Anatómia slovnej úlohy o veku[1]

Milan Hejný

ABSTRACT: A word problem is decomposed into four levels: a story, objects, relations, a mathematical model. An 'age problem of a type (m,n)' is such a word problem which deals with m people $A_1,\dots A_m$ and n different time points $t_1,\dots t_n$. For instance, the problem *Kate and Lena have now altogether 19 years. Kate was 3 when Lena was born. How old is Kate?* is of the type (2,2), since people are *Kate* and *Lena* and time points are *today* and *when Lena was born.* Classes of problems of this type are theoretically elaborated and some educational applications are shown.

1.Úvod

1.1Formulácia problému

Náročnosť slovných úloh je dobre známa každému učiteľovi. Nečudo, že tejto problematike je venovaná značná pozornosť i zo strany didaktiky matematiky. Slovné úlohy, najmä riešiteľské procesy týchto úloh, sú skúmané z mnohých pohľadov a často slúžia ako nástroj experimentov.

V článku Hejný (1995) sme ukázali, že hlavnou prekážkou úspešného riešenia slovných úloh je neschopnosť žiaka porozumieť úlohe, pochopiť situáciu opísanú úlohou a/alebo výzvu, ktorú úloha kladie. Navrhli sme i niektoré edukačné stratégie, ako túto prekážku prekonať. K realizácií niektorých tam popísaných stratégií je potrebné danú slovnú úlohu rozkladať na sémantické elementy a tie modelovať v jazyku algebry. Cieľom našej štúdie je dať teoretický rámec pre taký rozklad, osobitne potom aplikovať tento rozklad na úlohy o veku.

1.2Metódy práce

Prameňmi štúdie boli 1) žiacke riešenia slovných úloh (analyzované už v predchádzajúcich výskumoch), 2) písomné a ústne reakcie učiteľov na slovné úlohy a ich riešenie žiakmi, 3) texty slovných úloh z učebníc a zbierok, najmä vydavateľstva Orbis Pictus Istropolitana, (P. Bero, P.

[1] Štúdia bola vypracovaná s podporou grantov VZ J13/98/114100004 a GAČR 406/02/0829

Černek, Š. Kováčik, Z. Pytlová, V. Repáš, I. Vojtela) a zbierok M. Kaslovej. Vzadu v literatúre sú uvedení iba ilustrácie týchto titulov.

Príčiny žiackych neúspechov pri porozumení slovných úloh boli skúmané metodami atomárnej analýzy (pozri Hejný 1995, Stehlíková 1955, Kratochvílová 2003). Podobné techniky boli aplikované na rozklad textu slovnej úlohy. Súčasťou bádania bol aj rozbor sociológie slovnej úlohy, ktorý sa do tohto článku nevošiel.

2.Niekoľko základných pojmov

Termín *slovná úloha* nie je v didaktickej literatúre plne ustálený. Preto začneme jeho vymedzením. Najprv uvedieme niekoľko úloh a potom budeme uvažovať, ktorej z nich prisúdime prídomok „slovná“.

2.1Ilustrácie

Úloha 1**.** Učiteľ napísal na tabuľu rovnicu $5x + 4 = 19$. Potom sa opýtal triedy, či by niekto vedel rovnicu vyriešiť. Vy by ste vedeli?
Úloha 2**.** Súčet dvoch čísel je 19 a rozdiel je 3. Ktoré sú to čísla?

Úloha 3. Dračice Klára a Lenka majú dovedna 19 hláv. Klára má o tri hlavy viac ako Lenka. Koľko hláv má Klára a koľko Lenka?

Úloha 4. Sestry Klára a Lenka majú dovedna 19 rokov. Klára má o 3 roky viac ako Lenka. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?
Úloha 5**.** Sestry Klára a Lenka majú dovedna 19 rokov. Klára mala 3 roky, keď sa Lenka narodila. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?
Úloha 6. Až bude Belo tak starý ako je Adam dnes, bude mať Adam 19 rokov. Keď mal Adam toľko rokov, koľko má Belo dnes, mal Belo o 8 rokov menej, ako má dnes Adam. Koľko rokov má dnes Adam a koľko Belo?

2.2Ktorú z uvedených úloh budeme považovať za slovnú?

Všetkých 6 úloh je formulovaných pomocou slov a sú teda „slovné“. Ale naše vymedzenie termínu bude užšie. Úlohu 1 nenazveme slovnou, lebo k jej vyriešeniu slovám netreba rozumieť. Jej riešenie $x = 3$ nájde i človek ktorý po slovensky nevie. Táto úloha nevyžaduje *jazykové porozumenie*.

Úloha 2 vyžaduje jazykové porozumenie, ale to je viazané iba na svet matematiky. K jej porozumeniu netreba mať životné skúsenosti. Ufón, žijúci v úplne inej realite, by túto úlohu, preloženú do „ufónštiny“, vedel vyriešiť. Ani tento typ úloh nebudeme v našom ponímaní považovať za slovné. Od slovnej úlohy budeme požadovať, aby mala *presah do životnej skúsenosti* človeka. Výsledkom úvahy je

Vymedzenie. Termínom *slovná úloha* rozumieme matematickú úlohu, ktorá vyžaduje *jazykové porozumenie* a *presah do životnej skúsenosti*.

2.3Poznámka o slove „príklad“

V slovenčine (i češtine) sa často namiesto slova *úloha* povie *príklad*. V angličtine je *example* niečo iné ako *task* či *problem*. V nemčine „das Beispiel“ nie je „die Aufgabe“ a v ruštine „primer“ nie je „zadača“. Odporúčam aj v slovenčine (a češtine): pod „príkladom“ rozumieť vzor, ukážku, ilustráciu a slovom „úloha“ rozumieť výzvu k riešeniu.

2.4Dynamický a statický charakter slovnej úlohy.

Vymedzenie. Slovnú úlohu nazveme *dynamickou* alebo *príbehom*, práve keď sa odohráva v dvoch či viacerých *časových hladinách*, poprípade ak pracuje s *tečúcim časom*. Úlohu, v ktorej čas nehrá dôležitú rolu, nazveme *statickou* alebo *situáciou.*

Úlohy 3 a 4 sú statické, úlohy 5 a 6 sú dynamické. V úlohe 4 sa síce hovorí o veku, lenže iba v čase „teraz“. V úlohe 4 sa hovorí o dvoch časových hladinách: „dnes“ a „vtedy sa Lenka narodila“.

Medzi dynamické patrí väčšina úloh o stretávaní sa, o práci, o plnení bazéna, o veku a pod. Dynamické úlohy bývajú náročnejšie ako statické. Toto triedenie úzko súvisí s kognitívnou polaritou *proces* vs. *koncept* (pozri Gray, Tall, 1994; autorova interpretácia je v Hejný, 1999).

3.Anatomický prístup k slovnej úlohe

Skúmať *anatómiu* úlohy znamená rozkladať ju na čo najmenšie prvky, tie analyzovať, organizovať a reťaziť do sietí. V zhode s uchopovaním úlohy žiakom (pozri Hejný 1995), rozdelíme úlohu do 4 vrstiev:

1. Vrstva príbehu či situácie sa týka rámcových predstáv o úlohe.
2. Vrstva objektov sa týka toho, čo tvorí „podmet” textu úlohy.
3. Vrstva vzťahov sa týka väzieb medzi objektmi úlohy.
4. Vrstva matematického modelu prezentuje prepis textu úlohy do formalizovaného jazyka.

3.1Vrstva príbehu či situácie

sa skladá z expozície a výzvy. *Expozícia* predstaví príbeh či situáciu a riešiteľ si o tom tvorí predstavu. *Výzva* rozbehne a orientuje riešiteľský proces. Táto vrstva sa stáva prekážkou porozumenia úlohy pre tých žiakov, ktorí nevedia čítať s porozumením ani rozprávku.

Asi dvadsiatim šiestakom sme prečítali úlohu 5 a chceli sme, aby nám text úlohy reprodukovali vlastnými slovami. Piati žiaci uviedli presne obe podmienky úlohy, hoci jeden z nich premenoval Kláru na Katku. Šiesti žiaci povedali, že je to o sestrách Kláre a Lenke a žiadnu podmienku neuviedli, traja z nich dokonca neuviedli ani to, že sa jedná o vek dievčat.

3.2 Vrstva objektov

Osoby, predmety, udalosti, stavy, ... o ktorých úloha hovorí, nazveme *objektmi.* Napríklad v úlohe 5 nachádzame objekty: dračice, dračica Klára, dračica Lenka, hlava, počet hláv, počet hláv Kláry, počet hláv Lenky, počet hláv dračíc dovedna, 19 hláv dovedna, tri hlavy, o tri hlavy viac, o tri hlavy viac ako Lenka.

Objekty budeme triediť podľa toho, či poukazujú, alebo nepoukazujú na číslo, či už známe, alebo neznáme. Objekt „dračica Klára“ na číslo nepoukazuje, ale objekt „počet hláv Kláry“ poukazuje. Objekt „dračice“ môže, ale nemusí nadobúdať číselnú hodnotu: objekt „2 dračice“ číselnú hodnotu nadobúda, objekt „dračice sestry“ nenadobúda. Objekt, ktorý poukazuje na číslo nazveme *vstup* (ak je elementom expozície úlohy) alebo *výstup* (ak je elementom jej výzvy) Väčšina objektov sa v slovnej úlohe opisuje *priamo*. Existujú však aj také objekty, ktoré sú v úlohe prítomné *nepriamo.* Napríklad objekt „vekový rozdiel Kláry a Lenky“ v úlohe 5.

3.3 Vrstva vzťahov

obsahuje všetky významné väzby medzi objektmi úlohy. Zvlášť dôležité sú tie, ktoré sa týkajú vstupov a výstupov. Bývajú vyjadrené pomocou rovnice, nerovnice, grafu, tabuľky, obrázku,... Tie nazveme *údaje.*

Vzťahom úlohy nazývame každú sémantickú informáciu o objektoch úlohy. Vzťah môže z textu úlohy vyplývať *priamo*, alebo *nepriamo*. Napríklad „bolo nás toľko ako je mesiacov v roku“ hovorí nepriamo, že nás bolo 12. Vzťah, ktorý informuje, že istý objekt úlohy budeme stručne zapisovať určitým znakom, nazveme *označenie.*

3.4 Vrstva matematického modelu úlohy

Prevedením príbehu či situácie do znakového jazyka (najčastejšie do rovnice či sústavy rovníc) vzniká matematický model úlohy. Niekedy je tento model súčasťou procesu riešenia. Napríklad Adka (9 rokov) riešila metódou pokus - omyl úlohu 5: najprv urobila niekoľko bodiek ku Kláre a potom o tri bodky menej k Lenke (pozri obr.. 1): Spočítala všetky bodky; bolo ich 17 ; tak dorobila ešte po jednej bodke do každého riadku a povedala, že už to vyriešila.

Klára ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Lenka ● ● ● ● ● ● ● ●

Obr. 1.

Starší žiaci bežnejšie používajú rovnicový model, ktorý je, z hľadiska vyučovania považovaný za štandardný. Rovnicový model úlohy 5 má tvar: $K + L = 19$, $K = L + 3$, kde
K = počet hláv Kláry a L = počet hláv Lenky.

Zakončili sme všeobecnú úvahu o slovných úlohách a pristúpime k úlohám o veku. Užšia oblasť nám dovolí hlbší ponor do problematiky.

4.Úlohy o veku

Slovnú úlohu nazývame *úlohou o veku*, ak v nej dôležitú rolu hrá vek jednej či viacerých osôb (predmetov, zvierat, bytostí,…) v aspoň dvoch časových hladinách. Pripomeňme, že úloha 4 nie je, a úloha 5 je úlohou veku. Pozrime na dve žiacke riešenia tejto úlohy.

4.1Príbeh: Bára rieši úlohu 5

Bára (7 ročník) napísala rovnice: $K + L = 19$, $K = 3$, zistila, že $L = 16$ a dlho mlčala. Povedala: „je to dáke pomotané“. Na otázku, „Čo je *K*?“ povedala, že vek Kláry. Doplňujúca otázka „Vek Kláry dnes, alebo vtedy keď sa Lenka narodila?“ dievčinu prekvapila. Vzala pero a začala nanovo počítať. Po chvíli našla správne riešenie úlohy.

Príbeh ilustruje častú príčinu neúspechu žiaka pri uchopovaní úlohy o veku: zabudne na časové hladiny. S nesprávne uchopenými objektmi sa nepodarí uchopiť vzťahy. Kľúčový pre nás je poznatok, že Báre stačilo dať impulz – treba uvažovať o veku v danom čase – a už úlohu uchopila.

4.2Uchopenie objektov v úlohe o veku, typ úlohy

Prvý a rozhodujúci krok uchopenia úlohy 5 je uvedomenie si štyroch objektov. Možno ich prehľadne zapísať do tabuľky:

	Vtedy		*Dnes*	
Klára	K´	= vek Kláry vtedy	K	= vek Kláry dnes
Lenka	L´	= vek Lenky vtedy	4.	= vek Lenky dnes

Tab. 1.

Tabuľka je kartézsky súčin $\mathbf{O} \times \mathbf{H} = \{K, L\} \times \{D, V\}$
množiny osôb $\mathbf{O} = \{K =$ Klára, $L =$ Lenka$\}$ a
množiny časových hladín $\mathbf{H} = \{D =$ dnes, $V =$ vtedy$\}$.

Zovšeobecnenie. V úlohe o veku sú dané osoby[2] vo viacerých časových hladinách. Osoby označme $A_1,..., A_n$, časové hladiny označme $t_1,..., t_m$. Taká úloha má *n.m základných objektov* (*parametrov*): „vek osoby A_i v čase t_j“ pre $i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}$.

Vymedzenie. Slovnú úlohu o veku v ktorej aktívne vystupuje *n* osôb a *m* časových hladín nazveme *úloha o veku typu (n,m)*. Najbežnejšie časové hladiny sú tri: „vtedy“ (minulosť), „dnes“ (prítomnosť) a „potom“ (budúcnosť); označíme ich znakmi: *V, T, P*.

4.3Vzťahy v úlohe o veku

V úlohe o veku, ako v každej inej slovnej úlohe, sú dané isté vzťahy medzi parametrami. Okrem nich v úlohe o veku platia aj *zákonitosti plynutia času*:

Z1. V danom čase zostarne každý človek rovnako.
Z2. Vekový rozdiel dvoch konkrétnych ľudí sa v čase nemení.

Zákonitosti Z1 a Z2 tvrdia to isté. Názorne to vidíme na úlohe 5: zákonitosť Z1 tvrdí, že $K - K' = L - L'$,
zákonitosť Z2 tvrdí, že $K' - L' = K - L$. Obe identity tvrdia to isté.

Uvedené zákonitosti majú pre riešenie úlohy o veku kľúčový význam. Bez nich úlohu o veku vyriešiť nemožno. To umožňuje podať nové vymedzenie pojmu „úloha o veku“.

Vymedzenie. Slovnú úlohu, riešenie ktorej nevyhnutne vyžaduje použitie zákonitosti plynutia času, nazývame *úlohou o veku*.

Pojmy „základný objekt (parameter)“ a „zákonitosti plynutia času“ tvoria teoretický rámec pre skúmanie úloh o veku. Východiskom k hlbšiemu skúmaniu nám bude náročnejšia úloha 6.

---

[2] V úlohách o veku sa namiesto ľudí môžu vyskytovať, rozprávkové bytosti, zvieratá, predmety, … V ďalšom budeme hovoriť iba o ľuďoch.

5.Úloha 6 a jej príbeh

Čitateľovi odporúčame, aby si samostatne vyriešil úlohu 6 a riešenie si odložil, aby si neskôr mohol porovnať svoj postup s naším rozkladom.

5.1Uchopovanie úlohy žiakmi

Asi dvadsiatim žiakom 7. a 8. ročníka sme niekoľko krát prečítali úlohu 6 a požiadali sme ich, aby vlastnými slovami napísali text i otázku úlohy. Všetci žiaci napísali, že treba zistiť vek chlapcov. Podmienky úlohy, ktoré uviedli, boli triviálne (napr. o 8 rokov bude Belo o 8 rokov starší ako je dnes), pravdivé (napr. Adam je starší ako Belo), nepravdivé (napr. Adam má 19 rokov), polopravdivé (napr. Adam má 19 rokov a Belo 19 – 8 = 11 rokov), nejasné (napr. Belo má o 8 rokov menej a Adam viac), alebo neúplne (napr. Belo má o 8 rokov menej). Ani jeden žiak nepovedal, že príbeh sa odohráva v troch časových hladinách; a to ani vtedy, keď sme sa na to opýtali. Úlohu vyriešil iba jeden žiak. Použil metódu pokus – omyl. Našiel riešenie, ale svoj postup vysvetliť nevedel.

5.2Čiastočne úspešné pokusy o riešenie úlohy 9

V inom experimente sme úlohu 6 dali 42 ôsmakom, ktorí už predtým riešili ľahšie úlohy o veku (náročné asi ako úloha 5) a vedeli, že si treba vyjasniť v akých časových hladinách sa úloha odohráva. Z nich úlohu 6 vyriešilo 7 žiakov a ďalších 20 riešení bolo čiastočne správnych.

Analýza žiackych riešení ukázala, že žiaci stroskotajú najčastejšie na neschopnosti oddeliť od seba jednotlivé podmienky úlohy. To ukázalo na potrebu preskúmať štruktúru podmienok úloh o veku. Inšpiráciou pre nás bol rozhovor dvoch chlapcov, ktorí text úlohy rozkladali na malé kúsky, z ktorých potom tvorili príslušné rovnice. Najzávažnejšie kroky tejto analýzy sa týkali spresňovania časových hladín, ku ktorým jednotlivé vety textu treba vzťahovať. Malé kúsky textu, na ktoré chlapci úlohu rozkladali, sme pomenovali *fragmenty*.

6.Fragmentáci textu, cesta k rovnicovému modelu úlohy o veku

Cieľom kapitoly je ukázať technológiu uchopenia slovnej úlohy o veku. Skúmanie uskutočníme na príklade úlohy 6. Potrebné zovšeobecnenie urobíme zavedením všeobecných pojmov. Z nich iba prvý vymedzíme, ostatné prenecháme čitateľovi. Pre túto prácu mu odporúčame, vytvoriť si súbor príkladov, ktoré mu pomôžu nájsť jednoduché a jasné vymedzenia.

6.1 Fragmentácia textu slovnej úlohy o veku

Vymedzenie. Časť textu úlohy, ktorá vypovedá o jednej väzbe, nazveme *fragmentom* textu. Rozklad úlohy na fragmenty nezveme *fragmentáciou.*

Sú úlohy, ktorých fragmentácia je jednoduchá. Napríklad úloha 5 má dva fragmenty, každý je tvorený osobitnou vetou textu. Väčšina úloh o veku má ale fragmentáciu náročnú. Úloha 6 má štyri fragmenty:

(1a) Až bude Belo tak starý ako je Adam dnes,
(2a) bude mať Adam 19 rokov.
(3a) Keď mal Adam toľko rokov, koľko má Belo dnes,
(4a) mal Belo o 8 rokov menej, ako má dnes Adam.

Ani jeden z fragmentov nie je celkom jasný, lebo nie je gramatickou vetou. Navyše nie každý výskyt osoby je spojený s časovou hladinou. Tieto dva nedostatky odstránime.

6.2 Osamostatnenie fragmentov

Fragmenty (1a) – (4a) upravíme v dvoch krokoch. Najprv ku každému výskytu mena pripíšeme príslušnú časovú hladinu. Pomocníkom nám bude čas (minulý, prítomný, budúci), ktorý sa k danému menu viaže. Tak získame *časovo spresnenú* verziu fragmentov:

(1b) Až bude Belo (potom) tak starý ako je Adam dnes,
(2b) bude mať Adam (potom) 19 rokov.
(3b) Keď mal Adam (vtedy) toľko rokov, koľko má Belo dnes,
(4b) mal Belo (vtedy) o 8 rokov menej, ako má dnes Adam.

Fragmenty *osamostatníme* ich úpravou do gramaticky správnych viet:

(1c) Vek Bela potom je rovnaký ako vek Adam dnes.
(2c) Vek Adama potom je 19 rokov.
(3c) Vek Adama vtedy je rovnaký ako vek Bela dnes.
(4c) Vek Bela vtedy je o 8 rokov menej, ako vek Adama dnes.

Uchopenie je hotové. Ostáva prepísať fragmenty do jazyka písmen. .

6.3 Prepis fragmentov do formalizovaného jazyka

Nástrojom prepisu je zavedenie znakov pre šesť základných parametrov:

	Vtedy = *V*	**Dnes = *D***	**Potom = *P***
Adam = *A*	$a = AV$	$b = AD$	$c = AP$
Belo = *B*	$d = BV$	$e = BD$	$f = BP$

Tab 2

Každý zo šiestich základných parametrov úlohy má teraz dve znakové mená: *sémantické* (*AV, ..., BP*) a *algebraické* (*a, ..., f*). Sémantické meno použijeme tam, kde chceme uchovať predstavu o príbehu úlohy. Tam, kde nezáleží na sémantike parametra, kde ide iba o jeho číselnú hodnotu, ktorou bude parameter nasýtený, použijeme algebraické meno.

6.4Rovnicový model slovnej úlohy o veku

Dostávame sa ku koncu našej cesty: sme pripravení uchopiť úlohu 6 do rovníc. Stačí vzťahy (1c) – (4c) prepísať pomocou znakov zavedených v tabuľke 2. To urobíme v tabuľke 3, v ktorej zároveň zrekapitulujeme

Fragment textu		**Znaková väzba**	
pôvodný	**osamostatnený**	**séman.**	**algeb.**
Až bude B tak starý ako je A dnes	Vek B-a potom je rovnaký ako vek A-a dnes	$BP = AD$	$f = b$
bude mať A 19 rokov.	Vek A-a potom je 19 rokov	$AP = 19$	$c = 19$
Keď mal Adam toľko rokov, ako má Belo dnes	Vek A-a vtedy je rovnaký ako vek B-a dnes	$AV = BD$	$a = e$
mal B o 8 rokov menej, ako má dnes A.	Vek B-a vtedy je o 8 rokov menej ako vek A-a dnes	$BV + 8 = AD$	$d + 8 = b$
Koľko rokov má dnes Adam? (A = Adam)		$AD = ?$	$b = ?$
Koľko rokov má dnes Belo? (B = Belo)		$BD = ?$	$e = ?$

Tab. 3.

celý uchopovací proces rozložený do piatich úrovní:

text → fragment → upravený f. → osamostatnený f. → znaková väzba

V treťom stĺpci tabuľky sú uvedené štyri rovnosti získané z textu úlohy 6:

$$BP = AD,\ AV = BV,\ AP = 19,\ BV + 8 = AD \qquad (1)$$

Tieto údaje tvoria neúplný rovnicový model úlohy 6. Keď k nim pridáme ešte dva ďalšie údaje, vyplývajúce zo zákonitostí Z1 a Z2,

$$AD - BD = AP - BP = AV - BV, \qquad (2)$$

získame sústavu rovníc (1) + (2), ktorá tvorí *úplný rovnicový sémantický model* úlohy 6. Výmenou sémantických znakov za algebraické získame *úplný rovnicový algebraický model* úlohy 9:

$$f = b,\quad c = 19,\quad a = e,\quad d + 8 = b,\quad c - b = f - e,\quad b - a = e - f$$
(3)

Fragmentácia, ilustrovaná na úlohe 6, je, na základe našich skúseností, silný nástroj pre pochopenie a riešenie úloh o veku. Jej prednosťou je to, že sa neuchyľuje k protetickým technikám ako sú signály, ale ukazuje cestu ako preniknúť do sémantiky úlohy.

7.Súbor hlavných parametrov úlohy o veku typu (2,3)

7.1Rozšírenie súboru parametrov úlohy o veku

Zavedením ďalších parametrov do úloh o veku získame nové možnosti ich riešenia. Ku šiestim parametrom *a, b, c, d, e, f* zavedeným v tabuľke 3, pridáme teraz štyri ďalšie, ku každému i jeho symbolický zápis:

p = počet rokov od "vtedy" po "dnes"; $p = D - V$

q = počet rokov od "dnes" po "potom"; $q = P - D$

r = počet rokov od " vtedy" po "potom", $r = P - V$

s = o koľko je A starší od B , $s = A - B$.

Desať parametrov *a, b, c, d, e, f, p , q, r, s* budeme nazývať *hlavné parametre* úlohy typu (2,3). Ďalšie parametre, vytvorené z nich aritmetickými operáciami, nazveme *odvodené.*

Symbolický zápis parametrov *p, q, r,* a *s*, vyžaduje komentár. Zápis $p = D - V$ predstavuje 2 rovnosti: $p = AD - AV$, aj $p = BD - BV$. Rovnako pre parametre *q, r*. Podobne zápis $s = A - B$ predstavuje 3 rovnosti: $s = AV - BV$, $s = AD - BD$, $s = AP - BP$. Každý z týchto štyroch parametrov ku svojmu zavedeniu využíva zákonitosti plynutia času a jeho existencia na tieto zákonitosti poukazuje. Parametre *p, q,* a *r* sú prepojené na zákonitosť Z1, parameter s na zákonitosť Z2

7.2Použitie nových parametrov

Ak úlohu o veku s osobami *A, B* a časmi *V, D* a *P* modelujeme pomocou 6 parametrov tabuľky 2, musíme k získaniu úplného rovnicového modelu pridávať vzťahy vyplývajúce zo zákonitostí plynutia času. Ak ale tvoríme rovnicový model pomocou nových parametrov, tak táto nutnosť odpadá. Napríklad: pomocou *parametrov a, b, c, s* vyjadríme $d = a - s$, $e = b - s$, $f = c - s$; príslušný rovnicový model úlohy 6 tvorený sústavou 4 rovníc o 4 neznámych: $a = b - s$, $b = c - s$, $c = 19$, $a - s + 8 = b$. je úplný.

K uchopeniu úlohy sme teda namiesto parametrov tabuľky 2 použili parametre tabuľky 4a. Mohli sme tiež použiť inú štvoricu hlavných parametrov, napríklad tú z tabuľky 4b, alebo 4c.

	V	***D***	***P***
A	a	b	c
B	$a - s$	$b - s$	$c - s$

Tab. 4a

V	***D***	***P***
$b - p$	b	$b + q$
$e - p$	e	$e + q$

Tab. 4b

V	***D***	***P***
a	$a + p$	$a + r$
d	$d + p$	$d + r$

Tab. 4c

Podobných tabuliek je možné vytvoriť viacej. Stačí vziať 4 vhodné hlavné parametre a vyjadriť pomocou nich ostatné parametre tabuľky.

7.3Identity medzi hlavnými parametrami úlohy o veku typu (2,3)

Identít, ktoré viažu desať hlavných parametrov úlohy typu (2,3), je desať:

$$p = b - a \quad p = e - d \qquad (4)$$

$$q = c - b \quad q = f - e \qquad (5)$$

$$r = c - a \quad r = f - d \qquad (6)$$

$$s = a - d \quad s = b - e \quad s = c - f \qquad (7)$$

$$r = p + q \qquad (8)$$

Každá z identít (4) – (8) zväzuje niektoré 3 hlavné parametre a každý z 10 hlavných parametrov vstupuje práve do 3 identít. Situáciu možno znázorniť graficky: každej identite bude odpovedať jedna priamka spojujúca tie 3 parametre, ktoré v identite vystupujú. Nie každé dva parametre vstupujú do niektorej identity. Napríklad v žiadnej identite sa nevyskytnú parametre b a f. Povieme, že parametre x, y, ktoré nevystupujú v žiadnej identite sú *cudzie*.

Vzťah „cudzosti“ možno vizualizovať grafom G: jeho vrcholmi sú parametre *a, ...s* a hranou sú spojené práve tie dva vrcholy, ktoré sú cudzie. Tento graf nie je planárny, a jedna jeho realizácia vyzerá takto: vrcholmi grafu G sú vrcholy pravidelných päťuholníkov **P** a **Q**, ktoré sú rovnoľahlé podľa ich spoločného stredu; pritom vrcholy menšieho päťuholníka **P** označíme v poradí *a, r, q, e, s*; ich obrazy v rovnoľahlosti označíme *f, b, d, c, p*; hranami tohto grafu sú 1) strany *fb, bd, dc, cp, pf* päťuholníka **Q**, 2) uhlopriečky *aq, qs, sr,re, ea* päťuholníka **P**; 3) úsečky *fa, br, dq, ce, ps*. Je to známy Petersonov graf.

8.Záver

V záverečnej kapitole načrtneme tri ďalšie možné smery bádania.

Ak v úlohe 6, ktorú teraz zapíšeme Ú6(19,8), namiesto čísla 19 dáme písmeno *u*, a namiesto čísla 8 písmeno *v*, dostaneme 2-parametrickú úlohu, ktorú označíme Ú9(*u,v*). Zaujímavý problém, ktorý to vyvstane je vyjasnenie, ako určiť oblasť prípustných parametrov, t.j. množinu tých párov (*u,v*) pre ktoré daná úloha je riešiteľná a má zmysel.

Ak úlohu skúmame ako člena širšej komunity úloh, tak metaforicky hovoríme o sociologickom prístupe k úlohe. Zaujímavé je skúmať triedu všetkých úloh o veku typu (*m,n*) pre malé *m,n*, napríklad pre m,n < 4 a pýtať sa na ich vzájomnú príbuznosť týchto úloh. Napríklad: dá sa každá úloha typu (3,2) preformulovať na úlohu typu (2,3)?

Analogicky k úlohám o veku je možné skúmať ďalšie triedy slovných úloh o ktorých sme sa zmienili už vyššie. Napríklad triedu úloh o stretávaní. Je možné začať skúmaním podtriedy, v ktorej sú popísané dva po častiach rovnomerné priamočiare pohyby, ktorých geometrickým nosičom je jedna priamka (úsečka). Každý pohybe je charakterizovaný jednoparametrickým súborom dvojíc (čas, miesto) a rýchlosťou. Vzťah oboch pohybov je charakterizovaný dvojicou (čas, vzdialenosť). Táto pestrosť dovoľuje veľkú variabilitu úloh. Cieľom štúdie by nebol teoretický rozklad tejto society úloh, ale identifikácia prekážok, ktoré znemožňujú žiakom úlohu uchopiť a hľadanie reedukačných postupov, ktorým možno tieto prekážky zmenšovať, či dokonca odstrániť.

LITERATÚRA

Bero, P., Pytlová, Z.: (1997) Matematika pre 3. ročník ZŠ, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava.

Gray, E. M., Tall, D. (1994): Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, s. 116 – 141

Hejný, M. (1995) Zmocňování se slovní úlohy. Pedagogika XLV, 1995, str. 386-399.

Hejný, M (1999): Procept, In: Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovnia matematiky (Grant VEGA 1/5197/98), KZaDM, Bratislava

Hejný, M. Michalcová A. (2001): Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Metodické centrum Tomášikova 4, Bratislava

Kaslová, M.a kol (2002): Sbírka úloh z matematiky pro 4. a 5. ročník základní školy. SPN, Praha

Kratochvílová, J. (2003): Strategie komplementu a mechanismus jejího vynoření, Disputationes Scientificae 3(2003), str. 45-50
Repáš, V. a kol. (1997): Matematika pre 5. ročník ZŠ, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava.
Stehlíková, N. (1995) How children solved a mathematical word problem: an analysis. Acta Didactica Universitatis Comenianae 4, s. 33 - 54

Adresa autora: Milan Hejný, Karlova Univerzita Praha, Pedagogická fakulta, M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1.
milan.hejny@pedf.cuni.cz