Trudności w stosowaniu pojęć analitycznych przez absolwentów szkół średnich podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego

Joanna Czaplińska

ABSTRACT: The main aim of this article is to present some problems with applying the knowlege and mathematical abilities in solving calculus problems by secondary school graduates who start studying mathematics at the Pedagogical University in Kraków.

Uwagi wstępne

Każde zadanie matematyczne jest nośnikiem różnych elementów dydaktycznej instrukcji takich jak: treść matematyczna - twierdzenia, definicje, algorytmy itp.; aspekt metodologiczny - formy rozumowania, dedukcja, redukcja, poprawna klasyfikacja przypadków, logiczna struktura twierdzenia, którego się dowodzi itp.; aspekt heurystyczny - analogia, indukcyjne poszukiwanie rozwiązania, próba rozwiązania w przypadku szczególnym i poszukiwanie sposobu uogólnienia itp. (por. [5]).

Analiza pisemnych wytworów pracy ucznia może więc stanowić cenne źródło hipotez dotyczących procesu rozwiązywania zadań, a także pozwala m. in. na formułowanie pewnych spostrzeżeń dotyczących wiedzy i umiejętności matematycznych osoby je rozwiązującej. Umożliwia ona także wnioskowanie o trudnościach jakie posiada ta osoba. Analiza rozwiązań zadań może stać się zatem podstawą diagnozy matematycznych kompetencji uczniów.

Jednym z głównych zadań nauczania matematyki jest rozwijanie aktywności matematycznych osób uczących się i co się z tym ściśle wiąże kształcenie umiejętności stosowania poznanych narzędzi matematycznych i schematów do rozwiązywania zadań. Jednak oczywistym jest, że procesu rozwiązywania zadań nie da się "ująć" w ścisłe, wąskie ramy. Uniemożliwia to chociażby wielość procesów myślowych prowadzących do rozwiązania określonego problemu. Znajomość typowych schematów postępowania oraz posiadanie podstawowych sprawności jest warunkiem niezbędnym, umożliwiającym rozwiązywanie zadań. Poznane schematy muszą jednak być stosowane racjonalnie i nie powinny warunkować myślenia. Nie mogą też być stosowane "automatycznie", bez jakiejkolwiek kontroli poprawności przeprowadzonego rozumowania.

W niniejszej pracy przedstawiam trudności absolwentów szkół średnich, jakie ujawniły się, podczas rozwiązywania przez nich, zadania egzaminacyjnego[1], z zakresu

[1] Zadanie stanowiące narzędzie badawcze wybrałam spośród zadań obowiązujących na egzaminie wstępnym, na kierunek matematyka, w Akademii Pedagogicznej, w Krakowie, w lipcu 2002 roku.

analizy matematycznej. Zadanie rozwiązywało 102 absolwentów szkół średnich, którzy zostali przyjęci na pierwszy rok studiów, na kierunek matematyka w Akademii Pedagogicznej, w Krakowie[2]. Wysokie oceny tych osób na świadectwach dojrzałości świadczą, że według nauczycieli, opanowały one bardzo dobrze wiadomości i umiejętności matematyczne określone przez program kształcenia w szkole średniej. Badania zorganizowałam na początku roku akademickiego, dlatego też podjęte, przez te osoby, studia matematyczne nie miały wpływu na ich wyniki.
Narzędziem badawczym było następujące zadanie.

Dana jest funkcja $f(x) = (k - 1)\, x^3 - 4x^2 + (k + 2)\, x$. *Niech* p: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *oznacza funkcję, która parametrowi k przyporządkowuje liczbę pierwiastków równania* $f(x) = 0$. *Wskazać wszystkie wartości parametru k, dla których* $p(k)$ *jest liczbą parzystą.*

Posługując się podziałem zadań matematycznych, zaproponowanym przez Z. Krygowską omawiane zadanie można zakwalifikować do *zadań-ćwiczeń*, niemniej posiada ono pewne cechy charakterystyczne dla *zadań-zwykłych zastosowań teorii* (por. [5]). Uczeń rozwiązujący zadanie może postępować według poznanych wcześniej schematów. Jednak istotną rzeczą wpływającą na rozwiązanie zadania jest uwzględnienie nie tylko liczby pierwiastków równania $f(x) = 0$, ale i postaci rozwiązań. W przypadku gdy wartość parametru wynosi -2, równanie to posiada pierwiastek podwójny. Analiza rozwiązań zadania pozwala zbadać podstawowe wiadomości i umiejętności matematyczne z zakresu rozwiązywania równań algebraicznych z parametrem, a ponadto umiejętność poprawnej analizy sytuacji przedstawionej w zadaniu, a w szczególności umiejętność wyróżnienia i rozważenia wszystkich stosownych przypadków zależnych od wartości parametru k.

Omówienie rozwiązań zadania

Spośród absolwentów szkół średnich biorących udział w badaniu, 13 osób nie podjęło próby rozwiązania zadania. Pozostałe rozwiązania podzieliłam na grupy ze względu na wyróżnione przez uczniów przypadki, zależne od wartości parametru k.

W tabeli 1 podałam sformułowane przez badanych przypadki - wyróżnione wartości, jakie może przyjmować parametr k (kolumna 2), w kolumnie 3 odnotowałam liczbę osób rozważających odpowiednie przypadki.

1. lp.	2. Wyróżnione przypadki	3. liczba osób rozważających poszczególne przypadki
1	$k = 1, k = -2, k \neq 1$	1
2	$k = 1, k \neq 1$	14
3	$k = 1, k = -2, k \neq 1$ i $k \neq -2$	1
4	$k = 1$	4
5	$k \neq 1$	3
6	brak rozważania przypadków	66

Tabela 1. Przypadki wyróżnione przez uczniów.

Jak ukazują dane zawarte w tabeli 1, tylko jeden z badanych absolwentów szkoły średniej wyróżnił poprawnie wszystkie istotne przypadki, zależne od wartości parametru k.

Do pierwszej grupy zaliczyłam jedno rozwiązanie, osoby która wyróżniła trzy przypadki: $k = 1$, $k = -2$, $k \neq 1$. Uczennica ta poprawnie wyznaczyła rozwiązania równania $f(x) = 0$, w przypadku gdy $k = 1$. Następnie dla $k \neq 1$ zapisała równanie $f(x) = 0$ w postaci

[2] Ze względu na zasady rekrutacji (por. [8]), 22 osoby spośród biorących udział w badaniu, rozwiązywały m. in. to samo zadanie cztery miesiące wcześniej, jako kandydaci na studia. Pozostałe osoby, przyjęte na studia, na podstawie ocen ze świadectwa maturalnego, rozwiązywały to zadanie po raz pierwszy.

iloczynu $x\cdot((k-1)x^2-4x+(k+2))=0$. Zauważyła, że równanie to jest równoważne alternatywie równań $x=0 \vee (k-1)x^2-4x+(k+2)=0$ i w dalszej części rozwiązania wyznaczyła wartości parametru k, dla których równanie $(k-1)x^2-4x+(k+2)=0$ posiada dokładnie jeden pierwiastek. Na koniec wyznaczyła pierwiastki wyjściowego równania, dla $k=-2$. Podając odpowiedź wskazała **tylko** $k=1$ i $k=-2$ jako wartości parametru k, dla których $p(k)$ jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie zaproponowane przez badaną nie jest w pełni poprawne. Rozważała ona kolejno przypadki $k=1$ oraz $k\neq 1$, co wyczerpuje wszystkie możliwe wartości przyjmowane przez rzeczywisty parametr k. Następnie rozważała przypadek $k=-2$, choć z logicznego punktu widzenia liczba rozwiązań równania, dla tej wartości parametru została już wyznaczona ($k\neq 1$). Autorka, dla $k=-2$ poprawnie wyznaczyła liczbę rozwiązań równania. Nie zauważyła jednak sprzeczności otrzymanego wyniku z rozwiązaniem otrzymanym w przypadku $k\neq 1$.

Do drugiej grupy zaliczyłam 14 prac. W każdym z tych rozwiązań rozważano dwa następujące przypadki: $k=1$, $k\neq 1$. Autorzy prac zapisywali równanie $f(x)=0$ w postaci iloczynu $x\cdot((k-1)x^2-4x+(k+2))=0$. W dalszej części rozwiązania uczniowie wyznaczali rozwiązanie równania $(k-1)x^2-4x+(k+2)=0$ w przypadku, gdy $k=1$. W przypadku, gdy $k\neq 1$, wyznaczali oni liczbę rozwiązań tego równania, w zależności od jego wyróżnika Δ. Dziewięć osób formułując odpowiedź jako szukane wartości parametru wskazywało te, dla których równanie kwadratowe posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostałe osoby nie uwzględniły faktu, że pierwiastkiem wyjściowego równania, niezależnie od wartości parametru k, jest 0, tj. jako szukane wartości parametru k wskazali te, dla których równanie kwadratowe posiada dokładnie dwa rozwiązania.

Do kolejnej, trzeciej grupy zaliczyłam jedno rozwiązanie, osoby która wyróżniła przypadki: $k=1$, $k=-2$, $k\neq 1$ i $k\neq -2$. Uczennica ta, dla $k=1$ wyznaczyła poprawnie pierwiastki wyjściowego równania. W dalszej części rozwiązania zapisała: *gdy $k-1\neq 0$ są trzy pierwiastki*. Zapis zdaje się sugerować, że autorka w tym momencie zauważyła konieczność rozważenia przypadku $k=-2$, dlatego też we wniosku dopisała: $k\neq 1$, $k\neq -2$. W dalszej części rozwiązania uczennica wyznaczała liczbę rozwiązań równania w przypadku, gdy $k=-2$. Na koniec podała odpowiedź: *dla $k=1$ i $k=-2$ równanie ma dwa rozwiązania, dla $k\neq 1$ i $k\neq -2$ równanie ma trzy rozwiązania.*

Kolejną grupę prac stanowią cztery rozwiązania osób, rozważających tylko przypadek $k=1$. Uczniowie wyznaczali rozwiązania wyjściowego równania, dla tej wartości parametru k. Na koniec formułowali następującą odpowiedź: *dla $k=1$ dwa rozwiązania.*

Można przypuszczać, że autorzy rozwiązań nie dokończyli pracy nad tym zadaniem, bądź uważali, że tylko dla takiej wartości parametru k wyjściowe równanie posiada dwa pierwiastki.

Do piątej grupy zaliczyłam trzy rozwiązania, których autorzy zapisali równanie $f(x)=0$ w postaci iloczynu $x\cdot((k-1)x^2-4x+(k+2))=0$. Uczniowie ci przy założeniu $k\neq 1$, obliczali wyróżnik Δ równania $(k-1)x^2-4x+(k+2)=0$ i w zależności od niego, wyznaczali liczbę jego rozwiązań. Pomimo uczynionego założenia ($k\neq 1$) nie rozważyli oni przypadku, gdy $k=1$.

W ostatniej, szóstej grupie rozwiązań znalazły się prace, w których brak jest rozważania jakichkolwiek przypadków, związanych z wartościami jakie może przyjmować rzeczywisty parametr k. Można je podzielić na cztery podgrupy.

- Pierwszą podgrupę stanowią tu 42 prace, w których przedstawione rozwiązania są podobne do tych, które zaliczyłam do grupy piątej. Różnica dotyczy braku założenia $k\neq 1$. Na uwagę zasługuje fakt, iż prawie połowa, tj. 18 osób, formułując odpowiedź nie uwzględniło, że $x = 0$ jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Pięć osób jako rozwiązanie wskazało tylko $k = 2$, wykluczając tym samym przypadek $k = -3$. W uzasadnieniu swojej odpowiedzi uczniowie pisali: *tylko 2 jest liczbą parzystą* albo *-3 nie jest liczbą parzystą*.

Można przypuszczać, że osoby które popełniły te błędy nie zrozumiały treści zadania, co mogło wynikać ze słabej umiejętności czytania i analizy tekstu matematycznego (jakim jest treść zadania).

• W drugiej podgrupie znalazło się 17 niedokończonych rozwiązań. Studenci zapisali tylko równanie $f(x) = 0$, w postaci iloczynu $x \cdot ((k - 1)x^2 - 4x + (k + 2)) = 0$, a następnie obliczali wyróżnik Δ równania $(k - 1)x^2 - 4x + (k + 2) = 0$ i na tym zakończyli pracę nad zadaniem.

• Pięć osób próbując rozwiązać równanie $f(x) = 0$ „podzieliło je stronami przez x". Uczniowie, dla otrzymanego równania, obliczali wyróżnik Δ i przyrównując go do 0 wyznaczali wartości parametru k, dla których równanie $(k - 1)x^2 - 4x + (k + 2) = 0$ posiada dwa rozwiązania.

• Do ostatniej podgrupy należą dwa następujące rozwiązania.

Autorka pierwszej pracy zapisała wyjściowe równanie w postaci czynnikowej. W dalszej części rozwiązania podstawiła ona za k, kolejno wartości: 3, 2, 1, 0 i dla każdej z nich zapisywała odpowiednie równania. Na tym zakończyła pracę nad zadaniem, pisząc: *nie wiem jak dalej*.

Druga badana podstawiała za k liczbę 1 i dla tej wartości parametru rozwiązywała równanie $f(x) = 0$. Następnie stwierdziła, że dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ liczba pierwiastków równania $f(x) = 0$ jest mniejsza bądź równa 3. W dalszym etapie pracy nad zadaniem uczennica podstawiła, za k kolejno 2, 3, 4, 0, -1, -2, -3, -4. Dla każdej z tych wartości parametru wyznaczała liczbę rozwiązań odpowiedniego równania. W dalszej części studentka zapisała:

można zauważyć, że
dla $k \in \{..., -4, -3\}$, $p(k) = 2$; *dla* $k \in \{-2, -1, 0\}$, $p(k) = 3$;
dla $k \in \{1, 2\}$, $p(k) = 2$; *dla* $k \in \{3, 4, ...\}$, $p(k) = 1$.

Po tych spostrzeżeniach autorka sformułowała odpowiedź: *p(k) jest liczbą parzystą, dla* $k \in \{...,-4, -3, 1, 2\}$.

Autorka rozwiązania dokonała więc specyfikacji wyjściowego równania, podstawiając za parametr k, występujący w treści zadania konkretne wartości oraz badała liczbę rozwiązań równania, w poszczególnych przypadkach. Dokonała ona uogólnienia na podstawie zaledwie kilku przypadków szczególnych, a sformułowany ogólny wniosek nie jest w pełni poprawny. Można przypuszczać, że uczennica nie traktowała sformułowanego przez siebie wniosku jak hipotezy, którą należy udowodnić lecz jako fakt, który już został sprawdzony. Na problemy związane z tymi zagadnieniami zwraca uwagę M. Ciosek (por. [1]).

W rozwiązaniach studentek można dostrzec elementy strategii, którą można nazwać za G. Polyą *odgaduj i sprawdzaj* (por. [6]). Osoby te „obserwowały" - próbowały wyznaczyć liczbę rozwiązań równania, dla ustalonych wartości parametru k. Można przypuszczać, iż miały one nadzieję, że ta obserwacja doprowadzi je do odkrycia ogólnego rozwiązania zadania, bądź sformułowania hipotezy. Podejmowanie prób rozważania szczególnych przypadków jest jedną z podawanych przez G. Polyę wskazówek heurystycznych (por. [6]). Jednak istotnym, dalszym etapem pracy nad zadaniem jest weryfikacja sformułowanej hipotezy, a w ostatnim rozwiązaniu tego kluczowego elementu zabrakło.

Uwagi końcowe

Większość badanych rozwiązujących zadanie postępowało zgodnie z poznanym wcześniej schematem rozwiązywania tego typu zadań. Stosowali więc oni strategię polegającą na zakwalifikowaniu zadania do pewnego typu i stosowali schemat rozwiązania przyporządkowany do tego typu (por. [2]). Strategia ta polegała na zapisaniu wyjściowego równania w postaci iloczynu $x \cdot ((k - 1)x^2 - 4x + (k + 2)) = 0$, a następnie wyznaczaniu liczby rozwiązań równania kwadratowego $(k - 1)x^2 - 4x + (k + 2) = 0$. Absolwenci szkół średnich wyraźne dążyli do wykorzystania poznanego w szkole średniej algorytmu, dotyczącego wyznaczania liczby rozwiązań równania kwadratowego z parametrem, w zależności od znaku wyróżnika Δ. Rozwiązujący stosowali go często bez zastanowienia. Wiele osób, uczestniczących w badaniu, było tak zaabsorbowanych wykonywanym tych czynności, że często zapominali o jednym (oczywistym) rozwiązaniu równania $f(x) = 0$, jakim jest $x = 0$. Rozwiązujący często nie wyróżniali takich wartości parametru k, dla których równanie $(k - 1)x^2 - 4x + (k + 2) = 0$ staje się równaniem liniowym oraz sytuacji, gdy jeden z pierwiastków równania $f(x) = 0$ jest podwójny.

Myślę, że często przyczyną błędów mogło być automatyczne wykonywanie czynności, zgodnie ze znanym schematem. Autorom wielu prac zabrakło autokontroli podczas realizacji poszczególnych etapów rozwiązania zadania, kontroli wyniku, oraz sprawdzenia poprawności wybranej drogi rozwiązania zadania, czyli tzw. *rzutu oka wstecz* (por. [7]). U badanych absolwentów zaobserwowałam ponadto trudności w zakresie: poprawnej klasyfikacji przypadków, interpretowania otrzymanych wyników oraz stosowania reguł wnioskowania. Analiza materiału badawczego pozwala także na zaobserwowanie istotnych braków w wiadomościach, u badanych absolwentów szkół średnich. Osoby te jako kierunek studiów, wybrały matematykę, dlatego słabe wyniki osiągnięte przez nie są szczególnie niepokojące. Należy tu wyraźnie podkreślić, iż żadna z nich nie rozwiązała zadania w pełni poprawnie. Jednocześnie ponad 80% badanych posiada z matematyki, na świadectwach dojrzałości oceny bardzo dobre lub celujące. Występuje tu wyraźnie widoczny problem dotyczący braku korelacji między wysokimi ocenami z matematyki na świadectwach dojrzałości, a rzeczywistym poziomem wiedzy i umiejętności matematycznych, poszczególnych uczniów. W kontekście powyższego stwierdzenia pojawia się też konieczność sformułowania możliwie trafnych kryteriów przyjęć na studia matematyczne.

Na koniec chciałabym odnieść się do informacji, którą podałam na stronie drugiej (przypis 2), otóż analizując 22 pary rozwiązań tych osób, które brały udział zarówno w egzaminie wstępnym jak i w badaniu, stwierdziłam generalnie pogorszenie się wyników uzyskanych w czasie badania, w porównaniu z wynikami osiągniętymi na egzaminie wstępnym[3]. Ponad połowa, tj. 13 osób w rozwiązaniach podanych w czasie badania, kieruje się tym samym tokiem rozumowania, popełnia te same błędy, wyróżnia te same przypadki zależne od wartości parametru k. Można wręcz powiedzieć, że osoby te powtórzyły w czasie badania, przedstawione wcześniej na egzaminie wstępnym rozwiązania. Natomiast w przypadku pozostałych 9 par prac stwierdziłam pogorszenie sposobu rozwiązania podczas badania w porównaniu z egzaminem. Pogorszenie się wyników może świadczyć o braku trwałej gotowości uczniów do wykorzystania poznanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania zadań. Inaczej mówiąc, to pogorszenie można traktować jako brak koniecznej wiedzy uczniów do rozwiązania omawianego zadania, mimo że na egzaminie w jakimś stopniu to zadanie „rozwiązali''. Biorąc pod uwagę wyniki egzaminu moglibyśmy stwierdzić, iż uczniowie posiadają określoną wiedzę i umiejętności matematyczne, uwzględniając zaś wyniki badania stwierdzilibyśmy, że ich nie mają.

Pojawiają się tu zatem istotne problemy i dydaktyczne:

- Co to znaczy, że dany fragment wiedzy matematycznej został opanowany, utrwalony i może być wykorzystany w różnych okolicznościach?
- Kiedy można uznać i jak rozstrzygać, czy uczeń posiada określoną wiedzę i umiejętności matematyczne?

Literatura:

[3] Analizę przeprowadziłam porównując imiennie obie wersje rozwiązań tych samych osób.

[1] Ciosek M., *O roli przykładów w badaniu matematycznym*, Dydaktyka Matematyki 17, 1995, s. 5-85.
[2] Ciosek M., Krygowska Z., Turnau S., *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki*, Rocznik Naukowo - Dydaktyczny WSP w Krakowie, zeszyt 54, 1974, s. 4-40.
[3] Dybiec Z., *Błędy w procesie uczenia matematyki*, Nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1996.
[4] Dybiec Z., *Pewne postawy myślowe uczniów i ich związek ze sprzecznościami w procesie nauczania*, Dydaktyka Matematyki 12, 1990, s. 119-142.
[5] Krygowska Z., *Zarys Dydaktyki Matematyki*, cz.1, cz.3, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1997.
[6] Polya G., *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975.
[7] Polya G., *Jak to rozwiązać?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
[8] Informator dla kandydatów na studia dzienne i zaoczne w roku akademickim 2002/2003, opracowanie Dział Dydaktyki Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Adres autora: J. Czaplińska, Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna w Krakowie, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland, E-mail: jczapli@ap.krakow.pl