Malá sonda do kombinatorického myslenia žiakov na SŠ.

Martina Janáčková

ABSTRACT: *The aim of the paper is to discuss some aspects of the combinatorial thinking of secondary school students. We took a small sample of 16 students and gave them a combinatorial problem. Then we tried to classify the different strategies the students took in their solutions.*

1. ÚVOD

Žiacke riešenia kombinatorických úloh sú známe vysokým počtom chýb. Ak cieľom učiteľa nie je len chyby evidovať, ale ich aj redukovať, je nevyhnutné pochopiť, prečo k chybe došlo. Úspech v tomto smere je podmienený úsilím porozumieť mysleniu žiakov. Výskumu kombinatorického myslenia na SŠ zatiaľ nebola venovaná dostatočná pozornosť ani na Slovensku, ani v zahraničí. Naším cieľom bolo pomocou malej sondy získať prvú orientáciu v problematike.

2.NÁSTROJ A JEHO APLIKÁCIA

Ako východisko sme použili kombinatorickú úlohu: *5 priateľov sa lúči a každý s každým si raz podáva ruku. Koľko bolo všetkých podaní rúk?* Úloha bola druhou úlohou prvej štvrťročnej písomnej práce z matematiky určenej žiakom 2. ročníka štvorročného gymnázia Veľká okružná 22 v Žiline (november 2002). Práca obsahovala 5 úloh (dôkaz matematickou indukciou, kombinácie bez opakovania, binomická veta, kombinačné čísla, vlastnosti funkcie). Úlohu riešilo 16 žiakov.

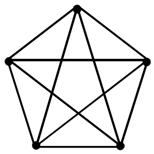
Hoci na vyriešenie úlohy neboli nevyhnutné predchádzajúce vedomosti, jej riešenie mohlo byť ovplyvnené metódami sprostredkovanými učiteľom alebo učebnicou. Školské učebnice [1], [2], [3] na riešenie predloženého typu úlohy ponúkajú štyri metódy:

I. vypisovanie možností [3, s. 26]

{A,B}, {A,C}, {A,D}, {A,E}
{B,C}, {B,D}, {B,E}
{C,D}. {C,E}
{D,E}

Vysvetlenie: Písmená A, B, C, D, E označujú 5 priateľov, dvojprvkové množiny podania rúk.

II. grafická metóda [1, s. 6]



Vysvetlenie: Vrcholy päťuholníka predstavujú 5 priateľov, strany a uhlopriečky podania rúk.

III. tabuľková metóda [1, s. 6]

	A	B	C	D	E
A		X	X	X	X
B			X	X	X
C				X	X
D					X
E					

Vysvetlenie: Písmená A, B, C, D, E označujú 5 priateľov, krížiky podania rúk.

IV. výpočet pomocou vzorca [2, s. 33]

$$C_2(5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!.2!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = \frac{5.4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

3. VYHODNOTENIE

S ohľadom na náš cieľ sme všetky výpočtové ťahy[1] roztriedili do typov [A] - [R] a metód I. – V. (V. metóda zahŕňa výpočtové ťahy nezaradené do I.- IV.). K jednému typu radíme odpovede, ktoré podľa nás reprezentujú rovnaký spôsob uvažovania, hoci sa po formálnej stránke môžu od seba líšiť (napr. rôzne označenie priateľov [A], …). Riešenie väčšiny žiakov je charakteristické prítomnosťou výpočtových

[1] **Riešiteľský ťah** – časť riešiteľského procesu. Je zameraný na nájdenie jedného neznámeho údaja [4, s. 113]. **Výpočtový ťah** – projekcia riešiteľského ťahu z prostredia VEDOMIE do prostredia PAPIER [4, s. 118].

ťahov viacerých typov a metód. Snažili sme sa o čo najvernejší prepis jednotlivých výpočtových ťahov – reprezentantov typu. Niektoré z uvedených typov sa vyskytli len raz, niektoré viackrát. V snahe prehľadne zrekonštruovať myšlienkový proces rozlišujeme v tabuľke potenciálne myšlienkové kroky (interpretácia myšlienkových krokov), ktoré viedli k skúmanému písomnému prejavu (projekcia myšlienkových krokov na papier). Zoznam príčin chybných myšlienkových krokov ako aj možností ich interpretácie nepokladáme za úplný. Kvôli stručnosti uvedieme rozbor iba jednej metódy – vypisovania možností. Pre zvyšné štyri metódy možno uviesť podobné rozbory.

I. Vypisovanie možností.

1.1. Prehľad výpočtových ťahov.

[A]

a) A, B, C, D, E
AB BC CD DE $\boxed{B}$
AC BD CE $\boxed{C}$
AD BE $\boxed{D}$
AE

b) $\boxed{A}$ B C D E
C D E
D E
E
14 podaní

c) $\underline{4}\ \ \underline{3}\ \ \underline{2}\ \ \underline{1}\ \ \underline{\ \ }$
$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

[B] $\underline{5\ } + \underline{4\ } + \underline{3} + \underline{2\ } = 14$

[C] 1 – 4
2
3 $\quad 5 . 4 = 20$
4
5

[D] a) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1} = 12 . 2 = 24$
Bolo 24 podaní rúk.
b) $\underline{4} . \underline{3} . \underline{2} . \underline{1} = 24$

[E] a) $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$ - 120 – krát
b) $\underline{5} .\underline{4} . \underline{3.}\ \underline{2} = 20 . 3 . 2$
$= 20 . 6 = 120$

[F] $\underline{4\ }\ \underline{4\ }\ \underline{4\ }\ \underline{4\ }\ \underline{4} = 1024$

[G] $\underline{5\ }\ \underline{5\ }\ \underline{5\ }\ \underline{5}\ \ \underline{5} = 3125$

1.2. Rekonštrukcia výpočtových ťahov.

Domnievame sa, že vysoký počet riešení je výsledkom kombinácií pomerne malého počtu myšlienkových krokov (správnych alebo chybných):

Tabuľka 1

Interpretácia myšlienkových krokov	Projekcia myšlienkových krokov na papier		interpretácia chybných myšlienkových krokov
5 priateľov	_ _ _ _ _		
Prvý priateľ podáva ruku ostatným štyrom.	4 _ _ _ _	5 _ _ _ _	Prvý priateľ si podal ruku s **každým**. Je ich 5. (1)
Druhý podáva ruku tým, ktorým ešte nepodal.	4 3 _ _ _ 5 4 _ _ _	4 4 _ _ _ 5 5 _ _ _	Druhý si podal ruku s každým (príp. okrem seba samého). (2)
Tretí podáva ruku tým, ktorým ešte nepodal.	4 3 2 _ _ 5 4 3 _ _	4 4 4 _ _ 5 5 5 _ _	Tretí si podal ruku s každým (príp. okrem seba samého). (3)
Štvrtý priateľ podáva ruku tým, ktorým ešte nepodal.	4 3 2 1 _ 5 4 3 2 _	4 4 4 4 _ 5 5 5 5 _	Štvrtý si podal ruku s každým (príp. okrem seba samého). (4)
Piaty podáva ruku tým, ktorým ešte nepodal.	4 3 2 1 0 5 4 3 2 1	4 4 4 4 4 5 5 5 5 5	Piaty si podal ruku s každým (príp. okrem seba samého). (5)
Počet všetkých podaní	4+3+2+1+0=10 4+4+4+4+4=20 5+4+3+2+1=15 [A] [B] [C]	4.3.2.1.0=0 4.4.4.4.4=1024 5.4.3.2.1=120 5. 5. 5. 5=3125 D] [E] [F] [G]	Počet všetkých podaní rúk = súčinu čísel nad "mišťičkami". (6)

1.3. Prehľad pravdepodobných príčin chybných krokov.

(1) nedostatočná predstava kombinatorickej situácie (Človek si podáva ruku sám so sebou.); riešenia [B], [E], [G]
(2) zarátanie každého podania dvakrát; riešenia [C], [F], [G]
(3) (4) (5) zotrvačnosť; riešenia [C], [F], [G]
(6) stotožnenie „mištičkového“ zápisu s tzv. mištičkovou metódou[2] bez ohľadu na kombinatorickú situáciu; riešenia [D], [E], [F], [G]

Zamyslime sa tiež nad tým, ako rôzne formy zápisov následne ovplyvňovali riešenie:

[A] Rozdiely spočívajú v snahe riešiteľov zjednodušiť výpis všetkých možností a tým – urýchliť výpočet. Predpokladáme, že práve zápis b) spolu s nepozornosťou viedol pri sčítavaní podaní rúk k chybnému výsledku. Aj keď je ten, kto podáva ruku, graficky odlíšený od množiny partnerov, s ktorými si podáva ruku, v konečnom dôsledku je zarátaný ako samostatná možnosť.

[D] Na základe zápisov sa domnievame, že varianty a), b) sa líšia poradím myšlienkových krokov: Kým 1. riešiteľ si najskôr označil všetky objekty a až potom sa zamýšľa nad ich vzťahmi, 2. riešiteľ sa nad vzťahmi daného objektu zamýšľa hneď po jeho označení. Pokiaľ v oboch prípadoch vyvstal problém „podanie rúk 5. človeka”, v a) bol nástojčivejší, nakoľko sa na základe skúseností s mištičkovou metódou vyskytla potreba zaplniť posledné miesto. V b) mal riešiteľ možnosť stotožniť „0” na poslednom mieste s nezaznačením objektu a jeho vzťahu, čím sa po vynásobení vyhol riešeniu dilemy nereálneho výsledku (0 podaní rúk – viď tab. 1) narozdiel od a). Ten overuje riešenie graficky. Ani tento rozpor však nebol dostatočným impulzom na zmenu uvažovania, čím sa potvrdil veľký vplyv “mištičkového” zápisu na riešenie.

[E] Nedokončenie „mištičkového“ zápisu b) (násobenie číslom „1“ výsledok nezmení) malo negatívny vplyv na výsledok

---

[2] Mištičková metóda – metóda vyučovaná pri úlohách o variáciách (Koľkými rôznymi spôsobmi možno vybrať usporiadanú k-ticu ($k \leq n$) z n-prvkovej konečnej množiny?). „Mištičky“ predstavujú jednotlivé pozície (počet = k), čísla nad „mištičkami“ počet spôsobov, ktorými môžeme objekt na danú pozíciu vybrať. Počet rôznych usporiadaní = súčinu čísel nad „mištičkami“ (pravidlo súčinu).
Príklad. Koľkými spôsobmi môže stáť vedľa seba 5 priateľov? Riešenie: $\underline{5}.\underline{4}.\underline{3}.\underline{2}.\underline{1} = 120$

pri nasledujúcom spôsobe uvažovania [B] (v porovnaní s tabuľkou 1 o jednotku menší). Zmena v myšlienkovom kroku (6) bola totiž sprevádzaná len prepísaním „**.**” v [E b)] na „+“.

4. ZÁVER

Hoci sme v príspevku uviedli len rozbor jednej metódy, celkovo možno povedať, že ak je naša rekonštrukcia myslenia žiakov správna, potom každá z uvedených chýb má pôvod v jednej z dvoch príčin: nepochopenie kombinatorickej situácie a spôsob zápisu. Hoci sa zdá, že druhá príčina nie je vzhľadom na kombinatorické myslenie natoľko závažná ako prvá, zaskočilo nás, do akej miery a v akom rozsahu zápis dokáže ovplyvniť riešenie.

Analýzy žiackych riešení priniesli veľa podnetov na zamyslenie. Napriek tomu by bolo vhodné naše dohady overiť – napr. dodatočným rozhovorom s riešiteľom a to z dvoch dôvodov:

1. Rozhovor nám umožní lepšie pochopiť žiacke myslenie.
2. Zistíme, nakoľko sme sa dokázali priblížiť mysleniu žiakov.

Nepochybne oba typy informácií budú dôležité pri odstraňovaní chýb.

Literatúra :

1. Hecht, T., Bero, P., Černek, P*.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ – Zošit 4 – Kombinatorika.* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1996.

2. Odvárko, O., Božek, M., Ryšánková M., Smida, J.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia.* SPN, Bratislava, 1985, s. 9 – 44.

3. Smida, J.: *Kombinatorika pre 2. ročník gymnázia.* SPN, Bratislava, 1989.

4. Hejný, M., Michalcová, A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Metodické centrum, Bratislava, 2001.

Adresa autora: M. Janáčková, Gymnázium Veľká okružná, Veľká okružná 22, 010 01 Žilina, e-mail: janackova@gvoza.sk