Limita postupnosti a „prípad skákajúceho panáčika“.

Lýdia Kontrová

ASTRAKT: ***The article wants to display one costructivist type of establish definition of a limit for sequences, which may be didactically used when secondary school students are getting acquainted with this term.***

Ak sa snažíte iným ponúkať matematiku, treba im odovzdať porozumenie, motiváciu, myšlienky....

(M. Atiyah)

V súčasnom školstve sa stretávame s dvoma závažnými problémami. Na jednej strane je to pokles úspešnosti stredoškolákov riešiť matematické úlohy a na druhej strane schopnosť použiť matematiku v praxi, ktorá pramení z faktu, že vedomosti mnohých študentov sú príliš formálne.

Zmyslom výučby matematiky by malo byť predovšetkým rozvíjanie matematickej kultúry študujúcich, čoho podstatnou zložkou je ***matematike rozumieť a vedieť ju aplikovať.*** Prioritou vo vzdelávaní by nemal byť ani tak rozsah učiva, ale ***kvalita vzdelávacích postupov,*** ktoré dokážu rozvíjať intelekt študenta a tým aj jeho schopnosť matematiku aplikovať v praxi.

Prax mi potvrdila, ***že neformálna znalosť potrebuje materiálne znázornenie a v nemalej miere od nej závisí. Poznatky sa najlepšie objasňujú materializovaním*** **([1])** Som presvedčená, že v miere, akej učiteľ pri vyučovacom procese názorne prezentuje matematické pojmy, otvára následne pre študenta priestor, aby matematike skutočne porozumel a neskôr vo svojej budúcej praxi bol schopný sám použiť matematiku ***ako prostriedok znázorňovania reality.***

Nie vždy má učiteľ možnosť pri zavádzaní nového matematického pojmu použiť vhodnú obrazovú dokumentáciu. Vizualizáciu logickej matematickej štruktúry, ktorá napomáha vytváraniu názornej predmetnej predstavy matematického pojmu u študenta, môžeme dosiahnuť aj použitím konkrétno - deduktívneho a konštruktívneho spôsobu definovania pojmu. Bližšie to vysvetlím na príklade z matematickej analýzy.

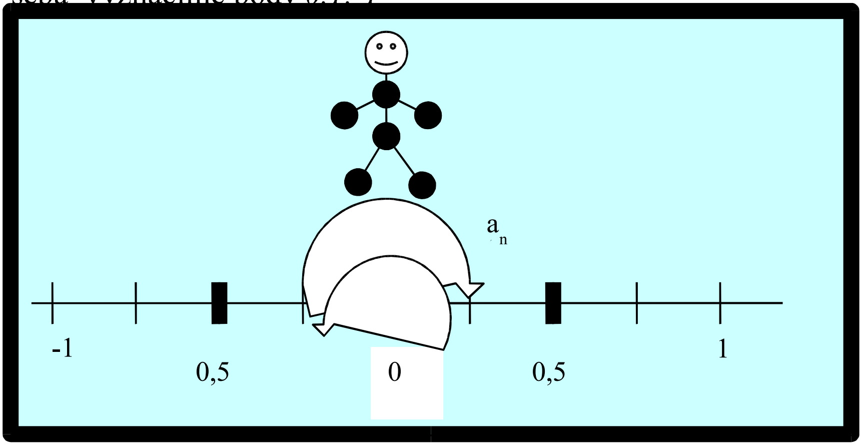
Pojem ***limita postupnosti*** je pre študentov veľmi abstraktný. Je to spôsobené tým, že definícia obsahuje veľa kvantifikátorov a ďalej tým, že limitné procesy bývajú často študentom predkladané ako súbor poučiek, definícií a dôkazov bez hlbšieho vysvetlenia. Správne a neformálne chápanie tohto pojmu je však dôležité pre pochopenie ďalších pojmov z matematickej analýzy, ktoré naň nadväzujú a súvisia s ním.

Myšlienka zavedenia pojmu ***limita postupnosti***, pri ktorej je kladený väčší dôraz na aktivitu študenta a názornosť pri osvojovaní pojmu, pochádza od poľského matematika O. Nikodyma. Sama som ju aplikovala medzi študentmi a musím konštatovať, že s úspechom. V tomto didaktickom postupe sa vychádza zo zadefinovania $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a následne $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Učiteľ má často tendenciu demonštrovať pojem limity na príklade postupnosti konvergujúcej k nule; $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Nevýhodou tohto príkladu však je, že predstavuje pojem limity príliš zjednodušene. Neposkytuje dostatok podnetov na jeho pochopenie v celej šírke. Študenti sa domnievajú, že už dostatočne pochopili, čo to znamená, ak sa povie, že postupnosť konverguje k nule, a preto exaktnú definíciu limity majú tendenciu považovať za niečo druhoradé, zbytočne skomplikované. Tento pojem *„postupnosť sa blíži k nule“* je čiastočne zavádzajúci a nepresný, ako sa to pokúsim ukázať na dvoch príkladoch. V oboch by bolo možné intuitívne vysloviť záver „že členy postupnosti sa pre $n\to\infty$ blížia k nule“ a predsa v prvom príklade sa jedná o postupnosť s limitou 0 a v druhom nie.

Je možné vymodelovať fiktívnu situáciu, ktorej opis v jazyku aritmetiky vedie priamo k definícii limity postupnosti. Študentov aktívne

zapojíme do tohto skúmania čím eliminujeme vznik formálnej vedomosti.
Narysujme na tabuľu priamku, na ktorej v dostatočnej vzdialenosti od seba vyznačíme body *0,1,-1*



Obrázok č.1: Pozícia skákajúceho panáčika

Pozornosť študentov sústredíme na postupnosť:

$$a_n = \left\{ (-1)^n . \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Jednému zo študentov prikážeme vyjadrovať postupne hodnoty členov postupnosti a_n ; pre $n= 1,2,3,...$
Ďalšiemu zase ukazovať prstom *pozíciu skákajúceho panáčika,* ktorý na príkaz „*n*“ zaujme pozíciu „a_n“ na číselnej osi.

Následne vyznačme vo vzdialenosti $\frac{1}{2}$ od nuly na obe strany hraničné čiarky. Vyzveme študentov, aby sledovali, či existuje taký príkaz *„n“,* od ktorého počnúc bude panáčik skákať iba medzi vyznačenými hraničnými čiarkami. Od akej hodnoty *„n“* sa tak stane?
Zmeňme vzdialenosť hraničných čiar od nuly na jednu sedminu. Znovu dáme tú istú otázku a očakávame odpoveď študentov. Navrhnime ešte ďalšiu zmenu hranice - na jednu stotinu. Konkrétna situácia v tejto fáze sa už nedá realizovať na tabuli. Študenti pokračujú znázorňovaním situácie výpočtom:

$-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16};-\frac{1}{32};\frac{1}{64}$ panáčik je ešte za hranicou jedna stotina;

pre $n = 7$ dostávame $a_n = -\frac{1}{128}$; panáčik skočil medzi vyznačené hranice.

Urobme ešte posledný návrh - hraničné čiarky nech sú vo vzdialenosti $\frac{1}{10^{50}}$ od nuly. Študenti na základe predchádzajúcich skúseností prichádzajú s myšlienkou hľadať riešenie pomocou nerovnice:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^{50}} \text{ čiže } 2^n > 10^{50} \text{ z čoho dostávame } n.log2 > 50 \Rightarrow n > \frac{50}{log2}.$$

Znamená to, že približne od príkazu *„n=167“* počnúc, panáčik bude skákať medzi čiarkami vyznačujúcimi hranicu od nuly vo vzdialenosti $\frac{1}{10^{50}}$. Teraz je vhodná chvíľa poradiť študentom, aby sformulovali úlohu všeobecne v jazyku matematiky, pričom vzdialenosť hranice od nuly označíme písmenom ε.

Študenti bez problému formulujú: nech je dané číslo $\varepsilon > 0$ (vzdialenosť hraničných čiar od nuly). Potom existuje také prirodzené číslo *„n“* *(* príkaz *„n“),* že pre všetky prirodzené čísla $m \geq n$ (počnúc od príkazu *„n“*) platí : $-\varepsilon < a_m < \varepsilon$ (panáčik skáče medzi čiarkami). Obecné riešenie sa získa z nerovnosti: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ *odkiaľ dostávame* $n > \frac{-log\varepsilon}{log2}$.

Druhý príklad:

Učiteľ opäť upriami pozornosť študentov na historku so skákajúcim panáčikom, tentoraz však pre inú postupnosť:

$b_n = \left\{(-1)^n . \frac{1}{p(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$; kde *p(n) označuje takého najväčšieho deliteľa čísla n, ktorý nie je zloženým číslom.*

Študenti počítajú hodnoty a_n, zapisujú postupne *„pozíciu skákajúceho panáčika“*: $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{11}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{13} ...;$

Zaregistrujú, že nech sa povie akýkoľvek príkaz „n“, vždy sa objaví po ňom taký príkaz, pri ktorom panáčik zaujme pozíciu $\frac{1}{2}$ (stane sa tak pre všetky „n“, ktoré sú prirodzenou mocninou čísla 2). Ak hraničné čiarky budú zvolené vo vzdialenosti menšej ako 0,5 od nuly, „*panáčik bude vždy po určitom čase vyskakovať poza hraničné čiarky*“. Použijúc matematickú terminológiu študenti formulujú tvrdenie:

Existuje také prirodzené číslo ε (napr. 0,5), že pre všetky prirodzené čísla n, existuje vždy také prirodzené číslo m > n pre ktoré platí:

$b_m < -\varepsilon$ alebo $b_m > \varepsilon$. Uvedenie týchto dvoch príkladov nás privádza k pojmu *„postupnosť a_n má limitu 0“* ktorú v tomto momente korektne zadefinuje učiteľ.

Ako vidieť z predchádzajúcich úvah, aj taký abstraktný pojem ako je limita postupnosti, je možné študentom ***prezentovať názorne***, pomocou vhodne zvoleného konštruktívneho postupu. Ďalšie prístupy možno nájsť v [2].

Literatúra:

[1] Arnheim , R.: *Anschauliches Denken. Du Mont, Köln, 1977*

[2] Gunčaga J.: *Limitné procesy z didaktického hľadiska. Rigorózna práca, KU 2002*

[3] Krygowska, M.*: Zarys dydaktyki matematiky I. WSP, Warszawa,1975*

[4] Kuřina ,F. – Hejný, M.: *Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2001*

Adresa autora**:**

L. Kontrová

FPV, KM , ŽU,

Hurbanova 15

010 26 Žilina