APLIKÁCIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU

Diplomová práca

Lenka Gabrišová

KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Študijný program:
Učiteľstvo akademických predmetov
v kombinácii predmetov
matematika - informatika

Vedúci diplomovej práce: PaedDr. Ján Gunčaga, PhD.

Ružomberok

Dátum odovzdania práce: 1. apríl 2009

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne a že som uviedla všetky použité pramene a literatúru, z ktorých som čerpala.

Ružomberok, 1. apríl 2009 ....

vlastnoručný podpis

POĎAKOVANIE

Moje poďakovanie patrí hlavne môjmu konzultantovi PaedDr. Jánovi Gunčagovi, PhD. za hodnotné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri vypracovaní diplomovej práce.

Anotačný list

Resumé

Témou diplomovej práce sú aplikácie diferenciálneho počtu v rôznych oblastiach. Je rozdelená na osem kapitol. Prvá kapitola obsahuje históriu, ďalších päť sa venuje teórii diferenciálneho počtu. V siedmej kapitole sú príklady z jednotlivých oblastí, kde možno diferenciálny počet využiť. V poslednej kapitole sú výsledky cvičení zo všetkých kapitol. Cieľom práce bolo poskytnúť študentom na vysokých školách ucelený učebný text, ktorý obsahuje riešené a neriešené úlohy.

Annotation

Summary

My Master thesis is dedicated to aplications of differential calculus in different areas. It is divided into eight sections. The first chapter includes history, the following five chapters describe the theory of differential calculus. In the seventh chapter there are examples from different areas where differential calculus is used. The last chapter includes solutions of exercises from all chapters. The aim of Master thesis was to provide a suitable learning text to university students, which contains solved and unsolved exercises.

PREDHOVOR

Matematika by nemala byť pokladaná za hotovú, kým ju neučiníte tak jasnú, že ju môžete vysvetliť prvému človeku, ktorého na ulici stretnete.

David Hilbert

Keďže matematika je pre väčšinu študentov nie veľmi populárnym predmetom, chceme prispieť k tomu, aby sa to zmenilo. Matematika je veda, ktorej je potrebné rozumieť, nedá sa naučiť a preto sa stotožňujem s vyššie uvedeným citátom. Našu elektronickú učebnicu sme sa snažili preto napísať tak, aby bola zaujímavá nielen pre študentov matematiky, ale aby ukázala, že matematika sa dá aplikovať v rôznych odvetviach. Obsahuje teóriu, ale tá je dostatočne vysvetlená na apletoch, ktoré sú oveľa názornejšie ako obrázky a tým lepšie vystihujú jednotlivé súvislosti.

Obsah

ÚVOD

Internet je čoraz viac sa vyskytujúcim a nevyhnutným prvkom v živote modernej spoločnosti, ktorý prispieva k ľahkému prístupu k veľkému množstvu informácií. Informácie nachádzajúce sa na internete nás môžu informovať, zabávať, ale v neposlednej miere aj vzdelávať.

Cieľom tejto diplomovej práce je vytvoriť elektronickú učebnicu z časti matematickej analýzy nazvanou Aplikácie diferenciálneho počtu. Učebnica by mala byť nápomocná hlavne študentom matematiky. Diplomová práca obsahuje aplety, ktoré pomáhajú lepšie pochopiť daný text. Aplety sú priložené na CD.

Aplety sú interaktívne javovské programy. Umožňujú dynamicky demonštrovať rôzne javy. Animácia je dosiahnutá najčastejšie možnosťou pohybu nejakého bodu, resp. pomocou posuvníka. Aplety obsahujú aj sprievodný text, matematický teoretický základ, vzorce a pod.

Aplety môžeme využiť pri vyučovaní matematiky ako motivačný prostriedok ako aj priamo pri vysvetľovaní nového učiva alebo pri opakovaní. Môžeme ho predvádzať demonštračne cez projektor pre celú triedu, ale väčšinou je efektívnejšie, ak aplet môžu používať samostatne - môžu pracovať s apletom vlastným tempom, sami meniť voliteľné parametre, skúmať interaktívne dané javy, vyvodzovať závery, analyzovať a zovšeobecňovať.

V našej práci sme aplety robili v programe GeoGebra. GeoGebra je dynamický matematický softvér pre vyučovanie na stredných školách, ktorá spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Na jednej strane GeoGebra je dynamický (interaktívny) geometrický systém. Umožňuje zostrojiť body, vektory, úsečky, priamky, kužeľosečky.... a potom ich dynamicky (interaktívne) zmeniť. Na druhej strane rovnice a súradnice môžeme zadať aj priamo. Takto s GeoGebrou dokážeme pracovať a počítať s premennými, číslami, vektormi a bodmi, nájsť deriváciu alebo integrál funkcie a ponúka príkazy ako je odmocnina alebo extrém.

V jednotlivých kapitolách sa sústreďujeme na vysvetlenie jednotlivých matematických pojmov tak, aby boli ľahšie pochopené študentmi. Kapitoly obsahujú aj názorne riešené príklady, ktoré pomáhajú ľahšie danej téme porozmieť. Zámerom našej práce bolo vytvoriť prehľadnú učebnicu, ktorá by ozrejmila zmysel diferenciálneho počtu v matematike. Zároveň sme text doplnili vhodnými obrázkami.

Očakávame, že táto učebnica sa stretne so záujmom a efektívnym využitím.

Kapitola 1

História

Za tvorcov diferenciálneho a integrálneho počtu dnes pokladáme Leibniza a Newtona, ktorý pôsobili v 17. storočí.

Už indický matematik Bhaskara (1114-1185) však ukázal príklad toho, čo dnes poznáme ako „diferenciálny koeficient" a takisto podal základnú myšlienku dnešnej „Rolleho vety". Indický matematik Madhava spolu s ostatnými matematikmi Keralskej školy v 14. storočí „podnikli mnohé zaujímavé výlety do diferenciálneho a integrálneho počtu."

Za priekopníka v oblasti diferenciálneho počtu môžeme považovať francúzskeho matematika Pierra de Fermata (1608-1665) svojím prístupom k riešeniu úloh o dotyčniciach, v ktorom použil v podstate metódy infinitezimálneho charakteru.

Dlhšiu dobu sa vedú nekonečné debaty, ktorý z dvojice Leibniz, Newton ako prvý prišiel s dôležitými myšlienkami celého infinitezimálneho počtu. Vyzerá to však tak, že úplnú pravdu sa už nikdy nedozvieme. Jeden z najdôležitejších Leibnizových príspevkov bola jeho matematická notácia. Leibniz často trávil dni vymýšľaním najvhodnejšieho symbolu pre svoju myšlienku. Najhorší dôsledok rozporu medzi Newtonom a Leibnizom bolo rozdelenie matematikov na dva tábory, čo značne zabrzdilo britskú analýzu v porovnaní s kontinentálnou na dlhý čas. Newtonova terminológia a notácia bola jasne menej flexibilná a pohodlná ako Leibnizova, napriek tomu bola umelo udržiavaná vo

Veľkej Británii až do 19. storočia, kedy práca spolku Analytical Society konečne vyvrcholila úspechom v podobe zavedenie Leibnizového značenia na britských ostrovoch. Časť historikov v súčasnosti zastáva názor, že Newton objavil počet skôr ako Leibniz, avšak Leibniz ho publikoval skôr. Je však nesporné, že obaja objavili infinitezimálny počet nezávisle na sebe, a tak sa to aj berie.

Newtonov prístup mal fyzikálny charakter a deriváciu chápal predovšetkým ako rýchlosť *(„Philosophiae naturalis principia mathematica")*. Leibnizov prístup mal geometrickú povahu a deriváciu chápal ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode. Prvú učebnicu infinitenzimálneho počtu *„Analyse des infiniment petites pour l'intelligence des lignes courbes"* vydal v roku 1696 francúzsky matematik Guillaumus Francois Antoin de L'Hospital [1661-1704]. Treba však poznamenať, že základné úvahy tvorcov infinitenzimálneho počtu boli ešte poznačené mnohými pojmovými nepresnosťami a logickými nedôslednosťami.

Veľké zásluhy o rozvoj matematiky má francúzsky matematik Augustin Louis Cauchy [1789-1857]. Jeho práca *„Course d'analyse"* [1821] je základnou učebnicou diferenciálneho a integrálneho počtu, ktorá sa cituje aj dnes.

Čiastočné zásluhy na rozvoji diferenciálneho a integrálneho počtu sa pripisujú aj Barrowovi, Descartovi, Fermatovi, Huygensovi a Wallisovi.

Kapitola 2

Derivácie vyšších rádov

Základným pojmom diferenciálneho počtu je pojem derivácie.

Definícia 2.0.1. Hovoríme, že funkcia f má **deriváciu** v bode x_0 (alebo, že je diferencovateľná v bode x_0), ak existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Túto limitu označujeme znakom $f'(x_0)$ a nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0.

Keďže derivácia elementárnej funkcie je funkciou, má zmysel hovoriť o derivácii derivácie atď. Druhou deriváciou funkcie f je derivácia funkcie f' (ak existuje).

Uvažujme o funkcii f definovanej na množine M. Predpokladajme, že na tejto množine existuje aj derivácia f'. Môže sa stať, že funkcia f', t.j. derivácia funkcie f, má na množine M deriváciu. Bude to derivácia funkcie f' a budeme ju nazývať **druhou deriváciou**, alebo **deriváciou druhého rádu funkcie** f.

Budeme ju označovať f'' alebo $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Napr. funkcia $f(x) = x^4$ má deriváciu $f'(x) = 4x^3$ na intervale $(-\infty, \infty)$. Na tom istom intervale má táto derivácia deriváciu $[f'(x)]' = 12x^2$. Podľa toho čo sme povedali, je teda $12x^2$ druhou deriváciou funkcie $f(x) = x^4$. Môžeme zapísať: $f''(x) = 12x^2$.

Ak má aj druhá derivácia deriváciu, budeme ju nazývať **treťou deriváciou** alebo **deriváciou tretieho rádu funkcie** $f(x)$ a budeme ju označovať $f'''(x_0)$ alebo $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$.

Deriváciou n-tého rádu alebo **n-tou deriváciou** funkcie f je derivácia $(n-1)$-ej derivácie funkcie f (ak existuje).

Označujeme $f^{(n)}(x)$ alebo $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Je dobré si uvedomiť, že pre rád derivácie platí podobný zákon ako pre stupeň mocniny pri násobení mocnín: $f^{(n+m)}(x) = [f^{(m)}(x)]^{(n)} = [f^{(n)}(x)]^{(m)}$

Derivácie $f^{(n)}, n \in N, n \geq 2$ nazývame súhrnne **deriváciami vyššieho rádu.**
Derivácie vyšších rádov označujeme takto:
f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$,...,$f^{(n)}$
y'', y''',$y^{(4)}$, $y^{(5)}$,...,$y^{(n)}$

Na počítanie derivácií využívame vlastnosti limít. Platia pravidlá o derivácií súčtu a súčinu dvoch funkcií, pravidlá pre derivovanie podielu zloženej funkcie, inverznej funkcie. Vieme podľa definície derivácie derivovať niektoré elementárne funkcie. Zložitejšie funkcie vieme derivovať podľa týchto pravidiel.

1. Vypočítame $(x^k)^{(n)}$, pre $k > n$, $k < n$ a $k = n$.
   Skúsime najprv vypočítať konkrétnu deriváciu napr.: $f : y = x^5$, $x \in R$, $k \in N$.
   $f'(x) \quad = 5x^4$,
   $f''(x) \ = 5 \cdot 4x^3$,
   $f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3x^2$,
   $f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x^1$,
   $f^{(5)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1x^0$,
   $f^{(6)}(x) = 0$.

   Všeobecne postupným derivovaním dostaneme
   $f'(x) = kx^{k-1}$,
   $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$
   $\vdots$
   $f^{(k-1)}(x) = k(k-1)\cdots 2{\cdot}x^1$, $x \in R$.
   Potom $f^{(k)}(x) = k!\,x^0 = k!$ a pre $n > k$, $n \in N$ platí $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in R$.
   Ak to zhrnieme, pre všetky $n \in N$ a pre všetky $x \in R$ platí
   $f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $n < k$, $f^{(k)}(x) = k!$, $f^{(n)}(x) = 0$, $n > k$.

2. Odvodíme n-tú deriváciu funkcie $y = \ln x$, $x > 0$.
$y' = \dfrac{1}{x}$
$y'' = -1(x^{-2}) = -\dfrac{1}{x^2}$
$y''' = -(-2)x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$
$y^{(4)} = 2(-3)x^{-4} = -\dfrac{3 \cdot 2}{x^4}$
$y^{(5)} = -(3 \cdot 2)(-4)x^{-5} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{x^5}$
$\vdots$
$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$
Ak $y^{(n+1)} = (-1)^{(n)}\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ a vzťah y^n platí pre $n = 1$, platí aj pre $n > 0$
a dokázali sme, že $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3. Odvodíme n-tú deriváciu funkcie $y = \sin x$, $x \in R$.
$y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\dfrac{\pi}{2}\right)$
$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\vdots$
$y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
Ak $y^{(n+1)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$ a vzťah $y^{(n)}$ platí pre $n = 1$,
dokázali sme indukciu, že $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Pre funkciu $\cos x$ je odvodenie podobné.

4. Odvodíme n-tú deriváciu funkcie $y = a^x$, $x \in R$, $a > 0$.
$y' = a^x \ln a$
$y'' = a^x \ln^2 a$
$y''' = a^x \ln^3 a$
$\vdots$
$y^{(n)} = a^x \ln^n a$
Ak je $y^{(n+1)} = a^x \ln^{n+1} a$ a vzťah $y^{(n)}$ platí pre $n = 1$, dokázali sme indukciu, že $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.

5. Odvodíme n-tú deriváciu funkcie $y = \log_a x$.

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$y'' = -\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{3!}{x^4}$$

$$y^{(5)} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{4!}{x^5}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$$

Ak $y^{(n+1)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1} \ln a}$ a vzťah $y^{(n)}$ platí pre $n = 1$,

dokázali sme indukciu, že $(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$.

Zhrnutie vzorcov pre n-tú deriváciu funkcií:

vzorec	podmienky platnosti
$[x^k]^{(n)} = 0$	$x \in R,\ k \in N,\ k > n$
$[x^n]^{(n)} = n!$	$x \in R$
$[e^x]^{(n)} = e^x$	$x \in R$
$[\ln x]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$x > 0$
$[\ln[x]]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$x \neq 0,\ x > 0$
$[\sin x]^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$	$x \in R$
$[\cos x]^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$	$x \in R$
$[x^k]^{(n)} = k(k-1)...(k-n+1)x^{k-n}$	$x \in R,\ k \in N,\ k < n$
$[x^a]^{(n)} = a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n}$	$x > 0,\ a \in R$
$[a^x]^{(n)} = a^x \ln^n a$	$x \in R,\ a > 0$
$[\log_a x]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ n < k$
$[\log_a[x]]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$	$x \neq 0,\ a \in R - N,\ a \neq 1,\ x > 0$

Pri stanovovaní derivácií vyšších rádov postupujeme tak, že si postupne vypočítame všetky derivácie, až kým neprídeme k derivácii určeného rádu. Napr. ak máme určenú

funkciu f a chceme nájsť jej deriváciu 8-eho rádu, najprv určíme prvú deriváciu, z nej druhú deriváciu,..., až zo siedmej derivácie určíme ôsmu deriváciu (deriváciu 8-eho rádu).
Z tohto príkladu vidíme, že výpočet derivácie vyššieho rádu funkcie môže byť vo všeobecnosti veľmi pracný a zdĺhavý, pretože musíme postupne vypočítať derivácie všetkých nižších rádov. V nasledujúcich príkladoch je ale vidieť, že v niektorých príkladoch sa dajú jednoducho odvodiť všeobecné vzorce pre vyššie derivácie danej funkcie.
Viac poznatkov, definícií a príkladov sa nachádza aj v knihách od Blaško [2], Hlaváček [5], Kluvánek [12] a Mihalíková [13].

Príklad 1:

Vypočítajte 90-tu deriváciu funkcie $y = \cos x$ na množine R.

Riešenie:

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, $(\cos x)''' = \sin x$, $(\cos x)^{(4)} = \cos x$.

Preto platí $(\cos x)^{(88)} = \cos x$

Potom $(\cos x)^{(89)} = -\sin x \Rightarrow (\cos x)^{(90)} = -\cos x$

Príklad 2:

Vypočítajte $(\log_2 3x)^{(12)}$.

Riešenie:

$(\log_2 3x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$

$(\log_2 3x)'' = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{-1}{x^2}$

$(\log_2 3x)''' = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{2}{x^3}$

$(\log_2 3x)^{(4)} = -\dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{3!}{x^4}$

$(\log_2 3x)^{(5)} = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{4!}{x^5}$

V každej ďalšej derivácií zostane konštanta $\dfrac{1}{\ln 2}$, násobí sa exponentom a tento sa potom zníži (je záporný!) o jednotku. Po ďalších siedmich deriváciách dostaneme (premyslite si dôkladne aj znamienko)

$(\log_2 3x)^{(12)} = -\dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{11!}{x^{12}}$

Príklad 3:

Vypočítajte štvrtú deriváciu funkcie $y = e^{-x} \sin x$.

Riešenie:

$y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$y'' = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -2e^{-x} \cos x$

$y''' = -2(-e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$y^4 = -2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) = 2e^{-x}(-\cos x - \sin x + \cos x - \sin x) =$

$= 2e^{-x}(-2 \sin x) = -4e^{-x} \sin x$

Príklad 4:

Vyjadrite tretiu deriváciu funkcie $y = \operatorname{tg} x$, $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Riešenie:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'' = \frac{0 \cdot \cos^2 x - 1 \cdot 2 \cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$y''' = \frac{2 \cdot \cos x \cos^3 x - 2 \sin x 3 \cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} = 2\frac{\cos^4 x + 3 \cos^2 x \sin^2}{\cos^6 x} =$$

$$= 2\frac{\cos^2 x(\cos^2 x + 3 \sin^2)}{\cos^6 x} = 2\frac{\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = 2\frac{3 - 2 \cos^2 x}{\cos^4 x}$$

Príklady a cvičenia som čerpala z kníh Blaško [2] a Hlaváček [5].

CVIČENIA

1. Vyjadrite druhú deriváciu y'', ak:

   a) $y = x\sqrt{1 + x^2}\,;$

   b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,;$

   c) $y = |x|^3\,;$

   d) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x\,;$

   e) $y = x \ln x\,.$

2. Vyjadrite tretiu a piatu deriváciu funkcie $y = f(x)$, ak:

a) $y = x^3 \sin x\,;$

b) $y = x^3 \cos 2x\,;$

c) $y = e^x \sin x\,;$

d) $y = x^5 \ln x\,;$

e) $y = x \;\; e^x \sin x\,.$

3. Vypočítajte deriváciu n-tého rádu, $n \in N$, funkcie $y = f(x)$, ak:

a) $y = \sin^2 x\,;$

b) $y = \cos^3 x\,;$

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}\,;$

d) $y = \dfrac{x}{x^2-1}\,;$

e) $y = x \;\; e^x\,.$

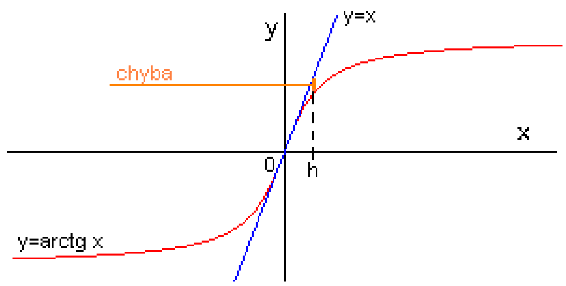
Kapitola 3

Diferenciál funkcie

3.1 Pojem diferenciálu. Diferencovateľnosť funkcie

V matematickej analýze je častou úlohou úloha aproximovať, t.j. približne nahradiť danú funkciu f nejakou jednoduchšou funkciou g, ktorá by sa od funkcie f líšila minimálne, t.j. aby $\mid f(x) - g(x) \mid$ bola malá.

Funkcia $f(x) = \operatorname{arctg} x$ má na okolí počiatku (bodu $x_0 = 0$) graf veľmi podobný priamke $y = x$, čo je dotyčnica v bode $x_0 = 0$. Ak máme napr. vypočítať funkčnú hodnotu v okolí počiatku, zrejme sa nedopustíme veľkej chyby (Obr. 1), ak namiesto počítania podľa zápisu $y = \operatorname{arctg} x$ použijeme podstatne jednoduchší zápis $y = x$.



Obr. 1

Toto môžeme urobiť v okolí každého bodu x_0, v ktorom existuje dotyčnica $y = Ax + q$. Teda prírastok (zmena) funkčnej hodnoty pri malej zmene h premennej z bodu x_0 do $x = x_0 + h$ sa dá približne vyjadriť A-násobkom zmeny h , kde A je smernica dotyčnice v bode x_0.

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0. Ak prejdeme od bodu x_0 do bodu x_0+h zmení sa hodnota funkcie o $f(x_0+h)-f(x_0)$. Tento rozdiel niekedy označujeme $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ a nazývame **diferenciou** alebo **prírastkom funkcie** f v bode x_0, ktorý patrí k prírastku h.

Definícia 3.1.1. Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **diferenciál**, ak existuje číslo A a funkcia $\omega(h)$, pre ktorú platí

1. $\omega(0) = 0$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$

taká, že pre prírastok funkcie pri zmene premennej x z hodnoty x_0 na $x_0 + h$ platí $f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + h \cdot \omega(h)$.
Výraz $A \cdot h$ sa nazýva **diferenciál funkcie** v bode x_0 a označujeme $df(x_0)$ alebo dy. Teda $\Delta y = dy + h \cdot \omega(h)$, pre $h \to 0$ pričom $dy = A \cdot h$.

Diferenciál v bode x označujeme stručne dy alebo $df(x)$.

Diferenciál dx nezávislej premennej x je ľubovoľná zmena hodnoty x korešpondujúca s diferenciálom dy, ktorý je definovaný $dy = f'(x)dx$, kde $y = f(x)$ a $f'(x)$ je derivácia funkcie $f(x)$.
Stručne $dy = f'(x)dx$ alebo $df(x) = f'(x)dx$.

Veta 3.1.1. *Funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 práve vtedy, ak má deriváciu v bode x_0. Pritom platí $df(x_0) = f'(x_0) \cdot h$.*

Dôkaz. Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x_0, platí

$$f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + h \cdot \omega(h) \text{ a preto}$$
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \omega(h), \text{ pre } h \neq 0 \text{ a } \omega(h) \to 0.$$

Odtiaľ potom vyplýva, že existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A,$$

t.j. existuje derivácia $f'(x_0) = A$.
Opačne, nech existuje

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Odtiaľ vyplýva, že $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \omega(h)$, kde $\omega(h) \to 0$ pre $h \to 0$ a preto $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h+h\cdot\omega(h)$ čo znamená, že funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 a $A = f'(x_0)$. □

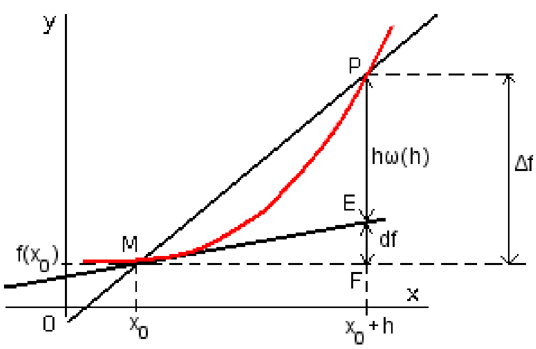
Veta 3.1.1 hovorí, že existencia derivácie v bode je ekvivalentná s diferencovateľnosťou v bode.

Poznámka 1. Z vety 3.1.1 máme tvar diferenciálu v bode x_0 (ak $h = x - x_0$) $df(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$. Zápis $f'(x)dx$ je bežný na označenie diferenciálu v ľubovoľnom bode x.

Funkciu, ktorá má v bode $x_0 \in I$ deriváciu n-tého rádu nazývame n-krát diferencovateľnou funkciou v bode x_0. Ak je funkcia f n-krát diferencovateľná v každom bode intervalu I hovoríme, že funkcia f je n-krát diferencovateľná na intervale I. Ak funkcia f má na intervale I deriváciu každého rádu (t.j. pre každé $n \in N$ existuje $f^{(n)}$) nazývame ju nekonečne diferencovateľnou na I.

Geometrická interpretácia diferenciálu:

Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0. Potom existuje dotyčnica grafu tejto funkcie v bode $M[x_0, f(x_0)]$. Jej rovnica je $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nech bod $P = [x_0 + h, f(x_0 + h)]$ je bod grafu funkcie f, E a F sú priesečníky priamky $x = x_0 + h$ s dotyčnicou a priamkou $y = f(x_0)$. Potom $E = [x_0+h,\ f(x_0)+f'(x_0)\,h]$, $F = [x_0 + h,\ f(x_0)]$. Rozdiel y-ových súradníc bodov E, F sa rovná $f'(x_0)h$, t.j. rovná sa diferenciálu funkcie f v bode x_0.



Obr. 2

Podobný obrázok si môžeme pozrieť na aplete č.1 (pozri CD), kde môžeme pozorovať aj zmenu diferenciálu.

Príklad 1:

Vypočítajte diferenciál funkcie $y = x^3$ v bode $x_0 = 5$.

Riešenie:

Vieme, že $y' = 3x^2$, $x \in R$. Potom
$dy = y'(x_0)(x - x_0) = 3 \cdot 5^2(x - 5) = 3 \cdot 25(x - 5) = 75(x - 5)$.

Príklad 2:

Porovnajte veľkosť prírastku funkcie $y = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ s jej diferenciálom v bode $x = 2$, ak sa zväčší o $0,01$.

Riešenie:

$x_0 = 2$, $h = 0,01$
$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = 2 \cdot 2,01^3 + 3 \cdot 2,01^2 + 4 \cdot 2,01 + 5 - (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5) = 2 \cdot 8,120601 + 3 \cdot 4,0401 + 4 \cdot 2,01 + 5 - (16 + 12 + 8 + 5) = 41,401502 - 41 = 0,401502$

$dy = f'(x)dx = (6x^2 + 6x + 4)dx = (6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 4) \cdot 0,01 = (24 + 12 + 4) \cdot 0,01 = 0,40$
V našom prípade sa prírastok zhoduje s diferenciálom funkcie do druhého desatinného miesta. Keby sme zvolili zväčšenie x o $0,000001$ zhoda by bola až po piate desatinné miesto.

Príklad 3:

Nech $f(x) = x^3$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Ukážte, že funkcia f je diferencovateľná v bode 2.

Riešenie:

Poznamenajme, že

$$f(2 + h) - f(2) = (2 + h)^3 - 2^3 = 12u + 6u^2 + u^3$$

pre každé číslo h. Takže, ak pre každé h platí

$$\Delta f = 12 + 6h + h^2,$$

tak je funkcia f spojitá v bode 0 a pre každé h je splnené

$$f(2+h) - f(2) = \Delta f.$$

Podľa definície to znamená, že funkcia f je diferencovateľná v bode 2.

Príklad 4:

Približne vypočítajte hodnotu $\sqrt[6]{1,06}$.

Riešenie:

Označme $f(x) = \sqrt[6]{1,06}$ pre $x > 0$ a $P(1)$ okolie bodu $x_0 = 1$ také, že $1,06 \in P(1)$.
Potom $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \dfrac{x^{-\frac{5}{6}}}{6}$, $x > 0$ a pre aproximáciu v okolí $P(1)$ platí
$g(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \dfrac{1}{6}(x-1) = \dfrac{x+5}{6}$, t.j. $\sqrt[6]{1,06} \approx \dfrac{x+5}{6}$.
Z toho vyplýva, že $\sqrt[6]{1,06} \approx \dfrac{1,06+5}{6} = \dfrac{6,06}{6} = 1,01$.
Presnejšia hodnota vypočítaná na kalkulačke je $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$.
To znamená, že chyba výpočtu je menšia ako $1,01 - 1,0097588 < 0,00025$.

Príklad 5:

Približne vypočítajte hodnotu $\sin 46^0$.

Riešenie:

$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + (\cos x)\Delta x$.
Položme $x = 45^0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180}$, t.j. $46^0 = 45^0 + 1^0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}$.
Dosadíme:
$\sin 46^0 = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{4} + \left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180} \approx$
$\approx 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,7175 = 0,7194$.

3.2 Pojem diferenciálu vyššieho rádu

Nech má funkcia $y = f(x)$, $x \in M$ vo vnútornom bode $x_0 \in M$ konečnú n-tú deriváciu $f^{(n)}(x_0)$. Potom polynóm n-tého stupňa $\varphi(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, h \in R$ nazývame **diferenciálom n-tého rádu** (n-tým diferenciálom) funkcie f v bode x_0 a označujeme symbolom $d^n f(x_0, h)$, resp. $d^n f(x_0)$.

Ak má funkcia f v bode x_0 diferenciál n-tého rádu, potom ju nazývame n-krát diferencovateľná v bode x_0. Ak je f n-krát diferencovateľná v každom bode $x_0 \in M$, potom ju nazývame n-krát diferencovateľná na množine M.

Pre $n = 1$ je definícia zhodná s definíciou diferenciálu, resp. diferencovateľnej funkcie. To znamená, že pre $n = 1$ platí $d^1 f(x_0, h) = df(x_0, h) = f'(x_0)h$, $h \in R$.
Z definície vyplýva, že ak má funkcia f v bode x_0 diferenciál n-tého rádu, potom má v bode x_0 taktiež diferenciály rádov 1, 2, ..., $n-1$.
To znamená, že ak je funkcia f v bode x_0 n-krát diferencovateľná, potom je v bode x_0 diferencovateľná rádov 1, 2, ..., $n-1$.
Podobne ako diferenciál prvého rádu, predstavuje diferenciál n-tého rádu $d^n f(x,h)$ na množine M tiež funkciu s dvomi nezávislými premennými $x \in M, h \in R$. Stručne ho označujeme symbolmi $d^n f(x)$, $x \in M$, resp. $d^n f$.

Viac k tejto téme je aj v knihách od Jirásek [9] a Mihalíková [13], odkiaľ som čerpala aj príklady a cvičenia.

Príklad 1:
Vypočítajte druhý a štvrtý diferenciál funkcie $y = \cos x$ v bode 0.

Riešenie:

K nájdeniu diferenciálu potrebujeme príslušnú deriváciu v danom bode.
Keďže $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 0$, platí
$d^2 f(0,x) = -x^2$, $d^4 f(0,x) = x^4$.

CVIČENIA

1. Vypočítajte prírastok Δy a diferenciál dy funkcie $y = x^2$ ak $x = 20$ a $\Delta x = 0,1$.

2. Vypočítajte diferenciál funkcie:

   a) $y = x^2 + x + 1$ v bode $x = 2$ pre $dx = \Delta x = 0,1\,$;

   b) $y = x^3$ v bode $x = 4\,$.

3. Pomocou diferenciálu vypočítajte približne hodnoty:

a) $1,04^5$;

b) $\cos 61^0$.

4. Vypočítajte diferenciál piateho rádu funkcie $f(x) = \ln x$, $x \geq 0$ v bode $x_0 = 1$.

3.3 Základné vety diferenciálneho počtu

3.3.1 Veta o minime (maxime) funkcie

Zopakujme si definície minima a maxima:

Definícia 3.3.1. Nech funkcia f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **lokálne maximum**, ak existuje okolie bodu $O(x_0) \subset I$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Definícia 3.3.2. Nech funkcia f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **lokálne minimum**, ak existuje okolie bodu $O(x_0) \subset I$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Veta 3.3.1. *(Fermatova veta): Ak funkcia f nadobúda v bode c minimum (maximum) a má v tom bode deriváciu, tak $f'(c) = 0$.*

Dôkaz. Nech napr. $f(c)$ je maximum funkcie f na množine A, takže $f(x) \leq f(c)$ pre všetky $x \in A$. Potom pre $x \in A$, $x < c$, je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

a teda

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ďalej pre $x \in A$, $x > c$, je

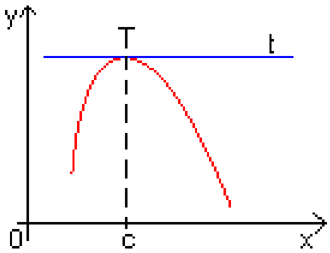
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

a preto

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Platí teda $f'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c)$.
Avšak $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$. Z toho vyplýva, že $f'(c) = 0$. □

Geometrický význam Fermatovej vety:
Ak má funkcia f v bode c, v ktorom nadobúda maximálnu alebo minimálnu hodnotu, deriváciu, tak jej graf má v bode $T[c, f(c)]$ dotyčnicu, ktorá je rovnobežná s osou x.



Obr. 3

3.3.2 Vety o strednej hodnote funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie patria spolu s L'Hospitalovým pravidlom medzi najdôležitejšie a najčastejšie používané aplikácie diferenciálneho počtu. Vety o strednej hodnote funkcie sú tri a nazývajú sa Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho.

Veta 3.3.2. *(Rolleho veta): Nech má funkcia f tieto vlastnosti:*

1. *je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$;*
2. *v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má deriváciu;*
3. *platí: $f(a) = f(b)$.*

Potom v intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod c taký, že $f'(c) = 0$.

Dôkaz. Podľa Weierstrassovej vety o maxime a minime, nadobúda funkcia f svoje maximum M a minimum m.
Môžu nastať dve možnosti:

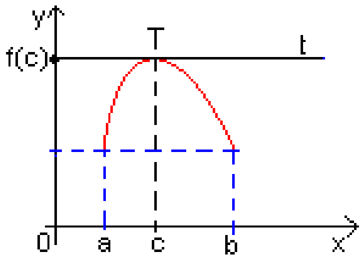
1. funkcia f nadobúda aspoň jednu z hodnôt m, M v nejakom vnútornom bode $c \in (a, b)$.

2. funkcia f nadobúda obidve hodnoty m, M v krajných bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$.

Ak nastane prvý prípad dokážeme, že $f'(c) = 0$. Predpokladajme, že $f(c) = M$. Ak by $f'(c) \neq 0$, potom v nejakom okolí bodu c existujú body c_1, c_2 také, že $f(c_1) > M$ a $f(c_2) < M$. To je však spor s tým, že $f(c) = M$ je maximum funkcie f na $\langle a, b\rangle$. Preto $f'(c) = 0$.

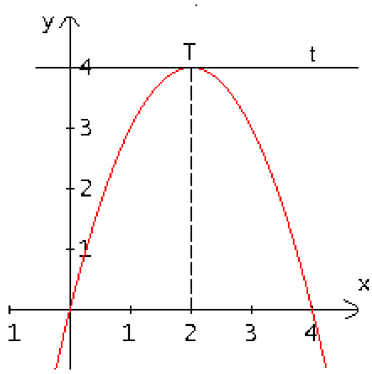
Ak nastane prípad druhý, potom $m = M = f(a) = f(b)$ a v tom prípade je f konštantná na $\langle a, b\rangle$. Potom však v ľubovoľnom bode $c \in (a, b)$ je $f'(c) = 0$. □

Geometrický význam Rolleho vety:
Na obrázku 4 je nakreslený graf funkcie f, ktorá je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$ a pre hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ platí $f(a) = f(b)$. Graf funkcie má v každom bode $[x_0, f(x_0)]$, $x_0 \in (a, b)$, dotyčnicu. Z Rolleho vety vyplýva, že medzi týmito dotyčnicami bude aspoň jedna rovnobežná s osou x. Dotykový bod T má súradnice $[c, f(c)]$.



Obr. 4

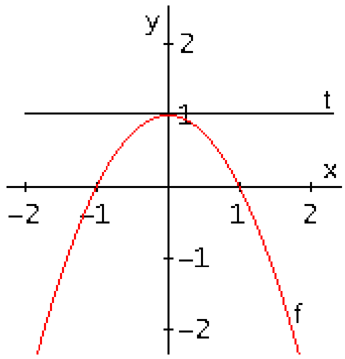
Príklad 1:
Funkcia $f(x) = -x^2 + 4x$ je na intervale $\langle 1, 3\rangle$ spojitá, má na ňom deriváciu a platí $f(1) = f(3) = 3$. Spĺňa predpoklady Rolleho vety, teda na intervale $(1, 3)$ existuje aspoň jeden bod c taký, že $f'(c) = 0$. Derivácia $f'(x) = -2x + 4$ sa rovná nule v bode $c = 2$.



Obr. 5

Príklad 2:

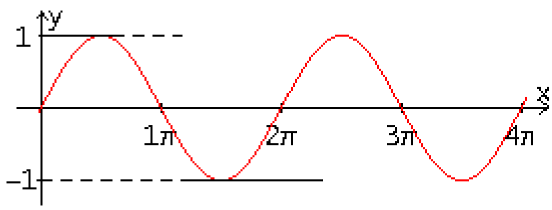
Funkcia $f(x) = 1 - x^2$ je na intervale $\langle -1, 1\rangle$ spojitá, má na ňom deriváciu a platí $f(-1) = f(1) = 0$. Spĺňa predpoklady Rolleho vety, teda na intervale $(-1, 1)$ existuje aspoň jeden bod c taký, že $f'(c) = 0$. Derivácia $f'(x) = -2x$ sa rovná nule v bode $c = 0$.



Obr. 6

Príklad 3:

Funkcia $f(x) = \sin x$ je na intervale $\langle 0, 4\pi\rangle$ spojitá, má na ňom deriváciu a platí $f(0) = f(4\pi) = 0$. Spĺňa predpoklady Rolleho vety, teda na intervale $(0, 4\pi)$ existuje aspoň jeden bod c taký, že $f'(c) = 0$. Derivácia $f'(x) = \cos x$ sa rovná nule v bodoch $c_1 = \frac{1}{2}\pi$, $c_2 = \frac{3}{2}\pi$, $c_3 = \frac{5}{2}\pi$, $c_4 = \frac{7}{2}\pi$.



Obr. 7

Ak však nie sú splnené všetky predpoklady Rolleho vety, ani jej záver nemusí byť správny. Príkladom môže byť funkcia $f : y = |x|$ pre $x \in \langle -2, 2\rangle$. Sú splnené predpoklady 1. a 3. ale nie je splnený predpoklad 2. Funkcia nemá v každom bode intervalu $(-2, 2)$ deriváciu, pretože v bode $x = 0$ derivácia neexistuje. Preto graf $f : y = |x|$ nemá v danom intervale dotyčnicu rovnobežnú s osou x.

Zovšeobecnením Rolleho vety je Lagrangeova veta o prírastku funkcie, ktorá sa niekedy nazýva aj veta o strednej hodnote.

Veta 3.3.3. *(Lagrangeova veta): Nech funkcia f má tieto vlastnosti:*

1. *je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$;*
2. *je diferencovateľná na (a, b).*

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ taký, že platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ (a < c < b).$$

Dôkaz. Definujme si pomocnú funkciu

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

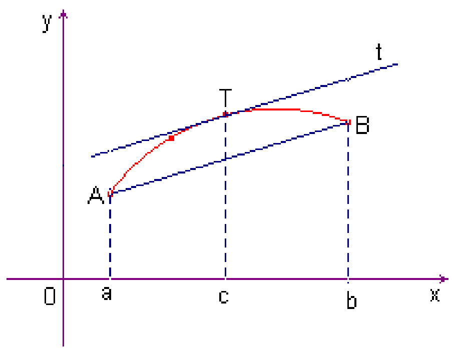
Funkcia F je spojitá na $\langle a, b\rangle$, diferencovateľná na (a, b) a $F(a) = F(b) = f(a)$. Keďže F spĺňa predpoklady Rolleho vety, existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $F'(c) = 0$, teda

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Geometrický význam Lagrangeovej vety:

Graf funkcie $y = f(x)$, ktorá spĺňa podmienky Lagrangeovej vety, má zrejme v každom bode $[x, f(x)]$, kde $x \in (a, b)$, dotyčnicu. Tetiva spájajúca body $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$ grafu má smernicu $k = \text{tg}\ \alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Podľa Lagrangeovej vety existuje aspoň jedna dotyčnica, ktorá má rovnakú smernicu. Existuje teda aspoň jeden bod $T[c, f(c)]$ grafu danej funkcie, v ktorom je dotyčnica t rovnobežná s tetivou AB.



Obr. 8

Keď si pozrieme aplet č. 2 (pozri CD), vidíme súvislosť medzi Lagrangeovou a Rolleho vetou.

Fyzikálny význam Lagrangeovej vety:

Ak vzťah $s = f(t)$ popisuje dráhu priamočiareho pohybu hmotného bodu v závislosti na čase t, potom výraz $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \overline{v}$ vyjadruje priemernú rýchlosť tohto pohybu v intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo $f'(c)$ vyjadruje okamžitú rýchlosť tohoto pohybu v čase c. Lagrangeova veta tvrdí, že za daných predpokladov pri pohybe v časovom intervale $\langle a, b\rangle$ dosiahne hmotný bod aspoň raz takú okamžitú rýchlosť $v = f'(c)$, ktorá je rovná priemernej rýchlosti $\overline{v}$.

Príklad 4:

Určte strednú rýchlosť hmotého bodu pri zvislom vrhu nahor v časovom intervale od $t_1 = 1s$ do $t_2 = 3s$, ak zákon dráhy zvislého vrhu nahor je $s = 80t - 5t^2$ a jednotkou dĺžky je meter. Zároveň určte časový okamih t_0, v ktorom hmotný bod nadobúda strednú rýchlosť.

Riešenie:

Ak je $y = s(t)$ zákon dráhy priamočiareho pohybu hmotného bodu, tak podiel

$$\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$$

znamená strednú rýchlosť tohto pohybu v intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo $s'(t)$ je okamžitá rýchlosť daného pohybu v čase t.

Pre zvislý vrh nahor, ktorého zákon pohybu je daný vzťahom $s = 80t - 5t^2$, platí

$$s(1) = 75\,\mathrm{m}, \quad s(3) = 195\,\mathrm{m};$$

stredná rýchlosť tohoto zvislého vrhu nahor sa podľa vzorca rovná

$$\frac{195\,m - 75\,m}{2s} = 60 \ \ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Podľa Lagrangeovej vety existuje taký bod $t_0 \in (1,3)$, že $s'(t_0) = 60\,\mathrm{ms}^{-1}$. Pretože $s'(t_0) = 80 - 10t_0$, platí $80 - 10t_0 = 60$, odtiaľ $t_0 = 2s$ je časový okamih, v ktorom hmotný bod nadobúda strednú rýchlosť.

Dôsledky Lagrangeovej vety:

Dôsledok 3.3.1. *Nech funkcia f je diferencovateľná na intervale (a, b) a $f'(x) = 0$ pre každé $x \in (a, b)$. Potom $f(x) = c =$ konšt. na (a, b).*

Dôsledok 3.3.2. *Nech funkcie f, g sú diferencovateľné na (a, b) a $f'(x) = g'(x)$ pre všetky $x \in (a, b)$. Potom $f(x) = g(x) + c$, c - konšt., t.j. $f(x) = g(x) + c$ na (a, b).*

Dôsledok 3.3.3. *Nech funkcie f, g sú diferencovateľné pre $x \geq x_0$ a vyhovujú podmienkam $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) > g'(x)$ pre $x > x_0$. Potom $f(x) > g(x)$ pre $x > x_0$.*

Príklad 5:
Určte bod, v ktorom dotyčnica k parabole $y = x^2$ je rovnobežná so sečnicou vedenou cez body $A[-1, 1]$ a $B[3, 9]$.

Riešenie:
Funkcia $f(x) = x^2$ spĺňa na intervale $\langle -1, 3 \rangle$ predpoklady Lagrangeovej vety. Existuje teda aspoň jeden bod $c \in (-1, 3)$ taký, že

$$f'(c) = \frac{9 - 1}{3 + 1} = 2.$$

Pretože $f'(c) = 2c$, je týmto bodom bod $c = 1$, takže $f(c) = 1$. V bode $[1, 1]$ je teda dotyčnica k parabole rovnobežná s tetivou vedenou bodmi $A[-1, 1]$ a $B[3, 9]$.

Veta 3.3.4. *(Cauchyho veta): Nech funkcie f a g majú tieto vlastnosti:*

1. *sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$;*
2. *na (a, b) existuje derivácia $f'(x)$ a $g'(x)$;*
3. *pre všetky $x \in (a, b)$ sa $g'(x) \neq 0$.*

Potom v intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod c taký, že platí

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dôkaz. Definujme si pomocnú funkciu

$$F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)),$$

ktorá spĺňa predpoklady Rolleho vety, teda existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že

$$F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Funkcia g spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety a existuje bod $d \in (a, b)$ taký, že

$$(g(b) - g(a)) = g'(d)(b - a) \neq 0,$$

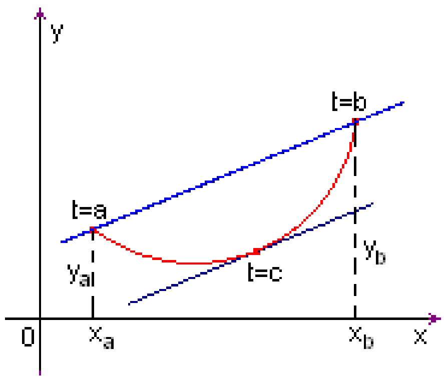
to znamená, že $(g(b)(a))$, $g'(c) \neq 0$ a tým dostávame tvrdenie vety. $\square$

Lagrangeova veta je špeciálnym prípadom Cauchyho vety. Stačí ak $g(x) = x$, tak $g'(x) = 1$, $g(b) - g(a) = b - a$ a dostaneme $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Geometrický význam Cauchyho vety:
Rovnice

$$x = \varphi(t)$$
$$y = f(t),\ (a \leq t \leq b)$$

považujeme za parametrické rovnice krivky. Ak majú obidve funkcie f, g vo všetkých bodoch intervalu (a, b) deriváciu, pričom $g'(x) \neq 0$, potom číslo $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) + g(a)} = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ je smernicou sečnice spájajúcou krajné body krivky. Číslo $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{y'(c)}{x'(c)}$ je smernicou dotyčnice v nejakom bode krivky. Z Cauchyho vety vyplýva, že najmenej v jednom bode krivky bude dotyčnica rovnobežná so sečnicou.



Obr. 9

Viac zaujímavých poznatkov je v knihách od Brabec [1], Hrubý [6], Ivan [7] a Jirásek [9].

CVIČENIA

1. Nakreslite grafy funkcií:

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ v $\langle -1, 1 \rangle$;

   b) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ v $\langle 0, 2 \rangle$

   a zistite, prečo neplatí Rolleho veta.

2. Nájdite na krivke $y = x^3$ bod, v ktorom je dotyčnica ku krivke rovnobežná s tetivou, ktorá spája body $(-1, -1)$ a $(2, 8)$.

3. Zistite, či Lagrangeova veta platí pre danú funkciu $f(x)$ v danom intervale $\langle a, b \rangle$. Ak áno, vypočítajte c.

   a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$, interval $\langle 0, 2 \rangle$;

   b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, interval $\langle 1, 2 \rangle$.

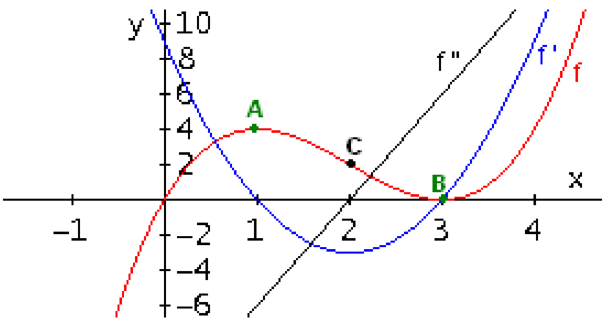
Kapitola 4

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Diferenciálny počet môžeme použiť na vyšetrovanie vlastností funkcií, ktoré nám pomôžu pri určovaní ich priebehu. Pomocou derivácií môžeme vyšetrovať monotónnosť, konvexnosť a konkávnosť funkcie, hľadať jej inflexné a stacionárne body, lokálne a globálne extrémy, prípadne určovať asymptoty grafu tejto funkcie.

Môžeme sa obmedziť na vyšetrovanie funkcií, ktoré sú diferencovateľné na intervale, pretože obyčajne sa vyšetrujú funkcie, ktoré majú konečný počet bodov nespojitosti, prípadne konečný počet bodov, v ktorých nemajú deriváciu.

Na obrázku 10 máme nakreslený graf funkcie f, jej prvú deriváciu f' a druhú deriváciu f''. Pomocou tohto obrázka si ukážeme ako súvisia vlastnosti funkcie f s jej deriváciami f' a f''.



Obr. 10

4.1 Monotónnosť funkcie

Dôležité pri vyšetrovaní priebehu funkcie je určiť intervaly, na ktorých je táto funkcia monotónna, t.j. rastúca (neklesajúca) alebo klesajúca (nerastúca). To zistíme pomocou vlastností derivácie.

Na obrázku 10 si všimnime graf funkcie f a jej prvej derivácie f'. Vidíme, že tam kde je graf prvej derivácie nad osou x, t.j. nadobúda kladné hodnoty, tam je funkcia f rastúca a naopak. Kde graf funkcie f' nadobúda záporné hodnoty, tam je funkcia f klesajúca.

Pre lepšiu názornosť a ešte lepšie pochopenie použijeme aj aplet č. 3 (pozri CD), kde môžeme pozorovať ako sa mení monotónnosť vzhľadom na graf prvej derivácie funkcie.

Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie.

Veta 4.1.1. *Nech funkcia f je diferencovateľná na (a, b). Funkcia f je neklesajúca (nerastúca) na (a, b) práve vtedy, ak $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) pre všetky $x \in (a, b)$.*

Dôkaz. Urobíme dôkaz pre prípad neklesajúcej funkcie. Dôkaz pre prípad nerastúcej funkcie sa urobí analogicky.

Nutná podmienka: Nech x_0 je ľubovoľný bod intervalu (a, b). Funkcia f je neklesajúca na (a, b) a preto pre každé $x \in (a, b)$

$$\text{ak } x > x_0 \text{ platí } f(x) \geq f(x_0), \text{ ak } x < x_0 \text{ platí } f(x) \leq f(x_0)$$

Vzhľadom na tieto vlastnosti platí $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ pre každé $x \in (a, b), x \neq x_0$. Limita ľavej strany výrazu pre $x \to x_0$ je rovná $f'(x_0)$ a tak limitným prechodom dostaneme $f'(x_0) \geq 0$.

Postačujúca podmienka: Nech $f'(x_0) \geq 0$ pre $x \in (a, b)$ a x_1, x_2 sú ľubovoľné body z intervalu (a, b), $x_1 < x_2$. Použitím Lagrangeovej vety na funkciu f na intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ dostaneme $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, kde $c \in (x_1, x_2)$ a $f'(c) \geq 0$. Z poslednej rovnosti potom dostávame, že pre každé $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$, čo znamená, že funkcia f je neklesajúca na (a, b). □

Teraz uvedieme postačujúcu podmienku rýdzomonotónnosti funkcie.

Veta 4.1.2. *Nech funkcia f je diferencovateľná na (a,b) a $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ pre všetky $x \in (a,b)$. Potom je funkcia f rastúca (klesajúca) na (a,b).*

Dôkaz. Urobíme dôkaz pre prípad rastúcej funkcie. Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné body z intervalu (a,b) také, že $x_1 < x_2$. Podľa Lagrangeovej vety použitej na funkciu f na intervale $\langle x_1, x_2\rangle$ platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, kde $c \in (a,b)$ a $f'(c) > 0$. Preto $f(x_2) > f(x_1)$ pre každé $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, t.j. f je rastúca na (a,b). $\square$

Príklad 1:

Zistite intervaly, v ktorých rastú a intervaly, v ktorých klesajú funkcie:

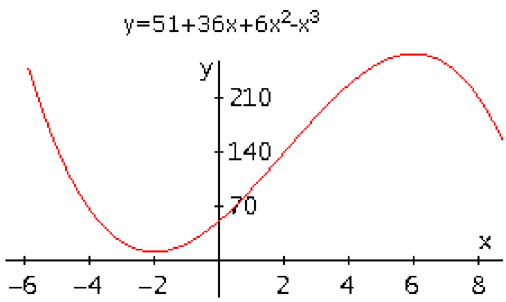
a) $y = 51 + 36x + 6x^2 - x^3\,;$

b) $y = 2x^2 - \ln x\,;$

c) $y = x^2 e^{-x}\,.$

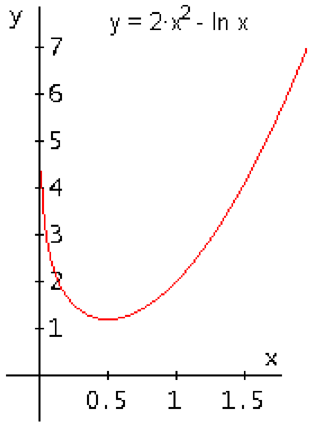
Riešenie:

a) Najprv zistíme intervaly, v ktorých je derivácia kladná. Definičný obor funkcie je R. Vypočítame deriváciu $y' = 36 + 12x - 3x^2$. Pre určenie intervalov, v ktorých funkcia rastie vyriešime kvadratickú nerovnicu $36 + 12x - 3x^2 > 0$
upravíme nerovnicu $x^2 - 4x - 12 > 0$
D$= b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 64$
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{4 \pm 8}{2\cdot 1}$
$x_1 = 6 \qquad x_2 = -2$
Riešením je interval $(-2, 6)$. V tomto intervale je funkcia rastúca. Klesajúca je v intervaloch $(-\infty, -2)$ a $(6, \infty)$.



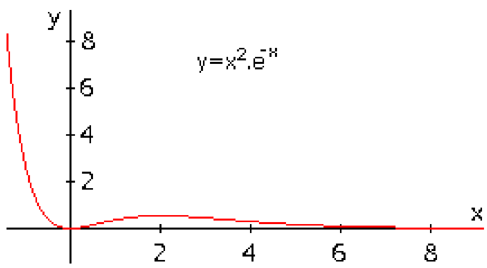
Obr. 11

b) Definičným oborom funkcie $y = 2x^2 - \ln x$ je množina $D(f) = (0, \infty)$. Vypočítame deriváciu $y' = 4x - \dfrac{1}{x}$. Riešením nerovnice $y' = 4x - \dfrac{1}{x} > 0$ sú intervaly $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ a $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$. Riešením opačnej nerovnice sú intervaly $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ a $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Vzhľadom na definičný obor je funkcia rastúca na intervale $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ a klesajúca na intervale $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.



Obr. 12

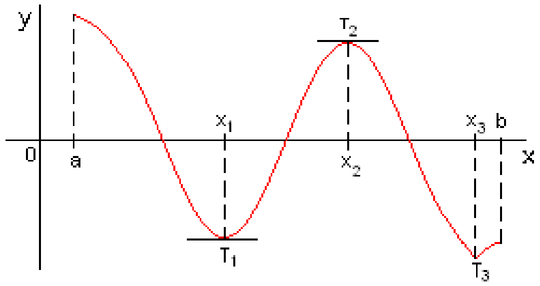
c) Definičný obor funkcie je množina R a derivácia $y' = (2x - x^2)e^{-x}$. Pretože druhý činiteľ je kladný pre všetky $x \in R$, znamienko derivácie závisí len od prvého člena. Preto je funkcia rastúca na intervale $(0, 2)$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2, \ \infty)$.



Obr. 13

4.2 Extrémy funkcie. Stacionárny bod

Pri riešení príkladov v predchádzajúcej kapitole sme si mohli všimnúť body, kde funkcia mení monotónnosť, t.j. mení sa z klesajúcej na rastúcu a naopak. Ak by sme sa pozreli na grafy, zistíme, že sú to body, v ktorých funkcia nadobúda vzhľadom na ich okolie najväčšiu, alebo najmenšiu hodnotu.



Obr. 14

Na obrázku 14 je graf spojitej funkcie na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$. Na základe tohto obrázka môžeme povedať, že funkcia f nadobúda v intervale $\langle a, b\rangle$ najväčšie hodnoty v bode a a najmenšie hodnoty v bode x_3. V istom zmysle však v bodoch x_1 a x_2 nadobúda daná funkcia svoje najmenšie resp. najväčšie hodnoty. Tieto hodnoty nazývame lokálne minimum a lokálne maximum = lokálne extrémy. Musíme si uvedomiť, že lokálne extrémy nemusia predstavovať najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu funkcie.

Definícia 4.2.1. Funkcia f má v bode x_0 **lokálne maximum**, ak existuje také okolie U(x_0) bodu x_0, že $f(x) \leq f(x_0)$ pre všetky $x \in U(x_0)$.
Funkcia f má v bode x_0 **lokálne minimum**, ak existuje také okolie $V(x_0)$ bodu x_0, že $f(x) \geq f(x_0)$ pre všetky $x \in V(x_0)$.
Lokálne maximá a minimá funkcie voláme spoločným názvom **lokálne extrémy**.

Veta 4.2.1. *(Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie). Ak má funkcia v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém a ak existuje derivácia $f'(x_0)$, potom platí, že $f'(x_0) = 0$.*

Dôkaz. Nech funkcia f nadobúda v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálne minimum. Potom existuje okolie bodu x_0, $O(x_0) \subset (a, b)$ také, že
ak

$$x \in O(x_0),\ x \neq x_0 \text{ platí } f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Ak

$$x < x_0,\ x \in O(x_0) \text{ potom } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{4.1}$$

a ak

$$x > x_0, \ x \in O(x_0) \text{ potom } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{4.2}$$

Keďže funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 existujú jednostranné limity pre $x \to x_0$ z ľavých strán nerovností (4.1) a (4.2). Vzhľadom na vlastnosti limít dostávame $f'_-(x_0) = f'(x_0) \leq 0$ a $f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$ a preto $f'(x_0) = 0$. □

Znova sa pozrime na obrázok 10 a vidíme, že funkcia f má lokálny extrém v bodoch $x = 1$ a $x = 3$. Sú to práve tie body, kde graf funkcie f' pretína os x, t.j. platí $f'(x) = 0$. Keď si dopočítame $f(1) = 4$, $f(3) = 0$ dostaneme body A a B. Bod A predstavuje lokálne maximum a bod B lokálne minimum funkcie f.

Ak má funkcia f v bode a lokálny extrém a $f'(x_0)$ existuje, tak $f'(a) = 0$. Ak naviac $f''(a) < 0$ ($f''(a) > 0$), tak f má v bode a lokálne maximum (minimum).

Na aplete č. 4 (pozri CD) si môžeme ešte lepšie pozrieť závislosť extrémov od prvej a druhej derivácie funkcie.

Ak má funkcia $y = f(x)$ v bode x_0 deriváciu a $f'(x_0) = 0$, potom bod x_0 nazývame **stacionárny bod** funkcie f. Tieto stacionárne body sú riešením rovnice $f'(x) = 0$, ale v týchto bodoch nemusí mať funkcia lokálne extrémy. Podmienka $f'(x) = 0$ teda nie je postačujúcou podmienkou existencie lokálneho extrému.

Príklad 1:
Nájdite lokálne extrémy funkcií:

a) $f: \ y = x^3 - 3x^2 - 9x$;

b) $g: \ y = -x^3 - x^2 + x$.

Riešenie:

a) Vypočítame deriváciu $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$. Funkcia je na intervale $(-\infty, -1\rangle$ rastúca a na intervale $\langle -1, 3\rangle$ klesajúca, teda v bode -1 má lokálne maximum a v bode 3 má lokálne minimum, pretože funkcia je klesajúca na intervale $\langle -1, 3\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 3, \infty)$.

   Skúsime nájsť extrémy aj pomocou výrazu $f'(x) = 0$. Vieme, že $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Keďže $f'(x) = 0$ dostávame $3x^2 - 6x - 9 = 0$. Vyriešime kvadratickú rovnicu.

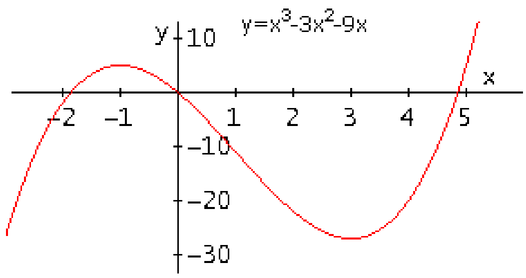
D$= b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 144$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{6 \pm 12}{6}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$

Vypočítame $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = -27$, $f(-1) = -1^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 5$.

Teda v bode -1 má lokálne maximum a v bode 3 má lokálne minimum.



Obr. 15

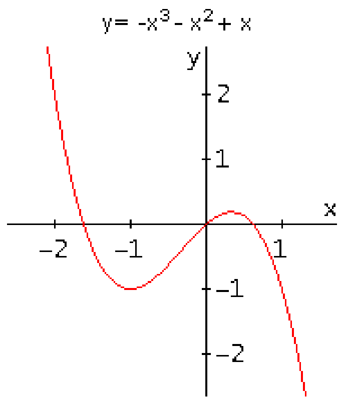
b) Vypočítame deriváciu $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Vyriešime kvadratickú rovnicu $-3x^2 - 2x + 1 = 0$.

D$= b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2 \pm 4}{-6}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = \dfrac{1}{3}$

Vypočítame $f(-1) = 1^3 - (-1)^2 + (-1) = -1$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{7}{27}\right)$. Teda v bode -1 má lokálne minimum a v bode $\dfrac{1}{3}$ lokálne maximum.



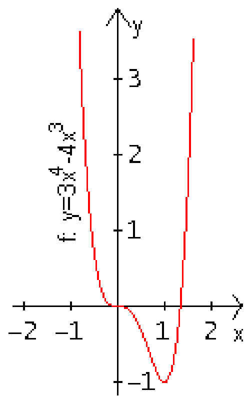
Obr. 16

Príklad 2:

Určte stacionárne body funkcie $f : y = 3x^4 - 4x^3$ v intervale $(-\infty, +\infty)$.

Riešenie:

Určíme deriváciu funkcie f, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$. Vyriešime rovnicu $f'(x) = 0$. Dostávame $12x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Body x_1 a x_2 sú hľadané stacionárne body.



Obr. 17

Na obrázku vidíme, že aj keď sme našli dva stacionárne body, iba jeden z nich určuje lokálny extrém. V bode $x_2 = 1$ má funkcia f lokálne minimum, ale v bode $x_1 = 0$ lokálny extrém nemá.

Pri určovaní priebehu funkcie sú okrem lokálnych extrémov dôležité aj **globálne extrémy** funkcie. Lokálne extrémy určujeme v nejakom okolí bodu. Globálne extrémy sú absolútne extrémy, t.j. najväčšia alebo najmenšia hodnota na celom definičnom obore funkcie.

Pri určovaní globálnych extrémov funkcie, ktorá je spojitá v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$ postupujeme tak, že najprv nájdeme všetky lokálne extrémy na intervale $\langle a, b\rangle$ a ešte vypočítame hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ (pretože extrémy môžu nastať aj v krajných bodoch intervalu). Potom porovnáme všetky nájdené lokálne minimá a maximá a hodnoty $f(a)$, $f(b)$ a vyberieme z nich najväčší resp. najmenší. Táto nájdená hodnota je globálne maximum resp. minimum funkcie f v intervale $\langle a, b\rangle$.

4.3 Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexné body

Funkcia je konvexná (konkávna) v intervale (a, b), ak jej graf je „otvorený nahor (nadol)”. Zopakujme si definície konvexnosti (konkávnosti):

Definícia 4.3.1. Nech funkcia f je definovaná na intervale J. Hovoríme, že funkcia f je na intervale J **rýdzokonvexná (rýdzokonkávna)**, ak pre každé tri body $x_1, x_2, x_3 \in J$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \quad \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right).$$

Definícia 4.3.2. Nech funkcia f je definovaná na intervale J. Hovoríme, že funkcia f je na intervale J **konvexná (konkávna)**, ak pre každé tri body $x_1, x_2, x_3 \in J$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \quad \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right).$$

Veta 4.3.1. *Nech funkcia f je diferencovateľná na intervale (a, b). Potom funkcia f je konvexná (konkávna) na (a, b) práve vtedy, ak jej derivácia f' je neklesajúca (nerastúca) na intervale (a, b).*

Dôkaz. Nech funkcia f je konvexná na intervale (a, b). To znamená, že pre každé $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí vzťah $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Ak v tomto vzťahu urobíme limitný prechod pre $x_2 \to x_1$ dostaneme

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \tag{4.3}$$

a limitným prechodom pre $x_2 \to x_3$ dostaneme

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'(x_3) \tag{4.4}$$

Spojením vzťahov (4.3) a (4.4) dostaneme, že pre každé $x_1, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_3$ platí, $f'(x_1) \leq f'(x_3)$ čo znamená, že f' je neklesajúca na (a, b). □

Pri určovaní konvexnosti a konkávnosti využijeme graf funkcie f'' z obrázka 10. Všimneme si na grafe, že tam kde je $f'' \geq 0$ je funkcia f konvexná a tam, kde je graf $f'' \leq 0$ je funkcia konkávna. Na našom grafe je teda funkcia konvexná na intervale $(2, \infty)$ a konkávna na $(-\infty, 2)$. Bod $x = 2$ bude inflexný bod.

Veta 4.3.2. *Nech funkcia f je na intervale (a, b) dvakrát diferencovateľná. Funkcia f je konvexná (konkávna) na intervale (a, b) práve vtedy, ak $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ na (a, b). Ak $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ na intervale (a, b), potom je f rýdzokonvexná (rýdzokonkávna) na (a, b).*

Dôkaz. Označme znakom J_0 množinu všetkých vnútorných bodov intervalu J. Množina J_0 je teda otvorený interval, ktorý vznikne z J odstránením krajných bodov. Nech $x_1 < x_2 < x_3$ tri body z J. Podľa vety o prírastku funkcie existujú čísla c, d také, že

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c), \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(d)$$

$x_1 < d < x_2 < d < x_3$

I. Nech najprv $f''(x) \geq 0 \geq$ pre každé $x \in J_0$. Funkcia $f'(x)$ (ak má deriváciu $f''(x)$) je neklesajúca v J_0. Vo vzorci vyššie je teda $f'(c) \geq f'(d)$.
Takže ak $x_1 < x_2 < x_3$ tri body z J, podľa vzorca

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

teda

$$(f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1) \geq (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2),$$
$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1),$$

teda f je konvexná na J.

II. Nech existuje číslo $x \in J_0$ také, že $f''(x) < 0$. Toto x označíme ako x_2. Ak funkcia f' má v bode x_2 zápornú deriváciu, funkcia f' je klesajúca v bode x_2. Existuje teda číslo $\delta > 0$ také, že $f'(x) > f'(x_2)$ pre $x_2 - \delta \in J$, $x_2 + \delta \in J$. Nech $x_1 = x_2 - \delta$, $x_3 = x_2 + \delta$. Potom platí (podľa vety o prírastku funkcie)

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c), \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(d)$$

a $x_2 - \delta < d < x_2 < c < x_2 + \delta$ teda $f'(d) > f'(x_2) > f'(c)$. Z vyššie uvedeného vzorca plynie

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$
$$(f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1) < (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2),$$

$$f(x_2)(x_3 - x_1) > f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1),$$

takže nerovnosť neplatí, ak sú body x_1, x_2, x_3 tri body J také, že $x_1 < x_2 < x_3$. Tým sme dokázali prvú časť vety (konvexnosť). Pre konkávnosť sa dôkaz urobí analogicky. $\square$

Na aplete č. 5 (pozri CD) si ukážeme v praxi ako sa podľa vety 4.3.2 mení funkcia z konvexnej na konkávnu v závislosti od grafu druhej derivácie funkcie.

Bod, v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak voláme **inflexný bod**.

Veta 4.3.3. *Nech existuje $\delta > 0$ také, že funkcia f je definovaná a diferencovateľná na intervale $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Ak na intervale $(x_0-\delta, x_0)$ je funkcia f konvexná (konkávna) a na intervale $(x_0, x_0+\delta)$ konkávna (konvexná) hovoríme, že bod x_0 je inflexný bod funkcie f.*

Dôkaz. Nech $f''(x) < 0$ pre $x \in (x_0-\delta, x_0)$ a $f''(x) > 0$ pre $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Podľa vety 4.3.2 je potom funkcia f konkávna na $(x_0-\delta, x_0)$ a konvexná na $(x_0, x_0+\delta)$ a to znamená, že x_0 je inflexný bod. $\square$

Ak x_0 je inflexný bod funkcie f a $f''(x_0)$ existuje, tak $f''(x_0) = 0$.

V nasledujúcej vete formulujeme nutnú podmienku pre inflexný bod.

Veta 4.3.4. *Nech funkcia f má na nejakom okolí bodu x_0 druhú deriváciu, spojitú v bode x_0. Ak x_0 je inflexný bod funkcie f, potom $f''(x_0) = 0$.*

Dôkaz. Nech $f''(x_0) \neq 0$, t.j. $f''(x_0) > 0$ alebo $f''(x_0) < 0$. Nech $f''(x_0) > 0$. Zo spojitosti f'' v bode x_0 vyplýva existencia okolia bodu x_0, $O(x_0)$ takého, že pre všetky $x \in O(x_0)$ je $f''(x) > 0$. Podľa vety 4.3.2 je funkcia f rýdzokonvexná na $O(x_0)$, čo je v spore s definíciou 4.3.3. Dôkaz pre $f''(x_0) < 0$ sa urobí analogicky. $\square$

Použijeme aplet č. 6 (pozri CD) na názornejšiu ukážku inflexného bodu, ako aj na ďalšie vyšetrovanie vlastností funkcie.

Príklad 1:

Nájdite intervaly, na ktorých sú nasledovné funkcie konvexné alebo konkávne. Nájdite aj inflexné body týchto funkcií.

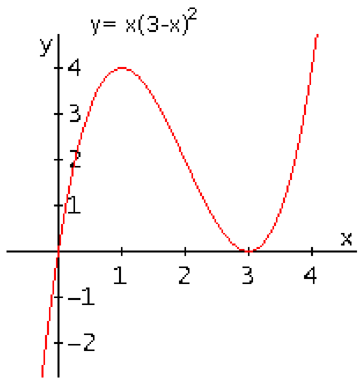
a) $y = x(3-x)^2$;

b) $y = \ln(1+x^3)$;

c) $y = x \cdot \text{arctg } x$.

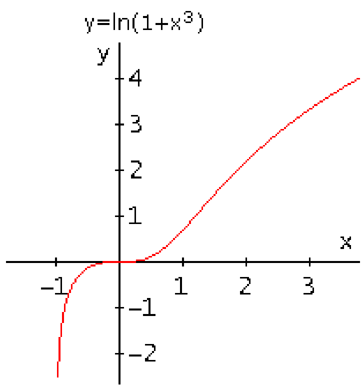
Riešenie:

a) Definičný obor je množina R. Vypočítame deriváciu $f'(x) = (3-x^2) - 2x(3-x) = 3(3-x)(1-x)$ a $f''(x) = 3(x-1+x-3) = 6x-12$. Druhá derivácia je kladná a preto funkcia je konvexná na intervale $(2,\infty)$ a druhá derivácia je záporná a preto funkcia je konkávna v intervale $(-\infty, 2)$. Jediný inflexný bod je bod $[2,2]$.



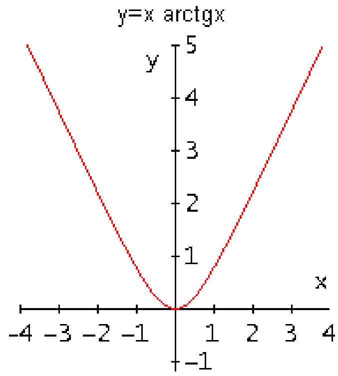
Obr. 18

b) Definičný obor funkcie je interval $(-1,\infty)$. $y'' = \dfrac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$. Pretože menovateľ zlomku je v celom definičnom obore funkcie kladný, o znamienku rozhoduje čitateľ. Funkcia je konvexná v intervale $(0, \sqrt[3]{2})$ a konkávna v intervaloch $(-1,0)$ a $(\sqrt[3]{2},\infty)$. Funkcia má dva inflexné body $[0,0]$ a $[\sqrt[3]{2}, \ln 3]$.



Obr. 19

c) Definičný obor je množina R. $y' = \mathrm{arctg}x + \dfrac{x}{1+x^2}$ a $y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$ je kladná pre všetky $x \in R$. Funkcia je konvexná v celej množine R a preto nemá inflexné body.



Obr. 20

4.4 Asymptoty

Asymptoty funkcie majú veľký význam pri zostrojovaní grafu funkcií. Asymptoty sú priamky, ku ktorým sa graf funkcie neustále približuje, ale nikdy ich nepretne. Môžeme povedať, že je to priamka, ktorá sa grafu funkcie „dotýka v nekonečne".

Rozlišujeme dva druhy asymptot:
- asymptota bez smernice (rovnobežná s O_y)
- asymptota so smernicou (nie je rovnobežná s O_y)

Priamka $x = a$ je **asymptotou bez smernice** grafu funkcie $f(x)$ ak platí aspoň jedna z nasledujúcich limít:

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a_+} f(x) = -\infty.$$

Priamka $y = kx + q$ je **asymptotou so smernicou** grafu funkcie $f(x)$ ak platí:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad \text{alebo} \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

Veta 4.4.1. *Ak priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou, potom*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

alebo

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

Príklad 1:
Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$.

Riešenie:

$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Táto funkcia má v bode $x = 2$ tieto limity

$$\lim_{x \to 2_-} \frac{3x}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2_+} \frac{3x}{x-2} = \infty$$

a preto priamka $x = 2$ je asymptotou bez smernice.

Príklad 2:
Nájdite asymptoty so smernicou funkcie $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-1}$.

Riešenie:

$D(f) = R - \{1\}$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2}{x(x-1)} = 1, \qquad q = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-2}{x-1} - x \right) = 1.$$

Priamka $y = x + 1$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie $f(x)$. Podobný výsledok by sme dostali aj pre $x \to -\infty$

4.5 Priebeh funkcie

Vyšetrovanie priebehu funkcie môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov:

1. Definičný obor a funkčné hodnoty na jeho okrajoch
2. Párnosť, nepárnosť funkcie
3. Nulové body funkcie
4. Intervaly monotónnosti funkcie a lokálne extrémy
5. Intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body

6. Asymptoty grafu funkcie

7. Graf funkcie

Príklad 1:
Zistite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
Riešenie:

1. Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R$, t.j. $D(f) = R$.

2. Funkcia f nie je periodická, ani párna, ale je nepárna, pretože pre všetky $x \in R$ platí
$f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x^2)} = \dfrac{-x}{1+x^2}$
$-f(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$
$f(-x) = -f(x)$

3. Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in R$. Funkcia f má jeden nulový bod $x_1 = 0$, t.j. $f(0) = 0$. Na intervale $(-\infty, 0)$ je funkcia f záporná a na intervale $(0, \infty)$ je funkcia f kladná.

4. Pre prvú deriváciu funkcie f platí $f'(x) = \left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]' = \dfrac{1 \cdot 1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$
$= \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}$, $x \in R$. Z toho vyplýva, že má funkcia $f(x)$ dva nulové body x_2, $x_3 = \pm 1$. Keďže je f' spojitá na R, je na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ buď kladná alebo záporná. Na toto určenie postačí jeden bod intervalu. Zvoľme napríklad
$$f'(-2) = f'(2) = \frac{1-4}{(1+4)^2} = -\frac{3}{25} < 0$$
$$f'(0) = \frac{1-0}{(1+0)^2} = 1 > 0.$$
To znamená, že platí $f'(x) < 0$ pre $x \in (-\infty, -1)$ a pre $x \in (1, \infty)$ a platí $f'(x) > 0$ pre $x \in (-1, 1)$. Z toho vyplýva, že funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty, -1\rangle$, rastúca na intervale $\langle -1, 1\rangle$, klesajúca na intervale $\langle 1, \infty)$. Takže funkcia f má v bode $x_2 = -1$ lokálne minimum $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ a v bode $x_3 = 1$ má lokálne maximum $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Je zrejmé, že tieto extrémy sú zároveň aj globálne.

5. Pre druhú deriváciu funkcie f na množine $D(f) = R$ platí

$$f''(x) = \left[\frac{x}{1+x^2}\right]'' = \left[\frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}\right]' = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)(4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} =$$
$$= \frac{-2x(1+x^2)^2-4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)^2-(-2x-2x^3-4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} =$$
$$= \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$$

Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x \in R$ a má tri nulové body $x_1 = 0$, $x_4, x_5 = \pm\sqrt{3}$. To znamená, že na intervaloch $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}, \infty)$ je funkcia f'' kladná alebo záporná, t.j. funkcia f je konvexná alebo konkávna. Zvoľme napríklad

$f''(-2) = \dfrac{-4}{125} < 0$ $\qquad$ $f''(-1) = \dfrac{1}{2} > 0$

$f''(1) = -\dfrac{1}{2} > 0$ $\qquad$ $f''(2) = \dfrac{4}{125} > 0$

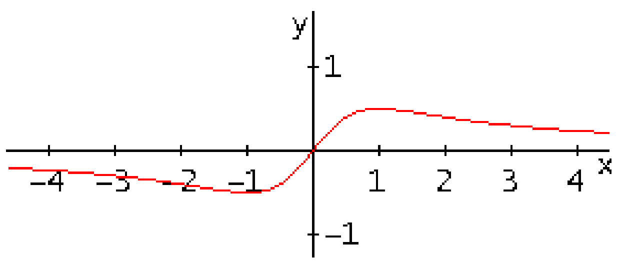
Z toho vyplýva, že funkcia f je konvexná na intervaloch $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$, $\langle \sqrt{3}, \infty)$ a konkávna na intervaloch $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$. To znamená, že body $x_1 = 0$, x_4, $x_5 = \pm\sqrt{3}$ sú inflexné. Pre hodnoty funkcie f v bodoch x_4, x_5 platí $f(\pm\sqrt{3}) = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{4}$.

6. Funkcia f asymptotu bez smernice nemá a má jednu asymptotu $y = kx + q$ so smernicou. Pre jej koeficienty k, q platí

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

To znamená, že asymptota so smernicou grafu funkcie f má rovnicu $y = 0$.

7. Nakreslíme graf funkcie.



Obr. 21

Graf funkcie je znázornený v aplete č. 7 (pozri CD). Pomocou tohto apletu vysvetľujeme aj vlastnosti tejto funkcie.

Príklad 2:

Zistite priebeh funkcie $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Riešenie:

1. Funkcia f je definovaná v každom reálnom čísle $x \neq 0$. V čísle 0 nie je definovaná. Tam, kde je definovaná je spojitá a má tiež deriváciu každého rádu.

2. Funkcia f nie je periodická, ani párna, ale je nepárna, pretože platí

   $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x}$

   $-f(x) = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

   $f(-x) = -f(x)$

3. Funkcia nie je definovaná v bode $x = 0$.

4. Pre prvú deriváciu funkcie f platí $f'(x) = \left[x + \dfrac{1}{x}\right]' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

   Z toho vyplýva, že má funkcia $f(x)$ dva nulové body x_2, $x_3 = \pm 1$. Potrebujeme zistiť, či je na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ kladná alebo záporná. Na toto určenie postačí jeden bod intervalu. Zvoľme napríklad

   $f'(-2) = f'(2) = \dfrac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2} = \dfrac{3}{4} > 0$

   $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = -3 < 0$

   To znamená, že platí $f'(x) < 0$ pre $x \in (-1, 0)$ a pre $x \in (0, 1)$ a platí $f'(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -1)$ a pre $x \in (1, \infty)$. Z toho vyplýva, že funkcia f je rastúca na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ a klesajúca na intervaloch $(-1, 0)$, $(0, 1)$. Takže funkcia f má v bode $x_2 = -1$ lokálne maximum $f(-1) = -2$ a v bode $x_3 = 1$ má lokálne minimum $f(1) = 2$.

5. Pre druhú deriváciu funkcie f platí

$$f''(x) = \left[x + \frac{1}{x}\right]'' = \left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]' = \frac{2x^2 - (x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

Funkcia f'' má nulový bod $x_1 = 0$. To znamená, že na intervaloch $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ je funkcia f'' kladná alebo záporná, t.j. funkcia f je konvexná alebo konkávna. Zvoľme napríklad

$f''(-1) = -2 < 0$

$f''(1) = 2 > 0$

Z toho vyplýva, že funkcia f je konvexná na intervale $(0, \infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty, 0)$. Inflexné body funkcia nemá.

6. Vypočítame limitu v bode nespojitosti a určíme asymptotu bez smernice.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

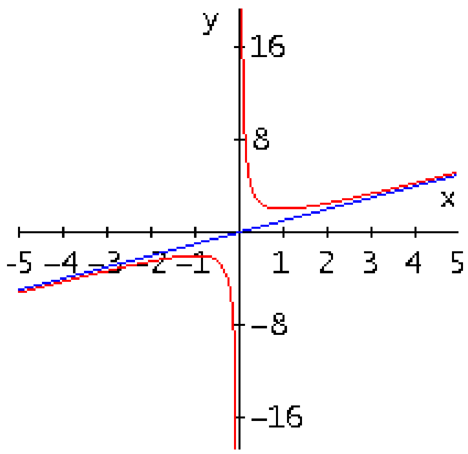
Asymptotou bez smernice je priamka $x = 0$. Funkcia má aj asymptotu $y = kx + q$ so smernicou. Pre jej koeficienty k, q platí

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [x + \frac{1}{x} - x] = 0.$$

To znamená, že asymptota so smernicou grafu funkcie f má rovnicu $y = x$.

7. Nakreslíme graf funkcie.



Obr. 22

Funcia je nakreslená v aplete č. 8 (pozri CD). Aplet názorne vysvetľuje vyšetrovanie priebehu celej funkcie.

Viac príkladov, cvičení a definícií je v knihách Hrubý [6], Jarník [8], Jirásek [9], Mihalíková [13] a Riečan [15].

CVIČENIA

1. Vyšetrite priebeh funkcií:

   a) $y = 2x - 1,5\,;$

   b) $y = 3|x| - 2\,;$

   c) $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}\,;$

   d) $y = 2x^2 - 1\,.$

2. Vyšetrite priebeh funkcií:

   a) $y = 0,5x^2 + x - 3\,;$

   b) $y = \dfrac{\ln x}{x}\,;$

   c) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}\,;$

   d) $y = x + 2\operatorname{arccotg} x\,.$

3. Načrtnite graf funkcie, ktorej definičný obor je R a ktorá

   a) má minimum vo všetkých bodoch intervalu $\langle -1, 1\rangle$, maximum v bodoch -3 a 3 a je párna;

   b) má maximum v bodoch 0, 2 a 4, nemá v žiadnom bode minimum, na intervale $(4, \infty)$ nie je rastúca ani klesajúca.

Kapitola 5

L'Hospitalovo pravidlo

V niektorých prípadoch nevieme rozhodnúť o hodnote limity a tým ani o jej existencii, či neexistencii. Ide o limity tvaru $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Nazývajú sa často neurčité výrazy. Pre výpočet limít týchto typov používame L'Hospitalovo pravidlo.

Veta 5.0.1. *(L'Hospitalovo pravidlo):*

a) Nech buď

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0, \textit{alebo} \lim_{x\to a} \mid f(x) \mid = \lim_{x\to a} \mid g(x) \mid = +\infty;$$

b) Nech existuje vlastná alebo nevlastná limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \textit{Potom existuje} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Veta zostáva v platnosti aj v prípade keď a= +∞ alebo a= -∞.

Dôkaz. Doplňme, prípadne pozmeňme definíciu funkcií f a g tak, že položíme

$$f(a) \ = \ g(a) \ = \ 0.$$

Tým sa v našich úvahách nič podstatné nezmení, pretože chceme skúmať limitu podielu $\frac{f(x)}{g(x)}$ v bode a a tá ako vieme, nezávisí od jeho hodnoty v bode a. Tento podiel v bode a prípadne ani nemusí existovať.

Potom f a g budú spojité v bode a, pretože

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 = g(a).$$

Dokážeme teraz, že sú spojité dokonca v niektorom okolí $U(a)$ bodu a a majú v každom bode $x \neq a$ z toho okolia derivácie. Podľa predpokladu existuje totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

To znamená, že funkcia $\dfrac{f'}{g'}$ je definovaná pre všetky $x \neq a$ z niektorého okolia $U(a)$ bodu a. Teda v každom bode $x \neq a$ z toho okolia $U(a)$ existujú obidve derivácie $f'(x)$ i $g'(x)$ a $g'(x) \neq 0$. Z toho vyplýva spojitosť obidvoch funkcií v každom bode $x \neq a$ okolia $U(a)$. Teda funkcie f a g sú spojité v celom okolí $U(a)$.
Zvoľme si ľubovoľný bod $x \neq a$ z okolia $U(a)$. V intervale $\langle a, x \rangle$ (resp. $\langle x, a \rangle$, ak $x < a$) funkcie f a g spĺňajú predpoklady Cauchyho vety o prírastku funkcie, a teda v intervale (a, x), resp. (x, a) existuje aspoň jeden bod c taký, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

t.j.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5.1}$$

pretože $f(a) = 0$, $g(a) = 0$. Ak pre niektoré hodnoty x existuje viac takýchto bodov, zvolíme si ľubovoľný z nich. Teda každému $x \in U(a)$, $x \neq a$ vieme priradiť práve jeden bod c tak, že platí (5.1).

Vezmime teraz ľubovoľnú postupnosť bodov

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{5.2}$$

$x_n \in U(a)$ takú, že $x_n \neq a$ $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$. Tejto postupnosti zodpovedá postupnosť bodov

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \tag{5.3}$$

pre ktoré platí $a < c_n < x_n$ resp. $x_n < c_n < a$, pre každé n, teda

$$\lim_{x \to \infty} c_n = a.$$

Z týchto tvrdení, z Heineho definície limity funkcie a z predpokladu, že existuje

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = A$$

vyplýva, že postupnosť

$$\frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}, \frac{f'(c_2)}{g'(c_2)}, \cdots, \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, \cdots \tag{5.4}$$

má limitu A. Ale na základe vzťahu (5.1) dostávame, že pre každé prirodzené číslo n

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

a teda postupnosť (5.4) je totožná s postupnosťou

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)}, \frac{f(x_2)}{g(x_2)}, \cdots, \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \cdots \tag{5.5}$$

Tým je dokázané, že pre každú postupnosť (5.2) má príslušná postupnosť (5.5) hodnôt funkcie $\frac{f}{g}$ limitu

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Na základe Heineho definície limity funkcie to znamená že,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

čo sme mali dokázať.

Z dôkazu je zrejmé, že analogická veta platí aj pre jednostranné limity. Možno dokázať, že veta ostáva v platnosti aj vtedy ak $a = \infty$ alebo $a = -\infty$. □

Výpočet limity podielu funkcií v bode a možno upraviť na výpočet limity podielu ich derivácií. Ak sú obidve derivácie f' a g' spojité v bode a a ak sa $g'(a) \neq 0$, tak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

t.j. limita sa rovná podielu hodnôt derivácií v bode a.

Viac zaujímavých poznatkov je v knihách Ivan [7] a Jirásek [9].

Príklad 1:
Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.
Riešenie:
Nech $f(x) = x^2 - 5x + 6$ a $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Platí

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 - 5x + 6) = (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) = 0$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 2) = (2^2 - 3\cdot 2 + 2) = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3} = \frac{2\cdot 2 - 5}{2\cdot 2 - 3} = -1.$$

Predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené a platí

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3} = -1.$$

Príklad 2:
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.
Riešenie:
Nech $f(x) = \ln x$ a $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Platí

$$\lim_{x\to 0} |g(x)| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Doteraz sme si ukázali iba limity, kde a je číslo. L'Hospitalovo pravidlo ostáva v platnosti aj v prípade, keď $a = \infty$, alebo $a = -\infty$.

Príklad 3:
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.
Riešenie:
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Ak sa aj pre funkciu $\dfrac{f'}{g'}$ v bode a

$$\lim_{x\to a} f'(x) = 0, \lim_{x\to a} g'(x) = 0, \text{alebo} \lim_{x\to a} \mid g'(x) \mid = +\infty$$

možno skúmať podiel $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ za predpokladu, že funkcie f', g' spĺňajú predpoklady L'Hospitalovho pravidla. Ak existuje

$$\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tak platí,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

a teda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

V prípade nutnosti môžeme vziať pomer tretích derivácií atď.

Príklad 4:

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

CVIČENIA

1. Vypočítajte limity:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x-2}{x^2-1}$;

   c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}$;

   d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$.

2. Vypočítajte:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\ x-x}{x-\sin x}$;

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$;

   d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$.

3. Zistite, či možno použiť L'Hospitalovo pravidlo, ak áno, vypočítajte limity:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}\ x}$;

   d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$.

Kapitola 6

Taylorov polynóm

Taylorova veta sa veľmi často používa v rôznych častiach matematiky. Jej praktický význam spočíva hlavne v možnosti aproximácie funkcie polynómami a odhadu chyby, ktorej sa pri tom dopustíme.

Definícia 6.1. Nech $a \in R$ a existuje vlastná derivácia $f^{(n)}(a)$ pre nejaké $n \in N$.

1. Polynóm n-tého stupňa $T_n(f,a) : R \to R$ tvaru
   $T_n(f,a)(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$
   $= f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\, d^i f(a,\, x-a)$
   nazývame **Taylorov polynóm** n-tého stupňa pre funkciu f v bode a.

2. Funkciu $R_{n+1}(f,a) : D(f) \to R$ definovanú vzťahom

   $$R_{n+1}(f,a)(x) := f(x) - T_n(f,a)(x),\ x \in D(f)$$

   nazývame Taylorov zvyšok funkcie f v bode a po n-tom člene a identita

   $$f(x) = T_n(f,a)(x) + R_{n+1}(f,a)(x)$$

   sa nazýva Taylorov vzorec pre f v bode a.

Lema 6.1. *Nech $P : R \to R$ je ľubovoľný polynóm n-tého stupňa. Potom*
a) ku každému $a \in R$ existuje $(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n) \in R^{n+1}$ tak, že
$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n,\ x \in R$

b) koeficienty a_0, a_1,..., a_n sú určené jednoznačne vzorcom $a_k = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$ pre $k = 0,\ 1,\ ,\dots,\ n$.

Lema ukazuje, že hodnota $P(x)$ polynómu P sa rovná hodnote jeho Taylorovho polynómu n-tého stupňa v bode a, t.j.

$$P(x) = T_n(f,a)(x), \quad x \in R.$$

O aproximácii n-krát diferencovateľnej funkcie v bode a Taylorovým polynómom hovorí nasledujúca veta.

Veta 6.2. *Nech $f^{(n)}(a) \in R$ pre $n \in N$. Potom existuje práve jeden polynóm $P : R \to R$ stupňa najviac n-tého taký, že*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

a platí $P(x) = T_n(f,a)(x)$, pre $x \in R$.

Dôkaz. 1. Dokážeme existenciu. Z predpokladu na f vyplýva existencia množiny $A \subset D(f)$ a okolia $O(a)$ bodu a tak, že funkcie f, f',..., $f^{(n-1)}$ sú definované (a spojité) na množine $O(a) \cap A \neq 0$ a spojité v bode a.
Ak položíme $P = T_n(f,a)$, tak $(f-P)^{(k)}(a) = 0$ pre $k = 0,\ 1,\ ,\dots,\ n$.
Odtiaľ $(n-1)$-násobným použitím L'Hospitalovho pravidla dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{[f - T_n(f,a)](x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{[f - T_n(f,a)]^{(n-1)}(x)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{[f - T_n(f,a)]^{(n-1)}(x) - [f - T_n(f,a)]^{(n-1)}(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{n!}[f - T_n(f,a)]^{(n)}(a)] = 0.$$

2. Jednoznačnosť. Nech $Q : R \to R$ je tiež polynóm najviac n-tého stupňa taký, že platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pretože existuje n-tá vlastná derivácia $(f$ - $Q)^{(n)}(a)$, tak funkcie $f - Q$, $(f - Q)'$,..., $(f-Q)^{(n-1)}$ sú spojité v bode a. Z L'Hospitalovho pravidla pre $k = 0,\ 1,\ ,\dots,\ n-1$ máme

$$\frac{(f-Q)^{(k)}}{k!} = \lim_{x\to a} \frac{(f-Q)^{(k)}(x)}{k!} = \lim_{x\to a} \frac{(f-Q)(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-k} = 0.$$

Pre $k = n$ je

$$\frac{(f-Q)^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{(f-Q)^{(n-1)}(x)-(f-Q)^{(n-1)}(a)}{x-a} =$$
$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{(f-Q)^{(n-1)}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(f-Q)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Tým sme zistili, že $\frac{Q^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pre $k = 0,\ 1,\ ,\dots,\ n$, odtiaľ na základe lemy 6.1 je

$$Q(x) = T_n(Q,a)(x) = T_n(f,a)(x) = P(x),\ x \in R$$

čo bolo treba dokázať. □

Predchádzajúca veta nám nehovorí nič o tom, aký má tvar a chybu $|R_{n+1}(f,a)(x)|$. O tom nám povie veta nasledujúca.

Veta 6.3. *(Taylorova veta):*
Nech $O(a)$ je okolie bodu $a \in R$ (ktoré je zároveň intervalom) a nech pre funkciu $f : O(a) \to R$, $g : O(a) \to R$ platí:

a) $f^{(n+1)} : O(a) \to R$ pre niektoré $n \in N \cap 0$;

b) $g' : O(a) \to R$;

c) Pre všetky $x \in O(a)$ je $g'(x) \neq 0$.

Potom ku každému $x \in O(a)$ existuje $c \in R$, ležiaci medzi a a x taký, že zvyšok $R_{n+1}(f,a)(x) = \frac{(x-c)^n}{n!}\frac{g(x)-g(a)}{g'(c)}(f)^{(n+1)}(c)$.

Dôkaz. Nech $a < x \in O(a)$. Definujme funkciu

$$F : t \to f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]$$

pre $t \in \langle a, x\rangle \subset O(a)$. Potom máme $F(x) = 0$,

$F(a) = R_{n+1}(f,a)(x)$ a

$$F'(t) = -\left\{\left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!}\right] + \left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right\} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Funkcie F a g spĺňajú predpoklady Cauchyho vety a teda existuje $c \in (a,x)$ tak, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{F'(c)}{g'(c)}.$$

Dosadením predchádzajúcich F a F', po jednoduchej úprave dostaneme požadované tvrdenie. Pre $x<a$ je dôkaz rovnaký. $\square$

Ak $a=0$, Taylorov vzorec má tvar
$f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, kde $0<c<x$ (resp.$x<c<0$). V tom prípade hovoríme o Maclaurinovom vzorci.

Príklad 1:

Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie $f(x)=\sin x$ v bode $a=0$.

Riešenie:

$f(x)=\sin x$ $\quad f(0)=\sin 0=0$

$f'(x)=\cos x$ $\quad f'(0)=f^{(4k+1)}(0)=\cos 0=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\quad f''(0)=f^{(4k+2)}(0)=-\sin 0=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $\quad f'''(0)=f^{(4k+3)}(0)=-\cos 0=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x$ $\quad f^{(4)}(0)=f^{(4k)}(0)=\sin 0=0$

$f^{(5)}(x)=\cos x$ $\quad f^{(5)}(0)=\cos 0=1$

Vypočítame Taylorov polynóm:

$$T_n(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nakreslenie funkcie $y=\sin x$, pre $a=0$ podľa vyššie vypočítaného Taylorovho polynómu môžete vidieť na aplete č. 9 (pozri CD).

Príklad 2:

Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie $f(x)=e^x$ v bode $a=0$.

Riešenie:

$f(x)=e^x$ $\quad f(0)=1$

$f'(x)=e^x$ $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=e^x$ $\quad f''(0)=1$

Funkcia $f(x)=e^x$ má v bode $a=0$ deriváciu ľubovoľného rádu a $f^{(n)}=e^0=1$, $n=1,2,\ldots$ a teda

$$T_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

Príklad 3:

Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie $f(x) = x^4 - 4x^2$ v bode $a = -2$.

Riešenie:

$f(x) = x^4 - 4x^2$ $\qquad f(-2) = 16 - 16 = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 8x$ $\qquad f'(-2) = -32 + 16 = -16$

$f''(x) = 12x^2 - 8$ $\qquad f''(-2) = 40$

$f'''(x) = 24x$ $\qquad f'''(-2) = -48$

$f^{(4)}(x) = 24$ $\qquad f^{(4)}(-2) = 24$

Dosadíme si do Taylorovho vzorca:

$$x^4 - 4x^2 = 0 + \frac{-16}{1!}(x+2) + \frac{40}{2!}(x+2)^2 + \frac{-48}{3!}(x+2)^3 + \frac{24}{4!}(x+2)^4 =$$

$$= -16(x+2) + 20(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4.$$

CVIČENIA

1. Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcií v bode $a = 0$

   (a) $f(x) = \cos x$;

   (b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$;

   (c) $f(x) = \mathrm{arcotg} x$.

2. Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie $f(x) = \sin(a + x)$.

3. Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Nájdite Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie $f(x) = x^4$, pre $a = -1$.

Viac cvičení a príkladov sa nachádza v knihách Gera [3] a Hlaváček [5].

Kapitola 7

Využitie diferenciálneho počtu

Vývoj a použitie diferenciálneho počtu mal a má rozsiahle dôsledky na skoro všetky aspekty moderného bytia. Zasahuje nielen do matematiky, ale aj do fyziky, ekonomiky a ďalších disciplín, kde sa riešia problémy týkajúce sa hľadania extrémov, okamžitých zmien niektorých veličín ako je napr. dráha či rýchlosť. Diferenciálny počet bol už aplikovaný na mnoho otázok, ktoré pôvodne ani neboli sformulované v jazyku infinitezimálneho počtu. Príklady a cvičenia som čerpala z kníh Hrubý [6], Partiková [14] a Sekerová [16].

7.1 Príklady z matematiky

V matematike sa diferenciálny počet využíva na určenie extrémnych hodnôt obvodu a obsahu rovinných útvarov a objemu a povrchu telies.

Príklad 1:

Dvanásť metrov dlhým pletivom sa má ohradiť voliéra pre vtáky, ktorá má tvar obdĺžnika a jednou stranou prilieha ku stene budovy. Aké rozmery musí mať voliéra, aby jej pôdorys mal čo najväčší obsah?

Riešenie:

Ak voliéra jednou stranou prilieha ku stene budovy, jednu stranu voliéry ušetríme (pozri obr. 23). Obvod voliéry O vypočítame zo vzťahu $O = a + a + b$.

Obvod musí byť 12 m. Dosadíme: $12 = a + a + b \Rightarrow b = 12 - 2a$. Kratšia strana voliéry má dĺžku a, dlhšia strana má dĺžku $12 - 2a$.

Obr. 23

Obsah obdĺžnika je $S = a(12 - 2a)$

alebo $S = 12a - 2a^2.$

Máme funkciu S s premennou a.

Zderivujeme ju: $S' = (12a - 2a^2)' = 12 - 4a.$

Voliéra má mať čo najväčší obsah, preto počítame extrém funkcie S. Prvá derivácia sa rovná nule.

$12 - 4a = 0 \;\Rightarrow\; a = 3$

Overíme si, aký to je extrém.

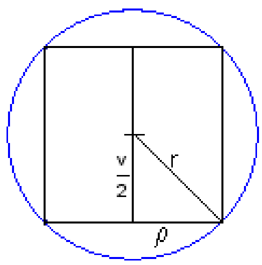
Vypočítame druhú deriváciu: $S'' = (12 - 4a)' = -4 < 0 \;\Rightarrow$ je to maximum.

Jedna strana voliéry má dĺžku 3 m a druhá $12 - 2 \cdot 3 = 6$ m.

Príklad 2:

Určte rozmery rotačného valca maximálneho objemu vpísaného do gule s polomerom r.

Riešenie:



Obr. 24

Označme objem valca V, jeho polomer ρ a výšku v. Z obrázka vidíme, že $\rho^2 = r^2 - \dfrac{v^2}{4}$, do vzorca pre objem valca V dosadíme: $V = \pi\rho^2 v = \pi v\left(r^2 - \dfrac{v^2}{4}\right) = \pi\left(r^2 v - \dfrac{v^3}{4}\right).$

Ak π je konštanta, neovplyvňuje existenciu extrému, derivujeme funkciu: $V = \pi\left(r^2 v - \dfrac{v^3}{4}\right)$

$V' = r^2 - \dfrac{3v^2}{4} = 0.$

Vypočítame v: $r^2 - \dfrac{3v^2}{4} = 0 \Rightarrow v^2 = \dfrac{4r^2}{3} \Rightarrow v = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$

$\rho = \sqrt{r^2 - \dfrac{v^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \dfrac{4r^2}{4 \cdot 3}} = \sqrt{\dfrac{2r^2}{3}} = \dfrac{r\sqrt{6}}{3}.$

$V'' = \left(r^2 - \dfrac{3v^2}{4}\right)' = -\dfrac{6v}{4} = -\dfrac{3v}{2}.$

Zlomok $-\dfrac{3v}{2} < 0$, lebo $v > 0$.

Valec maximálneho objemu vpísaný do gule s polomerom r má rozmery:

$\rho = \dfrac{r\sqrt{6}}{3}$, výšku $v = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$, objem $V = \pi\dfrac{2r^2}{3} \cdot \dfrac{2r\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\pi r^3\sqrt{3}}{9}.$

Príklad 3:

Strana knihy má mať 250 cm^2 tlačeného plošného obsahu. Horný a dolný okraj majú byť 3 cm široké, bočné okraje 2 cm široké. Aké rozmery má mať strana, aby jej plošný obsah bol najmenší?

Riešenie:

Nech x znamená výšku strany a y jej šírku. Výška tlačeného obsahu bude potom $x - 6$ a šírka $y - 4$ cm. Plošný obsah tlačenej časti bude teda $(x - 6) \cdot (y - 4)\,\text{cm}^2 = 250\,\text{cm}^2$. Vyjadríme z rovnice y pomocou x: $y = 4 + \dfrac{250}{x - 6}$. Označme P ako plošný obsah strany. Vieme, že $P = xy$. Dosadením za y dostaneme $P = x\left(4 + \dfrac{250}{x - 6}\right)$. Pritom si musíme uvedomiť, že x musí byť väčšie ako 6, pretože súčet horného a dolného okraja má byť 6 cm. Máme teda nájsť absolútne minimum funkcie $P(x)$ na intervale $(6, \infty)$. Derivácia tejto funkcie existuje v každom čísle tohto intervalu.

$$P'(x) = \frac{4x^2 - 48x - 1356}{(x - 6)^2}.$$

Derivácia funkcie sa rovná nule v čísle $6 + 5\sqrt{15}$. Na intervale $(6, 6 + 5\sqrt{15})$ je funkcia klesajúca (derivácia je menšia ako 0) a na intervale $(6 + 5\sqrt{15}, \infty)$ je funkcia rastúca. To znamená, že v bode $6 + 5\sqrt{15}$ má funkcia lokálne minimum.

Kniha by teda mala mať rozmery $x = 6 + 5\sqrt{15}$ cm, $y = 4 + \dfrac{250}{5\sqrt{15}} = 4 + \dfrac{10}{3}\sqrt{15}$ cm.

7.2 Príklady z fyziky

Väčšina úloh z tejto oblasti sa spravidla týka sledovania časových zmien, prípadne hľadania extrémnych hodnôt určitej veličiny. Jeden príklad využitia diferenciálneho počtu vo fyzike sme uviedli aj v kapitole 3.3.2. (pozri str. 29 príklad 4).

Príklad 1:

Náklady na pohon lode za hodinu sú priamo úmerné tretej mocnine jej rýchlosti. Pri rýchlosti 30 km/h sú 30 eur za hodinu. Ostané náklady sú 480 eur za hodinu. Pri akej rýchlosti je 1 km plavby najlacnejší?

Riešenie:

Ak je rýchlosť lode x km/h, náklady za jej pohon za hodinu (v eurách) sú $N_p = kx^3$. Z podmienky, že pre $x = 10$ km/h sa $N_p = 30$ eur za hodinu, t.j. $30 = k \cdot 10^3$, dostaneme $k = 0,03$. Ak sa loď pohybuje rýchlosťou x km/h, prejde za hodinu x km a celkové náklady v eurách za ten čas sú $0,03x^3 + 480$. Náklady na 1 km plavby teda sú

$$N = \frac{0,03x^3 + 480}{x} \quad \Rightarrow \quad N = 0,03x^2 + \frac{480}{x},\ x > 0$$

Touto rovnicou je na intervale $(0, \infty)$ definovaná funkcia, ktorá vyjadruje závislosť celkových nákladov plavby na 1 km od rýchlosti lode. Našou úlohou je teda nájsť globálne minimum tejto funkcie.

Najprv nájdeme lokálne extrémy: $N' = 0,06x - \dfrac{480}{x^2} = 0$,

t.j. $6x^3 - 48000 = 0$ má jedno reálne riešenie: $x = 20$.

Lokálne minimum $N(20) = 0,03 \cdot 20^3 + 480 = 720$. Nájdené lokálne minimum je zároveň aj globálnym minimom.

1 km plavby bude najlacnejší pri rýchlosti 20 km/h.

Príklad 2:

K batérii s elektromotorickým napätím U_e a vnútorným odporom R_i je pripojený spotrebič. Výkon batérie je $P = U_e I - I^2 R_i$. Pri akom prúde bude výkon maximálny?

Riešenie:

Hľadáme extrém funkcie $P = P(I)$ premennej I.

Pre deriváciu tejto funkcie platí: $P' = U_e - 2IR_i$. Ďalej

$P' = 0 \iff U_e = 2IR_i \iff I = \dfrac{U_e}{2}R_i$. Charakter extrému zistíme z druhej derivácie,

pre ktorú platí: $P'' = -2R_i$.
Z toho vyplýva, že pre hodnotu $I = \frac{U_e}{2} R_i$ je výkon maximálny.

7.3 Príklady z ekonomiky

Príklad 1:

V istom podniku sú celkové náklady $C(x)$ (v mil. peňažných jednotiek) funkciou veľkosti výroby x (vyjadrenej v tisíckach kusov): $C(x) = 0,0625x^3 + 3x + 64$, pre $x > 0$.
Pri akej výrobe budú najmenšie výrobné náklady na výrobu 1000 ks výrobkov?

Riešenie:

Nájdeme funkciu priemerných nákladov $C_1 = \dfrac{C(x)}{x}$.

$C_1 = \dfrac{0,0625x^3 + 3x + 64}{x} = 0,0625x^2 + 3 + \dfrac{64}{x}$.

Funkcia $C_1(x)$ má deriváciu $C_1'(x)$ pre všetky $x > 0$. Veľkosť produkcie, pri ktorej môžu byť náklady minimálne, určíme riešením rovnice $C_1'(x) = 0$.

$C_1'(x) = 0,125x - \dfrac{64}{x^2} = \dfrac{0,125}{x^2} \cdot (x^3 - 512) =$
$= \dfrac{0,125}{x^2} \cdot (x - 8) \cdot (x^2 + 8x + 64) \ \Rightarrow \ C_1'(x) = 0$ pre $x = 8$.

Funkcia priemerných nákladov je pri produkcii menšej ako 8 tisíc kusov klesajúca a pri produkcii väčšej ako 8 tisíc kusov výrobkov rastúca. Teda pri výrobe 8 tisíc kusov výrobkov sú minimálne priemerné náklady $C(8) = 11,4$ mil. peňažných jednotiek.

Príklad 2:

Istý nemenovaný podnik vyrába svoje výrobky na trhu pri funkcii celkových príjmov $R(x) = 3x - 10 - 0,01x^2$. Určte, pri akej produkcii vzrastie celkový zisk podniku.

Riešenie:

Vypočítame prvú deriváciu: $R'(x) = 3 - 0,02x$.

Keďže chceme zistiť kedy budú zisky rásť, potrebujeme vypočítať, na akom intervale bude funkcia rastúca.

$P'(x) > 0$, t.j. $3 - 0,02x > 0$, odtiaľ $x < \dfrac{3}{0,02} = 150$.

Funkcia celkových ziskov je rastúca na intervale $\langle 0, 150 \rangle$. Ak $x_1,\ x_2 \in \langle 0, 150 \rangle$, $x_1 < x_2$ potom, podľa definície monotónnosti funkcie, zvýšením produkcie z úrovne x_1 na úroveň x_2 celkový zisk vzrastie.

CVIČENIA

1. Tvrdý papier tvaru obdĺžnika má rozmery 60 cm a 28 cm. V rohoch sa odstrihnú rovnaké štvorce a zvyšok sa ohne do tvaru otvorenej krabice. Akú dĺžku musia mať strany odstrihnutých štvorcov, aby objem krabice bol najväčší?

2. Treba zhotoviť nádobu tvaru valca, uzavretú vrchnákom tvaru polovice guľovej plochy. Stena a dno nádoby sú zhotovované z rovnakého materiálu. Vrchnák je zhotovovaný z materiálu, ktorý je $5,5$-krát drahší. Aké musia byť rozmery nádoby, aby pri danom objeme bola jej výrobná cena najmenšia?

3. Počiatočné náklady elektrického vedenia sú závislé na priereze S vedenia a na stratách elektrického prúdu vo vedení vzťahom $y = k_1 S + \dfrac{k_2}{S}$, kde k_1, k_2 sú kladné konštanty. Určte prierez S tak, aby náklady boli minimálne.

4. Bod sa pohybuje po priamke tak, že jeho vzdialenosť s od začiatočného bodu sa za t sekúnd rovná

$$s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$$

   a) Určte časy, v ktorých sa pohybujúci bod nachádzal v začiatočnom bode.

   b) V akom čase sa rýchlosť rovná nule?

5. Mesto A leží na rieke, ktorá tečie priamo. Mesto B leží 20 km ďaleko od mesta A a je 5 km vzdialené od tej istej rieky, na ktorej leží mesto A. Kde na rieke treba zhotoviť vodáreň, ktorá by zásobovala obe mestá, aby stavba potrubia bola čo najlacnejšia, ak stavba 1 km dlhého potrubia po rieke stojí $\frac{3}{4}$ ceny stavby po zemi?

6. Zistite, pri akej produkcii budú zisky rásť, ak by funkcia celkových príjmov z príkladu 2 (str. 66) bola $R(x) = 5x - 15$.

Kapitola 8

Výsledky cvičení

Kapitola 2

1. a) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, **b)** $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(|x| < 1)$, **c)** $6x,\ x > 0,\quad -6x,\ x < 0$, **d)** $\frac{2x}{1+x^2} + 2\mathrm{arctg}\ x$, **e)** $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

2. a) $y^{(3)} = 18x\cos x - x^3\cos x + 6\sin x - 9x^2\sin x$, $y^{(5)} = -60x\cos x + x^3\cos x - 60\sin x + 15x^2\sin x$, **b)** $y^{(3)} = 6\cos 2x - 36x^2\cos 2x - 36x\sin 2x + 8x^3\sin 2x$, $y^{(5)} = -240\cos 2x + 240x^2\cos 2x + 480x\sin 2x - 32x^3\sin 2x$, **c)** $y^{(3)} = 2e^x(\cos x - \sin x)$, $y^{(5)} = -4e^x(\cos x + \sin x)$, **d)** $y^{(3)} = x^2(47 + 60\ln x)$, $y^{(5)} = 274 + 120\ln x$, **e)** $y^{(3)} = 2e^x(3\cos x + x\cos x - x\sin x)$, $y^{(5)} = -4e^x(x\cos x + 5\sin x + x\sin x)$.

3. a) $-2^{n-1}\cos(2x + n\frac{\pi}{2})$, **b)** $\frac{3\cos(x+n\frac{\pi}{2})+3^n\cos(3x+n\frac{\pi}{2})}{4}$, **c)** $2(-1)^n n!/(x-1)^{n+1}$, **d)** $(-1)^n n!\frac{(x+1)^{-n-1}+(x-1)^{-n-1}}{2}$, **e)** $e^x(x+n)$.

Kapitola 3 (3.1-3.2)

1. $\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01$, $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4$. Rozdiel je 0,01.

2. a) $dy = 0,5$, **b)** $dy = 48dx$.

3. Presné hodnoty **a)** $1,2166529$, **b)**$0,4848096$.

4. $d^5 f(1) = 24x^5$.

Kapitola 3 (3.3-3.4.2)

1. a) nemá deriváciu v $x = 0$, **b)** $f(0) = 0$, $f(2) = 2$.

2. body sú dva: $(-1,-1)$, $(1,1)$.

3. V obidvoch prípadoch platí. **a)** $f'(c) = 7$, $c = \frac{1}{12}(5 + \sqrt{97})$, **b)** $f'(c) = \frac{1}{2}$, $c = \sqrt{2}$.

Kapitola 4

1. a) Je rastúca, nie je ani párna, ani nepárna, nie je zhora, ani zdola ohraničená, nemá maximum, ani minimum. **b)** Je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$, je párna, nie je zhora, ani zdola ohraničená, minimum má v bode 0, maximum nemá. **c)** Je definovaná na množine $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna, ani periodická. Funkcia je na intervale $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ klesajúca a konvexná, na intervale $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ je rastúca a konvexná a na intervale $(0, \infty)$ je klesajúca a konvexná. Graf funkcie má asymptotu bez smernice: $x = 0$ a asymptotu so smernicou: $y = -x$. **d)** Funkcia je párna, zdola ohraničená, zhora ohraničená nie je. Je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$ a klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$, v bode 0 má minimum. Maximum nemá.

2. a) Nie je párna, ani nepárna, je zdola ohraničená, zhora ohraničená nie je. Je rastúca na intervale $\langle -1, \infty)$ a klesajúca na $(-\infty, -1\rangle$. Funkcia má minimum v bode -1 a maximum nemá. **b)** $D(f) = R^+$, preto nie je ani párna, ani nepárna. Je rastúca na $(0, e\rangle$ a klesajúca na $\langle e, \infty)$. Lokálne maximum má v bode $x = e$. Funkcia je konkávna na $(0, e^{\frac{3}{2}})$ a konvexná na $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$. Bod $e^{\frac{3}{2}}$ je inflexný. Graf funkcie má asymptotu bez smernice: $x = 0$ a asymptotu so smernicou: $y = 0$. **c)** Funkcia nie je ani párna, ani nepárna. Je rastúca na intervaloch $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(0, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-\frac{2}{3}, 0)$. Funkcia má v bode $x = -\frac{2}{3}$ lokálne maximum a v $x = 0$ má lokálne minimum. Funkcia je rýdzokonvexná na intervale $(-\infty, -1)$ a rýdzokonkávna na intervaloch $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$. Graf funkcie nemá asymptoty bez smernice. Asymptota so smernicou: $y = x + \frac{1}{3}$. **d)** Nie je párna, ani nepárna. Funkcia je rastúca na intervaloch $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, klesajúca na $(-1, 1)$. V bode $x = -1$ má lokálne maximum a v bode $x = 1$ má lokálne minimum. Na intervale $(-\infty, 0)$ je konkávna a na intervale $(0, \infty)$ je konvexná. V bode $x = 0$ má funkcia inflexný bod. Graf funkcie má asymptoty so smernicou: $y = x$ a $y = x + 2\pi$.

3. Takýchto grafov funkcií je viac.

Kapitola 5

1. a) -2, **b)** $+\infty$, **c)** 1, **d)** 12.

2. a) 2, **b)** 1, **c)** $\ln a$, **d)** $+\infty$.

3. a) nie, **b)** nie, **c)** áno, $-\frac{1}{2}$, **d)** áno, 1.

Kapitola 6

1. a) $\cos x = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, **b)**$\sin x \cdot \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + ...$, pre všetky x, **c)** $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots pre |x| \leq 1$.

2. $\sin(a + x) = \sin a(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots) + \cos a(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots)$.

3. $(a^x) = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 - \frac{\ln^3 a}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + R_{n+1}$.

4. $x^4 = 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$.

Kapitola 7

1. $x = 12\,\mathrm{cm}$.

2. Ak V je objem nádoby, r polomer podstavy a v výška steny, minimálna cena nádoby bude ak má rozmery: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{32\pi}}$ a $v = \frac{15}{16}\sqrt[3]{\frac{32^2V}{9\pi}}$.

3. $S = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$.

4. **a)** $t_1 = 0$, $t_2 = 8$, **b)** $t_1 = 0$, $t_2 = 4$, $t_3 = 8$.

5. Vodáreň treba zhotoviť na rieke za mestom A smerom k mestu B tak, aby bola vzdialená od A $\sqrt{3575} - \frac{15}{\sqrt{7}}$.

6. Funkcia celkových ziskov $R(x)$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$. Zvyšovaním produkcie budú zisky vždy rásť.

ZÁVER

Súčasný rozvoj informačných a komunikačných technológií (IKT) je neoddeliteľnou súčasťou nášho života a spôsobuje aj prevratnú zmenu metód vzdelávania. Stále viac učiteľov matematiky hľadá odpoveď na otázku, ako čo najefektívnejšie integrovať prostriedky IKT, predovšetkým počítače, do vyučovania. Poznáme veľa kvalitných počítačových programov a softvérových produktov. V našej práci sme využili program GeoGebra, v ktorom sme vytvorili aplety. Aplety dokážu podrobnejšie a názornejšie vysvetliť teóriu. Geogebra je free softvér a keďže k nej ešte neexistuje slovenská verzia wikipédie s učebnými materiálmi, chceli by sme prispieť k jej vytvoreniu.

Cieľom našej práce bolo podať teóriu diferenciálneho počtu, aby mohla slúžiť ako učebný text pre študentov matematiky, ale aj iných odborov. Text sme obohatili o riešené úlohy, ktoré sú doplnené aj obrázkami. Pomáhajú pri osvojovaní si poznatkov a po ich osvojení by čitateľovi nemalo robiť problémy samostatne vyriešiť zadané cvičenia.

Po preštudovaní elektronickej učebnice, by študent mal ovládať danú tému. Učebnica môže slúžiť nielen študentom, ale aj pedagógom.

Literatúra

[1] Brabec, J. - Martan, F. - Rozenský, Z.: *Matematická analýza I.* Praha, SNTL/ Alfa, 1985.

[2] *frcatel.fri.uniza.sk/ beerb/ma1/ma1.pdf* [online]. Blaško, R.: *Matematická analýza I.* 2005.

[3] Gera, M. - Ďurikovič, V.: *Matematická analýza.* Bratislava, Alfa, 1990.

[4] Gunčaga, J. - Fulier, J. - Eisenmann, P.: *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy.* Ružomberok, KU, 2008.

[5] Hlaváček, A.: *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky.* Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

[6] Hrubý, D. - Kubát, J.: *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet.* Praha, Prometheus, 1997.

[7] Ivan, J.: *Matematika I.*. Bratislava, Alfa, 1986.

[8] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* Praha, Československá akademie věd, 1963.

[9] Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky.* Praha, SNTL/ Alfa, 1982.

[10] Kluvánek, I. *Diferenciálny počet.* Ružomberok, PF KU, 2007.

[11] Kluvánek, I. *Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej.* Ružomberok, PF KU, 2007.

[12] Kluvánek, I. – Mišík, L. - Švec, M.: *Matematika I.*. Bratislava, Alfa, 1971.

[13] Mihalíková, B. - Ohriska, J.: *Matematická analýza I.* Košice: vydala Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach, 2000.

[14] Partiková, K.- Reiterová, M.: *Nová maturita. Matematika 2.* Bratislava, Príroda, 2005.

[15] Riečan, B. - Bero, P. – Smida, J. - Šedivý, J.: *Matematika pre 4. ročník gymnázia.* Bratislava, SPN, 1987.

[16] Sekerová, V.: *Zbierka úloh z matematiky.* Bratislava: vydala Ekonomická univerzita v Bratislave v edičnom stredisku.

[17] Šalát, T. a kol.: *Podnety pre ďalšie vzdelávanie učiteľov matematiky.* Bratislava, MFF UK, 1988.

[18] www.geogebra.org/de/upload/index.php?directory=dynamische_arbeitsblaetter/menl PHPSESSID=3aae436d7393628d978cff40454dc5c8

[19] http://sk.wikipedia.org/wiki/Infinitezimálny_počet

Dodatok A

PRÍLOHA

Príloha obdahuje CD, kde sa nachádzajú aplety.