

Slovná úloha o veku a analýza jej rôznych riešení

Alena Prídavková

ABSTRACT: *“Task of age” and analysis of its different solutions.*

Four pupils of the elementary school were solving mathematical „task of age“ in meeting of the mathematical bee. The pupil’s written solutions of this task are analysed. The verbal expressions and explanations of two pupils are given.

1 ÚVOD

Článok je zameraný na skúmanie myšlienkových procesov, ktoré prebiehajú u žiakov pri riešení matematickej úlohy. Takéto skúmanie je súčasťou procesuálneho prúdu didaktiky matematiky, ktorý „skúma, čo sa deje v hlave človeka, predovšetkým žiaka, keď robí matematiku.“ (M. Hejný, [1], s. 10).

Predpokladom na poznávanie myšlienkových pochodov žiaka je evidencia toho, čo žiak hovorí a píše. V bežných podmienkach triedy – priamo na vyučovaní matematiky - kde sa zvyčajne nachádza viac ako 25 žiakov, učiteľ nemá na takúto činnosť vytvorené priaznivé podmienky. Z tohto pohľadu je omnoho vhodnejšia práca v čase mimo vyučovania – napríklad v matematickom krúžku.

Autorka organizovala stretnutia v matematickom krúžku so žiakmi 5. až 8. ročníka ZŠ. Na jednom z nich bol realizovaný experiment, zameraný na skúmanie riešiteľských procesov žiakov.

2 OPIS EXPERIMENTU

V ďalšej časti uvedieme opis práce na jednom zo stretnutí a analýzu dvoch rôznych žiackych spôsobov riešenia konkrétnej úlohy. Využijeme pritom ilustrácie situácií, ktoré sa vyskytli pri riešení úlohy.

Stretnutia sa zúčastnili štyria žiaci 7. ročníka ZŠ v Prešove, takže boli vytvorené vhodné podmienky na sledovanie ich myšlienok. Forma práce

bola individuálna. Hneď po krátkej klimatickej príprave autorka prečítala text úlohy. Žiaci si mohli po prečítaní zadania robiť písomné poznámky, týkajúce sa podmienok v úlohe, prípadne mali možnosť klásť otázky k textu. Po tejto časti každý zo žiakov riešil úlohu samostatne. Bola tu však možnosť individuálne diskutovať s učiteľkou v prípade, že sa ešte počas riešenia úlohy vyskytli problémy a nejasnosti.

Pristúpime ku konkrétnej úlohe a opisu mechanizmov riešiteľského procesu.

3 NÁSTROJ VÝSKUMU

Nástrojom výskumu bola jedna slovná úloha o veku, ktorú podrobíme didaktickej analýze.

Úloha : *Martina sa pýtali, koľko má rokov. Jeho odpoveď znela: „Ak vek, ktorý budem mať o tri roky, vynásobíte tromi a od toho čísla odčítate trojnásobok môjho veku pred tromi rokmi, dostanete môj vek v súčasnosti.“ Koľko rokov má teda Martin?*

Úloha patrí medzi náročnejšie úlohy o veku. Vystupuje tu jedna osoba v troch časových hladinách – vtedy (v), teraz (t) a potom (p). Vzťahy medzi základnými údajmi sú zložito poprepletané. Pomocou rozkladu textu (pozri [1] s. 71 a [3]) môžeme konceptuálny model úlohy vyjadriť tabuľkou, v ktorej budú vyjadrené vzťahy medzi základnými údajmi (v, t, p):

Tabuľka 1

Slovná väzba	Algebraický zápis
potom nastane o tri roky	$p = t + 3$
vtedy bolo pred tromi rokmi	$v = t - 3$
teraz je rozdiel trojnásobku potom a trojnásobku vtedy	$t = 3p - 3v$

Priamym dôsledkom zapísaných väzieb medzi údajmi je riešenie úlohy: $t = 18, v = 15, p = 21$.

Konceptuálny prístup k riešeniu úlohy identifikuje jednotlivé údaje v slovnej úlohe: Martinov vek *teraz*, vek Martina *potom* a vek Martina *vtedy*, ktoré sú nahradené písmenami t, p, v . Nasleduje identifikácia existujúcich väzieb, ktoré sú prevedené do jazyka algebry. Uvedený postup sa ale nevyskytuje bežne pri riešení úloh tohto typu žiakmi ZŠ. Častejší je postup procesuálny, pre ktorý je charakteristické, že príbeh úlohy je modelovaný slovo za slovom.

Procesuálny postup riešenia úlohy je naznačený v tabuľke 2.

Tabuľka 2

Text úlohy	Hypotetická vnútorná reč riešiteľa	Rovnica
------------	------------------------------------	---------

Vek, ktorý budem mať o tri roky	Musím k mojim rokom pripočítať tri roky	$(x + 3).$
vynásobíte tromi	môj vek o tri roky musím vynásobiť tromi	$.3$
a od toho čísla odčítate trojnásobok môjho veku pred tromi rokmi	odčítam čosi to „čosi“ je keď od veku odčítam tri a potom to vynásobím tromi	$-(x - 3).3 =$
dostanete môj vek v súčasnosti	výsledok bude môj vek teraz	$= x$

Rovnica $(x + 3).3 - (x - 3).3 = x$ je algebraickým modelom úlohy.

4 RIEŠENIA ŽIAKOV

V tejto časti uvedieme riešenia úlohy dvoch žiakov. Metodikou prevzatou z prác [2] a [3] budú analyzované ich písomné a ústne vyjadrenia týkajúce sa riešiteľského postupu, ktorý využili pri riešení uvedenej úlohy.

Slavo

V úvode jeho zápisov bol súkromný prepis textu slovnej úlohy:

„o 3 roky krat 3 – 3 nas pred 3 rok“ Ďalšie zápisy, ktoré súviseli s procesom riešenia úlohy, mali takéto tvar:

$$(16+3).3=57$$

$$(16-3).3=39 \quad 57-39=16$$

Slavo povedal: „Mám riešenie. Je to šesťnásť“

Nasledoval rozhovor s učiteľkou:

Učiteľ 1: *Skús overiť, či pre hodnotu šesťnásť platia všetky podmienky z úlohy.*

Slavo 1: *Šesťnásť plus tri to celé krát tri je päťdesiatšedem. Potom od šesťnásť odčítam tri, to celé krát tri je tridsaťdeväť. No a ešte odčítam tridsaťdeväť od päťdesiatšedem a to je šesťnásť. Aha to je nesprávne. Nie je to šesťnásť, ale osemnásť. Idem skúšať ďalej.“*

Po tomto zistení nasledovali ďalšie zápisy:

$$\begin{array}{cccc}
 14 & & & \\
 51 & & & \\
 & 17 & & \\
 & 51 - 33 & & \\
 & & 12 & 15 \\
 & & 45 & 27 \quad .3 \\
 \\
 11 & & 16 & \\
 14 & & 19 & \\
 & & & 17 \\
 & & & 20 \\
 42 & 24 & & 60 \quad 42 \\
 & & 57 & 39 \\
 & & 18 & \\
 & & 21 & \\
 & & & 18 \\
 & & 63 & 45 \\
 & & & 54 - 36
 \end{array}$$

Analýza

Prvý riadok Slavovho zápisu je stručný zápis slovnej úlohy. Je dôkazom toho, že v chlapcovom vedomí je vytvorená predstava o prítomnosti troch časových hladín – *vtedy, teraz, potom*. Zavádza údaj $3p - 3v$. Získava správny vhl'ad do situácie slovnej úlohy. Úlohu sa snažil riešiť procesuálne. Nepokúša sa ale vytvoriť algebraický model – rovnicu. Zápis „o 3 roky krat 3 – 3 nas pred 3 rok“ je riešiteľov súkromný. Vyjadruje ním situáciu naznačenú v úlohe: *vek o tri roky vynásobím troma a od toho potom odčítam vek o tri roky vynásobený troma*. Týmto zápisom riešiteľ vyjadril prvé tri riadky z tabuľky 2. Chýba ešte posledný riadok. Slavo zrejme nepovažoval za potrebné zapísať vzťah rovnosti medzi uvedeným rozdielom a vekom *teraz*. Z jeho ďalších reakcií a zápisov je vidieť, že si tento vzťah uvedomil.

Zápisy $(16+3).3=57$

$$(16-3).3=39$$

$$57-39=16, \text{ hovoria o tom, že Slavo}$$

dosadzoval náhodne zvolené číslo 16 a overoval, či pre túto hodnotu platia podmienky úlohy. Správne a korektne zapísal *trojnásobok veku o tri roky*: $(16+3).3=57$ a *trojnásobok veku pred tromi rokmi*:

$(16-3).3=3$. Určil následne rozdiel týchto hodnôt, čo považoval za číslo 16. Tu sa dopustil numerickej chyby, ktorú si nevšimol a tak dospel k záveru, že riešením úlohy je číslo 16. Svedčí o tom aj jeho ústna výpoveď: „Mám riešenie. Je to šestnásť.“ Po tomto vyhlásení prichádza poznámka zo strany učiteľky, ktorá naznačuje, že v riešení žiaka je niekde chyba. Necháva na Slavovi, aby ju našiel sám. Žiak komentuje ústne zápisy, ktoré ukazujú, že riešením je číslo 16. Pri poslednom zápise $57-39=16$ si všimol, že tento rozdiel vypočítal nesprávne. Bol si však istý, že stratégia a postup, ktoré zvolil, sú správne. Ďalej, využitím už naznačeného postupu, skúšal overovať ďalšie zvolené čísla. Ako prvý si zvolil hodnotu 14. Pri overovaní tohto čísla zapisoval:

$$14$$

$$51 \quad 17$$

$$51 - 33$$

Nezapisoval celý postup do detailov, ale len tie údaje, ktoré považoval za potrebné písať, aby sa dokázal v nich orientovať. 51 je trojnásobok čísla 17. Zrejme najprv napísal 17 a až potom 51. Nakoniec zapísal $51 - 33$ ako hľadaný rozdiel. 51 to je 17.3 a 33 je 11.3 – teda *trojnásobok veku pred tromi rokmi*, čo je 11. Tieto hodnoty určoval spamäti. Výsledok nepísal, nakoľko videl, že 14 to nie je. Analogicky overoval aj ďalšie zvolené hodnoty: 12, 11, 16, 15, 18. Zo zápisov sa nedá jednoznačne určiť, v akom poradí ich chlapec vytváral. Všetky zápisy súvisiace

s overovaním zvolených vstupných hodnôt sú formálne rovnaké. Mohli by sme pre ne vytvoriť schému: x

$$(x + 3).3 \quad (x - 3).3, \text{ kde } x \text{ je zvolené}$$

vstupné číslo. Rozdiel hodnôt výrazov v poslednom riadku žiak vždy určil spamäti. Naznačeným spôsobom Slavo našiel riešenie úlohy.

Slavo získal správny vzhľad do situácie slovnej úlohy. Nevytvoril rovnicu, ktorá by vyjadrovala vzťahy medzi údajmi, ale úlohu riešil procesuálne. Vytvoril si separované modely úlohy. Využil metódu pokus – omyl, pričom overoval, či ním náhodne zvolené číselné údaje budú vyhovovať podmienkam úlohy. Hodnoty volil bez ohľadu na predchádzajúce výsledky. Vytvoril si vlastný mechanizmus, pomocou ktorého v konečnom dôsledku riešenie úlohy našiel.

Maroš

Jeho zápisy mali tvar: $o \ 3r \ . \ 3 - 3 \ . \ \text{veku pred } 3$

:	36		27					
	9		45		16	57		39
	12		12		13	17		
	18		15					
18	63	18	45					
	17	60	18	42				
	16	57	18	39				
	15	54	18	36				
	14	51	18	33				
	13	48	18	30				
	12	45	18	27				
	11	42	18	24				
	10	39	18	21				
	9	36	18	18				
	8	33	18	15				

Svoj postup riešenia úlohy vysvetlil ústne takto: „Začal som s číslom osem. Osem plus tri je jedenásť- to je o tri roky. Jedenásť krát tri je tridsaťtri . Teraz osem mínus tri je päť- to je vek pred tromi rokmi a päť krát tri je pätnásť. Napísal som osem, tridsaťtri, pätnásť“.

Ukazuje na zápis v poslednom riadku tabuľky a pokračuje:

„Medzi tridsaťtri a pätnásť píšem číslo osemnásť, lebo to je tridsaťtri mínus pätnásť. Takto som to skúšal až po číslo osemnásť, ktoré je riešením úlohy. Zápis treba čítať v smere zdola hore“

Analýza

Prvý riadok zápisu je prepis textu slovnej úlohy do tvaru súkromnej informácie. Je tu naznačený rozdiel, ktorý je potrebné vypočítať, t. j. údaj $3p - 3v$. Chlapec uchopil úlohu procesuálne. Pozrime sa na jeho zápisy. Najprv overoval náhodne zvolené čísla, pričom celý postup uskutočňoval spamäti. Zapisoval si len pre neho potrebné údaje. Zápisy sú neprehľadné. Dá sa predpokladať, že overoval vstupný údaj 9. Týka sa toho časť táto zápisu:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 9 \\ 12 \\ 18 \end{array}$$

12 je vek o tri roky, 36 je jeho trojnásobok a noadnota 18 je trojnásobok veku *pred tromi rokmi* (6.3). Skúsil overiť aj vstupné hodnoty 12 a 16. Po týchto náhodných pokusoch nasledovali voľby vopred premyslené. Aj postup, pri ktorom overoval platnosť vstupných hodnôt je prehľadnejší a zmysluplný. Jednotlivé riadky tabuľky sú separované modely danej situácie, ktoré vznikli vo vedomí žiaka procesuálne. Zápisy by sme mohli zhrnúť:

$$x \quad (x+3).3 \quad (x+3).3-(x-3).3 \quad (x-3).3$$

Maroš však neurobil pokus o algebraické vyjadrenie zápisov v tabuľke. Postupoval pri voľbe vstupných hodnôt systematicky. Najprv zvolil hodnotu 8 a postupne údaje na vstupe zväčšoval o jednu. Úlohu vypočítal a svoj postup riešenia vedel ústne vysvetliť. Najprv vysvetlil zápis v poslednom riadku. Prítomnosť čísel 8 a 33 vysvetlil vecne a zrozumiteľne v úvode jeho výpovede: „Začal som s číslom osem. Osem plus tri je jedenásť- to je o tri roky. Jedenásť krát tri je tridsaťtri.“ To znamená, že v prvom stĺpci sú ním zvolené vstupné hodnoty a v druhom hodnota pre trojnásobok veku *o tri roky*.

Ďalšou vetou „Teraz osem mínus tri je päť- to je vek pred tromi rokmi a päť krát tri je pätnásť.“ Vysvetlil, akým spôsobom získal hodnotu 15 v poslednom stĺpci tabuľky. Je to trojnásobok veku *pred tromi rokmi*. Potom povedal: „Napísal som osem, tridsaťtri, pätnásť“. Je to akési zhrnutie doteraz použitých operácií. Nasledovalo vysvetlenie prítomnosti čísla 18 v treťom stĺpci tabuľky: „Medzi tridsaťtri a pätnásť píšem číslo osemnásť, lebo to je tridsaťtri mínus pätnásť.“ Určil rozdiel hľadaný v úlohe. Nakoniec ešte dodal: „Takto som to skúšal až po číslo osemnásť, ktoré je riešením úlohy. Zápis treba čítať v smere zdola hore.“

Tento žiak po úvodných náhodných pokusoch vytvoril algoritmus, ktorým systematicky overoval ním volené vstupné hodnoty. Použil metódu pokus – omyl. Nevyužil pritom výsledok prvého overovania pre

voľbu ďalších vstupov. Neuvedomil si, že keď hodnota rozdielu $(x+3) \cdot 3 - (x-3) \cdot 3$ t. j. $3p-3v$ je vždy 18, nemusel overovať až 11 vstupných hodnôt. No aj napriek tomu vedel svoje riešenie obhájiť a zrozumiteľne vysvetliť.

5 ZÁVER

Z uvedených analýz vidieť, že každý zo žiakov uvažuje iným – jemu vlastným spôsobom. Ani jeden z nich nepoužil konceptuálny model pri riešení uvedenej slovnej úlohy o veku. Uvažovali pre nich prirodzeným spôsobom – procesuálne, pričom si vytvorili separované modely danej situácie. Používajú metódu pokus - omyl, pri ktorej experimentujú s náhodne zvolenými vstupnými údajmi. V niektorých prípadoch sa náhodné voľby stávajú systematickými, pričom využívajú výsledky získané z predchádzajúcich overovaní na voľby pre ďalšie vstupné údaje.

V rámci práce v matematickom krúžku ide predovšetkým o to, aby sa u žiakov rozvíjali ich schopnosti racionálne uvažovať nad problémom, aby sa naučili pozrieť sa na úlohu z rôznych pohľadov a strán a aby dokázali prijať aj iný spôsob riešenia jednej úlohy. Je dôležité, aby si žiaci vedeli predovšetkým vytvoriť vhodný model slovnej úlohy, ktorý je východiskom pre proces jej riešenia

Literatúra

- [1] Hejný, M., Stehlíková, N. 1999. *Číselné predstavy dětí*. PF KU Praha: 1999. ISBN 80-86039-98-6
- [2] Hejný, M., Michalcová, A. 2001. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. MC Bratislava: 2001. ISBN 80-8052-085-2
- [3] Hejný, M., Michalcová, A. 2002 *Skúmanie matematického riešiteľského postupu. 2. časť – Slovné úlohy* (pracovné materiály)

Adresa autorky:

RNDr. Alena Prídavková, PhD.

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta PU, Ul. 17. novembra 1,
081 16 Prešov

e – mail: pridav@unipo.sk