

# Strategie komplementu a mechanismus jejího vynoření<sup>1</sup>

Jana Kratochvílová

ABSTRACT: A set  $A$  is decomposed into two disjoint subsets  $B, C$ . The task is to find the cardinality of these sets. The cardinality of  $A$  and  $B$  is visible, the cardinality of  $C$  is hidden. If a solver finds card  $C$  as card  $A - \text{card } B$ , the corresponding solving strategy is called a strategy of complement. Several experiments focusing on this strategy and their analyses are given. Methodology of atomic analysis is illustrated and described.

## 1. ÚVOD

Dominantním prvkem nestandardních řešitelských procesů je strategie – způsob, jímž řešitel uchopuje problémovou situaci, řadí jednotlivé objekty a vztahy a organizuje je do struktury, která mu umožní najít řešení [5]. Zvláštní pozornost výzkumu v této souvislosti je věnována problémovým situacím, u nichž řešitelé používají dvě nebo více strategií.

Otázka, která zde jasně vystoupí, zní: Proč řešitel A použil strategii U a řešitel B strategii V pro vyřešení stejné úlohy? Výzkumy [1] ukazují, že významným faktorem při volbě strategie hraje intelektuální energie. Obecně lze říct, že běžné standardní strategie vyžadují více času a spotřebují více energie než řešitelské strategie využívající „triku“. U těchto ale právě objev daného triku je zcela rozhodující. Jedním z takových triků použitelným v různých oblastech matematiky je idea komplementu (v množinovém pojetí) [6]. Schopnost žáka použít tuto ideu je zkoumána v různých matematických kontextech u žáků 10-11letých.

## 2. METODA

---

<sup>1</sup> Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/01/P090.

Východiskem kvalitativního výzkumu jsou řešitelské procesy 44 žáků. Jeho nástrojem je série úloh doplněna otázkami experimentátora. Reakce žáka je evidována i magnetofonovým záznamem a průběžnými poznámkami experimentátora.

Získaný experimentální materiál byl podroben atomární analýze [7; 4, s.101] a myšlenkové procesy žáka byly modelovány pomocí teorie proceptu [1] a teorie poznávacího mechanismu [3, s. 98-114].

### 3. EXPERIMENT

Experiment byl proveden individuálně s pěti žáky čtvrtého ročníku v klidném prostředí školní družiny v květnu 2003 a s devíti žáky ve věku 10-11 let v neklidném prostředí jedné školy v Anglii v červnu 2003.

Žákům byly zadány celkem čtyři úlohy, z nichž uvedeme pouze první (skládající se z pěti dílčích úloh Ú0-4, viz obr. 1), jelikož idea komplementu se nejpatrněji projevila v žakovských řešení právě této úlohy.

**Obr. 1** Ú0

O	O	O
X	X	O
X	X	O

Ú1

X	X	X
X	O	O
O	X	X
O	X	X

Ú4

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	0	X	X	X
X	X	0	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	0	0	X
X	X	X	X	X	X

Ú2

O	O	X
O	O	X
O	O	O
X	O	O

Ú3

O	O	O	O	O
O	O	O	X	O
O	X	O	O	O
O	O	O	O	O

všech  
křížků  
=

Pod každou z úloh 0-3:  
všech koleček =

všech okének =

X
O

 =

všech okének =

**Libor (10 let) - protokol**

Po klimatickém rozhovoru řeší Libor pod vedením experimentátorky vzorovou úlohu. Pak mu experimentátorka předkládá další úlohu k samostatnému řešení.

### **Úloha 1**

L6: *čtyři, osm, ne, jo, osm a čtyři je dvanáct* (pro sebe potichu). Zapisuje 8, 4, 12.

E11: *Jak jsi to spočítal tak rychle?*

L7: *No, že jsou tady čtyři, čtyři, čtyři ...*

E12: *Ukaž!*

L8: *No, tady, že jsou čtyři, tady čtyři, to je osm.* Ukazuje horní čtyři křížky a dolní čtyři křížky. *Tady jsem viděl taky čtyři, tak jsem si řekl dvanáct.* Ukazuje na kolečka.

E13: *Jo, výborně. Musím si to napsat. Podepiš se mi tam.*

Pauza 10 s.

### **Úloha 2**

L10: *Takže tři, šest, devět, dvanáct* (pro sebe potichu, počítá po řádcích, důraz na slově „dvanáct“). Zapisuje 12. *Takže devět, zapisuje 9 ke křížkům, teda kecám, tři, přepisuje 9 na 3, tu obtahuje, devět, zapisuje 9 ke kolečkům, a tady je dvanáct, to je celkem* (mluví potichu).

E16: *Tak jak jsi to spočítal teď?*

L11: *No, teď jsem si chtěl označit nejdřív ty křížky, ale pak jsem si nejdřív spočítal 3, 6, 9, 12!*

E17: *Aha!*

L12: *a mínus tři devět, no a tohle je to dvanáct.* E. si píše poznámky.

Pauza 10 s.

### **Úloha 3**

L13: *Čtyři, osm, dvanáct, šestnáct, dvacet a dva křížky, dva, osmnáct a dvacet.* Počítá po sloupcích.

E20: *Tak jak jsi to spočítal?*

L14: *Nejdřív zase dohromady, pak mínus dva.*

E21: *Jak jsi to dohromady spočítal?*

L15: *To dvacet jsem si pamatoval a pak jsem to normálně počítal, čtyři, osm, dvanáct, šestnáct, dvacet...* E. si píše poznámky.

Pauza 3 s.

### **Úloha 4**

L19: *Raz, dva, tři, čtyři, pět, šest,* ukazuje na okénka v řádku, *raz, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět,* ukazuje na okénka ve sloupci, *šestkrát devět je padesát čtyři, takže padesát čtyři, mínus čtyři je padesát, čtyři, a padesát čtyři.* Zapisuje 54, 50, 4. E. si píše poznámky.

## **Ilustrace atomární analýzy, její cíl a smysl**

První dvě slova ve vstupu L6 jsou *čtyři, osm*. Když se podíváme na vstupy L7 a L8, víme, že slovem *čtyři* Libor, rozuměl počet křížků v horní části obdélníku a slovem *osm* počet všech křížků. Ptáme se, zda v hochově hlavě proběhly i některé další myšlenkové kroky, které nebyly artikulovány. Jsme přesvědčeni, že takových kroků bylo poměrně hodně. Hypoteticky můžeme říci, že Libor percepoval množinu všech křížků, pak množinu všech koleček, uvědomil si, že křížky jsou seskupeny do dvou částí, že v horní části tvoří otočené písmeno L, v dolní části tvoří čtverec, že počet křížků horní části je čtyři a počet křížků dolní části je také čtyři a že čtyři a čtyři je osm.

O sérii myšlenkových kroků, které jsme nahoře uvedli, nemáme žádné přímé důkazy a je velice pravděpodobné, že skutečnost neprobíhala přesně tak, jak ji popisujeme. Nicméně některé kroky, které jsme uvedli, určitě proběhly. Libor si určitě uvědomil, že křížky jsou rozloženy do dvou skupin, že každá z nich má čtyři prvky a že čtyři a čtyři je osm. Další kroky, které jsme zde hypoteticky uvedli, naznačují bohatost myšlenkových procesů, které proběhnou ve velice krátké době. O tom, že takový řešitelský proces je velice složitý, nás přesvědčí série chybných řešení, které získáme od žáků např. druhého ročníku. Dejme tomu, že by Liborova odpověď zněla *tři, sedm*, pak by jeho úvaha byla chybná a našim úkolem by bylo hledat lokalitu chyby, to místo, kde k chybě došlo. Mohli bychom se domnívat, že špatně odhadl počet křížků v horní části toho obdélníku nebo že jeden křížek neviděl nebo že chtěl křížky počítat po řádcích a v okamžiku kdy vyslovil počet křížků horního řádku, změnil strategii na počítání po skupinách (horní skupina a dolní skupina) a neuvědomil si, že číslo tři nevyjadřuje počet všech křížků horní skupiny. Současně bychom ale viděli že počet křížků dolní skupiny určil dobře a stejně dobře i součet tři plus čtyři je sedm.

To, co bylo řečeno, ukazuje na cíl a smysl atomární analýzy. Jejím cílem je co nejkompaktnější poznání všech myšlenkových kroků, které proběhly při řešitelském procesu žáka. Smyslem této práce z hlediska výzkumu je poznávání řešitelských mechanismů žáků. Smyslem z hlediska učitele je zvýšení efektivity práce jak při hodnocení žáka, tak při orientaci jeho rozvoje. Naše zkušenost ukazuje, že učitel, který opakovaně metodou atomární analýzy zkoumal myšlenkové procesy žáků, výrazně zvyšuje schopnost empatie, přesněji přistupuje k hodnocení práce žáka a přesněji dokáže vést ho k poznání příčin chyb, jichž se dopustil.

Když předmětem analýzy není jediný řešitelský proces, ale celá série řešitelských procesů téže úlohy, je přirozené hledat jednotný rámec, uvnitř kterého by bylo možné všechna řešení evidovat, vzájemně porovnat a hodnotit. Tímto rámcem je:

1. seznam fenoménů - těch myšlenkových jednotek, na které při zkoumání žákova řešení máme zaměřit naši pozornost.
2. soubor kognitivních mechanismů, které takový proces řídí.

Hrubě lze říci, že fenomény jsou elementy, na něž proces rozkládáme, a mechanismus popisuje, jak tyto elementy časově po sobě následují a kauzálně na sebe navazují.

### **Analýza – úloha 1**

První dvě slova ze vstupu L6 byla nahoře analyzována. Zbytek textu rozdělíme do dvou částí, nejprve podrobíme analýze posledních pět slov *osm a čtyři je dvanáct* a pak prostřední dvě slova *ne, jo*.

Číslo *osm* nepochybně představuje ve vědomí Libora osm křížků a navazuje na předchozí *osm*, od něhož je dělí skok *ne, jo*. Další *a čtyři* vyjadřuje počet koleček (možné fenomény: jsou uspořádány ve dvou párech, ohraničují dolní čtveřici, jeden pár je ve svislé, druhý ve vodorovné poloze,  $2+2=4$ ). Závěrečné *dvanáct* vzniká jako součet  $8+4$ . Další vstupy hoča tyto teze potvrzují.

Nejnáročnější je analýza slov *ne, jo*. K pochopení jejich interpretace nutno uvažovat o řešitelské strategii hoča, kterou formulujeme v jazyku vnitřní řeči [4, s.79-95, s. 126]. Hned po uchopení úlohy Libor určil strategii „Zjistím křížky nahoře, křížky dole, kolečka ...“. Tu začal realizovat. Zjistil, že křížků je osm a zapochyboval o efektivitě použité strategie, protože uviděl strategii jinou. Proto řekl *ne*. Význam slova byl „Ne, toto není nejlepší způsob, existuje způsob lepší: Spočtu celek, pak kolečka a z toho zjistím křížky.“ Objev strategie komplementu byla potvrzena u řešení úlohy 2 (vstupy L11, L12), u úlohy 3 (vstup L15) a u úlohy 4 (vstup L19). Vidíme tedy, že zdánlivě negativní slovíčko *ne* nám umožnilo odhalit důležitý intelektuální výkon Libora - uvědomění si existence strategie komplementu. Dokonce více - našli jsme (aspoň hypoteticky) i jeden mechanismus tohoto objevu.

### **Mechanismus vynoření se strategie komplementu**

Řešitel postupuje strategií, která není strategií komplementu. V průběhu tohoto procesu se v jeho mysli najednou mobilizuje schéma skládající se ze tří prvků, jednoho vztahu, jednoho poznatku a jednoho hodnocení. Prvky jsou: počet křížků, počet koleček, počet okének, vztahem je identita: křížky plus kolečka se rovná okénka. Poznání je, že

kterákoliv dvě z těchto tří čísel dávají možnost zjistit číslo třetí. Hodnocení je, že jedno z těch čísel se hledá hůř než zbylá dvě. Tento koncept je v mysli žáka procesualizován do strategie komplementu: zjistím „lehká“ čísla a dopočítám číslo „náročné“.

Libor po objevení nové strategie nepřistupuje hned k její realizaci, rozhodne se hodnotit, která z cest je v daném okamžiku rychlejší. Tato jeho myšlenka svědčí o poměrně vyspělé metakognici, která zřejmě permanentně sleduje kognitivní záměry a hodnotí je. Hodnocení dopadá jednoznačně ve prospěch strategie původní, protože úloha je už skoro vyřešena. Myšlenka strategie komplementu je ale uložena do strukturální paměti žáka a bude v dalším použita. Uvědomme si, že vše toto proběhlo v průběhu jedné vteřiny, a navenek bylo projevono jediným slovíčkem *jo*.

#### 4. ZÁVĚR

Cílem článku kromě studie strategie komplementu byla i ilustrace metody, kterou v pražském semináři analyzujeme kognitivní procesy.

##### *Literatura:*

- [1] Gardner, H. (1999). Dimenze myšlení: Teorie rozmanitých inteligencí. Portál, Praha.
- [2] Gray, E. M. – Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 2, pp. 116-141.
- [3] Hejný, M. – Kuřina, F. (2001). Dítě, škola, matematika. Portál, Praha.
- [4] Hejný, M. - Michalcová, A. (2001). Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Metodické centrum v Bratislavě, Bratislava.
- [5] Hejný, M. (2003). Anatomia slovnej úlohy. Príspevek v tomto zborníku Matematika v škole dnes a zajtra.
- [6] Kratochvílová, J. (2003). Myšlenka komplementu ve vyučování matematiky. In Sborník z konference Od činnosti k poznatku, Ed. J. Coufalová, Srní, 24.-26.dubna, 2003, s.107-110.
- [7] Stehlíková, N. (2000). Atomární analýza. Apendix ke knížce: Novotná, J. Analýza řešení slovních úloh. Karolinum, Praha.

Adresa autora: J. Kratochvílová, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, M.D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1, Česká republika, e-mail: [jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz](mailto:jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz)