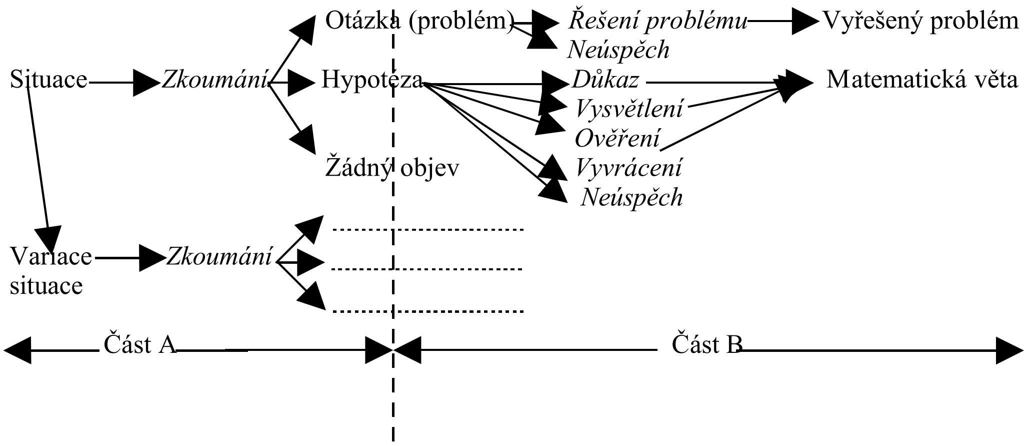
# UKÁZKY HEURISTICKÝCH STRATEGIÍ

Jan Kopka

ABSTRACT: This paper shows how to solve problems with the help of different heuristic strategie. In this way is presented here several basic strategie.

Matematické teorie mají v období svého vzniku charakter experimentálně induktivní a teprve ve chvíli svého „konečného“ zpracování nabývají charakter ryze deduktivní. Pokud chceme se žáky matematiku ve škole na jejich úrovni skutečně dělat, pak bychom měli alespoň trochu respektovat to, jak matematické teorie vznikají, jak se rozvíjejí a jak nakonec získávají deduktivní charakter. Výzkumný přístup k výuce matematiky k tomuto může podstatně přispět. Vlastní zkoumání (v širším slova smyslu) je schematicky znázorněno na následujícím schématu:




Mnoho učebnic a také mnoho hodin školské matematiky obsahuje pouze část B výše uvedeného schématu. V praxi se to projevuje tak, že věty, definice i problémy „padají z nebe“. V superčisté formě se tento přístup projevuje v mnohých vysokoškolských přednáškách, ale především ve většině odborných matematických knih. Tam se dokonce hypotéza nazývá větou ještě před tím, než se provede její důkaz. Pokud by před část B (kde je to vhodné) byla zařazena část A, dospějeme k větám a problémům přirozenou cestou. Žáci pak do problematiky vidí a navíc objevené problémy a hypotézy mohou považovat za své. Jsme přesvědčeni o tom, že by se matematika na prvním stupni měla odehrávat v části A a pokud jsou k tomu vhodné příležitosti, měly by se podnikat „výlety“ do části B. Později se školská matematika posunuje doprava. A tak se nakonec vysokoškolská matematika většinou odehrává v části B. Na vhodných místech by se však měly podnikat výlety do části A (především při výchově budoucích učitelů matematiky).

Původně jsme si mysleli, že metoda zkoumání je možná až na druhém a především třetím stupni škol a samozřejmě i na školách vysokých. Dnes, po experimentech na školách, jsme přesvědčeni, že tato metoda je dobře použitelná i na prvním stupni, a že se pomocí ní dá pracovat dokonce i s mentálně retardovanými žáky. Žáci a studenti jsou při jejím použití maximálně aktivní a obvykle získají vhled do zkoumané problematiky. Při zkoumání i při následném řešení problémů či dokazování hypotéz žáci provádějí řadu činností charakteristických pro profesionální matematiky.

Po tomto krátkém úvodu věnovaném zkoumání přistupme k vlastnímu tématu (viz název článku). Velmi bychom se přimlouvali za to, aby čtenář chápal školskou matematiku spíše jako **výuku matematických činností** než jako seznamování studentů s matematickými teoriemi[1]. Činnosti charakteristické pro tvůrčí práci matematiků a v mnoha případech i přírodovědců nazveme **heuristické strategie**. Jsou to úvahy, které nezaručují, že získané řešení je opravdu správné. Proto po objevu tohoto řešení musíme obvykle ukázat, že výsledek skutečně správný je. Přesné matematické úvahy zdůvodňující správnost nalezených řešení obvykle následují a jsou ryze deduktivní povahy.

Vypišme několik těchto strategií. Zvláště užitečné jsou např.: přeformulování, analogie, zobecnění, specializace, cesta nazpět, systematické experimentování, hledání vzorce, znázornění, konkretizace[2]. Pro matematické myšlení je pravděpodobně nejzákladnější zobecňování a konkretizace. O zobecňování se v literatuře píše poměrně dosti, o konkretizaci téměř vůbec. Zabývejme se proto konkretizací. Budeme ji demonstrovat pomocí problému[3].

**Problém 1:**

Taková čísla jako 452254 nazveme palindromy, protože to jsou čísla, která se čtou stejně zepředu i zezadu. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

Protože s palindromy nemáme žádné zkušenosti, je vhodné si jich nejprve několik vypsat. Palindromy jsou např. čísla: 127721, 94749, 8338, 565, 44, 8. Nás však budou v dalším zajímat pouze čtyřciferné palindromy. Jsou to např. čísla 6776, 1001, 2992. Je vidět, že jsme právě použili konkretizaci několikrát za sebou, abychom si vytvořili určitou **představu pojmu**, který se vyskytuje v našem problému. Nyní bychom měli sami sebe přesvědčit zda to, co říká můj přítel, je pravda. Zatím o jeho tvrzení nemáme ani ponětí. Vezmeme proto asi zcela *náhodně* několik čtyřciferných palindromů a vydělíme je jedenácti. Dostaneme např.: 4554 = 11.414, 1001 = 11.91, 8338 = 11.758, 3113 = 11.283.
Na základě výše uvedených čtyř náhodně zvolených příkladů **dostal problém smysl**. Nyní se nám jistě zdá, že by můj přítel mohl mít pravdu. Toto přesvědčení jsme získali opět pomocí několika konkretizací původního obecnějšího problému. Jistotu však nezískáme, dokud nepřezkoušíme všech 90 čtyřciferných palindromů. (Je jich skutečně 90?)

Teprve nyní se tedy začínáme zabývat problematikou **řešení**. Máme ukázat, že pro všechny čtyřciferné palindromy platí to, co pro výše uvedené čtyři. Protože, jak jsme již výše uvedli, je těchto palindromů 90, mohli bychom problém vyřešit tak, že všechny palindromy přezkoušíme, tzn. použijeme 90-krát za sebou konkretizaci. To by však byla práce velmi zdlouhavá, a proto se pokusíme najít cestu jinou. K tomu nám pomůže opět konkretizace, tentokráte však *systematická*. Vypíšeme si podle velikosti několik prvních palindromů. Prvních pět je: 1001, 1111, 1221, 1331, 1441. U všech můžeme snadno ukázat, že jsou dělitelné číslem 11. Ještě více jsme se tak utvrdili v přesvědčení, že přítel má pravdu. Pokud

[1] Samozřejmě nemůžeme ignorovat, že při nejrůznějších zkouškách jsou studenti mnohem více zkoušeni z faktů, které stejně brzy zapomenou než právě z těch charakteristických činností.
[2] Příklady najde čtenář např. v knížce [3] nebo v článku [1].
[3] Problém je převzat z knížky [4].

nás nyní napadne podívat se, jaká je „vzdálenost“ mezi sousedními palindromy, bude velmi blízko k vyřešení problému. K zápisu použijeme tabulku diferencí:

1001 → 1111 → 1221 → 1331 → 1441 …

110 110 110 110

AHA! Už víme jak. Číslo 1001 je dělitelné 11 a každé další číslo je vždy větší o 110. Protože však i číslo 110 je dělitelné 11, musí být každý palindrom dělitelný 11. A jsme hotovi!

Nebo to tak není? Pokud by to, co jsme uvedli o vytváření palindromů, byla pravda, pak by všechny palindromy musely mít na místě jednotek číslici 1 (přičítáním čísla 110 se číslice na místě jednotek nemění), což ale není pravda. Vždyť palindromem je např. i číslo 3773. Kde jsme tedy udělali chybu? Systematickým experimentováním jsme došli k závěru, že diference mezi palindromy je 110. Ono to tak ale nemusí být. Pokud se totiž při přechodu od jednoho palindromu k dalšímu změní číslice na místě tisíců, pak je diference jiná. Pomocí konkretizace, ale tentokrát „*rafinované*“, tak dostaneme např. následující část tabulky diferencí:

… 1881 → 1991 → 2002 → 2112 …

110 11 110

Teď vidíme, že diference mezi palindromy je dvojí, a to 110 nebo 11. Naštěstí obě tato čísla jsou dělitelná 11 a tak se dělitelnost číslem 11 pomocí těchto diferencí skutečně rozšíří z nejmenšího čtyřciferného palindromu 1001 na všechny ostatní palindromy. A problém je teď skutečně vyřešen. Můj přítel měl pravdu.

Vraťme se nyní ke konkretizaci. Při práci s problémem 1 jsme použili na různých místech různě vytvářené konkretizace.

1. Abychom problém pochopili, použili jsme **náhodnou konkretizaci.**
2. Abychom objevili ideu vlastního řešení, použili jsme **systematickou konkretizaci**. Systematická konkretizace může podstatnou měrou přispět k objevení zákonitostí, nemusíme však pomocí ní objevit některé záludnosti (viz diference mezi palindromy při změně cifry na místě tisíců v problému 1), a proto
3. je vhodné použít někdy tzv. **rafinovanou konkretizaci**. Tato konkretizace se hodí, když např. ověřujeme, zda daná hypotéza platí a může v sobě zahrnovat třeba volbu různých extrémních či zvláštních případů.

Vraťme se ještě k našemu problému. Tento problém je možné **dokázat** velmi elegantně. Zapišme si libovolný čtyřciferný palindrom ve tvaru *abba*, kde *a*, *b* jsou číslice v desítkové soustavě. Pak platí:

$$abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b).$$

Poslední term jasně ukazuje, že palindrom *abba* je dělitelný číslem 11.

Zdá se , že právě předvedený důkaz v sobě neobsahuje žádnou konkretizaci. Ve skutečnosti tomu tak ale není. Abychom takovouto argumentaci mohli přijmout, musíme rozumět tomu, co se v ní používá. Musíme rozumět tomu, co to znamená, že písmena *a*, *b* značí libovolné číslice, musíme vědět, co znamená, že číslo je čtyřciferný palindrom a musíme chápat, že čtyřciferný palindrom lze označit *abba*. Toto vše samozřejmě úzce souvisí s konkretizací.

Snad ještě poznamenejme, že pokud by studenti byli dospěli k problému 1 pomocí zkoumání čtyřciferných palindromů, pak by náhodná konkretizace na začátku práce s problémem byla zbytečná, neboť žáci by do problému měli dobrý vhled již při vyslovení samotného problému (hypotézy).

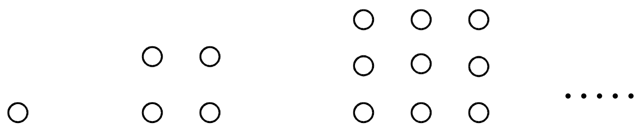
**Poznámka:** Když arabský matematik al Chvarizmi (783 –847) ve svém Aritmetickém traktátu seznamuje čtenáře s tím, jak se sčítají přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě, bere několik vhodně zvolených konkrétních příkladů a na nich toto sčítání ukazuje. Probírá tak všechny možné situace, které se při sčítání mohou vyskytnout (sčítání bez přechodu přes desítku, sčítání s přechodem přes desítku, chování čísla 0 při sčítání atd.). Každý, kdo pochopí tyto konkrétní příklady, je pak schopen sčítat libovolná dvě čísla. Obdobně to ukazuje i u odčítání, násobení a dělení. Tento matematik ve své době neměl jinou možnost, protože proměnné se v té době ještě nepoužívaly. Přesto je třeba říci, že on si onu obecnost dobře uvědomoval a prováděl vhodnou konkretizaci, aby pomocí ní mohli jeho čtenáři vyřešit libovolný příklad, tedy aby si mohli uvědomit onu obecnost situace. Myslím si, že i v dnešní době (kdy máme k dispozici proměnné) bychom ve škole měli postupovat obdobně. Pomocí konkrétních příkladů bychom měli žáky dovést k pochopení a poskytnout jim tak možnost, aby k zobecnění došli pod naším vedením sami. Oni jsou totiž žáci na prvním stupni, ale i v nižších ročnících druhého stupně v podobné situaci jako čtenáři děl výše uvedeného arabského matematika. Proměnné nemají k dispozici a když se ke konci druhého stupně proměnné začínají zavádět, je to velmi pracná záležitost. Pokud již proměnné k dispozici máme a jsme tedy schopni zapisovat pomocí nich i různé formule, zdá se mi (při pohledu z didaktického hlediska), že je mnohdy zneužíváme. Bez skutečného pochopení toho, co formule říká, nemá smysl takovou formuli uvádět.

Nyní budeme demonstrovat jiné tři heuristické strategie a to opět pomocí řešení určitého problému[4].

**Problém 2:** Farmář pěstuje zelí vždy na čtvercovém záhonu. Tento rok obsahuje jeho čtvercový záhon o 23 hlávek zelí více než loňský rok. Kolik hlávek zelí pěstuje letos?

**Řešení:**
**a) Experimentování** (vytvoření tabulky)[5]
Počet hlávek zelí v každém roce je vyjádřen čtvercovým číslem, tj. některým z čísel 1, 4, 9, 16, ….. (viz obr. 1).

Obr. 1



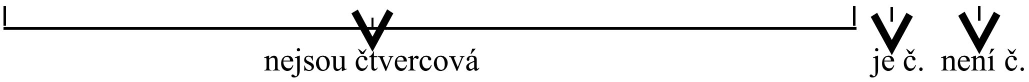
Tento rok farmář pěstuje o 23 hlávek zelí více, tzn. letošní počet odpovídá čtvercovému číslu o 23 většímu než vloni. Budeme tedy experimentovat. V letošním roce může být počet

1 + 23 = 24, 4 + 23 = 27, 9 + 23 = 22, …..

Aby zkoumaná čísla byla přehledná, sestavíme z nich tabulku:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vloni | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 |
| letos | 24 | 27 | 32 | 39 | 48 | 59 | 72 | 87 | 104 | 123 | 144 | 167 |

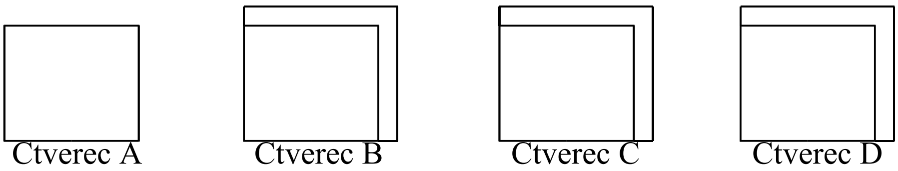
[4] Problém je převzat z knihy [5].
[5] Toto řešení bychom také mohli nazvat **aritmetické** či **numerické**.



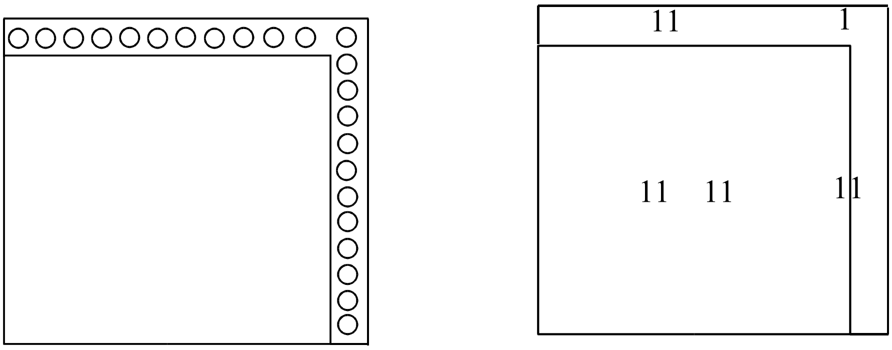

Protože 144 je čtvercové číslo, neboť 144 = $12^2$ , našli jsme jedno řešení. Další řešení pravděpodobně neexistují, protože diference mezi čtvercovými čísly se stále zvětšuje a tedy již nikdy nebude 23 (Lze ukázat – opět pomocí zkoumání, že diference tvoří posloupnost za sebou jdoucích lichých čísel).

**Odpověď:** V letošním roce pěstuje farmář 144 hlávek zelí.

**b) Grafické řešení:** Řešení bude reprezetováno následujícími čtyřmi čtverci:




Čtverec A představuje záhon v loňském roce. Protože nevíme, kolik hlávek obsahoval, nevyplníme ho. Čtverec B představuje rozšířený záhon v letošním roce. V tuto chvíli nevíme, kolik obsahuje hlávek, a proto ho nevyplníme. Do rozšíření čtverce C doplníme vhodným způsobem hlávky zelí, které jsou navíc. Po všech možných pokusech zjistíme, že to lze jediným způsobem – 23 = 11 + 11 + 1 (viz obr. 2). Nyní můžeme doplnit celý čtverec D a získáme tak odpověď na předloženou otázku (odpověď viz výše).




Obr. 2

**c) Algebraické řešení** (modelujeme situaci pomocí rovnice nebo soustavy rovnic)
Označme $x^2$ počet hlávek zelí tento rok a $y^2$ počet hlávek v minulém roce. Pak můžeme sestavit rovnici

$$x^2 - y^2 = 23$$

Pravou stranu lze rozložit a tak dostaneme

$$(x + y)\ \ (x - y) = 23$$

Čísla $x + y$ a $x - y$ jsou přirozená a číslo $x + y$ je větší než $x - y$. Číslo 23 je prvočíslo a má pouze dva dělitele 1 a 23. Proto můžeme sestavit soustavu rovnic

$$x + y = 23$$

$$x - y = 1$$

Řešením této soustavy dostaneme $[x, y] = [12, 11]$. (Odpověď viz výše.)

Na závěr problému: Uvedená tři řešení představují vlastně tři různé přístupy: a) numerický, b) geometrický a c) algebraický. Při řešení a) lze také využít kalkulátor. Každé z těchto řešení navíc ukazuje jinou heuristickou strategii. Řešení a) představuje systematické experimentování vedoucí k vytvoření tabulky. Řešení b) ukazuje využití grafického znázornění a c) modelování situace pomocí rovnice.

Vyřešením uvedeného problému by však nemělo znamenat, že se touto problematikou přestaneme zabývat. Měli bychom spolu s žáky vytvořit **hrozen** vnitřně spřízněných problémů[6]. Tím dáme jasně najevo, že metoda je pro nás mnohem důležitější než vlastní výsledek. Jak vytvořit zmíněný hrozen? Např.
a) Změníme *číslo*, jímž se liší počet hlávek v letošním a v loňském roce. Tento rozdíl bude např. 31 nebo 37 nebo –11. (Pozor, musí to být vždy liché číslo, aby úloha měla řešení.)
b) Změníme *tvar záhonů*. Záhony budou tvořit např. rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky (jim odpovídají tzv. trojúhelníková čísla) nebo obdélníky určitého typu (jim odpovídají určitá obdélníková čísla) atd.
c) Změníme *počet záhonů*. Zelí může být pěstováno na dvou nebo i více záhonech.

**Závěrem** ještě dodejme, že empirie v přírodních vědách a i v matematice je nástrojem objevu nikoliv pravdy. Nástrojem pravdy v matematice je důkaz pomocí čistého rozumu (viz důkaz za řešením problému 1). Tyto důkazy by se samozřejmě měly objevovat až později, až budeme mít k těmto důkazům prostředky a až budou studenti schopni tyto důkazy chápat. Dokazovat však můžeme pouze taková fakta, která studenti dobře pochopili a jsou přesvědčeni, že jsou pravdivá (např. na základě konkretizace). I tak by však měly být v preduniverzitním studiu zařazovány s velkým rozmyslem.


*Literatura:*

[1] Kopka, J.: Isolated and non isolated problems. In: Selected topics from Mathematical Education. Oslo, University of Oslo, 1994.
[2] Kopka, J.: Problem Posing and Learning Mathematics. In: Mathematical Investigations in School Mathematics. Oslo, University of Oslo, 1997.
[3] Kopka, J.: Hrozny problémů ve školské matematice. Ústí n.L. UJEP 1999.
[4] Mason, J.: Thinking Mathematically. Bristol, Leaper & Gard Ltc., 1994.
[5] Schultz, J.: Mathematics for elementary school teachers. Columbus Ohio, 1982.



Adresa autora: katedra matematiky, Pedagogická fakulta UJEP v Ústí nad Labem, České mládeže 8, Ústí nad Labem 400 96 Česká republika


[6] O hroznech problémů více např. v článku [1] nebo v knížce [3].