Názornosť a abstrakcia pri riešení problémových úloh

Tomáš Lengyelfalusy

ABSTRACT: *The article deals the meaning of visuality and abstraction in problems solution within the school mathematics. It suggests the importance of solving the difficult problem tasks and it also deals the position of the teacher by the creating the difficult problem tasks for making the lessons more interesting.*

1. ÚVOD

Podstata názornosti, nie len v matematike, je v tom, že priama zmyslová skúsenosť je východiskom ku kvalitnejšiemu poznávaciemu a učebnému procesu. Čím viac zmyslov sa zúčastňuje a zapája do tohto procesu, tým lepšie, trvalejšie a komplexnejšie sa osvojuje zapamätané učivo. Komenský učiteľom radí, alebo priamo nariaďuje, „aby všetko podávali všetkými možnými zmyslami, veci viditeľné zrakom, veci počuteľné sluchom, veci čuchateľné čuchom, veci hmatateľné hmatom a ak možno niektoré veci vnímať súčasne viacerými zmyslami, nech sa podávajú súčasne viacerými, aby všetko v nich utkvelo, nech si priberajú na pomoc všetky možné zmysly“. Je potrebné viesť žiakov k správnemu pozorovaniu, ale i k analýze získaných faktov a viesť ich k objavovaniu podstaty sledovaných vecí a javov.

Prvoradým cieľom školskej matematiky je výchova k samostatnému logickému mysleniu a k pohotovému riešeniu problémových úloh. Skúsime sa teraz pozrieť z tohto uhlu pohľadu na metodiku riešenia úloh v rámci vyučovania matematiky.

2. RIEŠENIE ÚLOH V ŠKOLSKEJ MATEMATIKE

Úlohy vyskytujúce sa v školskej matematike „zvyčajne“ delíme do dvoch skupín. Prvú úlohu tvoria úlohy precvičovacie, typické, šablonovité a druhú, úlohy problémové, vyžadujúce dlhšie uvažovanie – premýšľanie a hľadanie súvislostí. Toto delenie ale nie vždy obstojí, lebo kým je úloha pre žiaka neznáma, nezvyčajná, nová, nech je hocijaká „jednoduchá“ je preňho problémom, ku riešeniu ktorej potrebuje zmobilizovať mnohé svoje predchádzajúce vedomosti, premýšľať a hľadať súvislosti. Šablonovitou úlohou sa stáva iba po mnohých opakovaniach, rôznych aplikáciách, pri ktorých už žiak „bez rozmýšľania“ a ľahko ich vyrieši. Netvrdíme, že riešenie šablonovitých úloh nie je potrebné, napríklad na osvojovanie si jednotlivých pojmov a vzťahov, na znázornenie ich významu, ale riešením len takýchto úloh vôbec nesmerujeme k cieľu vyučovania školskej matematiky. Dosiahneme totiž len to, že u žiakov sa zautomatizujú určité úkony, prestanú rozmýšľať pri ich vykonávaní, nezbadajú krásu matematiky, prestanú sa učiť a s nechuťou sa budú venovať „iba svojim povinnostiam“.

Veľmi zaujímavý, a skutočne hodnotný názor má na riešenie šablonovitých úloh svetoznámy matematik a metodik George Pólya: „Vo všeobecnosti, úlohu vtedy nazývame šablonovitou, ak ju riešime jedným z dvoch možných spôsobov:

1. Konkrétne, špeciálne hodnoty dosádzame do všeobecne vyriešenej úlohy, alebo
2. Danú úlohu riešime krok po kroku na základe známeho „receptu“ bez vlastných myšlienok.

Keď učiteľ zadá svojim žiakom šablonovitú úlohu, priamo na tácke im núka odpoveď na otázku: „Nepoznáš nejakú podobnú úlohu?“ Takto teda žiaci nepotrebujú nič iné, len trochu pozornosti a trpezlivosti pri sledovaní a dodržaní určitých konkrétnych a nudných krokov receptu. Nepotrebujú ani vynaliezavosť, ani logické myslenie.

Šablonovité úlohy a ich riešenie, majú svoje miesto vo vyučovaní matematiky, ale žiakom neustále zadávať k riešeniu iba šablonovité úlohy, je neodpustiteľné! Ak od nich budeme vyžadovať iba riešenie šablonovitých úloh, tak ich degradujeme hlboko pod úroveň kuchárskej knižky, veď na rozdiel od matematických receptov, kuchárske recepty nechávajú ešte dostatok priestoru na vlastnú fantáziu a na individuálnu realizáciu.“([3], str. 210)

3. ČO MÁME TEDA ROBIŤ?

Máme si vybrať a žiakom predkladať také príklady, aby tie ich zaujali, aby v nich našli čosi príťažlivé, čosi tajuplné, ale hlavne, aby sa sami zamysleli nad súvislosťami a tým riešili určitý „problém“. Treba uznať, že výber príkladov na základe takých kritérií vyžaduje od každého učiteľa cieľavedomú, premyslenú a systematickú prácu. Nesmieme sa úplne spoľahnúť na učebnice matematiky.

V učebniciach matematiky našich základných škôl je pomerne málo problémových úloh, naopak veľké množstvo šablonovitých úloh. Preto majú mnohí žiaci väčšie problémy pri prechode zo základnej školy na strednú. Skúsme si prelistovať niektoré učebnice matematiky ZŠ a sledujme učivo (napríklad) geometrie. V mnohých úlohách vyžadujeme od žiakov len vykonávanie určitých príkazov a úkonov, napr.: Nakresli kružnicu! Narysuj takú a takú priamku! Zmeraj veľkosť danej úsečky! Zmeraj veľkosť uhla! Vypočítaj obsah! Vypočítaj obvod! a pod. Skutočné problémové úlohy, pri riešení ktorých by sa mali žiaci zamyslieť aj nad výberom vhodnej metódy, sa málokedy vyskytujú. Ak učiteľ matematiky usúdi, že danosti niektorých žiakov triedy to dovolia, môže príklady vyskytujúce sa v učebnici rozšíriť, zovšeobecniť, prípadne doplniť zaujímavejšími úlohami. Uvedieme jeden konkrétny príklad:

1. Príklad: Narysujte kružnicu k(S, 2cm) a vyznačte bod M, pre ktorý platí |SM| = 5,5 cm.

a) Zostrojte dotyčnice z bodu M ku kružnici k.
b) Vypočítajte dĺžku úsečky určenej bodom M a dotykovým bodom dotyčnice ku kružnici.

([5], str. 117)

Keď žiaci túto úlohu riešia, už vedia zostrojiť dotyčnicu ku kružnici z daného bodu mimo kružnice (pomocou Talesovej kružnice) a taktiež vedia, že dostanú dve dotyčnice. Teda samotná úloha nie je pre nich zaujímavá. Učiteľ však môže túto úlohu spestriť ďaľšími otázkami – problémovými úlohami, napr.:

2. Príklad: Hľadajte ďalšie body M , z ktorých môžete zostrojiť k danej kružnici rovnako dlhé úsečky dotyčnice!

Tu by mali zbadať, že v prípade kružnice, dĺžka dotykových úsečiek závisí od vzdialenosti bodu M od stredu kružnice. Ak na to prišli, tak vedia aj to, že hľadané body ležia na kružnici, ktorej stred je S a polomer |SM| = 5,5 cm. Potom môžeme prejsť k skúmaniu prípadu: Čo sa stane v prípade, ak |SM| < 5,5 cm, resp. |SM| > 5,5 cm? Ďalej môžeme túto úlohu modifikovať a riešiť nasledovnú:

3. Príklad: Narysujte kružnicu k(S, 2cm) a priamku, ktorej vzdialenosť od stredu kružnice je 4,5 cm. Nájdite na tejto priamke také body M, z ktorých možno zostrojiť ku kružnici dotyčnicu s dĺžkou dotykovej úsečky |MT| = 5,1 cm. Koľko takých bodov existuje? Vedeli by ste danú priamku zostrojiť aj tak, aby úloha mala len jedno riešenie, resp. aby nemala riešenie?

Ak tieto úlohy žiaci zvládli, môžeme zadať úlohu vo všeobecnosti – aj keď nie pre celú triedu:

4. Príklad: Zostrojte na danej priamke taký bod M, z ktorého možno zostrojiť k danej kružnici dotyčnicu s danou dĺžkou úsečky |MT| na dotyčnici.

Ako to vyplýva aj z horeuvedených príkladov, naším prvoradým cieľom je, aby sme svojim žiakom „servírovali" také príklady, ktoré ich zaujímajú, pri riešení ktorých majú možnosť sa realizovať.

Veľakrát sa stane, že pri riešení úloh, učiteľ sa snaží žiakovi „vsugerovať" svoje riešenie, prípadne ho „núti" riešiť podľa daného postupu. Avšak, ak chceme dosiahnuť, aby žiaci vedeli samostatne riešiť úlohy, mali by sme im „dovoliť" aj metódy a postupy si zvoliť slobodne. Môže sa stať, že ich cesta bude chybná, alebo je dlhšia, než najefektívnejšia, ale na to musí prísť sám žiak, učiteľ nemá právo „šetriť" v mene žiaka. Nemôžeme rozmýšľať namiesto neho, nesmieme mu vnucovať myšlienky, ktoré sú mu cudzie! Ak napriek tomu to budeme robiť, prestane samostatne uvažovať, nebude už lámať hlavu nad riešením úlohy, ale počká na prichádzajúcu „pomoc" alebo príkazy. Záverom uvedieme ešte jeden konkrétny príklad:

5. Príklad: Dokážte, že ak $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, potom $a = b = c$! (a,b,c sú reálne čísla)

Jeden žiak to riešil takto:

Na prvý pohľad zistil, že obrátená implikácia je pravdivá, čiže platí, že:

Ak $a = b = c$, potom $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$. Potom začal skúmať jednotlivé členy a dostal nápad – vytvárať úplné štvorce. Urobil to nasledovne:

$$a^2 - 2ab + b^2 + ab + c^2 = bc + ac$$

$$(a - b)^2 + ab + c^2 = bc + ac$$

Prečo by sme v tom nemohli pokračovať – myslel si, a napísal:

$$(a - b)^2 + (c - b)^2 = b^2 - ab - bc + ac.$$

Vtedy zbadal, že v pôvodnej rovnosti všetky tri neznáme sa vyskytujú symetricky, teda bolo by účelné túto vlastnosť zachovať aj naďalej, preto posledný vzťah doplnil takto:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = b^2 + c^2 + a^2 - ab - bc - ac.$$

Pravá strana podľa pôvodného predpokladu sa rovná nule, teda aj ľavá strana sa musí rovnať nule. Ale súčet druhých mocnín reálnych čísel sa rovná nule práve vtedy, ak všetky reálne čísla (základy) sa rovnajú nule, čiže $a = b$, $b = c$, $c = a$. Tým dokázal, že $a = b = c$.

Žiak ale po riešení tejto úlohy mal taký pocit, že riešenie je príliš zdĺhavé a začal uvažovať o tom, či by sa to nedalo dokázať aj „krajšie“. Začal skúmať poslednú rovnosť. Na ľavej strane umocnil dvojčleny a potom upravil daný výraz a dostal:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac.$$

Zistil, že daný výraz by mohol dostať hneď z predpokladu zadania, ak by zredukoval pravú stranu rovnosti na nulu a následne by daný výraz vynásobil dvomi.

Náš študent by mohol ušetriť túto zdĺhavú cestu, ak by mu učiteľ na začiatku „pomohol“ výzvou: „Skús celú rovnosť vynásobiť dvomi!“ Veľmi rýchlo by sa dostal k správnemu riešeniu, ale pravdepodobne by nikdy neprišiel na to, ako môže človeka napadnúť, vynásobiť daný výraz práve dvomi. Keďže sám sa dostal k správnemu výsledku, aj keď trochu komplikovaným spôsobom, najbližšie pri riešení podobných úloh zrejme bude hľadať iné, vhodnejšie a „krajšie“ riešenie.

4. ZÁVER

A práve to je cieľom vyučovania matematiky. Viesť žiakov k samostatnosti, názorne na príkladoch im ukázať krásu matematiky a naučiť ich logicky myslieť a jednotlivé osvojené vedomosti v súvislostiach využívať na riešenie problémových úloh.

Literatúra:

1 Čapková, D.: Učiteľ učiteľov. J. A. Komenský a učiteľská profesia. SPN Bratislava, 1992. ISBN 80-08-01201-3

2 Lengyelfalusy, T.: Význam pamäte vo vyučovaní matematiky. In: XXI. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník abstrakt a elektronických verzí příspěvků na CD-ROMu. VVŠ PV Vyškov, 2003. ISBN 80-7231-105-0

3 Pólya, G.: How to solve it? Maďarský preklad: A gondolkodás iskolája. Bibliotheca, Budapest, 1957.
4 Sandanusová, A., Stollár, T.: Prečo vyučovať názorne. In: XXI. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník abstrakt a elektronických verzí příspěvků na CD-ROMu. VVŠ PV Vyškov, 2003. ISBN 80-7231-105-0
5 Šedivý, O. a kol.: Matematika pre 8. ročník základných škôl. 1. časť. SPN Bratislava, 2000. ISBN 80-08-03031-3

Adresa autora: T. Lengyelfalusy, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta prírodných vied, Žilinská univerzita. Hurbanova 15, 010 26 Žilina E-mail: lengyelfalusy@fpv.utc.sk