O jednej metóde dôkazov v elementárnej analýze využívajúcej lokálny a aditívny systém intervalov

Peter Vrábel

ABSTRACT: *One new untraditional method of proofs in elementary* analysis *is presented in the contribution. This method emploies a notion of local additive class of intervals. Advantages of this method are illustrated on samples of proofs of several theorems in elementary analysis.*

1. ÚVOD

Elementárna analýza v podstatnej miere využíva spojité usporiadanie množiny reálnych čísel *R*. Dôkazy kľúčových viet elementárnej analýzy sú založené na existencii suprema (infima) zhora (zdola) ohraničenej vhodne uvažovanej neprázdnej podmnožiny množiny *R*. V posledných troch desaťročiach sa však vyvinulo niekoľko špeciálnych metód dokazovania základných viet elementárnej analýzy. Podstatné myšlienky týchto metód sú uvedené v prácach P. Shanahana [2], H. Leinfeldera [1], B.S. Thomsona [5] a T. Šaláta [3], [4]. Zmyslom tohto úsilia bolo urobiť dôkazy viet elementárnej analýzy čo najjednoduchšie. Tieto metódy prakticky nepoužívajú ani jeden zo známych princípov, ktoré sú ekvivalentné so spojitým usporiadaním množiny R (napríklad: každá ohraničená monotónna postupnosť reálnych čísel má v R limitu; princíp do seba zapadajúcich uzavretých intervalov; každá nekonečná ohraničená množina reálnych čísel má v R aspoň jeden hromadný bod; Cauchy-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti; každá ohraničená postupnosť reálnych čísel má aspoň jednu číselnú hromadnú hodnotu; princíp indukcie v kontinuu R atď.) i keď samozrejme z nich vyplývajú. Čo sa týka pochopenia je pojmovo snáď najvhodnejšia a najjednoduchšia metóda využívajúca pojem lokálneho a aditívneho systému intervalov. Jej použitie je založené na hlavnej aplikačnej vete, ktorej dôkaz je vcelku jednoduchý.

2. LOKÁLNY A ADITÍVNY SYSTÉM INTERVALOV

Majme pevný interval $\langle a,b\rangle$. Systém Γ uzavretých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ nazveme lokálny aditívny systém, ak platí:

(a_1) každý bod $x\in\langle a,b\rangle$ je vnútorným bodom nejakého intervalu $I(x)$ patriaceho do systému Γ;

(a_2) existujú body $c,d\in\langle a,b\rangle$ tak, že $\langle a,c\rangle$, $\langle d,b\rangle\in\Gamma$;

(b) ak $I_1, I_2\in\Gamma$ a $I_1\cap I_2 \neq \emptyset$, tak $I_1\cup I_2 \in \Gamma$.

Predpoklady (a_1), (a_2) charakterizujú lokálnosť systému Γ a podmienka (b) charakterizuje aditívnosť systému Γ.

Príklad 1. Nasledujúce množiny Γ sú lokálne aditívne systémy podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$:

(1) Nech $a=x_0 < x_1< \dots < x_n=b$,
$\Gamma=\{\langle x_i, x_j\rangle;\ i,j\in\{0,1,\dots,n\},\ i<j\}$.

(2) Nech $a< b_1< b_2< \dots < b_n = b$,
$\Gamma=\{\langle a,b_1\rangle,\langle a,b_2\rangle,\dots,\langle a,b_n\rangle\}$.

(3) $\Gamma=\{\langle x,y\rangle;\ \langle x,y\rangle \subseteq \langle a,b\rangle\}$.

Vráťme sa teraz k definícii lokálneho aditívneho systému intervalov. Hlavnou aplikačnou vetou, ktorú budeme využívať pri dôkazoch viet z elementárnej analýzy, je nasledujúce tvrdenie.

Veta 1. Pre každý lokálny aditívny systém Γ uzavretých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ platí, že $\langle a,b\rangle\in\Gamma$.

Dôkaz. Nech Γ je lokálny aditívny systém podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$. Ukážeme, že existujú čísla $c,d\in\langle a,b\rangle$, že $d< c$ a $\langle a,c\rangle$, $\langle d,b\rangle\in\Gamma$. Potom už $\langle a,c\rangle \cup \langle d,b\rangle =\langle a,b\rangle\in \Gamma$. Postupujme nepriamo. Nech by také čísla c,d neexistovali. Potom $\sup\{x\in(a,b\rangle;\ \langle a,x\rangle\in\Gamma\}=\alpha< b$. Číslo α sa nemôže rovnať číslu b, pretože z rovnosti $\alpha= b$ a existencie intervalu $\langle d_1 ,b\rangle\in\Gamma$ by vyplývalo, že existuje bod c_1 s vlastnosťami $d_1< c_1 \leq b$, $\langle a,c_1\rangle\in\Gamma$. Potom c_1, d_1 by boli body, ktorých existenciu sme vylúčili. Na druhej strane k α existuje interval $\langle c_2, d_2\rangle\in\Gamma$, pričom α je jeho vnútorným bodom. K c_2 existuje také x, že $c_2< x$ a $\langle a,x\rangle\in\Gamma$. Odtiaľ už vyplýva, že $\langle a,d_2\rangle\in\Gamma$, čo je spor s definíciou čísla α.

Pre ľubovoľnú množinu X symbol $P(X)$ bude označovať množinu všetkých podmnožín množiny X. Veta 1 nie je ekvivalentná so spojitým usporiadaním množiny R. Ukazuje to nasledujúci príklad.

Príklad 2. Vezmime za základnú množinu množinu racionálnych čísel Q. Budeme uvažovať intervaly racionálnych čísel. Teda pre $\alpha,\beta\in Q$, $\alpha<\beta$, bude v tomto príklade symbol $\langle\alpha,\beta\rangle$ označovať množinu všetkých racionálnych čísel x, pre ktoré platí $\alpha\leq x \leq\beta$. Vezmime pevne taký interval $\langle\alpha,\beta\rangle$. Nech a je také iracionálne číslo, že $\alpha< a <\beta$. Nech

$$\Gamma=\{\langle\alpha,\gamma\rangle\in P(Q);\ \gamma\in Q \wedge \gamma< a\}\cup\{\{\langle\gamma,\beta\rangle\in P(Q);\ \gamma\in Q \wedge a< \gamma\}.$$

Ľahko nahliadneme, že Γ je lokálny aditívny systém racionálnych podintervalov intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$, ale $\langle\alpha,\beta\rangle\notin\Gamma$.

Ešte treba poznamenať, že v definícii lokálneho aditívneho systému nie je možné zjednodušene zameniť podmienku (b) za podmienku

(b′) ak $I_1 ,I_2\in\Gamma$ a I_1 , I_2 majú spoločný jeden bod, potom $I_1 \cup I_2 \in\Gamma$,

aby zostala v platnosti veta 1. Ukazuje to nasledujúci príklad.

Príklad 3. Nech $\Gamma=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1/2,3\rangle\}$. Systém Γ je lokálny a spĺňa podmienku (b′), ale $\langle 0,3\rangle\notin\Gamma$.

3. APLIKÁCIE LOKÁLNYCH ADITÍVNYCH SYSTÉMOV

Vetu 1 možno s úspechom použiť na jednoduchšie dôkazy viacerých základných viet matematickej analýzy, ktoré majú „aditívny charakter". Pod aditívnou vlastnosťou myslíme takú vlastnosť funkcie, ktorú ak má na intervaloch $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$, $n\in N$, tak má túto vlastnosť funkcia aj na intervale $\langle x_0, x_n\rangle$. Takýmito vlastnosťami sú napríklad ohraničenosť, monotónnosť(rovnakého druhu), nadobúdanie maxima a minima, rovnomerná spojitosť, integrovateľnosť a ďalšie. Samozrejme, že uvedenú metódu možno použiť aj v iných situáciách. Ukážeme, ako možno týmto jednotiacim princípom dokázať nasledujúce známe vety z elementárnej analýzy:

(A) Každá funkcia spojitá na uzavretom intervale nadobúda na tomto intervale najväčšiu hodnotu.

(B) Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a $f(a).f(b)< 0$. Potom existuje také $x_0\in(a,b)$, že $f(x_0)=0$.

(C) Každá nekonečná ohraničená množina reálnych čísel M má v R aspoň jeden hromadný bod.

(D) Každá ohraničená postupnosť reálnych čísel má aspoň jednu číselnú hromadnú hodnotu.

(E) Ak funkcia f má v každom vnútornom bode intervalu $\langle a,b\rangle$ vlastné limity zľava i sprava a v bode $a(b)$ má limitu sprava(zľava), tak funkcia f ja na intervale $\langle a,b\rangle$ ohraničená.

Dôkaz vety (A). Postupujme nepriamo. Nech neplatí tvrdenie vety. Potom ku každému $x\in\langle a,b\rangle$ existuje také $x'\in\langle a,b\rangle$, že $f(x)< f(x')$. Zo spojitosti funkcie f vyplýva, že existuje také okolie $V(x)$ bodu x, že pre každé $t\in V(x)$ platí $f(t)< f(x')$. To nám umožňuje uvažovať takýto systém intervalov:

$$\Gamma=\{\langle c,d\rangle\in P(\langle a,b\rangle);\ \forall x\in\langle c,d\rangle\ f(x)< f(\alpha) \text{ pre nejaké } \alpha\in\langle a,b\rangle\}.$$

Z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že Γ je lokálny systém podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$. Systém Γ je aj aditívny. Nech intervaly $I_1=\langle c_1,d_2\rangle$, $I_2=\langle c_2,d_2\rangle$ patria do Γ a nie sú disjunktné. Potom pre každé $x\in\langle c_1,d_1\rangle$ $f(x) < f(\alpha_1)$ pre nejaké $\alpha_1\in\langle a,b\rangle$ a pre každé $x\in\langle c_2,d_2\rangle$ $f(x)< f(\alpha_2)$ pre nejaké $\alpha_2\in\langle a,b\rangle$. Z uvedeného vyplýva, že $I_1\cup I_2$ je uzavretý interval a pre každé $x\in I_1\cup I_2$ platí $f(x)< \max\{f(\alpha_1), f(\alpha_2)\}$, teda $I_1\cup I_2\in\Gamma$. Z vety 1 dostávame, že $\langle a,b\rangle\in\Gamma$, ale potom existuje také $\alpha\in\langle a,b\rangle$, že pre každé $x\in\langle a,b\rangle$ $f(x)< f(\alpha)$, teda špeciálne $f(\alpha)< f(\alpha)$, čo je spor.

Dôkaz vety (B). Z predpokladu $f(a).f(b)< 0$ vyplýva, že čísla $f(a), f(b)$ sú opačného znamienka. Postupujme nepriamo. Nech pre každé $x\in\langle a,b\rangle$ platí $f(x) \neq 0$. Nech $\Gamma=\{\langle c,d\rangle\in P(\langle a,b\rangle)$; hodnoty funkcie f nemenia na intervale $\langle c,d\rangle$ znamienko$\}$. Zo spojitosti funkcie f vyplýva, že Γ je lokálny systém. Napríklad, ak $x_0\in(a,b)$ a $0< f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, tak funkcia f nadobúda kladné hodnoty v nejakom okolí bodu x_0. Teda existuje interval $\langle c,d\rangle$ tak, že $x_0\in(c,d)$ a funkcia f nadobúda na $\langle c,d\rangle$ len kladné hodnoty. Zrejme systém Γ je aditívny. Z vety 1 tak dostávame, že $\langle a,b\rangle\in\Gamma$, teda $f(a), f(b)$ sú rovnakého znamienka, čo je spor.

Dôkaz vety (C). Nepriamo. Nech M je nekonečná a ohraničená množina reálnych čísel, ktorá nemá hromadný bod. Zrejme existujú čísla a,b tak, že $M\subseteq\langle a,b\rangle$. Nech Γ je systém všetkých takých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$, ktoré majú s množinou M konečný prienik. Systém Γ je zrejme aditívny. Ku každému $x\in(a,b)$ existuje interval $\langle c,d\rangle\in\Gamma$ tak, že $x\in(c,d)$, pretože v opačnom prípade by bol bod x hromadným bodom množiny M. Podobne je to aj s bodmi a,b. Teda Γ je aj lokálny systém. Z vety 1 vyplýva, že $\langle a,b\rangle\in\Gamma$, ale potom $\langle a,b\rangle \cap M = M$ je konečná množina, čo je spor.

Dôkaz vety (D). Nech $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť. Nech $a,b\in R$ a pre každé $n\in N$ $a\leq a_n \leq b$. Dôkaz vety prevedieme nepriamo. Nech daná postupnosť nemá hromadnú hodnotu. Uvažujme systém $\Gamma=\{\langle c,d\rangle\in P(\langle a,b\rangle)$; $\{n\in N;\ a_n\in\langle c,d\rangle\}$ je konečná$\}$. Ľahko nahliadneme, že Γ je aditívny systém. Γ je aj lokálny systém, pretože žiaden bod $\alpha\in\langle a,b\rangle$ nie je hromadnou hodnotou danej postupnosti, teda k $\alpha\in(a,b)$ existuje $\langle c,d\rangle\in\Gamma$ tak, že α je vnútorným bodom intervalu $\langle c,d\rangle$. Podobne je to i s bodmi a,b. Potom z vety 1 máme, že $\langle a,b\rangle\in\Gamma$, ale to znamená, že množina $\{n\in N;\ a_n\in\langle a,b\rangle\}$ je konečná, čo je spor.

Dôkaz vety (E). Nech $\Gamma=\{\langle c,d\rangle\in P(\langle a,b\rangle)$; f je na $\langle c,d\rangle$ ohraničená$\}$. Je zrejmé, že Γ je aditívny systém. Ukážeme, že Γ je aj lokálny systém. Nech $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \beta$, $\alpha, \beta \in R$. Potom napríklad k číslu 1 existujú také intervaly $(x_0-\delta_1,\ x_0)$, $(x_0, x_0+\delta_2)$, $\delta_i>0$,

i=1,2, že pre každé $x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$ platí :$\min\{f(x_0), \alpha-1, \beta-1\} \le f(x) \le \max\{f(x_0), \alpha+1, \beta+1\}$.
Teda existuje interval $\langle c,d\rangle \subseteq \langle a,b\rangle$, že $x_0 \in (c,d)$ a f je na intervale $\langle c,d\rangle$ ohraničená. Podobne sa postupuje, ak $x_0=a$, $x_0=b$. Z vety 1 opäť dostávame, že $\langle a,b\rangle \in \Gamma$ a teda f je na $\langle a,b\rangle$ ohraničená.

ZÁVER

K hlbšiemu pochopeniu každej matematickej teórie určite prispieva aj to, keď sa objasňuje z rôznych strán, keď sa vedú diskusie o rôznych dôkazoch určitých viet. Takto sa taktiež rôznymi spôsobmi upevňujú vedomosti a trénujú matematické zručnosti. Príkladom takéhoto postupu je využitie lokálneho aditívneho systému, ktorý poskytuje jednotiacu metódu dokazovania mnohých viet z elementárnej analýzy.

Literatúra:

1. Leinfelder, H.: *A unifying principle in real analysis*, Real Anal. Exchange 8 (1982-83), 511-518.
2. Shanahan, P.: *A unified proof of several basic theorems of real analysis*, Amer. Math. Monthly 79 (1972), 895-898.
3. Šalát, T.: *Remarks on unifying principles in real analysis*, Real Anal. Exchange (1984-85), 341-348.
4. Šalát, T.: *Seminár z matematiky*, Bratislava, MFF UK, 1990.
5. Thomson, B. S.: *On full covering properties*, Real Anal. Exchange 6 (1980-81), 77-91.
6. Vrábel, P.: *Remark on a method of full covering of compact set*, Acta Math. et Inf. 1, PF Nitra 1992, 65-69.
7. Vrábel, P.: *O dôkazovej technike v elementárnej analýze využívajúcej princíp indukcie v kontinuu*, Acta Math. 5, FPV UKF Nitra 2002, 91-97.

Adresa autora: Doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc., Kat. mat. FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra. email: *pvrabel@ukf.sk*