Použitie histórie matematiky vo vyučovaní mat. analýzy

Ladislav Kvasz

ABSTRACT: *The aim of the paper is to compare the historical development of the calculus with the way it is taught at universities. On the example of the notion of integral we illustrate the conceptual changes, which calculus underwent in history.*

1. ÚVOD

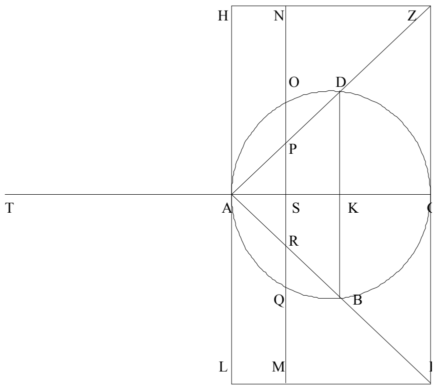
Matematická analýza patrí medzi predmety spôsobujúce študentom prvého ročníka univerzitného štúdia nemalé problémy predovšetkým kvôli ε-δ prístupu. Ako je známe, ε-δ prístup vypracoval Weierstrass v druhej polovici 19. storočia a predstavuje vrchol vývinu, ktorý trval viaceré storočia. V rámci tohto vývinu sa intuitívne názorné a ľahko zrozumiteľné pojmy nahradili pojmami menej názornými a ťažšie zrozumiteľnými. Weierstrassova ε-δ analýza je značne vzdialená od názorných predstáv Newtona a Leibniza, ktorými sa dejiny matematickej analýzy začali. Preto mnohí študenti nedokážu preložiť do vlastného jazyka to, čo počujú na prednáškach. Stredná škola končí na úrovni matematiky polovice 17. storočia (polynómy, súradná sústava, jednoduché funkcie), kým univerzita začína jazykom druhej polovice 19. storočia. Tak sa dvesto rokov dostalo mimo učebných osnov. Kým však pre algebru a geometriu predstavovala táto doba obdobie stagnácie, pre matematickú analýzu to bolo obdobie búrlivého rozvoja, počas ktorého sa vystriedalo niekoľko prístupov k pojmu funkcie, derivácie a integrálu. O týchto zmenách sa študent počas štúdia nemá ako dozvedieť, keďže stredná škola končí pred nimi a univerzita začína ε-δ analýzou, teda prístupom, ktorý je zavŕšením tohto vývoja. Práve táto dvestoročná medzera v osnovách robí matematickú analýzu tak ťažko zrozumiteľnou.

Dejiny matematiky môžu obohatiť vyučovanie o alternatívne pojatia matematickej analýzy. Ide o to, aby prednášajúci nevnímal ε-δ analýzu ako jedinú správnu a aby odchýlky od nej nehodnotil ako chyby. História umožňuje chápať ε-δ analýzu ako výsledok procesu postupného upresňovania základov. Dejiny matematiky ponúkajú most, po ktorom môže študent prejsť ponad priepasť oddeľujúcu intuitívne predstavy, vytvorené na strednej škole, od univerzitného kurzu.

2. ZÁKLADNÉ ETAPY VO VÝVINE POJMU INTEGRÁL

Pojem integrálu vyrástol z techník na počítanie kvadratúr a kubatúr, ako sa označovali úlohy na výpočet obsahov a objemov geometrických útvarov. Ukážeme si jednu z nich, Archimedovu metódu páky.

2. 1 Archimedova metóda páky



Archimedes tvrdí, že ***valec opísaný guli má 3/2 krát väčší objem ako táto guľa***. Predstavme si guľu vzniknutú rotáciou polkruhu ABG okolo priemeru AG, kužeľ vzniknutý rotáciou rovnoramenného pravouhlého trojuholníka AGE okolo odvesny AG, a valec vzniknutý rotáciou štvorca AGEL okolo strany AG. Z toho, že AG = GE, vyplýva:

$$(SP^2 + SO^2) = (SA^2 + SO^2) = AO^2 = AS.AG$$
$$(SP^2 + SO^2).AG = AS.AG^2 = AS.SN^2$$
$$\mathbf{(SP^2 + SO^2).AT = AS.SN^2} \qquad \mathbf{(1)}$$

Uvažujme TG ako páku podopretú v bode A. Vzťah (1) hovorí, že ak do bodu T zavesíme kruhy s priemermi PR a OQ, tak tieto kruhy vyvážia kruh s priemerom MN zavesený v bode S. Keďže valec EZHL pozostáva z takýchto kruhov, umiestnený na svojom mieste vyváži kužeľ a guľu spoločne zavesené v bode T. Keďže ťažisko valca je K, objem valca má rovnaký pomer k súčtu objemu kužeľa a gule ako AT k AK, teda 2:1. Preto guľa plus kužeľ tvoria polovicu valca. Kužeľ má však 1/3 objemu valca, preto guľa tvorí 1/6 objemu valca LEZH alebo 2/3 valca s polovičným priemerom základne, čo je valec opísaný guli.

Predstava telies ako zložených z tenkých plôšok a výpočet objemu skladaním týchto plôšok je blízka predstave integrálu $\int f(x)dx$ ako sumy tvorenej nekonečným počtom zložiek $f(x).dx$. Preto možno Archimedovu metódu páky považovať za predchodcu pojmu integrálu. Pritom je dôležité uvedomiť si jej niekoľko nedostatkov:

1. ***Archimedes nemá pojem funkcie***, preto objekty, ktorých objem počíta, sú zadané geometricky, a nie ako graf funkcie $f(x)$.

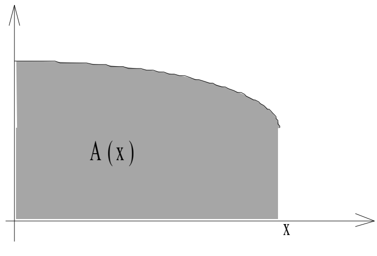
2. ***Archimedova metóda nie je analytická***, každá kvadratúra sa zakladá na zvláštnom triku, ktorý je pri iných úlohách nepoužiteľný, takže každú úlohu treba riešiť samostatne.

3. ***Archimedes nemá pojem diferenciálu dx*** a úlohu diferenciálnej formy, ktorá umožňuje sumáciu, hrá mechanická predstava páky. Páka umožňuje rezy telesa udržať v rozostupoch, a tak vygenerovať objem.

Vznik algebraickej symboliky a zrod analytickej geometrie umožnili prejsť od kvadratúr útvarov definovaných geometricky ku kvadratúram útvarov ohraničených grafmi funkcií. To umožnilo vznik analytických metód, pri ktorých z integrálu jednej funkcie dostávame integrály ďalšie a nemusíme, ako Archimedes, pri každom výpočte začínať od začiatku.

2. 2 Newtonova redukcia kvadratúr na hľadanie primitívnej funkcie

Newton roku 1666 objavil ideu ***počítať obsahy pod krivkou pomocou primitívnej funkcie***. Techniky kvadratúr sa zakladali na výpočte obsahov pomocou sumácie geometrických elementov. Newton sa na celú vec pozrel dynamicky: Vytvorme funkciu $A(x)$, udávajúcu obsah plochy pod krivkou $y = f(x)$. Predstavme si, že plocha nateká, ako sa bod x pohybuje smerom doprava. Ako rýchlo pribúda plocha pod krivkou?



Nie je ťažké nahliadnuť, že ***rýchlosť pribúdania plochy je daná hodnotou f (x_0)***. Inými slovami, rýchlosť narastania plochy pod krivkou, teda derivácia funkcie $A(x)$ v bode x_0, sa rovná práve f (x_0). Ak chceme nájsť plochu pod krivkou $f(x)$, stačí nájsť funkciu $A(x)$, ktorú keď zderivujeme, dostaneme funkciu $f(x)$. Tento je objav má veľký význam, lebo ***redukuje problém kvadratúr na problém hľadania primitívnej funkcie***. Už sa nemusíme trápiť rezaním útvaru na tenké pásiky a ich dômyselnou sumáciou. Stačí nájsť k funkcii $f(x)$, ktorá ohraničuje príslušný útvar, jej primitívnu funkciu.

Roku 1671 Newton napísal dielo ***Metóda fluxií a nekonečných radov s ich aplikáciou na geometriu kriviek***, kde objasňuje pojem fluxie: „*Čas považujem za tečúci alebo narastajúci spojitým tokom a ostatné veličiny považujem za spojite narastajúce s časom. Z toku času (fluxion of time) dávam meno fluxia rýchlostiam, s ktorými narastajú ostatné veličiny. Čas vyjadrujem pomocou ľubovoľnej veličiny, ktorá rovnomerne tečie, a jej fluxiu označujem jednotkou. Fluxie ostatných veličín vyjadrujem ľubovoľným iným vhodným symbolom.*“

2. 3 Leibnizovo pojatie integrovania ako formálneho kalkulu

U Newtona ešte diferenciály premenných nie sú vyjadrené, a tok času vlastne nahrádza diferenciálnu formu. Leibniz objavil diferenciálny a integrálny počet nezávisle od Newtona a vytvoril symboliku, v ktorej je ***diferenciál dx explicitne vyjadrený***. Leibniz zaviedol aj pojem funkcie. Funkciu chápal ako výraz skonštruovaný z konštánt a premenných. To umožnilo problém integrovania ***premeniť na formálny kalkul***.

Takto vstúpil pojem integrálu do 18. storočia. Matematikovi 18. storočia by pripadalo ako absurdné definovať neurčitý integrál pomocou určitého, ako sa to robí dnes. Celý trik matematickej analýzy spočíva predsa v tom, že sa určitý integrál nahradí neurčitým, že namiesto sumácie elementov plochy hľadáme primitívnu funkciu. Integrovanie je formálny kalkul, ktorý môžeme použiť na výpočet plochy pod krivkou.

2. 4 Cauchyho návrat k určitému integrálu

V ***Institutiones calculi differentialis*** z roku 1755 zavádza Euler omnoho všeobecnejší pojem funkcie: „*Ak určité veličiny závisia od iných veličín takým spôsobom, že ak posledné sú zmenené, aj prvé podľahnú zmene, tak prvé veličiny sa nazývajú funkciami posledných. Toto vymedzenie zahŕňa každý spôsob, pomocou ktorého jedna veličina môže byť určená inými.*“ Vidíme tu hlbokú zmenu. Funkcia už nie je výraz vytvorený z premenných a konštánt, ale ľubovoľná závislosť medzi veličinami. Túto zmenu vyvolala Eulerova diskusiu s d’Alembertom, týkajúca sa opisu kmitajúcej struny.

Rovnica kmitania struny je prvou parciálnou diferenciálnou rovnicou v dejinách matematickej fyziky. Opisuje čo sa deje so strunou pri kmitaní. Roku 1747 d’Alembert objavil *bežiace vlny*. Ak v „***ľubovoľnej funkcii***“ $f(x)$ nahradíme jej argument x veličinou $x - vt$, dostaneme riešenie rovnice kmitania struny v tvare $f(x - vt)$, ktoré opisuje pohyb grafu funkcie $f(x)$ rýchlosťou v doprava po strune. D'Alembert pritom „*ľubovoľnú funkciu*" chápal ako ľubovoľný analytický výraz, teda v duchu Leibnizovej definície. Euler si uvedomil, že príroda sa nemusí starať o analytické výrazy. Strune môžem rukou dať akýkoľvek tvar, nezávisle od toho, či sa tento tvar dá analyticky vyjadriť. D'Alembertov objav spočíva v tom, že keď takúto deformáciu struny pustím, táto si zachová tvar a bude sa po strune posúvať ako celok. Euler bol presvedčený o tom, že táto vlastnosť riešenia sa zachováva aj vtedy, keď tvar struny nie je zadaný analyticky. D'Alembert namietal, že funkcia, ktorá nie je vyjadrená analyticky, sa nedá dosadiť do diferenciálnej rovnice, takže nemožno zistiť, čo sa s ňou bude diať. Diskusia zostala nerozhodnutá, ale matematici tu narazili na hranice chápania funkcie ako analytického výrazu.

Postupne sa vynáralo stále viac motívov na opustenie chápania funkcie ako analytického výrazu. Roku 1821 vydal Cauchy učebnicu *Cours d'analyse*, ktorá sa stala medzníkom v dejinách matematickej analýzy. Cauchy priniesol nové chápanie, ktoré funkciu nestotožňuje s jej formálnym vyjadrením. Okrem toho píše: „*V integrálnom počte som považoval za nevyhnutné dokázať existenciu integrálov či primitívnych funkcií ešte predtým, než som začal skúmať ich vlastnosti. Na dosiahnutie tohto cieľa bolo nevyhnutné najprv zaviesť pojem integrálu medzi dvomi hranicami alebo určitého integrálu.* Cauchy tak ***vytvoril pojem integrálu nezávislého od symbolických manipulácií***:

Uvažuje ***spojitú funkciu*** $f(x)$ na intervale (x_0, X), interval rozdelil na n častí pomocou bodov $x_1, x_2, ..., x_n = X$ a k tomuto deleniu priradil sumu

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).(x_i - x_{i-1})$$

Integrál $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ definuje ako limitu tejto sumy, keď sa dĺžka intervalov $x_i - x_{i-1}$ blíži k nule. Potom dokazuje existencie tejto limity vychádzajúc z ***predpokladu*** spojitosti funkcie $f(x)$ na intervale (x_0, X).

Cauchy vytvoril teóriu integrálu ***pre spojité funkcie na uzavretom intervale***. Jeho teóriu bolo možné rozšíriť na funkcie po častiach spojité, čo boli najvšeobecnejšie funkcie používané matematikmi tej doby.

2. 5 Fourierove rady a Riemannov integrál

Roku 1822 vyšla Fourierova kniha ***Théorie analitique de la***

chaleur, obsahujúca rad nových ideí. Fourier našiel formuly pre koeficienty v rozvoji funkcie $f(x)$ do trigonometrického radu. Ak je

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$$

tak Fourierove formule hovoria, že

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos(kx)dx \qquad\qquad B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\sin(kx)dx$$

Keď matematici začali rozpracovávať teóriu Fourierových radov, uvedené integrály chápali v Cauchyho duchu. To znamená, že funkcie, ktoré dokázali rozložiť do Fourierovho radu, síce nemuseli byť analyticky vyjadriteľné, no museli byť po častiach spojité. Riemann si uvedomil, že jediným dôvodom prečo sa požaduje spojitosť funkcie, je zaručenie existencie integrálov, ktoré zadávajú koeficienty Fourierovho radu. Aby bolo možné rozložiť do Furierovho radu aj funkcie, ktoré nie sú po častiach spojité, bolo treba zovšeobecniť pojem integrálu. ***Riemann vynechal požiadavku spojitosti***, ktorou Cauchy začínal svoju definíciu. Namiesto toho Riemann vytvoril priamo integrálny súčet

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}).(x_i - x_{i-1})$$

bez toho, aby o funkcii čokoľvek vopred predpokladal. V prípade, že táto suma má limitu, nazval ju integrálom. Teda nezabezpečil existenciu limity postupnosti čiastočných súčtov vopred, pomocou podmienky spojitosti, ako Cauchy, ale práve naopak, z ***existencie limity urobil podmienku***.

Adresa autora: Ladislav Kvasz, Katedra humanistiky FMFI-UK
Mlynská dolina, 84248 Bratislava

Poďakovanie: Tento príspevok vznikol na KH-FMFI-UK
ako súčasť grantového projektu číslo 1/0223/03.