

## O jednom experimente so žiakmi

Katarína Lendelová

**ABSTRACT:** *The aim of this paper is to indicate the possibility of improvement the student's relation to the probability as a result of the change in the system of teaching this subject. The course of experiment with students and the analysis of its results are presented. This experiment was carried out in the 2<sup>nd</sup> term of the school year of 2002/2003 in 2<sup>nd</sup> year specialized in mathematics of J. G. Tajovský Grammar School in Banská Bystrica.*

Pravdepodobnosť spolu s matematickou štatistikou patrí medzi vedné disciplíny, ktoré majú široké praktické i teoretické uplatnenie. Túto dôležitú skutočnosť si mnohí ľudia neuvedomujú! Toto sa žiaľbohu prejavuje aj pri zostavovaní vyučovacích cieľov matematiky a v nedostatočnej príprave učiteľov. Popularizácia pomocou vhodne volených praktických úloh a ich riešenie je možnou cestou riešenia zlej situácie s vyučovaním pravdepodobnosti a matematickej štatistiky na školách.

Možno urobiť teda teóriu pravdepodobnosti prístupnou pre študentov? Ako uľahčiť žiakom spôsob vniknutia do jej podstaty a ako prirodzene poukázať na jej význam? Riešením by mohla byť zmena v organizácii výučby tohto predmetu. Dominantným na hodinách by mal byť predovšetkým experiment a odhaľovanie zákonitostí náhody žiakmi, aby oni sami formulovali závery, hypotézy i dôkazy. Takisto je dôležitá ilustrácia využitia pravdepodobnosti v reálnom živote na množstve konkrétnych príkladov, ktoré je potrebné so žiakmi vyriešiť. Posun v tomto smere ponúka T. Hecht svojou alternatívnou učebnicou s názvom *Pravdepodobnosť a Štatistika*.

Na overenie našej hypotézy o zlepšení vzťahu žiakov k pravdepodobnosti na základe uvedenej zmeny v systéme výučby sa realizoval experiment so žiakmi. S jeho priebehom a výsledkami Vás oboznámime v nasledujúcich odstavcoch.

Vyučovanie pravdepodobnosti sa uskutočnilo na Gymnáziu Jozefa Gregora Tajovského v Banskej Bystrici v druhom ročníku v triede so zameraním na matematiku. Samotná výučba prebiehala od 5.2.2003 do 26.2.2003 v rozsahu 19 vyučovacích hodín. Plán vyučovania pravdepodobnosti pozostával z nasledujúcich položiek:

- Náhodný dej, množina všetkých výsledkov náhodného deja. 1 h
- Náhodná udalosť, istá, nemožná a pravdepodobná náhodná udalosť. 1 h
- Relatívna početnosť. Náhodné čísla, tvorba tabuľky náhodných čísel. 1 h
- Simulácia náhodného deja pomocou náhodných čísel, riešenie úloh. 1 h
- Klasická definícia pravdepodobnosti, riešenie úloh. 2 h
- Vlastnosti pravdepodobnosti, riešenie úloh. 2 h
- Geometrická pravdepodobnosť, riešenie úloh. 1 h
- Pravdepodobnostné počítadlo, riešenie úloh. 2 h

- Podmienená pravdepodobnosť, riešenie úloh. 2 h
- Nezávislosť náhodných udalostí, riešenie úloh. 2 h
- Bernoulliho schéma, riešenie úloh. 2 h
- Opakovanie a prehlbovanie učiva. 1 h
- Kontrolná písomná práca. 1 h

Pri prípravách na jednotlivé vyučovacie hodiny boli použité u tém *Náhodný dej*, *Náhodná udalosť* práce [4], [5] A. Płockého a učebnica [1] T. Hechta. U ostatných deviatich tém sa využila kompletne práca [2], ktorá okrem 75 riešených zaujímavých úloh z pravdepodobnosti obsahuje k jednotlivým témam aj príslušnú teóriu vysvetľovanú zrozumiteľným spôsobom i motiváciu zavedenia jednotlivých pojmov. Spomínaný experiment je tiež súčasťou tejto práce. Z pomôcok boli na hodinách využívané mince, hracie kocky, ktoré si priniesli žiaci, ďalej dvadsaťsteny (10 kusov), vrečko s očíslovanými guľkami, Galtonova doska, rôzne schémy (grafy, stromy), tabuľka náhodných čísel. Žiaci mali k dispozícii zbierku úloh, ktorá zostávala z príkladov nachádzajúcich sa v práci [2].

Jednotlivé vyučovacie hodiny mali podobnú štruktúru. Úvod hodiny tvorila motivácia formou zadania problémovej úlohy alebo uvedením krátkeho príbehu zo života. Následne žiaci riešili problém konkrétnym experimentovaním alebo diskusiou o probléme, pričom sami formulovali hypotézy, vyslovovali závery a robili dôkazy. Učiteľ mal len riadiacu a kontrolnú funkciu. Po vybudovaní príslušnej teórie sa riešili úlohy. Riešenia úloh vykonávali opäť žiaci samostatne na tabuľu alebo do zošita s minimálnou pomocou učiteľa. Za samostatné správne riešenia boli jednotlivým žiakom pridelené body. Keďže experiment sa uskutočnil v období zvýšenej intenzity chrípkového ochorenia, bola venovaná časť z úvodu hodiny opakovaniu a krátkemu vysvetleniu učiva z predchádzajúcich hodín žiakom, ktorí chýbali.

Počas výučby pravdepodobnosti bola pozorovaná zvýšená aktivita žiakov jednak pri experimentovaní praktickom či teoretickom pomocou pravdepodobnostného počítadla, jednak pri diskusii o probléme. Tým, že sa vyčlenil priestor na diskusiu, uvoľnila sa atmosféra v triede. Žiaci sa nebáli klásť otázky, povedať svoj názor, i keď nebol správny. Naopak, navzájom sa opravovali, niekedy zachádzali vo svojich úvahách až do extrémov. Riešenie úloh s tematikou z reálneho života vzbudilo u niektorých záujem o využitie pravdepodobnosti pre praktický život.

Celá výučba bola zakončená písomnou kontrolnou prácou, ktorou sme zisťovali úroveň nadobudnutých vedomostí žiakmi. Žiaci na poslednej hodine vyplnili dotazník, ktorým sa zisťoval ich vzťah k pravdepodobnosti. Vzor dotazníka i písomnej práce je uvedený v [2].

## Vedomosti žiakov z pravdepodobnosti

V dôsledku toho, že sa experiment uskutočňoval v období zvýšenej intenzity chrípkového ochorenia, sa výučby zúčastňovalo približne 20 žiakov, pričom žiaci sa neustále plynulo striedali. Napr. tí, čo boli na začiatku výučby pravdepodobnosti, v strede ochoreli a do školy sa vrátili niekoľko hodín pred záverom výučby. Tento stav si vyžadoval, aby učiteľ neustále monitoroval vedomostnú úroveň žiakov na danej hodine a vzniknuté rozdiely vo vedomostiach vyrovnával.

Kontrolnú písomnú prácu písalo celkovo 27 žiakov z 32. Naším cieľom bolo zistiť, koľko percent žiakov po skončení výučby ovláda základné učivo z pravdepodobnosti. V tejto triede je zavedený bodový systém hodnotenia, preto sa pri jednotlivých písomných prácach určuje len spodná hranica počtu bodov, ktoré musí žiak získať, aby mal písomku úspešne napísanú. Uvedená písomná práca pozostávala zo 4 úloh, pričom obsahom prvých troch úloh bolo základné učivo, ktoré by mal ovládať každý žiak po ukončení výučby pravdepodobnosti. Za minimálny počet bodov, ktoré musel žiak dosiahnuť, sa preto vzal súčet bodov týchto troch úloh, ktorý bol 7 bodov. Maximálny počet bodov, ktorý mohli žiaci získať, bol 10 bodov.

Z výsledkov kontrolnej písomnej práce vyplýva, že 81,5 % žiakov ovláda základné učivo z pravdepodobnosti i napriek ich častej absencii na hodinách. Relatívna úspešnosť riešenia žiakov sa pohybovala od 62,5 % do 100 %. Priemerná hodnota relatívnej úspešnosti riešenia žiakov bola 82,8 %. (Tabuľku úspešnosti riešenia kontrolnej písomnej práce spolu s bodovým a percentuálnym vyhodnotením možno nájsť v prílohách práce [2].)

## Vzťah žiakov k pravdepodobnosti

Na zistenie vzťahu žiakov k učivu pravdepodobnosti sa použil už spomínaný dotazník, ktorý vyplnili 29 žiakov z 32. Skúmali sme hlavne:

- Ako žiaci pociťujú význam pravdepodobnosti pre praktický život.
- Ako vnímajú učivo pravdepodobnosti z hľadiska obtiažnosti, zaujímavosti a obľúbenosti.
- Ako sú na tom jednotlivé oblasti pravdepodobnosti z hľadiska obtiažnosti a zaujímavosti.
- Ako hodnotia žiaci priebeh samotných hodín pravdepodobnosti (pozitívne i negatívne stanoviská k priebehu).

U prvých troch oblastí skúmania mali žiaci k dispozícii päťstupňovú škálu. V nasledujúcich odstavcoch si teraz vyhodnotíme jednotlivé oblasti skúmania.

### *Ako žiaci pociťujú význam pravdepodobnosti pre praktický život.*

Vyhodnotenie volieb žiakov je uvedené v tabuľke 1.

**Tabuľka 1**

*Miera využitia pravdepodobnosti v praxi*

<i>využíva</i>	<i>skôr využíva ako nevyužíva</i>	<i>aj využíva aj nevyužíva</i>	<i>skôr nevyužíva ako využíva</i>	<i>nevyužíva</i>
69 %	10 %	14 %	7 %	0 %

Riešením úloh z bežného života sa nám podarilo 69 % žiakov presvedčiť, že sa pravdepodobnosť ako jedna z oblastí matematiky využíva v iných vedných odboroch i v praktickom živote. Zároveň 10 % žiakov si myslí, že sa pravdepodobnosť skôr využíva ako nevyužíva. Pozitívne je, že nik neuviedol poslednú možnosť. Len malé percento žiakov (7 %) si myslí, že sa pravdepodobnosť skôr nevyužíva ako využíva.

### *Ako vnímajú učivo pravdepodobnosti z hľadiska obtiažnosti, zaujímavosti a obľúbenosti.*

Vyhodnotenie tejto oblasti skúmania sa nachádza v tabuľke 2.

**Tabuľka 2** *Učivo pravdepodobnosti z hľadiska obtiažnosti, zaujímavosti a obľúbenosti*

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Obtiažnosť</b>	14 %	34 %	41 %	11 %	0 %
<b>Zaujímavosť</b>	11 %	28 %	34 %	17 %	10 %
<b>Obľúbenosť</b>	3 %	21 %	38 %	28 %	10 %

#### **Vysvetlivky k tabuľke 2 a tabuľke 3:**

1 – ľahké, resp. zaujímavé, resp. obľúbené

2 – skôr ľahké ako ťažké, resp. skôr zaujímavé ako nezaujímavé, resp. skôr obľúbené ako neobľúbené

3 – aj ľahké aj ťažké, resp. aj zaujímavé aj nezaujímavé, resp. aj obľúbené aj neobľúbené

4 – skôr ťažké ako ľahké, resp. skôr nezaujímavé ako zaujímavé, resp. skôr neobľúbené ako obľúbené

5 – ťažké, resp. nezaujímavé, resp. neobľúbené

Čo sa týka obtiažnosti, z uvedenej tabuľky vyplýva, že žiaci nepovažujú učivo z pravdepodobnosti za ťažké, len 11 % z nich si myslí, že je skôr ťažké ako ľahké. Z hľadiska zaujímavosti, 39 % žiakov považuje učivo z pravdepodobnosti za zaujímavé alebo skôr zaujímavé ako nezaujímavé. U obľúbenosti i u zaujímavosti si môžeme všimnúť, že najviac percent (38

%, 34 %) je rozložených práve v strede (aj obľúbené aj neobľúbené, aj zaujímavé aj nezaujímavé).

**Ako sú na tom jednotlivé oblasti pravdepodobnosti z hľadiska obtiažnosti a zaujímavosti.**

Vyhodnotenie tejto oblasti skúmania je uvedené v tabuľke 3.

**Tabuľka 3**      *Jednotlivé oblasti pravdepodobnosti z hľadiska obtiažnosti a zaujímavosti*

	<i>Stupeň obtiažnosti</i>					<i>Miera zaujímavosti</i>				
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<i>Náhodný dej a náhodná udalosť</i>	59 %	24 %	14 %	3 %	0 %	21 %	31 %	17 %	21 %	10 %
<i>Náhodné čísla</i>	55 %	31 %	11 %	3 %	0 %	35 %	35 %	10 %	17 %	3 %
<i>Klasická def. pravdepodobnosti</i>	48 %	21 %	24 %	7 %	0 %	14 %	31 %	21 %	27 %	7 %
<i>Vlastnosti pravdepodobnosti</i>	17 %	42 %	38 %	3 %	0 %	10 %	17 %	42 %	24 %	7 %
<i>Geometrická pravdepodobnosť</i>	21 %	31 %	17 %	28 %	3 %	10 %	28 %	17 %	24 %	21 %
<i>Pravdepodobnostné počítadlo</i>	28 %	21 %	34 %	17 %	0 %	21 %	24 %	24 %	24 %	7 %
<i>Podmienená pravdepodobnosť</i>	14 %	45 %	21 %	20 %	0 %	21 %	31 %	27 %	14 %	7 %
<i>Nezávislosť náhodných udalostí</i>	10 %	38 %	31 %	21 %	0 %	17 %	28 %	24 %	24 %	7 %
<i>Bernoulliho schéma</i>	17 %	24 %	42 %	14 %	3 %	38 %	24 %	17 %	14 %	7 %

Skúmame najprv obtiažnosť. Sčítaním hodnôt uvedených v stĺpcoch 1 a 2 po riadkoch dostaneme pre jednotlivé oblasti pravdepodobnosti počet percent žiakov, ktorý považujú danú oblasť za skôr ľahkú ako ťažkú alebo ľahkú. Podobne sčítaním stĺpcov 4 a 5 dostaneme počet percent žiakov, ktorý považujú danú oblasť pravdepodobnosti za skôr ťažkú ako ľahkú alebo ťažkú. Z tabuľky potom vyplýva, že medzi prvé 3 ľahké alebo skôr ľahké ako ťažké oblasti pravdepodobnosti patria *Náhodné čísla*, *Náhodný dej a náhodná udalosť*, *Klasická definícia pravdepodobnosti* so získanými percentami 86 %, 83 %, 69 % (poradie percent je zhodné s poradím oblastí). Naproti tomu žiakom najväčšie problémy robila *Geometrická pravdepodobnosť* (31 % žiakov ju považuje za ťažkú alebo skôr ťažkú ako ľahkú oblasť). Je to dôsledok toho, že jej bola venovaná len 1 vyučovacia hodina. Z časových dôvodov sa tiež nerealizovala z práce [2] metóda Monte Carlo, ktorá sa okrem iného používa na odhad obsahu útvaru, ktorý sa nachádza v jednotkovom štvorci. Táto metóda je založená práve na princípe odhadu geometrickej pravdepodobnosti, čo by mohlo prispieť k lepšej motivácii žiakov.

Ak podobne ako u obtiažnosti aj u hľadiska zaujímavosti sčítame hodnoty počtu percent žiakov v stĺpcoch 1 a 2 tabuľky 3 po riadkoch, dostaneme počet percent žiakov, ktorý považujú danú oblasť pravdepodobnosti za skôr zaujímavú ako nezaujímavú alebo zaujímavú. Jednotlivé oblasti pravdepodobnosti možno potom zoradiť do nasledujúcej konečnej postupnosti: *Náhodné čísla* (70 %), *Bernoulliho schéma* (62 %), *Podmienená pravdepodobnosť* (52 %), *Náhodný dej a náhodná udalosť* (52 %), *Pravdepodobnostné počítadlo* (45 %), *Klasická definícia pravdepodobnosti* (45 %), *Nezávislosť náhodných udalostí* (45 %), *Geometrická pravdepodobnosť* (38 %), *Vlastnosti pravdepodobnosti* (27 %). Teda najzaujímavejšími témami sú pre žiakov *Náhodné čísla* a *Bernoulliho schéma*.

**Ako hodnotia žiaci priebeh samotných hodín pravdepodobnosti (pozitívne i negatívne stanoviská k priebehu).**

Žiaci sa mohli vyjadriť i k samotným hodinám pravdepodobnosti. Na hodinách sa im páčili praktické i teoretické experimenty, z nich najviac hod dvadsaťstennou „kockou“, Galtonova doska, počítanie hrozienuk, pravdepodobnostné počítadlo. Väčšine žiakov vyhovoval priebeh hodiny, uvoľnenosť. Jedna žiačka napísala: „Zistila som, ako môžem využiť pravdepodobnosť. Mala som možnosť zistiť niečo nové z matematiky. Taktiež sa mi páčili pokusy.“, iný žiak píše: „Dokázali sme pomocou pravdepodobnosti predvídať udalosť zo skutočného života.“. Z druhého argumentu vidieť, že žiaci pochopili hlavný význam tejto oblasti matematiky. Čo sa týka negatívnych ohlasov, zaujímavý je postreh jednej žiačky, citujem: „Bohužiaľ, ja dávam prednosť niečomu, čo je presne dané. A keďže pravdepodobnosť je

*založená na náhodných udalostiach, je to zaujímavé, ale nevidím v tom veľký význam. Aj keď sa to využíva. Inak ostatné bolo fajn.*“. Tento postreh vysvetľuje, prečo u obľúbenosti a zaujímavosti učiva je najviac percent rozložených práve v strede. Naozaj väčšina ľudí dáva prednosť jednoznačným riešeniam a nemá rada neistotu.

Celkovo možno vysloviť záver, že uvedený experiment priniesol pozitívne výsledky vo vyučovaní pravdepodobnosti. Bolo by vhodné, keby sa takéto alebo podobné vyučovanie pravdepodobnosti zaujímavou formou uskutočnilo i v iných triedach. Ako sme sa mohli presvedčiť, vyučovanie pravdepodobnosti možno uskutočniť i v nižších ročníkoch. Je potrebné, aby žiaci mali za sebou základy kombinatoriky a základy teórie množín. Zložitejšie výpočtové postupy môžeme výhodne obísť pomocou pravdepodobnostného počítadla. Osobitne by som poukázala na jeho výhody. Okrem jednoduchosti výpočtu pravdepodobnosti náhodných udalostí umožňuje znázorniť i vzťahy medzi náhodnými udalosťami. Práca s počítadlom pripomína hru, čím je motivácia žiakov k aktivite väčšia. Môže byť teda vhodným motivačným prostriedkom pre učiteľa. Problematika pravdepodobnostného počítadla bola publikovaná v [3].

#### *Literatúra :*

1. Hecht, T. a kol.: *Pravdepodobnosť a Štatistika*. Alternatívna učebnica pre 4. ročník gymnázií a SOŠ. 1. vyd. Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, 2001.
2. Lendelová, K.: *Aplikácia pravdepodobnosti v školskej praxi*. [Diplomová práca]. Banská Bystrica : FPV UMB, 2003.
3. Lendelová, K.: Pravdepodobnostné počítadlo. In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, roč. 32, 2003, č. 1, s. 1-11.
4. Płocki, A.: *Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli [Počet pravdepodobnosti pre učiteľov]*. Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1981.
5. Płocki, A.: *Rachunek prawdopodobieństwa dla szkoły średniej [Počet pravdepodobnosti pre stredné školy]*. 1. vyd. Warszawa : Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981.

Adresa autora: Mgr. Katarína Lendelová, Gerlachovská 10, 010 08 Žilina,  
e-mail: lendelovak@orangemail.sk