

Niektoré aspekty medzipredmetových vzťahov matematiky a mechaniky

Alena Vagaská

ABSTRACT: In this paper are described applications of the mathematical knowledge to engineering subjects.

1. ÚVOD

Matematika determinuje úspešnosť technického vzdelávania, z čoho vyplýva pre učiteľov matematiky na fakultách technických univerzít náročná a zodpovedná úloha: vyučovať matematiku v súlade s požiadavkami, ktoré sú na tento predmet na fakultách technických univerzít kladené, akceptovať špecifickosť vyučovania matematiky na týchto fakultách, zohľadniť aj hlavné postuláty strategického programu vo výchovno-vzdelávacej oblasti, a to konkrétne požiadavku na posilnenie trendu aplikačných príkladov, experimentálnych a realizačných úloh a požiadavku na rozvoj tvorivosti.

Súčasnú potrebu vyučovania matematiky na fakultách TU sa odzrkadľujú hlavne v požiadavkách na aplikovateľnosť poznatkov z matematiky v iných odborných predmetoch a v technickej praxi.

„Nenahraditeľnosť a nezastupiteľnosť matematiky v komplexnej výchove technika pochopí budúci inžinier počas vysokoškolského štúdia tým skôr, čím včasnšie ho obsah a metódy týchto predmetov privedú k poznaniu ich potreby a užitočnosti vo vlastnom technickom odbore. A to je možné dosiahnuť len rozšírením a prehĺbením aplikačného charakteru matematiky v konkrétnych oblastiach techniky. Aj toto je časť komplexu problémov, ktoré v súčasnosti vystupujú do popredia pod nediferencovaným termínom modernizácia vyučovania matematiky na technických, ekonomických a poľnohospodárskych univerzitách“ (Čižmár, 2001).

2. Medzipredmetové vzťahy matematiky a mechaniky

Pri určovaní obsahu a konkrétnych cieľov vyučovania matematiky nesmie učiteľ matematiky na fakulte technického zamerania zabúdať na medzipredmetové vzťahy, tie sú totiž medzi matematikou a odbornými predmetmi na týchto fakultách veľmi intenzívne, do učiva matematiky sú zaradené tie témy z vyššej matematiky, ktoré neskôr nájdu svoje uplatnenie v odborných predmetoch. Učitelia odborných predmetov vyžadujú od študentov schopnosť aplikovať matematické poznatky, metódy a algoritmy v odborných disciplínach a pri riešení problémov z inžinierskej praxe. Požaduje sa od nich, aby mali vypestované návyky potrebné na používanie matematického aparátu, aby ich matematická kultúra umožňovala postupne zvládnuť riešenie technických problémov. Vzhľadom na tieto požiadavky výučba matematiky na fakultách TU by mala byť viac orientovaná na aplikácie matematických poznatkov, algoritmov, postupov či metód na problémy, ktoré sa vyskytujú v odborných predmetoch. Toto nie je možné dosiahnuť bez spolupráce učiteľov matematiky s učiteľmi odborných katedier, bez tejto spolupráce sa učiteľ matematiky ťažko sám zorientuje v problematike, že v ktorom predmete a kde je možné aplikovať konkrétne matematické poznatky.

Podobné názory na súčasné potreby vyučovania matematiky zazneli aj od študentov FVT, ktorí cez dotazník (Vagaská, 2002) tlmočili svoje postoje k vyučovaniu matematiky a žiadali na cvičeniach z matematiky riešiť viac aplikačných príkladov, viac konkrétnych úloh ako riešia v predmetoch *pružnosť a pevnosť* a *mechanika*. V jednej z otázok dotazníka tieto dva predmety študenti zaradili na prvé dve miesta v poradí tých predmetov, v ktorých najčastejšie využívali poznatky z vysokoškolskej matematiky. Preto chcem v článku poukázať na niektoré aspekty medzipredmetových vzťahov matematiky a mechaniky na Fakulte výrobných technológií v Prešove.

Predmet mechanika obsahuje učivo statiky, kinematiky a dynamiky. Už od 1. týždňa letného semestra 1. ročníka, kedy sa v mechanike preberá učivo zo statiky, je potrebné, aby študenti mali zvládnuté učivo vektorovej algebry, teda aby vedeli vykonávať operácie s vektormi: sčítanie a odčítanie (aj v grafickej podobe), skalárny a vektorový súčin. Vektorová algebra sa učí v zimnom semestri inžinierskeho štúdia, preto nie je v rozpore z časového hľadiska medzipredmetových vzťahov matematiky s mechanikou. Až do 9. týždňa letného semestra, sa v Mechanike I preberá učivo zo statiky.

V 10. týždni sa v mechanike I prechádza na učivo z kinematiky: Kinematika bodu, druhy pohybu bodu. Pohyb bodu v rôznych súradnicových systémoch. Transformácia súradníc, úplné kinematické riešenie, atď. Ako základný matematický aparát je v kinematike používaný vektorový počet. Je to preto, že hlavné kinematické veličiny (sprievodič bodu, rýchlosť, zrýchlenie) sú vektorové veličiny a tento aparát je veľmi názorný. Pohyb bodu určuje vektorová funkcia. V Kinematike sa najčastejšie pracuje s týmito základnými kinematickými veličinami pri priamočiariom pohybe bodu: čas t , dráha s , rýchlosť v a zrýchlenie a . Rozlišuje sa 6. základných závislostí:

$$1. s(t), 2. v(t), 3. a(t), 4. v = f(s), 5. a = g(s), 6. a = h(v).$$

Podľa týchto závislostí sa rozlišujú jednotlivé typy kinematických úloh. Pod úplným kinematickým riešením rozumieme nájdenie týchto šiestich závislostí medzi kinematickými veličinami. Ak riešime úlohu z kinematiky smerom:

- i) $t \rightarrow s(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$, tak danú funkciu derivujeme, ak riešime úlohu druhým smerom:
- ii) $a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t) \rightarrow t$, tak funkciu potrebujeme integrovať.

Tu sú na študentov kladené nároky na aplikáciu poznatkov z diferenciálneho a integrálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej v konkrétnych príkladoch z kinematiky. Zo všetkých metód integrovania sa najčastejšie v mechanike využíva substitučná metóda.

Pri úplnom kinematickom riešení úloh študenti potrebujú vedieť riešiť separovateľné diferenciálne rovnice. Keďže tie sa preberajú v Matematike II už v 4. týždni letného semestra 1. ročníka a úplné kinematické riešenie úloh sa na cvičení z Mechaniky I precvičuje až v 10. týždni toho istého semestra, tak separovateľné diferenciálne rovnice sú v matematike II vzhľadom na mechaniku I časovo dobre zaradené.

V rámci predmetu Mechanika II, ktorý sa učí v zimnom semestri 2. ročníka, sa pokračuje v učive z kinematiky a potom nasleduje v 6. týždni učivo z dynamiky. Tu sa od študentov požaduje, aby vedeli počítat dvojné a trojné integrály, v 9. týždni diferenciálne rovnice a v 11. týždni parciálne derivácie. Zo stredoškolského učiva je dôležité vedieť upravovať rovnice a hlavne určovať goniometrické funkcie z pravouhlého trojuholníka. Na nedostatočné vedomosti u študentov z oblasti goniometrických funkcií sa učitelia Mechaniky I, II sťažovali najviac. Dvojné a trojné integrály sa v dynamike využívajú geometrii

hmôt tuhých telies, ktorá charakterizuje rozloženie hmoty pomocou týchto veličín: hmotné momenty zotrvačnosti, deviačné momenty zotrvačnosti a polomer zotrvačnosti.

Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi bez pravej strany sa využívajú v Mechanike II pri preberaní učiva z dynamiky – pri vlastnom kmitaní mechanických sústav. Vo 4. ročníku v rámci predmetu Aplikovaná mechanika pri preberaní učiva o vynútenom kmitaní mechanických sústav je potrebné, aby študenti vedeli riešiť lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi s pravou stranou a sústavy diferenciálnych rovníc.

3. Typické chyby študentov v matematickej činnosti pri aplikáciách poznatkov z matematiky v mechanike

Učitelia mechaniky sa sťažujú na niektoré nedostatky u študentov vo vedomostiach z matematiky pri riešení úloh z mechaniky. Opodstatnenosť týchto sťažností potvrdila aj analýza produktov ľudskej činnosti, teda analýza priebežných kontrol z mechaniky. Zistili sme, že u študentov sa prejavujú niektoré nedostatky vo vedomostiach z matematiky opakovane a oveľa častejšie ako iné. Tieto najfrekvencovanejšie nedostatky u študentov pri počítaní úloh z mechaniky by sme mohli označiť ako **typické chyby študentov v matematickej činnosti** pri riešení príkladov z mechaniky. Ide o:

1. Nedostatočné zručnosti v úprave algebraických výrazov. Ide o typické chyby pri odmocňovaní, pri operáciách so zlomkami, nedostatočné osvojenie základných goniometrických vzorcov.
2. Chyby pri riešení rovníc. Neosvojené ekvivalentné úpravy na riešenie rovníc, zlá separácia premenných.
3. Nedostatočné vedomosti z tematického celku funkcie reálnej premennej. Študenti majú problémy aj s grafmi základných elementárnych funkcií. Ak nepoznajú grafickú interpretáciu napr. lineárnej závislosti, kvadratickej závislosti, atď. , majú v mechanike problémy s určovaním trajektórie bodu. Neznalosť základných elementárnych funkcií spôsobuje potom študentom problémy aj pri načrtávaní elementárnych oblastí v E_2 a v E_3 a pri určovaní ťažiska plošných útvarov a priestorových telies.
4. Nedostatočné osvojenie derivačných a integračných vzorcov, nízka úroveň zručností vo výpočtoch neurčitých a určitých integrálov.

Napr. študenti automaticky píšú: $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x}$, $\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln|\cos x|$.

Mnohokrát zápasia s nájdením vhodnej substitúcie, napr. pri integráloch typu $\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \, dy$, $\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} \, dx$, $\int \frac{1}{x \ln^3 x} \, dx$, kde ich vyšší exponent funkcie vhodnej na použitie v substitúcii doslova paralyzuje. Pri určitých integráloch po použití substitúcie zabúdajú na zmenu hraníc.

5. Pri úplnom kinematickom riešení sa študenti dostávajú k jednoduchým separovateľným diferenciálnym rovniciam. Ak sa jedná o priamočiary, rovnomerne zrýchlený alebo rovnomerne spomalený pohyb, tak podľa fyzikálnych zákonov v takom prípade

$$\text{platí: } v = \frac{ds}{dt}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{v \, dv}{ds}.$$

Pri rovnomernom zrýchlenom pohybe zrýchlenie rastie lineárne s okamžitou rýchlosťou podľa fyzikálneho zákona $a = a_0 + k \cdot v$, teda

platí $\frac{dv}{dt} = a_0 + k \cdot v$, čo je už separovateľná diferenciálna rovnica. Pri

priamočiarom, rovnomerne spomalenom pohybe zrýchlenie klesá lineárne s okamžitou rýchlosťou podľa zákona $a = -a_0 - k \cdot v$, teda platí

$\frac{dv}{dt} = -a_0 - k \cdot v$, z čoho dostávame separovanú diferenciálnu rovnicu

$$\text{v tvare: } -\frac{dv}{a_0 + kv} = dt.$$

Analogicky môžeme vyjadriť aj iné závislosti medzi kinematickými veličinami. Napríklad využitím vzťahu $a = \frac{v \, dv}{ds}$

dostaneme pri rovnomerne zrýchlenom pohybe závislosť medzi rýchlosťou a dráhou (2. závislosť) v tvare: $a_0 + k \cdot v = \frac{v \, dv}{ds}$, čo je

separovateľná diferenciálna rovnica.

Typická chyba študentov pri riešení takejto separovateľnej diferenciálnej rovnice je, že ešte neprevedú separáciu premenných a už píšú neurčitý integrál, čiže prevedú takýto chybný postup:

$$a_0 + k \cdot v = \frac{v \, dv}{ds} / \cdot ds$$

$$(a_0 + k \cdot v) \cdot ds = v \, dv$$
$$\int (a_0 + k \cdot v) \cdot ds = \int v \, dv$$

Alebo dokonca píšú: $(a_0 + k \cdot v) \cdot \int ds = \int v \, dv$, kde je evidentné, že študent si neuvedomuje, čo je konštanta a čo premenná, a tak pred integrál kludne vyberá aj premenné. Je dôležité, aby sa na cvičeniach z matematiky riešili diferenciálne rovnice aj sinými premennými ako je x, y ; aby študenti vedeli separovať premenné a riešiť separovateľné diferenciálne rovnice bez ohľadu na použité premenné. Je potrebné riešiť aj takéto aplikačné príklady, t.j. diferenciálne rovnice vyjadrujúce vzťahy medzi kinematickými veličinami, aby študenti nadobúdali schopnosť aplikovať matematické poznatky v netypických úlohách už na cvičeniach z matematiky, čím sa zvýši ich matematická kultúra.

Záver

Pri vyhodnocovaní dotazníka sme zistili, že sa študenti sťažujú na nedostatok motivačných a aplikačných príkladov na cvičeniach z matematiky. Dostatočne veľký priestor na nápravu tohto stavu máme práve pri riešení diferenciálnych rovníc, pretože pomocou nich je možné vyjadrovať mnohé fyzikálne zákony, vytvárať a analyzovať matematické modely reálneho sveta. Najmä pre vysokú aplikovateľnosť infinitezimálneho počtu je potrebné venovať mu náležitú pozornosť v príprave budúceho inžiniera.

Literatúra:

1. Čižmár, J. 2001. *Tradičné vyučovanie a modernizačné trendy v matematike*. In: zborník z konferencie „Nové trendy vo výučbe matematiky“, 23.5.2001, Nitra. Nitra: SPU, 2001
2. Vagaská, A. 2002. *Niektoré špecifká vyučovania matematiky na fakultách technických univerzít* (písomná práca k dizertačnej skúške). FPV UKF v Nitre, 2002

Adresa autora: PaedDr. Alena Vagaská, KIMaF Fakulta výrobných technológií v Prešove TU v Košiciach, Bayerova 1, 080 01 Prešov, E-mail: vagaska.alena@fvt.sk, t.č. 051/7723931