

# Elementy riešenia úloh z kombinatoriky

Iveta Scholtzová

*ABSTRACT: I analyse those parts of the combinatoric task solving process that may appear problematic for a pupil. Formulating elements of the solving process in combinatorics enables us to analyse pupils solution effectively.*

Do začiatku osemdesiatych rokov minulého storočia bola didaktika matematiky zameraná obsahovo, t.j. primárna pozornosť bola venovaná štruktúre matematickej úlohy a jej vzorovým riešeniam. Na okraji výskumu stál proces riešenia zo strany žiaka.

Našu pozornosť sme však, v duchu humanistickej orientovanej edukácie, sústredili na žiaka a jeho riešiteľský proces pri riešení úloh z kombinatoriky.

M. Hejný (2001) vychádzal v tejto problematike z etapizácie procesu riešenia, ktoré formuloval G. Polya v štyroch etapách (s.96):

1. Analýza zadania úlohy.
2. Hľadanie plánu riešenia.
3. Vlastné riešenie.
4. Posúdenie (interpretácia) výsledku.

Problém etapizácie pretransformoval do piatich úrovní, ktorými prechádza riešiteľský proces každého riešiteľa podľa vlastného plánu. Sú to tieto (s.97):

1. Úroveň uchopenia situácie.
2. Úroveň nadobudnutia vhľadu do situácie úlohy.
3. Úroveň hľadania a stanovenia stratégie.

4. Úroveň realizácie výpočtu.
5. Úroveň interpretácie výsledku.

Tento súbor úrovní sme modifikovali a doplnili pre potreby kvalitatívnej analýzy žiackych riešení úloh z kombinatoriky. Na základe poznatkov z preštudovanej literatúry a analýzy žiackych riešení sme sformulovali, bez nároku na úplnosť,

### **Elementy riešenia úloh z kombinatoriky.**

- Element č.1:* Analýza textu a nadobudnutie vhl'adu do situácie úlohy.
- Element č.2:* Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia.
- Element č.3:* Vymenovanie všetkých konfigurácií.
- Element č.4:* Propedeutika pre pravidlo súčinu.
- Element č.5:* Propedeutika pre pravidlo súčtu – umenie roztriediť.
- Element č.6:* Kedy sú dva objekty „rovnaké“?
- Element č.7:* Grafické znázornenie.
- Element č.8:* Divergentné úlohy – rozvoj divergentného myslenia.
- Element č.9:* Usporiadanie versus neusporiadanie.
- Element č.10:* Prvky v objektoch–najviac raz, práve raz, alebo aj viackrát?
- Element č.11:* Organizácia a systém.
- Element č.12:* Interpretácia výsledku.
- Element č.13:* Vytvorenie úlohy.

***Element č.1: Analýza textu a nadobudnutie vhl'adu do situácie úlohy.***  
Všimame si, či žiaci porozumeli textu úlohy, či chápu hlavnú myšlienku úlohy. Ak takáto situácia nastala, mali by ju v riešení nejako zapísať prípadne graficky znázorniť. Nadobudnúť vhl'ad do situácie úlohy je niečo viac ako porozumieť textu úlohy. Sledujeme, či žiaci dôkladne rozumeli všetkým objektom a znakom textu úlohy a tiež vzťahom medzi objektami.

#### ***Element č.2: Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia.***

Venujeme pozornosť tej časti žiackeho riešenia, kedy nastáva rozhodovací proces o spôsobe, akým bude žiak danú úlohu riešiť. Zvýšenú pozornosť venujeme tým riešeniam, v ktorých sa v jednej úlohe vyskytne viac ako jedna metóda resp. stratégia riešenia. Všimame si, pre ktorú sa riešiteľ rozhodol ako pre prvú a pre ktorú až neskôr.

#### ***Element č.3: Vymenovanie všetkých konfigurácií.***

Najjednoduchšia (zdanlivo) metóda na vyriešenie kombinatorickej úlohy:

1. systematicky vymenovať a popísať všetky navzájom rôzne konfigurácie vyhovujúce podmienkam úlohy;
2. takto získané konfigurácie jednoducho spočítať, t.j. očíslovať ich prirodzenými číslami od 1 do  $m$ .

Metóda je vhodná, ak je celkový počet konfigurácií malý. Je potrebné dôsledne dodržiavať dve zásady:

- a) Boli vymenované všetky konfigurácie?
- b) Nebola vymenovaná omylom niektorá konfigurácia viackrát?

Preto sa vyžaduje systematický postup pri vypisovaní všetkých možností a potrebná je kontrola vypísaných konfigurácií, či sa nevyskytujú rovnaké. Táto metóda je jednoznačne najčastejšie používanou pri riešení kombinatorických úloh na 1. a 2. stupni základnej školy. Predstavuje, podľa nášho názoru, najprirodzenejšiu cestu pre žiaka v jeho zvyčajne procesuálnom prístupe k riešeniu kombinatorickej úlohy.

#### ***Element č.4: Propedeutika pre pravidlo súčinu.***

Pravidlo súčinu je jedna z kombinatorických metód, s ktorými sa žiaci oboznamujú už na základnej škole. Cesta k jeho „nájdeniu“ je opäť prirodzená, t.j. neponúkne sa žiakom vo forme pravidla - poučky, ktorú sa má naučiť. Vyplynie „evolučne“ z riešenia konkrétnych úloh. V žiackych riešeniach si všimame, či pravidlo súčinu intuitívne použijú žiaci, ktorí s ním ešte neboli oboznámení. A tiež to, ako ho používajú žiaci, ktorí by ho mali poznať, či uprednostnia túto metódu napr. pred metódou vymenovania všetkých konfigurácií.

#### ***Element č.5: Propedeutika pre pravidlo súčtu – umenie roztriediť.***

Ak je potrebné vykonať rozbor všetkých možností, najčastejšie sa to deje na základe princípu, ktorý sa nazýva pravidlo súčtu. Jeho podstata spočíva v tom, že všetky konfigurácie sa najprv roztriedia podľa určitého kritéria do navzájom disjunktných podmnožín. Pre celkový počet konfigurácií potom platí, že je súčtom počtov konfigurácií v jednotlivých disjunktných podmnožinách.

Pod propedeutikou pre pravidlo súčtu rozumieme na úrovni základnej školy schopnosť roztriediť prvky danej množiny do navzájom disjunktných podmnožín vzhľadom na určité kritérium. Nemenej dôležitou otázkou je tiež schopnosť nájsť resp. stanoviť kritérium pre triedenie. Tieto komponenty si všimame v žiackych riešeniach.

#### ***Element č.6: Kedy sú dva objekty „rovnaké“?***

Pedagogické skúsenosti ukazujú, že to, čo je „rovnaké“ v matematickom zmysle, nemusí byť častokrát chápané ako „rovnaké“ v bežnom živote (a naopak), a teda aj v myslení žiaka. Pri analýze žiackych riešení sústreďujeme pozornosť na to, ako sa tento problém prejavuje pri riešení úloh z kombinatoriky. Či riešiteľ vylučuje „rovnaké“ konfigurácie hneď pri riešení, alebo sa tak deje až vo fáze kontroly.

#### ***Element č.7: Grafické znázornenie.***

Úlohy z kombinatoriky patria, podľa nášho názoru, do tej kategórie matematických úloh, v ktorých grafické znázornenie situácie zohráva významnú úlohu v procese riešenia. V žiackych riešeniach si všimame, nakoľko žiaci používajú grafické znázornenie, v akej fáze riešenia ho používajú, či je pre nich východiskovým bodom riešenia, doplňujúcim faktorom alebo len ilustráciou.

#### ***Element č.8: Divergentné úlohy – rozvoj divergentného myslenia.***

Podľa M.Cirjaka (2000) poznávacie procesy môžeme rozdeliť na konvergentné a divergentné. Pri konvergentných myšlienkových procesoch sa z daných predpokladov smeruje k jedinému správneému záveru. Divergentné myšlienkové procesy sú také, kde myslenie je zamerané do šírky, diverguje, t.j. produkuje rozličné nápady, alternatívy, hypotézy. Každé divergentné myslenie je tvorivé. Z hľadiska psychických procesov žiaka riešenie divergentných úloh vyžaduje:

- hľadanie, skúmanie, objavovanie, t.j. aktívnu poznávaciu činnosť;
  - schopnosť pretvárať osvojenú skúsenosť;
  - vytváranie nových stratégií a metód riešenia;
  - invenciu subjektu, uplatnenie tvorivých myšlienkových schopností.
- Vzhľadom na uvedené skutočnosti môžeme medzi kombinatorické úlohy zaradiť aj také úlohy, ktoré majú divergentný charakter. Pri ich analýze pozorujeme, ako žiaci pristupujú k ich riešeniu a aké výsledky dosahujú.

#### ***Element č.9: Usporiadané versus neusporiadané konfigurácie.***

V priebehu dlhoročnej pedagogickej praxe sme nadobudli skúsenosť, že pre žiakov sú jednoduchšie tie úlohy, v ktorých je potrebné vytvárať usporiadané konfigurácie, ako tie, v ktorých sú konfigurácie neusporiadané. Či sa nám poznatok z praxe potvrdí, to si všimame pri analýze žiackych riešení.

**Element č.10: Prvky v objektoch – najviac raz, práve raz, alebo aj viackrát?**

Opäť z pedagogickej praxe máme skúsenosť, že pre žiakov býva často komplikovaným problémom, koľkokrát sa jednotlivé prvky môžu, resp. musia začleniť do vytváraných konfigurácií.

**Element č.11: Organizácia a systém.**

Tak ako v celej matematike, aj pri riešení kombinatorických úloh je dôležité nájsť organizačný princíp, prostredníctvom ktorého sa nájde a usporiada daná množina. Nájdenie alebo nenájdenie organizačného princípu a vytvorenie si systému v riešení je, vo väčšine prípadov, rozhodujúce pre úspešnosť riešenia úlohy.

**Element č.12: Interpretácia výsledku.**

Zo skúseností vieme, že žiak často vypočíta matematickú úlohu, podčiarkne výsledok, ale nevie odpovedať na otázku, čo to vlastne vypočítal. Všímame si, ako sa v žiackych riešeniach objavuje interpretácia výsledku. Snažíme sa analyzovať, či prípadná absencia interpretácie výsledku je spôsobená žiakovou nepozornosťou (prípadne „nepotrebu“ interpretovať výsledok), alebo je to nedostatok vhl'adu do situácie, čo poukazuje na prítomnosť formalizmu v matematickom poznaní žiaka.

**Element č.13: Vytvorenie úlohy.**

V priebehu vyučovania matematiky sa žiakovi, v drvivej väčšine prípadov, predkladajú na riešenie úlohy, ktoré vytvoril niekto iný a žiak ich má vyriešiť. Táto skutočnosť môže byť pre neho značne demotivujúca. Len málokedy má žiak možnosť sám vytvoriť úlohu. Proces tvorby matematickej úlohy mu teda zostáva utajený. Aspoň niekedy by bolo vhodné ponúknuť žiakom aj také podklady, aby sami zostavili jednoduché úlohy, pri tvorbe ktorých by uplatnili kombinatorický prístup.

M.Zelina (1990) na základe kombinácie možností podielu tvorivosti obsahu a potenciality úloh, vzhľadom na otvorenosť a uzavretosť procesov a ich výsledkov, vytvoril taxonómiu tvorivých úloh v matematike. Definoval štyri stupne tvorivosti. Ak žiak vytvára úlohu sám, ide teda o relatívnu otvorenosť pri zadaní úlohy, variabilitu pri použitých procesoch riešenia a otvorenosť výstupov, potom takýto proces zodpovedá tvorivosti tretieho alebo aj štvrtého stupňa tvorivosti.

Takéto úlohy, aj z kombinatoriky, by žiak mohol vo svojom matematickom vzdelávaní stretnúť a riešiť ich.

Ak chceme kombinatorické úlohy efektívne začleniť do vyučovania matematiky, bolo by vhodné venovať pri ich príprave a riešení pozornosť formulovaným *elementom riešenia úloh z diskkrétnej matematiky*. Toto odporúčanie vyslovujeme na základe našich skúseností, ktoré sme nadobudli pri pedagogických experimentoch s integráciou kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole.

*Literatúra:*

1. Círjak, M. 2000: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike)*. Prešov: Essox, 2000. ISBN 80-968369-0-0
2. Hejný, M. – Michalcová, A. 2001: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: Metodické centrum v Bratislave, 2001. ISBN 80-8052-085-2
3. Scholtzová, I. 2003: *Integrácia diskkrétnej matematiky do školskej matematiky (dizertačná práca)*. Košice: Prírodovedecká fakulta UPJŠ, 2003.
4. Zelina, M. (1990): *Tvorivosť v matematike*. Bratislava: Krajský pedagogický ústav v Bratislave, 1990. ISBN 80-85185-34-2

Adresa autorky:

RNDr. Iveta Scholtzová  
Katedra matematiky PF PU  
Ul. 17. novembra 1, 081 16 Prešov  
e-mail: scholtzi@unipo.sk