Kombinatorické hry v školskej matematike

Monika Žilková

ABSTRACT: *This paper deals with the teaching combinatorics using games or puzzles. This games could be used in Primary school as in Secondary school by changing problem to a difficult or simple one or by extending it whenever possible to a general problem. When presented it to enthusiastic children hungry for challenges, these puzzles can teach a lot about logical thinking, while providing amusement.*

1. ÚVOD

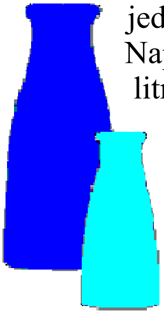
Kombinatorika je tá časť matematiky, s ktorou sa stále trápia žiaci základných a stredných škôl a niekedy aj ich učitelia. Je to preto, že kombinatorika si vyžaduje určitú úroveň kombinatorického myslenia žiakov. Toto myslenie sa musí kontinuálne rozvíjať už od prvej triedy ZŠ, na čo sa často zabúda. S potrebou riešiť kombinatorické problémy sa stretávame v každodennom živote. Už ráno uvažujeme, čo si „môžeme dať“ na raňajky, čo si oblečieme, akou najbližšou cestou sa dostaneme na miesto stretnutia, či sa dovoláme prieteľovi, ak sme zabudli poslednú číslicu jeho telefónneho čísla, je možné, že vyhrám, ked si kúpim lós, či sa môžem spoľahnúť, že nikto neprečíta moje e-maily. Z vyššie uvedeného vyplýva dôležitosť prípravy žiakov na riešenie kombinatorických problémov. Úlohou učiteľa je nájsť čo možno najlepšiu metódu budovania kombinatorického myslenia u detí, najprv bez používania kombinatorických pojmov. Žiaci vedia riešiť kombinatorické hry, hlavolamy či rébusy oveľa skôr ako poznajú kombinatorické pojmy. Hra sa mení v ťažkú alebo ľahkú v závislosti od pravidiel, ktoré pre hru určíme. Takto možno tú istú hru prispôsobiť rôznym vekovým kategóriám žiakov, a tiež úrovni ich poznatkov. Ak sú hry spájané s príbehmi, tieto príbehy poukazujú na to, ako môže byť

abstraktný matematický objekt spojený so situáciou z každodenného života.
Cieľom týchto aktivít je rozvíjanie kombinatorického myslenia u žiakov prostredníctvom riešenia problémov (problem-solving), a tým im poskytnúť príležitosť na rozvíjanie matematických zručností.

Mliekárov problém

Mliekár má k dispozícii 5-litrový a 3-litrový džbán a dostatočné množstvo mlieka. Ako odmeria presne 4 litre mlieka?

Problém džbánov a jeho variácie sú známe už od 13. storočia. Ponúkame jednu z ciest ako vyriešiť tento problém:



Naplňme 5-litrový džbán. Prelejme z neho 3 litre do 3-litrového džbána, takže nám zostanú 2 litre v 5-litrovom džbáne. Vyprázdnime 3-litrový džbán a prelejme do neho 2 litre z 5-litrového džbána. Naplňme 5-litrový džbán a odlejme z neho 1 liter do 3-litrového džbána, doplniac ho. Tak sme dostali 4 litre v 5-litrovom džbáne.

Tento problém môžeme rozšíriť a riešiť podobný: Ako odmeriame 1 liter? A čo ak máme k dispozícii 9-litrový a 4-litrový džbán? Môžeme v takom prípade odmerať ľubovoľný objem od 1 do 13 litrov? Ak tieto problémy zadáme zanieteným deťom „hladným" po zmene, môžu prezradiť veľa o logickom myslení pri zábave.

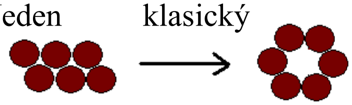
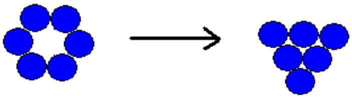
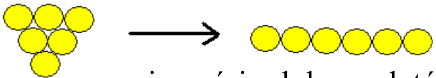
Môžno zadať aj všeobecný problém: Máme dostatočné množstvo vody a dve nádoby o objeme X a Z litrov (X je väčšie ako Z). Ukážte, ako možno dostať práve Y litrov vody (Y je menšie alebo rovné X) v jednej nádobe. Tento problém možno tiež zovšeobecniť na *n* nádob.
Thomas J. Pfaff a Max M. Tran ponúkajú riešenie zovšeobecneného problému dvoch nádob: Dokázali, že ak X a Z sú nesúdeliteľné (t.j. nemajú iného spoločného deliteľa okrem 1) môžeme dostať ľubovoľný objem litrov od 1 po X+Z. Napr. ak sa vrátime k nášmu pôvodnému problému, 5 a 3 majú jediného spoločného deliteľa a tým je 1, teda sú nesúdeliteľné a teda môžeme odmerať ľubovoľný objem od 1 do 8 litrov. Podobne 9 a 4. Tiež je možné napr. použitím 5- a 12- litrovej nádoby získať ľubovoľný objem vody od 1 do 17 litrov.

Ukážeme príklad, ako Pfaffov a Transov algoritmus pracuje ak použijeme 5- a 12- litrovú nádobu. Aby sme dostali množstvo vody od 1 do 4-och litrov, dajme na začiatku 10 litrov vody do 12-litrovej nádoby. Naplňme 5-litrovú nádobu a doplňme 12- litrovú do plna. Zostanú nám 3 litre v 5-litrovej nádobe. Vlejme ich do vyprázdnenej 12-litrovej nádoby. Pridajme ešte 5 litrov a dostaneme ešte 4 litre voľného priestoru. Naplňme ešte raz 5-litrovú nádobu a doplnením 12-litrovej nám v nej zostane práve 1 liter.
Ako môžeme vidieť, bez takéhoto zovšeobecnenia riešenie podobného problému môže byť namáhavé.
Ako odmeriame práve 4 litre použitím len 6-litrovej a 3-litrovej nádoby? Samozrejme, ako vidieť, tento problém nemá riešenie.

U menších detí možno túto úlohu riešiť i prakticky, napríklad zadelením detí do družstiev a súťažením, ktoré družstvo ako prvé vyrieši Mliekárov problém a nameria určený počet litrov. Takto sa aj menej bystré deti môžu zapojiť tým, že využijeme ich praktické zručnosti, a teda sa podieľajú na riešení úlohy spolu s inými. Samozrejme, zadanie úlohy je potrebné meniť vzhľadom na vek detí alebo študentov a ich doterajšie vedomosti.

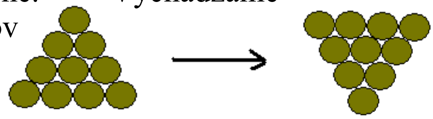
Kĺzavé dukáty

Táto hra je založená na geometrickom usporiadaní mincí, pričom prechádzame z jednej konfigurácie usporiadania mincí do inej kĺzaním mincí popri dodržiavaní daných obmedzení a na čo najmenej ťahov. Jeden klasický hlavolam napríklad začína usporiadaním dukátov tesne pri sebe do kosodĺžnikového tvaru, pričom máme dva rady o troch dukátoch. Cieľom je vytvotiť z nich kruh tak, že ak by sme mali siedmy dukát umiestnený v strede, ostatných šesť by bolo usporiadaných tesne okolo neho. Obmedzenie je v tom, že pri každom ťahu musí dukát prekĺznuť do takej novej pozície, kde sa dotýka dvoch iných mincí. Vedeli by ste vyriešiť tento hlavolam na tri ťahy? Možno to urobiť 24-mi spôsobmi.

Iná úloha by bola vytvoriť z kruhového usporiadania trojuholníkové. Čo tak skúsiť to na dva ťahy? Alebo preusporiadať trojuholník pozostávajúci zo šiestich dukátov do radu na sedem ťahov?

Ďalší hlavolam začína podobne. Vychádzame z trojuholníkového usporiadania dukátov a úlohou je previesť ho na trojuholník otočený „hore nohami“, pričom podmienkou je, aby dukát po ťahu vždy susedil s dvoma ďalšími.

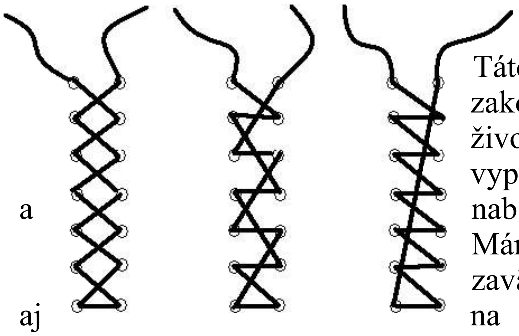


Pri trojuholníku pozostávajúcom z troch dukátov je to ľahko možné na jeden ťah. Pri trojuholníku zo šiestich dukátov potrebujeme dva ťahy a tri ťahy pri trojuholníku z desiatich dukátov. A čo pri trojuholníku z pätnástich dukátov? Tu potrebujeme na „prevrátenie“ trojuholníka päť ťahov.

Vo všeobecnosti, najmenší počet ťahov potrebných ku invertovaniu trojuholníka dostaneme delením počtu mincí tromi, zanedbajúc zvyšok.

Podobne môžeme postupovať zadávaním zložitejších úloh, alebo môžeme priamo využiť predstavivosť žiakov a necháme ich vytvárať podobné úlohy spolu s pravidlami, napr. na domácu úlohu, a na ďalšej hodine ich budú zadávať svojim spolužiakom. Najnápaditejšie hlavolamy vyhodnotíme, a tým žiakov motivujeme ku zapájaniu sa, pričom si cvičia zábavnou formou myslenie.

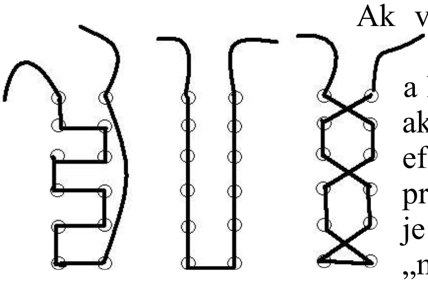
Zaväzovanie šnúrok na topánkach



Aký je najlepší spôsob ako si zaviazať šnúrky na topánkach? Táto zdanlivo jednoduchá otázka zakorenená v našom každodennom živote môže jednoducho vyprovokovať vášnivú diskusiu a nabádať k matematickej odozve. Máme najmenej tri bežné spôsoby pri zaväzovaní šnúrok, ako možno vidieť aj na obrázku: (zľava) americký alebo štandardný cik-cak, európsky priamy a rýchly obchodový. Aký spôsob používame závisí od rôznych faktorov, počnúc estetickým cítením, efektívnosťou alebo jednoducho od toho, aký spôsob sme sa naučili. Samozrejme rôzne spôsoby vyžadujú aj rôzne dĺžky šnúrok. John H.

Halton pri riešení problému ako nájsť „najlepší“ spôsob šnurovania topánok postupoval tak, že uvažoval o tomto probléme ako o špeciálnom prípade klasického predavačovho problému, v ktorom predavač musí navštívit všetkých zákazníkov v ich domácnostiach a potom sa vrátiť domov, tak aby prešiel čo najkratšiu trasu a pritom navštívil všetky domácnosti práve raz.
V našom špeciálnom prípade je našou úlohou nájsť najkratšiu cestu z vrchnej šnurovacej dierky na jednej strane do vrchnej šnurovacej dierky na strane druhej tak, že prechádzam každou práve raz.

Matematickým modelovaním možno tento prípad idealizovať tak, že šnúrku budeme považovať za čiaru nulovej hrúbky a dierky za body priestoru usporiadané rovnomerne v dvoch radoch. Potom je možné vypočítať dĺžku šnúrky na základe čísla n predstavujúceho počet párov dierok, vzdialenosti d medzi nimi a vzdialenosti g medzi medzi korešpondujúcou ľavou a pravou dierkou (alebo jednoducho odmeraním u žiakov, ktorí na výpočet ešte nemajú osvojený dostatočný matematický aparát). Uvažujúc naše tri známe spôsoby šnurovania Halton zistil, že ak n je rovné aspoň 4, najkrašie šnúrky sú vždy pri americkom šnurovaní, nasleduje európske a nakoniec obchodové. Pre n=3, americké zostávajú najkratšie, ale európske sú rovnako dlhé ako obchodové.



Ak však uvažujeme šnurovania, kde šnúrka nemusí prechádzať striedavo pravou a ľavou dierkou, existujú aj kratšie cesty ako môžeme vidieť na obrázku, avšak ich efektívnosť či spoľahlivosť v takomto prípade nemožno zaručiť. Posledný príklad je Polsterov model šnurovania, tzv. „motýlikový“ spôsob, zriadka používaný ale vyžadujúci najkratsiu šnúrku. Polster špecifikoval, že šnúrka prejde každou dierkou práve raz a že každá dierka prispieva ku pritiahnutiu oboch strán topánky.
Tento model odhaľuje, že existuje veľa spôsobov uviazania šnúrok v závislosti od počtu dierok a podmienok, aké na viazanie máme.

Literatúra:

1. Cameron Peter, J.: Combinatorics, Cambridge University, Press 1994
2. Vilenkin, N. J.: Kombinatorika, SNTL, Praha 1977

3. http://www.sciencenews.org/sn_wekly/math_arc.asp

Adresa:
Mgr.Monika Žilková, Katedra algebry a teórie čísel Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku č.1, 949 74 Nitra
e-mail: mstrbova@ukf.sk