

Pojetí bodu a jeho vztahu k přímce: komparace fylogeneze a ontogeneze

Magdalena Prokopová, Petr Rys

ABSTRACT: *A point and a straight line are fundamental objects of Euclidian geometry which is taught at basic and secondary schools. Philosophers meditated on the nature of a point and a straight line long before Euclid (from the 6th century BC). But it was Euclid (about 325 - 265 BC) who delimited the concept of a point and a straight line (and others) in the First book of his Elements (Stocheia) by means of a definition. The phylogenesis of a point and its relation to a straight line is marked out by names such as Viete, Kepler, Leibniz, Newton, Bolzano and Cantor.*

Students meet the concept of a point before they start to create their geometrical structures. Our analysis will try to show that there is a strong parallel between the ontogenetic and phylogenetic aspects of the conception of a point and its relation to a straight line, a ray and/or a segment.

Historický vývoj pojmu bod

Hlavním problémem řecké matematiky v 6. a 5. století před naším letopočtem byly konstrukční problémy. Pomalu se začínají vytvářet geometrické struktury a upřesňují se názory na to, co je a co není při konstrukci povoleno. Pojem bodu a přímky se postupně zpřesňuje. Pozornost se postupně přesouvá od řešení konkrétních problémů k ideálním objektům.

Pythagoras (580 – 500 př. n. l.) definuje, podle Prokla, bod jako monádu, která má pozici. Bod je taková jednotka, která má umístění. Pythagorejská škola chápe prostor jako souhrn bodů. [Struik 1963, 42]

Parmenides (z Eley, kolem 530 – 470 př. n. l.) uvažuje nad tím, jak je svět poznatelný. Srovnává smyslové a intelektuální poznání, např.: Co je to bod? Tečka na papíru? Nebo je tečka jen modelem bodu? Čára namalovaná na papíře není reálným geometrickým objektem, je to jen jakýsi model, pouhý obraz. [Hejný 1985, 50 – 51]

Zenon (z Eley 490 – 430 př. n. l.) ve svých aporiích mistrovsky ukazuje konflikt mezi smyslovým vnímáním a myšlenkovou abstrakcí a idealizací.

Pravděpodobně jako reakce na Zenonovy aporie rozvíjí Demokritos (470 – 360 př. n. l.) svůj matematický atomismus¹. Tato teorie předpokládá existenci nedělitelné jednotky, která má nenulovou velikost. Tuto jednotku nelze rozdělit nekonečným dělením na ideální geometrický objekt. Všechny matematické objekty mají své přímé hmotné vzory: ideální matematický bod či přímka pro Demokrita neexistují. [Drábek 1998, 175]

Aristoteles (ze Stagiry, 384 – 322 př. n. l.) srovnává jednotku a bod jako monády, přičemž první z nich nemá pozici a druhá ano. [Hejný 1985, 68]

Na základě Platonovy (427/8 – 347 př. n. l.) filozofie idejí Eudoxos (z Cnidy, 408 – 355 př. n. l.) formuluje svou myšlenku spojité geometrie, kterou dovedl Euklides ve své práci k dokonalosti. Euklides definuje bod následujícím způsobem: „Bod je to, co nemá dílu.“ Své

¹ Demokritova myšlenka matematického atomu byla později využita v matematické analýze např. Vietem a Keplerem v 16. stol.

definice formuluje přesně podle zásad Aristotelovy filosofie. Bod ale vysvětluje v souladu s Platonovou filosofií světa idejí. Tedy idea části není přítomna v ideji bodu. Umístění přísluší pouze ideji konkrétního bodu. Euklides dále uvádí: „Hranicemi čáry jsou body.“ Přímku definuje² takto: „Čára je délka bez šířky.“ a „Přímá je čára (přímka), která svými body táhne se rovně“. Euklides nezdůrazňuje spojitost čar (a jiných objektů). Pravděpodobně ji považuje za samozřejmou. Vysvětluje to jeho první postulát: „Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.“ Druhý postulát říká: „A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti“. Tady Euklides chápe přímku jako potenciálně nekonečnou, spojitou a „obsahující“ body.

Vědci 16. a 17. století, jako Kepler, Viete, Cavalieri nebo Torricelli rozvíjí metody, které vedlou k infinitesimálnímu kalkulu. Vrací se k myšlence Demokritova atomizmu. Cavalieri používá teorii indivisibilií (v *Geometria indivisibilibus continuorum*, 1635), kde přímka je vytvořena pohybem bodů. [Struik 1963, 96]

Descartes objevuje analytickou geometrii (v *Géométrie*, 1637) a začíná využívat algebru pro řešení geometrických problémů. Ale souřadnice jako takové zavádí až Leibniz.

Teorie množin přinesla nový pohled na všechny geometrické objekty a nabídla ideální objekt pro zkoumání pojmu nekonečna.

Fenomény fylogeneze pojmu bod

Analýzou historického vývoje chápání bodu a jeho vztahu k přímce jsme identifikovali následující jevy jejich vymezení.

- odhlédnutí od konkrétního obrázku
- přechod od reálných objektů k ideálním
- určení pozice
- velikost a pozice
- malost
- jednotka prostoru
- izolovanost
- materialita
- nedělitelnost
- konec čáry
- algebraický popis (souřadnice)

Analýzou výpovědí studentů se pokusíme popsat jevy chápání bodu pravděpodobného ontogenetického vývoje.

Metodologie

Ve standardizovaných rozhovorech se 16 žáky a studenty ve věku 9 až 18 let byly použity následující problémy:

1. Co je to bod?
2. Mějme úsečku AB . Rozdělme ji bodem C v poměru 2:3. Rozděl ji na dvě části právě v bodě C . Jaké objekty vznikly? Které body jsou hraniční?
3. Z kolika bodů se skládá přímka (polopřímka, úsečka)?

Rozhovory jsme vedli buď s jedním studentem nebo v případě druhého problému se dvěma nebo třemi studenty najednou. V doplňujících otázkách o velikosti a tvaru bodu, nejkratší vzdálenosti mezi dvěma různými body a důvodech jednotlivých odpovědí jsme používali stejné výrazy, které uvedli respondenti v průběhu rozhovoru. Všechny rozhovory byly nahrány na diktafon a později přepsány.

² Eukleides užívá pojem *eutheia* pro přímku, polopřímku i úsečku. Jestliže potřebuje zdůraznit konečnost čáry, užívá pojem *peperasmenes* a pro nekonečnou čáru užívá pojem *ep apeiron*.

Ukázka rozhovorů a naše komentáře

Z protokolů rozhovorů jsme vybrali následující části, které mohou ilustrovat určité jevy chápání pojmu bod a jeho vztahu k přímce zkoumaných respondentů.

Rozhovor 1: Jakub, 12 let

E27: Takže, má bod nějakou velikost?

J28: Ve skutečnosti může být nějak velikej. (Ukazuje na čárku znázorňující bod na papíře.)

E29: Já nemyslím namalovaný bod, já myslím doopravdy, geometrický bod.

J30: (3 s) No, tak tady ten bod (5 s) velikost je tohle. (Ukazuje na bod na papíře.)

E53: Podívej se na body B a D . Mají mezi sebou střed?

J54: Ano.

E55: Ale ty jsi říkal, že mezi nimi už nic není?

J56: Hmm. Tak ten střed. (3 s) Jenže on nemá žádnou velikost, tak může být tam, kde nic není.

Komentář: Chlapec cítí, že existují dva rozdílné světy – materiální a geometrický. Tyto světy se dostávají do konfliktu, což ukazují především řádky J28 a E29. Objekt, který má nulovou velikost nemůže existovat v materiálním světě.

Rozhovor 2: o rok později Jakub, 13 let

E1: Co je to bod?

J2: (6 s) Tak, bod je (3 s) něco, co určuje nějakou pozici, něco ohraničuje. (3 s) Vlastně nemusí nic ohraničovat, prostě někde je.

J6: Nemá žádnou velikost. Nemá žádný objem. Bod nikdy nemůžeme namalovat, můžeme ho jen naznačit.

J8: Je těžký představit si něco, co nemá žádnou velikost.

E9: A jak to víš, že bod nemá žádnou velikost?

J10: Když si představím bod jako nějaký kruh, můžu ho rozdělit, kolikrát chci. A i když už ho nebudu moct ani vidět, budu ho moct pořád dělit.

J12: Nemůžeme nijak rozdělit bod. On ohraničuje jen jedno místo.

Komentář: Můžeme vidět zřejmý posun v tom jak student chápe geometrické objekty. Dokáže uvažovat a hovořit o ideálních geometrických objektech. Ke svým úvahám nepotřebuje konkrétní body. Zdůrazňuje nulovou velikost, umístění, nedělitelnost bodu a uvažuje o něm jako o hranici jiných objektů.

Fenomény ontogeneze pojmu bod

Pomocí analýz protokolů realizovaných rozhovorů jsme vysledovali následující jevy, kterými respondenti charakterizují pojem bod.

- odhlédnutí od konkrétního obrázku
- přechod od reálných objektů k ideálním
- určení pozice
- velikost a pozice
- malost
- jednotka prostoru
- izolovanost
- tvar
- nedělitelnost
- konec čáry
- algebraický popis (souřadnice)

Závěry: Srovnání fylogeneze a ontogeneze

Studenti užívají podobné pojmy, jaké můžeme identifikovat v historickém vývoji chápání bodu a jeho vztahu k přímce. Objevují se zde pouze dva rozdíly. Studenti neuvažují o

materialitě bodu. Naopak, v historických pramenech jsme nenalezli zmínku o tvaru bodu. Jedním z pravděpodobných důvodů je to, že tvar není matematickým pojmem. Pokud si toto ale řečí matematikové neuvědomovali, pak pravděpodobně považovali bod za objekt, který tvar nemá, a nebo za objekt, který je tvarem sám o sobě. Kladení důrazu na materialitu bodu ve fylogenezi zřejmě souvisí s tím, že původním prioritním smyslem poznávání okolního světa byl hmat. Oproti tomu v současné době se všeobecně preferuje při poznávání reality zrak.

Velká část studentů je schopna uvažovat o bodu (a dalších geometrických objektech) jen prostřednictvím obrázků. Je to v souladu s prvním obdobím historického poznávání rovinné geometrie. Žáci a studenti pracují současně v reálném i ideálním geometrickém světě aniž si to uvědomují. To vede často k různým sporům. Tento jev nepovažujeme za negativní. Naopak, může být impulsem k hlubšímu uchopení dané problematiky a umožnit studentům opustit reálný svět a začít uvažovat o čistě ideálních objektech.

Všichni studenti, se kterými jsme hovořili, zdůrazňovali malost bodu. Ale jen někteří mu přisoudili nulovou velikost. Je velice přirozené uvažovat jen v konečných velikostech, neboť vše, s čím se v denním životě setkáváme, má nenulovou velikost. Respondenti často nechápu přímku či úsečku jako spojitou množinu bodů, což je v souladu s Demokritovým geometrickým atomizmem. Vysvětlují bod jako „*jediné místo*“ nebo „*jednotku prostoru*“.

Starší (ovšem není možné určit přesný věk, neboť jde o jev individuální) studenti hovoří o určení pozice, resp. souřadnic pomocí bodu. To pravděpodobně souvisí s obsahem výuky, kdy se studenti začínají seznamovat se základy analytické geometrie. Pouze několik se zmiňuje o nedělitelnosti bodu. Je to možné jen tehdy, pokud přestanou uvažovat o bodu jako o objektu na papíře. K ideálnímu objektu můžeme dojít prostřednictvím nekonečného procesu dělení či zmenšování, což je intelektuálně velmi náročné.

Mladší studenti (přibližně do 15 let) často odpovídají „*přímka nemá žádný bod*“ nebo „*polopřímka má právě jeden bod*“ nebo „*úsečka má právě dva body*“. Jsou zde dvě možná vysvětlení: Uvažují pouze o obrázku: „*Jsou tu namalované jen dva body.*“ Nebo rozumí přímce se dvěma body jako úsečce a dvěma polopřímkám. To odpovídá historickému vývoji vztahu mezi body a jinými geometrickými objekty. Body byly chápány jako koncové body úseček či vrcholy obdélníka apod. [Eisenmann 2002, 9 – 10]

Literatura:

1. Bečvářová, M. *Eukleidovy Základy. Jejich vydání a překlady*. Prometheus, Praha 2002.
2. Drábek, J. *Démokritova atomistická metoda*. In: Sborník Matematika v proměnách věků I. Prometheus, Praha 1998.
3. Eisenmann, P. *Point, segment, line -- secondary school pupil's ideas*. In: 8th Czech—Polish Mathematical School. Acta Universitatis Purkynianae. Ústí n.L. 2001.
4. Eisenmann, P. *Propedeutika infinitesimálního počtu*. Acta Universitatis Purkynianae. Ústí n. L. 2002.
5. Hejný, M. In Znám, Š a kol. *Pohl'ad do dejín matematiky*. SNTL, Bratislava 1986.
6. Hejný, M a kol. *Teoria vyučovania matematiky 2*. SPN, Bratislava 1990.
7. Hejný, M., Stehlíková, N. *Číselné představy dětí*. PedF UK, Praha 1999.
8. Kuřina, F. *Deset pohledů na geometrii*. M a ALBRA, Praha 1996.
9. Prokopová, M: *Some remarks about pupil's concept of a point*. In: 9.th Polisch--Czech Mathematical School. Krakow. (v tisku).
10. Servít, F. *Eukleidovy základy (Elementa)*. JČMF, Praha 1907.
11. Struik, D. J. *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha 1963.
12. Vopěnka, P. *Rozprawy s geometrií*. Panorama, Praha 1989.
13. Vopěnka, P. *Úhelový kámen evropské vzdělanosti a moci*. Práh, Praha 2000.

Adresa autorů:

Magdalena Prokopová, KM PF UJEP, České mládeže 8, 40096 Ústí nad Labem,
prokopova@pf.ujep.cz
Petr Rys, KM PF UJEP, České mládeže 8, 40096 Ústí nad Labem, ryp@pf.ujep.cz