

Číselné sústavy

Ján Kuruc

Pripravil som si dielňu na tému „číselné sústavy“. Obsahuje päť častí.

- úvod,
- motiváciu,
- separované modely,
- univerzálne modely,
- záver.

Rád by som hovoril viac o metodike, ako o samotnej matematike. Aby bolo jasnejšie o čo mi pôjde, pripravil som si v úvode alegorický príbeh o motýľovi.

Jedného dňa sa v kukle objavil malý otvor. Človek si sadol a dlhé hodiny pozoroval zápas motýľa, ktorý sa chcel dostať cez tento otvor von. Naraz pohyb prestal a zdalo sa, že všetko skončilo a to čo sa malo stať sa nestane. Človek sa rozhodol motýľovi pomôcť. Zobral nožnice a kuklu otvoril. Potom sa mohol motýľ ľahko dostať von. Človek aj naďalej sledoval motýľa v nádeji, že tento roztvorí pestrofarebné krídla a odletí. Nič také sa však nestalo. Motýľ mal slabé telo a scvrknuté krídla. Celý zvyšok svojho života sa pohyboval iba ložením. Človek vo svojej dobrosrdečnosti, v dobrej vôli pomôcť motýľovi si neuvedomil, že zápas motýľa s obmedzujúcou kuklou bol nevyhnutný. Je to boží spôsob ako dostať lymfu z tela motýľa do krídel, aby tieto boli silné a mohol na nich lietať. Aj v živote človeka je zápas nevyhnutný. Ak by náš život sa dial bez prekážok, bez starostí, neboli by sme takí silní ako by sme mali byť. Nikdy by sme neboli schopní lietať.

Prosil a žiadal som Pána boha aby mi dal silu a on mi dal starosti aby ma posilnil.

Žiadal som o odvalu a on mi dal prekážky aby som ich prekonával.

Žiadal som o rozum, múdrosť a on mi dal problémy aby som ich riešil.

Žiadal som o hojnosť a on mi dal šikové ruky aby som pracoval.

Žiadal som o lásku a on mi dal bezbranných a nevedomých aby som sa o nich staral.

Žiadal som o priazeň a on mi dal príležitosť.

Nedostal som nič o čo som prosil a žiadal, dostal som však všetko čo som potreboval.

Na začiatok vám rozdám pomôcky, s ktorými budete pracovať. Každý má peňaženku a v nej zvláštne peniaze o ktorých poviem neskôr a pokladničné priehradky, ktoré budeme potrebovať.

Pre deti sa nám najviac osvedčila motivácia o Guliverovi. Aspoň niekoľkými vetami opíšem postup.

Guliverova pra-pa-pravnučka sa vybrala na cesty korábom. Tentoraz to bola vesmírna loď atáto sa jej pokazila niekde vo vesmíre. Musela núdzovo pristáť. Najbližšie bola hviezda, ktorá mala iba jednu -jedinú planétu. Bolo to také zoskupenie dvoch telies. Nazvala ho Bitáviou. Prístroje ukázali podmienky rovnaké ako na zemi. Na Bitávii ju čakal uvítací výbor, ktorý jej sľúbil, že jej opraví vesmírnu loď a za ten čas si môže prezrieť v sprievode jednej bitávčanky ich krajinu.

V rámci rozprávky im povieme tri základné pravidlá.

1. Za najmenšiu menovú jednotku jednu korunu, jej sprievodčička vždy vymení ich najmenšiu menovú jednotku a tou je jeden Agoš. Zápis – $1 \text{ Sk} = 1 \text{ Ag}$.
2. V obchode videla, že každý obchodník mal na pulte priehradky do ktorých mohli bitávčania vkladat' peniaze len tak, že tam dali najviac jednu bankovku toho istého druhu.
3. V každom obchode bol automat, kde si mohli vymieňať peniaze tak, aby snimi mohli platiť obchodníkovi. Automat pracoval takto:
 $A + A = B$
 $B + B = C$
 $C + C = D$
a tak ďalej ...

Guliverova pra-pa-pravnučka bola hladná a chcela si kúpiť žemľu, ktorá stála 2 koruny. Pomôžte jej zaplatiť túto sumu v bitávskom obchode. Pracovať budete vo dvojiciach tak, že od dverí budú guliverove vnučky a od obloka automaty. Vnučky si vymenia peniaze a zaplatia do pokladnice. Obchodník vezme kľuku, zakrúti a pokladnica napíše všade tam kde je bankovka jednotku a inde napíše nulu. Je to však chytrá pokladnica a preto tam, kde nemusí napísať nič, tak tam nič nenapíše.

Na pokladnici sa objaví takéto číslo 10.

Pýtam sa. „Aké je tam číslo?“

Odpoveď: „Desať.“

Nedám pokoj: „Desať čoho?“ Mojim cieľom je spochybniť čítanie tohoto čísla. Po nejakom čase, prípadných nápodenných otázkach dostávam odpoveď „Je tam jeden begroš a nula agrošov.“

Výsledok: $2 \text{ Sk} = 10 \text{ g}$ zapíšem na tabuľu.

Dám úlohu pomôcť zaplatiť vnučke tri koruny za malinovku. Tentoraz úlohy si vymenia. Tí čo boli vnučky budú automaty a naopak. Riešime niekoľko úloh.

Nezabudnem na úlohu vymeniť 9 Sk.

Po niekoľkých úlohách dám úlohu pomôcť vymeniť 24 Sk.

Alenka volá: „To sa nedá.“

„Prečo Alenka?“

„Lebo nemám toľko agrošov.“

Jožko zozadu presviedča Alenku, že sa to dá, ak si vymení 24 agrošov za 12 begrošov. Ale ani begrošov toľko nemám. Tak si ich vymeň za 6 cegrošov.

Úlohy dávam preto, aby prešli z tohoto separovaného modelu do abstrakcie.

Ďalšie úlohy sú na vytváranie algoritmov sčítovania, odpočítovania, násobenia a delenia.

Vnučka si vybrala dve veci, ktoré stáli určitú sumu a treba jej zaplatiť. Pomôžme jej.

1011011

101101

Príklad je v abstraktnej podobe na tabuli.

Jožko príde ku tabuli a sčítuje s chybou: „jedna a jedna sú dve.“

1011011

101101

2

Podľa N. Flandersa mám v podstate dve možnosti.

1. Odmietanie žiaka (Refuse) . Vyjadrené komentármi typu: Netáraj! To nie je pravda. Kde si to vzal? Kdesi bol, keď sme sa to učili? Vyvolanie iného žiaka. Nepíš tam také sprostosti. A podobne.
2. Akceptáciu žiaka (Akceptation). Pochopím, že do chlapca bolo od malička hustené, že jedna a jedna sú dve. Prečo teraz by to malo byť iné. On to vypočítal správne. Potrebujem príklad dostať pre Jožka zabstrakcie do separovaného modelu.

Pýtam sa ho: „Ako pomôžeme zaplatiť v bitávskej obchode guliverovej vnučke?“

On sa opraví : „jeden agroš a jeden agroš je jeden begroš. Dva agroše vymeníme za jeden begroš.“ Prečiarkne dva agroše a namiesto toho pripíše jednotku ku begrošom.

Postupne sťažovaním príkladov sa učia žiaci sami hľadať algoritmy sčítovania, odčítovania, násobenia a delenia.

Kto to nevie nech si to urobí za domácu úlohu. V závere vám dám príklad, kde to môžete využiť.

Pre poučenie prejdeme k univerzálnym modelom, ktoré sa zavádzali v sedemdesiatych rokoch.

Matematici dúfali, že zavedením množín do školskej matematiky sa prinesie dostatok názornosti na to, aby sa matematika ľahšie učila. Pozrime sa na príklade číselných sústav ako to experimentom skončilo.

O O O

O O O

O O O

Nakreslil som 9 krúžkov, čo môže predstavovať deväť koliesok, deväť jabĺčok, deväť cukríkov, ale rovnako dobre aj deväť hlávok kapusty. Vytvoril som teda univerzálny model. Ak to orámujem, môže mi to predstavovať základnú množinu s deviatimi prvkami. Potom mi už nebude záležať na konkrétnom obsahu. Pre prevod do dvojkovej sústavy bolo potrebné povedať zaklínadlo. V metodike stálo napísané: „Učiteľ povie žiakom: za ktorou nasledovalo to zaklínadlo. Nielen ja som sa ho nikdy nevedel naučiť, preto je pochopiteľné, že ho neviem, ale poviem vlastnými slovami o čo tam išlo. Upozorňujem, že to bolo bez nejakej motivácie. Vzala sa krieda a vytvárali sa zoskupenia disjunktných podmnožín z prvkov základnej množiny vždy po dva prvky pokiaľ sa to dalo. Potom nasledovalo ďalšie zoskupovanie podmnožín po dva. A tak sa to opakovalo kým sa to dalo robiť. Samotné zoskupenie nestačilo a musela sa urobiť tabuľka jednotlivých zoskupení, pričom sa nesmeli zabudnúť na nezoskupené prvky.

V našom prípade:

Nezoskupené prvky ... 1

I. zoskupenie ... 0

II. zoskupenie ... 0

III. zoskupenie ... 1

Výsledok musíme zapísať od najvyššieho zoskupenia po nezoskupené prvky. Je ťažké vysvetliť prečo. Takýto postup má množstvo úskalí a nepochopenia. V snahe pomôcť učiteľom sme pripravili sériu vzorových hodín, v ktorých sme učiteľom ukazovali postup nazvime ho Guliver. Tento som vám v predchádzajúcom demonštroval. Poviem jednu príhodu. Prvé hodiny sme pripravovali spolu s manželkou. Vysvetlil som jej takmer všetky podrobnosti a keď som ju prehovoril na vzorovú hodinu, dala si podmienku, že si to najskôr sama odskúša, len za mojej prítomnosti. Po niekoľkých úlohách v separovanom modeli s Guliverom, prešla ku množinám a žiaci zrazu nevedeli o čo ide, nevedeli ďalej pokračovať. Manželka na to tiež nebola pripravená, tak prišla ku mne a prehlásila: „Teraz si to pod učiteľ sám.“ Moja reakcia bola taká, že znova som príklad vrátil do separovaného

modelu, kde práca žiakov znova ožila a až po nejakých ďalších príkladoch sme prešli do abstraktnejšej polohy do množinových zápisov. Žiaci potom pochopili o čo ide a príklady im nerobili problémy. Hodiny sa potom všetky vydarili, keď učitelia vedeli diagnostikovať, kedy prejsť k abstraktnejšiemu modelu.

Množinovým záznamom sa nedá vytvárať algoritmus sčítovania tak, aby keď žiak urobí chybu, sme ho vedeli usmerniť tak, aby sa sám vedel opraviť. Pri práci v univerzálnom modeli nemáme také didaktické možnosti ako pri separovanom modeli.

Množinovým záznamom sa nedá vytvárať algoritmus sčítovania tak, aby keď žiak urobí chybu, sme ho vedeli usmerniť tak, aby sa sám vedel opraviť. Pri práci v univerzálnom modeli nemáme také didaktické možnosti ako pri separovanom modeli.

Učiva bolo však veľa, času málo tak doporučené sa minulo cieľa a učitelia volili omnoho jednoduchší spôsob.

$$9 : 2 = 4 \text{ zv. } 1$$

$$4 : 2 = 2 \text{ zv. } 0$$

$$2 : 2 = 1 \text{ zv. } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ zv. } 1$$

Ved' na to, aby naučili to, čo predpisovali učebné osnovy, to stačilo lepšie ako množinový záznam.

Uvedený algoritmus delenia dvoma tiež nerieši mnohé situácie. Skúste číslo 0,2 takýmto spôsobom vyjadriť v dvojkovej sústave. Rýchlo zistíte, že sa to nedá. Je to sľúbená domáca úloha. Ak si vytvoríte spomínané algoritmy, potom to zvládnete delením 2:10.

Čo vlastne urobili učitelia. Zobrali pomyslené nožnice a otvorili kuklu poznávania. To čo z toho vyšlo, bolo veľmi žalostné a preto Ministerstvo školstva to riešilo veľmi jednoduchým spôsobom. Učivo vyčiarkli z učebných osnov.

Na záver vám poviem jednu skúsenosť.

Po niekoľkých rokoch ma stretol kolega na ulici a mi hovorí: „Je to pekné čo si nám rozprával, ja mám však ďaleko väčší problém.“ „Aký, prosím ťa.“ „Naučiť žiakov v deviatom ročníku malú násobilku, lebo mnohí ju nevedia.“

S podobným problémom sa nedávno stretol pán docent Frič, ktorého atakuje okolie, prečo žiaci v štvrtom ročníku nevedia spočítovať s prechodom cez desiatku.

Ja si hovorím. Aký to šťastný učiteľ, ktorému stačí naučiť žiakov spočítovať, násobiť.

Ak to postupíme vyššie. Aký je to šťastný učiteľ, ktorému stačí naučiť študentov derivovať, integrovať.

Ak to dáme ešte vyššie. Aký to šťastný učiteľ, ktorému stačí naučiť žiakov matematiku.

Prečo šťastný?

Ved' nie je nič ľahšie ako zobrať nožnice a otvoriť kuklu, rozbaľiť matematiku, predviesť algoritmy, oslobodiť žiaka zo zajatia obmedzujúcej pavučiny. Pokiaľ cieľom je samotná kukla – matematika.

Myslím, že je však správnejšie aby sa tejto kukly zbavil sám žiak.

Matematiku by sme mali vidieť nie ako cieľ, ale ako prostriedok. Prostriedok silný a nevyhnutný na to, aby sme v deťoch rozvíjali tie psychické procesy, ktoré sú pre človeka tie najvlastnejšie a to je rozum.

Mgr. Ján Kuruc
Pedagogická fakulta KU
Ružomberok