejným způsobem řešíme i značky složené ze šesti a sedmi znaků. Celkem dostaneme 43394783710 možných registračních značek automobilů.

Pro řešení následujícího příkladu použijeme Dirichletův princip. Je to jednoduché tvrzení, které umožňuje řešit řadu zajímavých úloh. Dirichletův princip říká, že při každém rozdělení n předmětů do k přihrádek, kde k$<$ n, existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.

Příklad:

Dokažte, že v Praze žijí alespoň dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů.

Předpokládejme, že v Praze žije asi 1 000 000 obyvatel. Bylo dokázáno, že člověk může mít na hlavě až 500 000 vlasů. Obyvatele rozdělíme do skupin očíslovaných čísly 0 – 500 000, podle počtu jejich vlasů. V „nejhorším“ případě bude prvních 500 001 obyvatel rozděleno tak, že v každé skupině bude právě jeden člověk. 500 002. člověk však už zcela jistě bude patřit do některé skupiny, v níž už je zařazen jiný člověk. Dokázali jsme tedy, že v Praze existují alespoň dva lidé se stejným počtem vlasů.

Pomocí Dirichletova principu lze řešit také složitější příklady, u kterých by nás možná na první pohled použití tohoto principu nenapadlo.

Příklad:

Je dáno pět přirozených čísel. Dokažte, že z nich lze vybrat několik čísel tak, že jejich součet je dělitelný pěti.

Daná přirozená čísla označme a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Utvořme součty $s_1, \ldots, s_5$ tak, že $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_5 = a_1 + a_2 + \ldots + a_5$. Pokud je některý ze součtů dělitelný pěti, jsme hotovi. Pokud ne, rozdělíme čísla $s_1, \ldots, s_5$ do čtyř skupin tak, že v i-té skupině budou čísla, která po dělení číslem pět dávají zbytek i, i = 1, 2, 3, 4. Podle Dirichletova principu aspoň v jedné skupině budou dvě čísla. Ta označíme s_m, s_n, kde $m < n$. Potom s_n - s_m je dělitelné pěti. Rozdíl s_n - s_m lze zapsat jako $a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$. Mezi danými čísly lze tedy vybrat několik tak, aby jejich součet byl dělitelný pěti.

Pro studium kombinatoriky a procvičování příkladů mají studenti k dispozici sbírky úloh a učebnice s kombinatorickou tématikou. Zatím však nebyla vytvořena žádná cvičebnice využívající výhody výpočetní techniky. Proto jsem v rámci Fondu rozvoje vysokých škol přihlásila projekt, který by měl tuto mezeru zaplnit.

V rámci tohoto projektu bude vypracována multimediální sbírka příkladů z diskrétní matematiky. Sbírka bude složena ze dvou částí – kombinatoriky a teorie grafů. Každá část potom bude obsahovat motivační příklady, historické poznámky, vzorově řešené příklady a příklady k procvičování, které budou seřazeny podle obtížnosti. Klíčové pojmy a postupy budou popsány v historických souvislostech a v případech, kdy to bude možné, budou uvedeny i podobné verze příkladů tak, jak byly uváděny ve starších matematických textech.

Sbírka bude sloužit pro samostudium studentům učitelského i odborného studia matematiky a současně bude vhodnou e-learningovou cvičebnicí pro další formy studia. Výsledný text bude vystaven na webových stránkách Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity a tudíž by mohl sloužit potenciálním zájemcům o studium matematiky.

Součástí sbírky bude podpůrný program generující sady příkladů podle zvolených témat a stupně obtížnosti. Proto by sbírka mohla být vhodným nástrojem pro snadné vytváření různých testů z kombinatoriky pro učitele středních škol. Měla by také studentům umožnit samostatné experimentování v probrané látce. Sbírka bude obsahovat také část, v níž nebudou příklady řazeny do skupin podle témat, což bude při procvičování pro studenty obtížnější, avšak užitečnější.

Stejně jako student již během prvních pár minut vyučovací hodiny pozná, zda má učitel dobrou či špatnou náladu, zjistí velmi rychle, zda učitele zajímá a baví probíraná tématika. Proto pokud budeme kombinatoriku (a vůbec celou matematiku) učit s radostí a nadšením, věřím (a pevně doufám), že bude zajímat i naše studenty.

Literatúra

[1] Fuchs, E.: *Diskrétní matematika pro učitele*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[2] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Prometheus, Praha, 1993.

Adresa autora:

Mgr. Zuzana Voglová
Přírodovědecká fakulta MU
Katedra matematiky
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno
Česká republika
e-mail: zuzana.voglova@foxis.cz

Ako študenti využívajú základné štatistické metódy pri spracovaní záverečných prác

Lucia Vrábelová

Abstract. *This paper deals with application of elementary statistic methods by students, who elaborate their bachelor final thesis. They realized the research using the questionnaire and then they have considerable problems with evaluation and interpretation of acquired information.*

Úvod

Študenti pri spracovávaní svojich záverečných bakalárskych alebo diplomových prác často realizujú rozličné prieskumy, na čo využívajú dopytovanie respondentov formou dotazníkov resp. ankiet. Pri vyhodnocovaní získaných odpovedí najčastejšie využívajú percentuálne vyjadrenie relatívnej početnosti výskytu jednotlivých odpovedí na danú otázku. Toto vyhodnotenie potom znázorňujú graficky pomocou stĺpcového alebo kruhového diagramu. Cieľom tohto článku je poukázať na najčastejšie chyby, ktorých sa pri tomto vyhodnocovaní študenti dopúšťajú.

Stanovenie problému

Študenti majú v dotazníkoch uvedené tzv. uzavreté otázky, teda otázky, ku ktorým je respondentovi ponúknutých viacero možných odpovedí. Respondent si vyberie jednu alebo viacero vhodných odpovedí a tieto v dotazníku vyznačí. S vyhodnotením percentuálneho zastúpenia jednotlivých odpovedí študenti nemajú problém, ak je v otázke možné vyznačiť len jednu vyhovujúcu odpoveď, napr.

Otázka 1: Uveďte Vaše pohlavie:

☐ *muž*

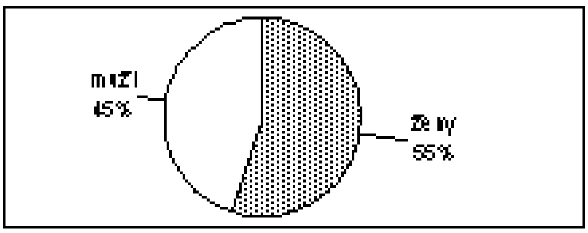
☐ *žena.*

Je zrejmé, že v takejto otázke žiadny respondent nemohol vyznačiť obidve odpovede ako vyhovujúce. Ak sa študent opytoval napr. 100 respondentov a z toho bolo 55 žien a 45 mužov, je výpočet percentuálneho zastúpenia (relatívnej početnosti) žien a mužov jednoduchý: ženy predstavujú 55% a muži 45% opýtaných:

ženy 55%

muži 45%

Tieto odpovede nie je problém znázorniť kruhovým diagramom:



Obrázok 1 Percentuálne zastúpenie odpovedí na otázku 1

Problémy nastávajú vtedy, ak je na jednu otázku možné odpovedať vyznačením viacerých vhodných odpovedí. V dotazníku sa napr. vyskytla otázka:

Otázka 2: Ktoré z uvedených podnikov používate na prepravu a doručovanie zásielok?[3]

☐ A *Slovenská pošta, a.s.*

☐ B *iné*

Respondenti mohli samozrejme vyznačiť jednu alebo obe odpovede. Pri percentuálnom vyhodnotení výskytu jednotlivých odpovedí nastáva u študentov problém. Najčastejšie sa dopúšťajú nasledujúcich chýb:

– nevedia si stanoviť vhodnú metódu vyhodnocovania odpovedí,

– nesprávne si stanovia základ pre výpočet počtu percent, teda namiesto počtu všetkých odpovedí, ktoré získali, určia ako základ (100%) počet respondentov,

– mýlia si pojmy absolútna početnosť a relatívna početnosť,

– neoveria si správnosť výpočtu spočítaním všetkých relatívnych početností,

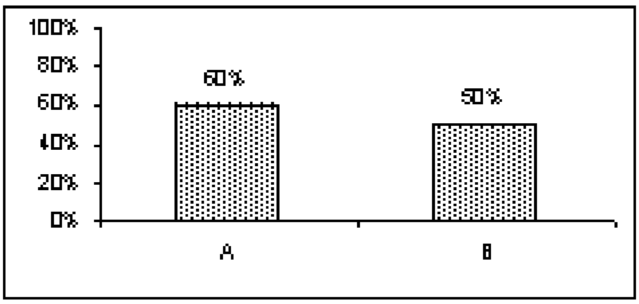
– pri grafickom vyhodnocovaní neuvážia, prečo nie je možné nakresliť kruhový diagram, ak súčet všetkých relatívnych početností u nich prekračuje 100%, preto si vlastne neuvedomia nesprávnosť svojho výpočtu,

– uvedomujú si, že vo výpočte musí byť chyba, ale viac sa nad touto skutočnosťou nezamýšľajú,

– svoje výsledky nesprávne interpretujú.

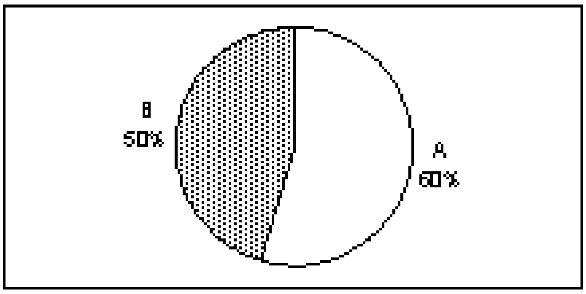
Uvediem príklad.

Nech na danú otázku 2 v dotazníku odpovedalo 100 respondentov. 55 z nich označilo odpoveď A, 34 vyznačilo odpoveď B a 5 respondentov vyznačilo obe odpovede ako vyhovujúce. Študent pri vyhodnocovaní odpovedí na danú otázku prehlási, že odpoveď A sa vyskytla 60 krát, teda jej relatívna početnosť je 60% zo všetkých odpovedí a odpoveď B sa vyskytla 50 krát, teda jej relatívna početnosť je 50% z odpovedí. Toto svoje vyhodnotenie dokáže aj znázorniť stĺpcovým diagramom:



Obrázok 2 Stĺpcový diagram percentuálneho zastúpenia odpovedí na otázku 2

Takéto zobrazenie pomocou kruhového diagramu samozrejme nie je možné a to z jednoduchého dôvodu: kruh (100%) nie je možné rozdeliť na dve dizjunktné časti, z ktorých jedna predstavuje 60% kruhu a druhá 50% kruhu. Aj keď Microsoft Excel takéto zobrazenie povolí, pri pohľade na tento graf je zrejmé, že to, čo je vyznačené ako 50%, nemôže predstavovať 50% - polovicu.



Obrázok 3 Kruhový diagram percentuálneho zastúpenia odpovedí na otázku 2

Z vlastnej skúsenosti môžem povedať, že takýto spôsob výpočtu používajú takmer všetci študenti. Keď sme sa študentov pri obhajobách ich záverečných bakalárskych prác spytovali, ako je možné, že súčet ich relatívnych početností je väčší ako 100%, zdôvodňovali túto skutočnosť tým, že niektorí respondenti vyznačili viacero odpovedí na jednu otázku. Takéto vyhodnotenie uvedenej otázky a jeho interpretácia nemá ale žiadnu výpovednú hodnotu a je prakticky nepoužiteľné. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že keďže súčet percent je 110%, tak 10 respondentov vyznačilo v položenej otázke odpoveď A aj B. Ani tento údaj však nie je správny, pretože v skutočnosti to bolo 5 respondentov. Teda výsledky sú na prvý pohľad veľmi zavádzajúce. Takisto nie je možné týmto spôsobom medzi sebou porovnávať percentuálny výskyt jednotlivých odpovedí. Pri dvoch možných variantoch odpovede na položenú otázku by sa ešte krátkym zamyslením sa dalo zistiť, koľko respondentov vyznačilo len odpoveď A, koľkí vyznačili len odpoveď B a koľkí obe odpovede. Jediný správny záver, ktorý môže študent vyvodiť zo svojho percentuálneho vyhodnotenia odpovedí na danú otázku je taký, že ak 60% respondentov vyznačilo odpoveď A, tak potom 40% ju vôbec nevyznačilo. Podobne, ak 50% respondentov vyznačilo odpoveď B, tak potom zvyšných 50% respondentov odpoveď B nevyznačilo. Takáto interpretácia by bola správa, avšak relatívne málo hovoriaca, pretože dôležitejšie pre vyhodnocovanie odpovedí na danú otázku je porovnávať ich percentuálne zastúpenia navzájom.

Problém však nastáva, ak je možných odpovedí viac ako dve. Majme napríklad takúto otázku:

Otázka 3: Čo pokladáte za silné stránky Slovenskej pošty, a.s.? [3]

☐ A *odbornosť zamestnancov*

☐ B *rýchlosť poskytovania služieb*

☐ C *podmienky pri čakaní na vybavenie záležitostí*

☐ D *dostupnosť*

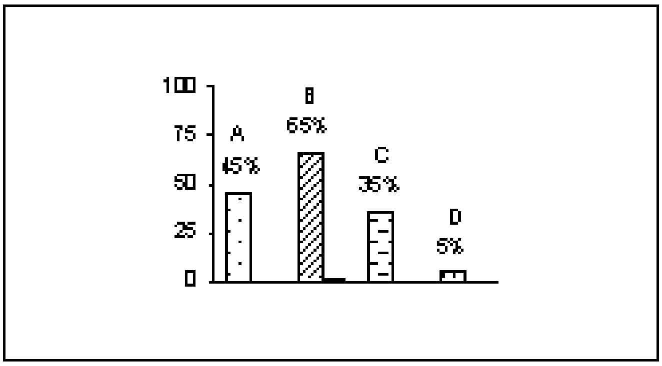
Povedzme, že zo 100 respondentov vyznačilo odpoveď A 20, odpoveď B 30 z nich, odpoveď C 10 z nich, odpoveď D 5 z nich, súčasne A aj B vyznačili desiati, B aj C desiati a odpovede A, B aj C vyznačilo 15 respondentov. Študenti pri vyhodnocovaní výskytu jednotlivých odpovedí postupujú takto:

Spočítajú výskyt jednotlivých odpovedí, teda odpoveď A sa vyskytla 45 krát, odpoveď B sa vyskytla 65 krát, odpoveď C 35 krát, odpoveď D 5 krát. Z toho vypočítajú relatívne početnosti nasledovným spôsobom:

Tabuľka 1 Zastúpenie odpovedí na otázku 3

odpoveď	absolútna početnosť	relatívna početnosť
A	45	45%
B	65	65%
C	35	35%
D	5	5%

Vypočítané údaje potom študenti zobrazia stĺpcovým diagramom:



Obrázok 4 Stĺpcový diagram percentuálneho zastúpenia odpovedí na otázku 3

Zobrazenie kruhovým diagramom študenti v tomto prípade nevyužívajú.

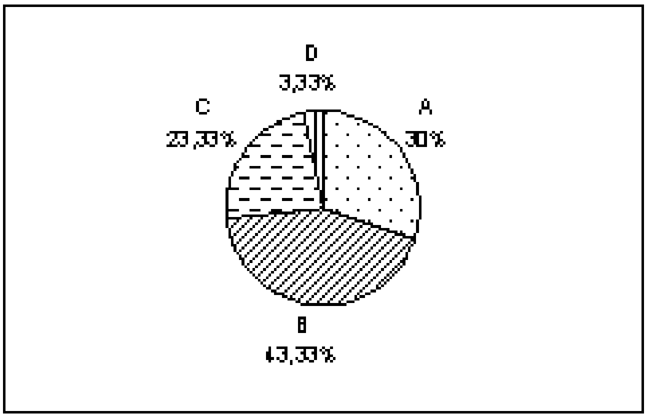
Správny postup

Záverom z výpočtov v tabuľke 1 je, že odpoveď B má spomedzi všetkých odpovedí najväčšie percentuálne zastúpenie a to 65%. V skutočnosti ale môžeme tvrdiť len to, že odpoveď B vyznačilo 65% respondentov a nevyznačilo ju 35% respondentov. Skutočné percentuálne zastúpenie odpovede B spomedzi všetkých vyznačených odpovedí je 43,33%. Z hodnôt uvedených v tabuľke 1 je v podstate nemožné určiť napríklad to, koľko respondentov vyznačilo nie jednu, ale dve odpovede a ktoré to boli. Správne by boli výsledky odpovedí na otázku 3 vyhodnotené takto:

Tabuľka 2 Správne vyhodnotenie odpovedí na otázku 3

odpoveď	absolútna početnosť	relatívna početnosť
A	45	30%
B	65	43,33%
C	35	23,33%
D	5	3,33%
spolu	150	100%

Z takéhoto vyhodnotenia je samozrejme možné nakresliť aj kruhový diagram:



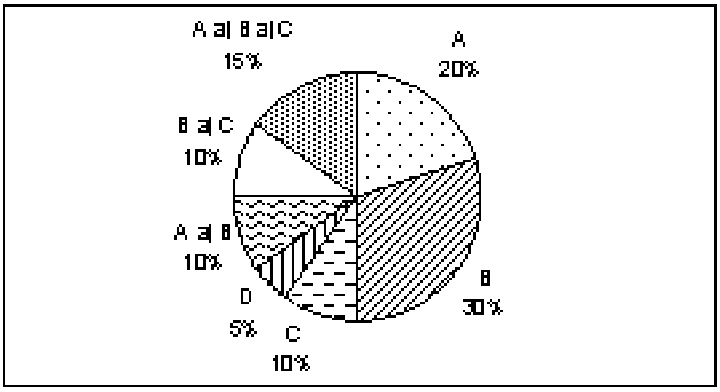
Obrázok 5 Percentuálne zastúpenie odpovedí na otázku 3

Druhým prijateľným spôsobom vyhodnotenia percentuálneho zastúpenia odpovedí na otázku 3 je takéto vyhodnotenie:

Tabuľka 3 Percentuálne vyhodnotenie odpovedí na otázku 3

odpoveď	absolútna početnosť	relatívna početnosť
A	20	20%
B	30	30%
C	10	10%
D	5	5%
A aj B	10	10%
B aj C	10	10%
A aj B aj C	15	15%
spolu	100	100%

Tomu zodpovedajúci kruhový diagram je nasledujúci:



Obrázok 6 Vyhodnotenie odpovedí na otázku 3

Záver

Zo strany študenta, vyhodnocovanie odpovedí na otázky v dotazníkoch je potrebné realizovať uvážlivo a metódy a pojmy matematickej štatistiky používať zodpovedne, aby získané výsledky boli prakticky použiteľné. Nemenej dôležitá je aj správna interpretácia vypočítaných ukazovateľov.

Z pohľadu vyučujúceho musím žiaľ konštatovať, že z trinástich študentov, ktorí vo svojej záverečnej bakalárskej práci realizovali nejaký prieskum, len v jednej práci boli výsledky vyhodnotené správne. V extrémnych prípadoch študenti dokonca tvrdili, že napríklad odpoveď A mala 100% zastúpenie zo všetkých odpovedí, odpoveď B mala takisto 100% zastúpenie zo všetkých odpovedí a odpoveď C mala 30% zastúpenie zo všetkých odpovedí. Preto si myslím, že pri výučbe štatistiky by malo byť, popri tom, aby študenti ovládali správne postupy pri rôznych štatistických metódach, nemenej dôležité aj to, aby vypočítané výsledky vedeli aj správne (alebo vôbec nejako) interpretovať a aby si vedeli zvoliť vhodný štatistický nástroj pre svoj konkrétny problém.

Literatúra

[1] Chajdiak, J.: *Štatistika jednoducho*, Statis, Bratislava, 2003.

[2] Chajdiak, J.: *Štatistika v Exceli*, Statis, Bratislava, 2002.

[3] Záverečné bakalárske práce vypracované na Katedre spojov, Fakulta PEDaS, Žilinská univerzita, 2005.

Adresa autora:
Mgr. Lucia Vrábelová
Katedra spojov
Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov
Žilinská univerzita
Univerzitná 1
010 26 Žilina
e-mail: lucia.vrabelova@fpedas.utc.sk