Gry Penneya jako źródło pojęć probabilistycznych dla uczniów

Maciej Major, Barbara Nawolska

ABSTRACT: This paper presents the concept of using stchastics games in the propadeutic education of the basic elements of probability for secondary school children. They will learn such basic ideas like probability ie. the estimate of chance.

Wstęp

Praca prezentuje wyniki pewnych badań dotyczących wykorzystania gier stochastycznych do propedeutycznego kształtowania pojęć probabilistycznych u uczniów 13-14 letnich (polskie gimnazjum). Chodzi tu o kształtowanie takich pojęć, jak: gra losowa, doświadczenie losowe, zdarzenie i jego prawdopodobieństwo, sprawiedliwość gry losowej.

Pedagogika i dydaktyka matematyki podkreślają ogromne znaczenie gier w aktywizacji matematycznej uczniów (zob. [1]). Pojęcia i idee rachunku prawdopodobieństwa wywodzą się z gier losowych. Ten fakt oraz wspomniana rola gier w nauczaniu (w tym w nauczaniu matematyki) motywuje użycie gier losowych do kształcenia stochastycznego. Chodzi tu zarówno o wprowadzanie pojęć rachunku prawdopodobieństwa a także o kształtowanie pewnych intuicji stochastycznych. Kształcenie stochastyczne oparte na bazie gier pozostaje więc w zgodzie z *zasadą paralelizmu w dydaktyce*. W trakcie gry losowej i jej matematycznej analizy uczniowie mogą sami odkrywać podstawowe pojęcia stochastyczne , a także pewną metodologię stochastyki (np. idee procesów decyzyjnych).

Propozycja wykorzystania gier w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa pozostaje w zgodzie z zasadą czynnościowego nauczania matematyki. Zasada ta orzeka, że w trakcie kształtowania pojęć matematycznych należy przechodzić od operacji konkretnych poprzez wyobrażone do operacji abstrakcyjnych.

Czekanie na serie orłów i reszek – gra Penneya

Wyniki rzutu monetą oznaczamy dalej następująco:

o: wypadnie orzeł, r: wypadnie reszka.

Oba te wyniki uznajemy za jednakowo prawdopodobne. Wynik k-krotnego rzutu monetą przedstawiamy jako ciąg wyników kolejnych rzutów. Każdy taki ciąg nazywamy *serią orłów i reszek o długości k*. Ciąg *rro* jako pewien wynik trzykrotnego rzutu monetą jest serią orłów i reszek o długości 3. Mamy 4 serie orłów i reszek o długości 2: *oo, or, ro, rr.*

Ustalmy dwie serie a i b orłów i reszek o długości k i rozważmy grę z udziałem dwu graczy G_A i G_B. Rzut monetą powtarzany jest w grze tak długo aż:

- albo wyniki k ostatnich rzutów utworzą serię a i wtedy zwycięża gracz G_A,
- albo wyniki k ostatnich rzutów utworzą serię b i wtedy zwycięża gracz G_B.

Nie jest ważne kto rzuca monetą w tej grze. Opisaną grę losową nazywamy *grą Penneya*[1] i oznaczamy przez $g_{a\text{-}b}$. W takiej grze może uczestniczyć więcej niż dwu graczy. Każdemu odpowiada seria orłów i reszek o długości k.

Jeżeli każdy z graczy ma w grze równe szanse na zwycięstwo, to grę nazywamy *sprawiedliwą*. Równość szans oznacza tu równość prawdopodobieństw pewnych zdarzeń związanych z czekaniem na jedną z serii orłów i reszek, tj. doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze. Każdy z graczy w grze Penneya ma swoją serię orłów i reszek.

Jeśli gra $g_{a\text{-}b}$ jest sprawiedliwa, to serie a i b nazywamy *jednakowo dobrymi* i oznaczamy $a \approx b$. Jeśli seria a daje graczowi G_A w grze Penneya większe szanse na zwycięstwo niż seria b daje jego przeciwnikowi G_B, to serię a nazywamy *lepszą* od serii b i zapisujemy a >> b. W zbiorze serii orłów i reszek wprowadzamy zatem dwie relacje: ≈ i >>.

Opis badań

Przedmiotem badań były argumentacje dotyczące probabilistycznych własności serii orłów i reszek w opisanych grach losowych. W badaniach wykorzystano gry Penneya z udziałem dwóch, trzech i czterech graczy. Badania zostały przeprowadzane w grupie sześciu uczniów 13-14 letnich zainteresowanych matematyką. Na początku uczniowie zostali zaznajomieni z pojęciami pojawiającymi się w kontekście gry. Uczniowie zastanawiali się nad tym, jakie są wyniki rzutu monetą, jakie są wyniki dwukrotnego a jakie trzykrotnego rzutu monetą oraz jakie są szanse ich uzyskania. Po zdefiniowaniu pojęcia serii orłów i reszek zapoznano uczniów z zasadami gry Penneya $g_{a\text{-}b}$ w przypdku serii $a = rrr$ i $b = ror$. Po tym wprowadzeniu zaproponowano uczniom analizę gry $g_{oo\text{-}rr}$. Tę grę uczniowie powtórzyli łącznie 30 razy. Uczniowie grali w trzech parach. Pierwsza para powtórzyła grę13 razy, 7 razy czekanie zakończyło się uzyskaniem serii *oo*. Druga para powtórzyła grę 8 razy, 3 razy gra zakończyła się uzyskaniem serii *oo.* Trzecia para rozegrała 9 gier wśród których 5 zakończyło się uzyskaniem serii *oo*. W 30 powtórzeniach gry 15 razy zwyciężył gracz, którego serią jest *oo* i 15 razy zwyciężył gracz, którego serią jest *rr.* Uczniowie zebrali więc dane statystyczne, które stały się podstawą wnioskowań stochastycznych. Te dane nie dają podstaw aby kwestionować sprawiedliwość tej gry.

Na pytanie, c*zy ta gra jest sprawiedliwa,* pojawiły się odpowiedzi: *Tak. Wszystko zależy od szczęścia*. Na pytanie, c*o to znaczy, że gra jest sprawiedliwa,* jeden z uczniów odpowiedział: *każdy ma te same szanse*. Inny uczeń dodał: j*est całkowicie losowa*.

W dalszej części zaproponowano grę Penneya $g_{rr\text{-}ro}$. Uczniowie pracowali parami. Badani sami, spontanicznie, wybrali różne strategie postępowania. Jedna para powtarzając grę zbierała dane statystyczne. Na 5 powtórzeń gry cztery razy uzyskano serię *rr* a raz serię *ro*. Ten rezultat nie wpłynął na ocenę sprawiedliwości gry. Druga para analizowała przebieg czekania rysując drzewo, które zasugerowało, że gra jest sprawiedliwa. Trzecia para bez jakichkolwiek czynności konkretnych sformułowała *a priori* wniosek na temat sprawiedliwości gry. Istotę tej argumentacji prezentuje następujący dialog między badaczem B a uczniem U.

U: *Najpierw mamy reszkę, tak czy siak najpierw musi wypaść reszka, dopiero potem może... od drugiego* [następnego po reszcze] *rzutu decyduje kto wygra. Czy będzie, wyjdzie, reszka, to wygra jeden gracz, a jeśli orzeł będzie wyrzucony, to wygra drugi.*
B: *I musieliście to zbadać eksperymentalnie?*
U: *Nie!*
B: *Wiedzieliście od razu?*
U: *Tak, to widać.*

[1] Ten typ gry losowej zaproponował w roku 1968 Walter Penney (zob. [2] oraz [5]).

Kolejny etap badań dotyczył podsumowania dotychczas uzyskanych rezultatów. Wnioski, że w grze $g_{oo\text{-}rr}$ serie *oo* i *rr* są jednakowo dobre oraz że w grze $g_{rr\text{-}ro}$ serie *rr* i *ro* też są jednakowo dobre, zapisano na tablicy w formie symbolicznej: $oo \approx rr$ i $rr \approx ro$.

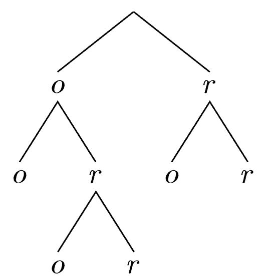
W tym momencie zaproponowano uczniom analizę gry $g_{oo\text{-}ro}$. Problem dotyczył związku między ostatnim wnioskiem a sprawiedliwością tej nowej gry. Spodziewano się, że uczniowie automatycznie uznają serie *oo* i *ro* za jednakowo dobre , wydaje się bowiem oczywiste, że relacja $\approx$ jest przechodnia.

Tymczasem uczniowie natychmiast, prawie chórem, odpowiedzieli:

- *To już nie jest sprawiedliwe;*
- *Nie są tak samo dobre;*
- *Bo w momencie wypadnięcia pierwszej reszki już orzeł-orzeł nie ma szans wygrać.*

Sądy uczniów nie były tu pochopne, uczniowie nie sugerowali się przechodniością relacji $\approx$, sugerowaną mylnie przez intuicję. Badani trafnie zauważyli, że seria *ro* jest lepszą serią niż seria *oo* i potrafili to spostrzeżenie uzasadnić. Uczniowie stwierdzili też, że szanse gracza, który ma serię *oo* wynoszą 1/4 zaś przeciwnika (mającego serię *ro*) 3/4, czyli że $ro >> oo$.

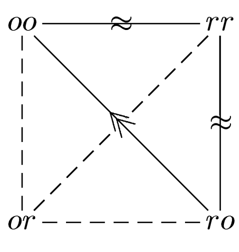
W dalszej części zaproponowano uczniom grę z udziałem trzech graczy, których seriami są *oo*, *rr* i *ro*. Oznaczmy tę grę symbolem $g_{oo\text{-}rr\text{-}ro}$. Uczniowie natychmiast zauważyli, że *najsłabszą serią jest teraz oo, bo jak wypadnie reszka, to już oo nie ma szans.* Następnie po burzliwej dyskusji i próbach opisu przebiegu gry za pomocą grafu, trafnie zauważyli, że ta gra kończy się nie później niż po trzecim rzucie monetą. Jeden z uczniów nawet dokonał ilościowej oceny szans graczy w tej grze. W tej ocenie wykorzystał (narysowane przez siebie) następujące drzewo stochastyczne.



Jego zdaniem z drzewa wynika, że szanse uzyskania serii *oo* wynoszą 1/4, zaś szanse uzyskania pozostałych dwu serii wynoszą po 1/4+1/8 tj. 3/8.

Kolejny etap badań dotyczył gry z udziałem czterech graczy, każdy gracz ma inną z czterech serii: *oo, rr, ro, or.* W przypadku takiej gry $g_{oo\text{-}rr\text{-}ro\text{-}or}$ (z udziałem czterech graczy) badani od razu zauważyli, że szanse wszystkich graczy są równe i wynoszą po 1/4.

Na koniec prowadząca badania wypisała na tablicy wszystkie serie orłów i reszek długości 2 i zaznaczyła relacje między rozpatrywanymi już seriami, łącząc odcinkami te pary serii, dla których rozważano już gry z udziałem dwu graczy i wpisując odpowiednie symbole relacji. Pozostały do rozważenia jeszcze trzy pary serii (trzy gry z udziałem dwu graczy). Zadaniem uczniów była analiza pozostałych gier. Przerywaną linią połączono pozostałe trzy pary serii w wyniku czego uzyskano następujący rysunek.



Uczniowie natychmiast stwierdzili, że
- serie *oo* i *or* są jednakowo dobre (analogicznie do serii *rr* i *ro*),
- serie *or* i *ro* są również jednakowo dobre,
- zaś serie *rr* i *or* nie są jednakowo dobre, lepsza jest seria *or*, szanse na jej uzyskanie wynoszą 3/4 a szanse uzyskania serii *rr* wynoszą 1/4 (analogicznie do serii *oo* i *ro*).

Podsumowanie

Przedstawione uczniom problemy nie były dla nich trudne a ich rozwiązywanie sprawiało im przyjemność. Argumentacje uczniów oparte były na symetriach i analogiach. Chętnie wykorzystywano rysunek jako środek zarówno opisu (modelowania problemu) jak i argumentacji.

Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że uczniowie posiadają stosunkowo dobrze rozwinięte intuicje probabilistyczne i raczej prawidłowo rozumieją pojęcia: „gry sprawiedliwej", „serii lepszej", „serii jednakowo dobrych", a nawet potrafią oceniać ilościowo prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń wyrażając je w postaci ułamka. Zamiast prawdopodobieństwa używają terminu „szanse", ale poprawnie rozumieją sens tego pojęcia. W trakcie gry uczniowie odkrywali nowe fakty i tworzyli specyficzną terminologię (tworzyli pewien język tej dziedziny matematyki).

Przeprowadzone badania są głosem w dyskusji nad wcześniejszym, niż jest to proponowane w programach nauczania, wprowadzaniem probabilistycznych pojęć w nauczaniu szkolnym. Praca zawiera propozycje wprowadzania treści probabilistycznych do szkoły w takiej formie, aby były źródłem matematycznej aktywizacji ucznia i by uczyły matematyzowania sytuacji jakie uczeń spotyka w otaczającej nas rzeczywistości.

Literatura:

[1] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki. Część 3*, WSiP, Warszawa 1977.
[2] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.
[3] M. Major, B. Nawolska, *Gra strategiczno-losowa jako środek kształtowania intuicji probabilistycznych uczniów klas początkowych*, Podíl matematiky na připravě učitele primární školy. Sbornik mezinárodní konference, Olomouc, 2002, s. 110-114.
[4] B. Nawolska, *Gry losowe i pierwsze wnioskowania stochastyczne w szkole podstawowej*, Matematika v príprave učitel'ov 1. stupnňa základnej školy. Zbornik príspevkov, Banská Bystrica, 2001, s. 52-57.
[5] B. Nawolska, A. Płocki, *Problemy i paradoksy rachunku prawdopodobieństwa związane z grami Penneya*, Gradient 1 (2000), 11-24.
[6] A. Płocki, *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*, Acta Universitatis Purkynianae 68, Studia Matematica IV, Ústi nad Labem 2001.

Adres autorów:
-dr Barbara Nawolska, Katedra Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej, Akademia Pedagogiczna, ul. Ingardena 4, PL 30-060 Kraków, Poland, E-mail: bnawol@ap.krakow.pl
-dr Maciej Major, Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland, E-mail: mmajor@ap.krakow.pl