

Zmena vlastnosti konvergenzie pri aproximácii derivácie diferenciou

Šebej Peter

Abstract: In this paper are shown some experiences of teaching of applications numerical calculus in some areas at Faculty of manufacturing technologies.

1. Úvod

Pri mnohých numerických výpočtoch je používaná v jednotlivých krokoch niektorá z derivácii funkcie, resp. funkcii pri viacrozmerných úlohách, obvykle je tieto derivácie určovať analyticky, no prirodzeným, typickým spôsobom pre numerické výpočty je určiť ju numericky.

2. Náčrt úlohy

S aplikáciou derivácii sa stretávame pri určovaní, koreňov jednoduchých nelineárnych rovníc, pri riešení sústav nelineárnych rovníc, pri určovaní chýb, numerickom výpočte integrálov a ďalších. Obvykle tieto numerické výpočty súvisia s vlastnosťami funkcie na danom intervale. Klasická literatúra pri výpočtoch s použitím derivácii, aplikuje prakticky v každej metóde analytický určenú deriváciu. Vlastnosti tej istej metódy, ak by sme nepoužívali analyticky určenú

deriváciu, ktorá nie je závislá na viacerých okolnostiach, napr. veľkosť intervalu, vlastnosti funkcie, ich zmena, na intervale a pod. Táto stránka vyvoláva zvedavosť ako sa mení proces konverencie pri aproximácii derivácie pomerom diferencii. Ešte výraznejšie tieto zmeny vlastnosti možno vnímať pri optimalizačných úlohách a agentových systémoch.

Zmenu vlastnosti správania skúsime analyzovať na jednoduchej metóde dotyčnic, resp. Newtonova – Raphsonová iteračná metóda [1].

Základný iteračný vzorec (1) používajúci analyticky určenú deriváciu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1)$$

pre naše účely nahradíme deriváciu pomerom diferencii v závislej a nezávislej premennej, potom náš iteračný vzorec sa zmení na (2)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\Delta f(x_i) / \Delta x_i} \quad (2)$$

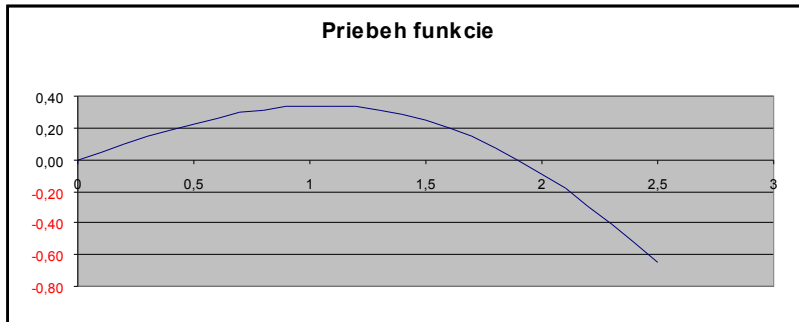
V oboch prípadoch budeme konvergenciu kontrolovať klasickým ponímaním absolútnej hodnoty rozdielu dvoch po sebe nasledujúcich krokov, čo obvykle možno považovať aj za ukazovateľ dosiahnutej presnosti, resp. ako podmienku zastavenia vypočtu pre požadovanú chybu, v tvare (3).

$$\Delta x_i = |x_{i+1} - x_i| \quad (3)$$

3. Ilustračný príklad

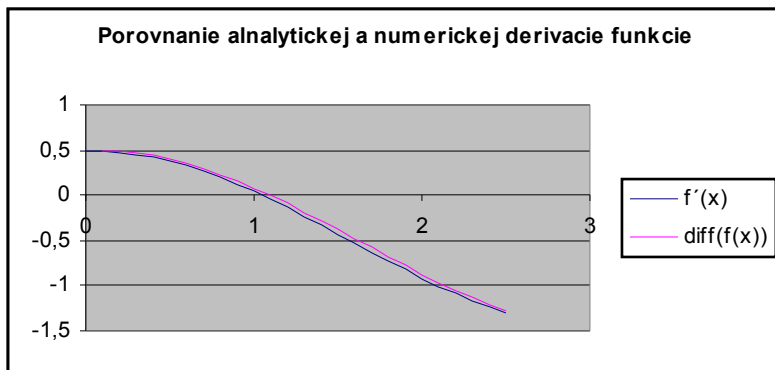
Jednotlivé vlastnosti prezentujeme na úlohe s jednoduchou funkciou $f(x) = \sin(x) - 0,5x$, kde budeme určovať polohu najmenšieho kladného priesečníka tejto funkcie s vodorovnou osou $y = 0$.

Priebeh tejto funkcie v sledovanej oblasti je zobrazený na obr. 1



Obr. 1. Priebeh sledovanej funkcie na sledovanej oblasti

Pre nasledujúce porovnanie vlastnosti je vhodné si priblížiť tvar priebehu derivácie funkcie určenej analyticky a tiež numericky v tejto oblasti, čo možno sledovať na obr. 2.



Obr. 2. Rozdiel v priebehu analytickej a numerickej určenej derivácie

Pre možnosť porovnania priebehu výpočtu jednotlivých aproximácií priesečníka funkcie s vodorovnou osou sú zobrazené postupy podľa klasickej Newton - Raphsonovej metódy výraz (1), tabuľka 1, a vedľa výpočet s použitím numerickej derivácie, podľa výrazu (2), tabuľka 2.

Tabuľka 1. Výpočet polohy priesečníka s použitím analytickej derivácie

X	$\sin(x)-0,5x$	$f'(x)$	$ x_{n+1}-x_n $
-----	----------------	---------	-----------------

Tabuľka 2. Výpočet polohy priesečníka s použitím numerickej derivácie

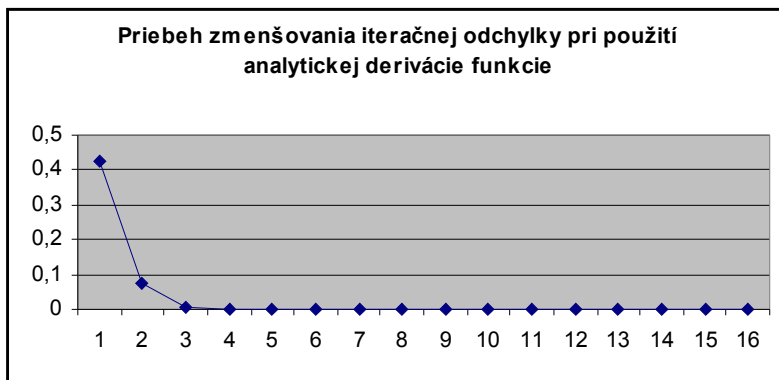
x	$f(x)$	$Diff(f(x))$	$ x_{n+1}-x_n $
-----	--------	--------------	-----------------

2,5	-0,65152786	-1,30114	0,1	2,5	-0,6515	-1,26991	0,323905
2,4	-0,52453682	-1,23739	0,423905	2,4	-0,5245	-1,07908	0,346678
1,976095	-0,06906323	-0,89429	0,077227	1,98695	-0,0788	-0,87049	0,073859
1,898869	-0,00276928	-0,82222	0,003368	1,913902	-0,0152	-0,82815	0,003362
1,895501	-0,00000537	-0,81903	6,56E-06	1,896399	-0,0007	-0,81946	6,56E-06
1,895494	-0,00000000	-0,81902	2,49E-11	1,895504	-0,0000	-0,81903	2,49E-11
1,895494	0,00000000	-0,81902	0	1,895494	-0,0000	-0,81902	0
1,895494	0,00000000	-0,81902	0	1,895494	-0,0000	-0,81707	0
1,895494	0,00000000	-0,81902	0	1,895494	0,0000	#DIV/0!	0
1,895494	0,00000000	-0,81902	0	1,895494	0,0000	#DIV/0!	0
1,895494	0,00000000	-0,81902	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0
1,895494	0,00000000	-0,81902	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0

Pre približenie zhody postupu výpočtu priesečníka funkcie s osou zobrazíme hodnoty podmienky pre ukončenie výpočtu, $|\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i|$. Klasická metóda s analytickou deriváciou zobrazenou na obr. 3,

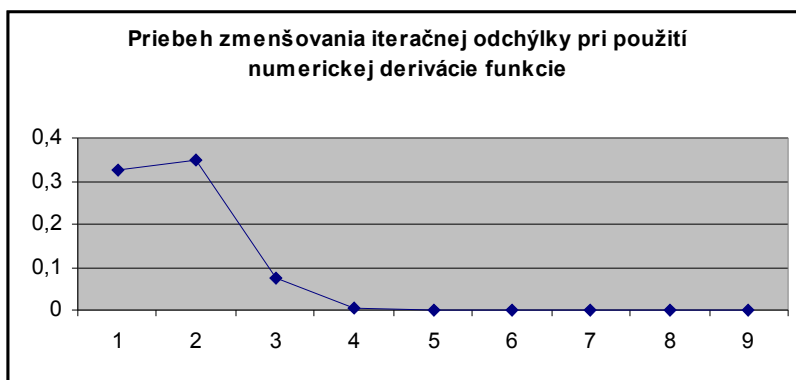
4. Záver

V uvedenej úlohe je možno nájsť praktické uplatnenie náhrady analytickej derivácie deriváciou numerickou. Tento prístup prináša určité zjednodušenie najmä pri úlohách kde funkcia je náročnejšia na určenie derivácie, resp. pri súčasnom trende znižovania podielu matematiky vo výučbe aj na školách prírodovedného a technického zamerania. Táto vlastnosť iste prinesie možnosť zvládnutia praktických úloh, riešených v bežnom praktickom proces zabezpečujúcom fungovanie a optimalizáciu dnešných technológií.



Obr. 3. Priebek znižovania podmienky ukončenia výpočtu s analytickej deriváciou

priebek s použitím numerickej integrácie vidíme na obr. 4.



Obr. 4. Priebek znižovania podmienky ukončenia výpočtu s numerickej deriváciou

Je potrebné si uvedomiť prípad, keď veľkosť kroku poklesne pod hodnotu, ktorú konkrétny výpočtový prostriedok už považuje za nulovú veľkosť, v tom prestane konvergencia, a dochádzame k stavu pokusu deliť nulou. V bežnej matematike je táto operácia neprípustná a väčšina výpočtových prostriedkov ju považuje za nekorektnú. Teda možno uzavrieť, že dojde k zmene vlastnosti konvergencie numerického výpočtu, čo jasne vidieť v tabuľke 2. Rovnakým spôsobom sme zistili

reakciu prostriedkov Delphi, Matlab, Mathematica, Derive, Visual Basic a niektoré d'alsie.

Literatúra:

1 Ralston Anthony: Základy numerické matematiky, Československá akadémia vied, Academia Praha, 1978

2 Šebej, P.,: Metodika výučby práce s počítačom a programovými prostriedkami. In: Metodické a obsahové aspekty humanizácie technického vzdelávania vo výučbe spoločensko - vedných predmetov, cudzích jazykov a matematiky, Fakulta výrobných technológií, TU, Str. 142 - 149. Prešov - Slovensko. 1999. ISBN 80-7099-472-X

Kontaktná adresa: Peter Šebej
Katedra informatiky, matematiky a fyziky
Fakulta výrobných technológií TU Košice so sídlom v Prešove
Bayerova 1
080 01 Prešov, SK
e-mail: sebej@fvt.sk

The paper was worked out as a part of solution of the scientific project „Optimization of the Processes Control Based on the Use of Informatics Methods“, number 1/0373/03